

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

**Sobre una clase de movimiento acelerado en el
espaciotiempo de Kerr**

Proyecto de Investigación

Nicolas Zapata González

Matemáticas

Trabajo de titulación presentado como requisito
para la obtención del título de Licenciado en Matemáticas

Quito, 20 de diciembre de 2018

Universidad San Francisco de Quito USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

HOJA DE CALIFICACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Sobre una clase de movimiento acelerado en el espaciotiempo de
Kerr

Nicolas Zapata González

Calificación:

Nombre del Profesor, Título Académico

Oihane F. Blanco, PhD.

Firma del Profesor

Quito, 20 de diciembre de 2018

DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante: _____

Nombres y apellidos: Nicolas Zapata González

Código: 00143737

Cédula de identidad: 1719639815

Lugar y fecha: Quito, 20 de diciembre de 2018

AGRADECIMIENTOS

Quiero primero agradecer a la Dra. Oihane Blanco, directora de este trabajo de tesis. Muchas gracias por guiarme en todo lo relacionado a este trabajo y siempre estar dispuesta a enseñarme nuevas cosas. Tuve la oportunidad de aprender mucho en este año acerca de Relatividad General y esa era la motivación que me impulsaba a escoger una tesis y no un examen complejo. Espero en un futuro trabajar juntos pero esta vez ya como colegas.

Quiero agradecer a mi madre, mi padre, mi tía Cris, mi tío Freddy, mi tío Pepe y mi abuelita Isabel. Gracias por su incondicional apoyo y por motivarme a seguir adelante con la esta segunda carrera. A pesar de que parecía que no iba a poder acabarla, ustedes me dieron ánimo para arriesgarme y continuar en la lucha. Estoy muy feliz de haber seguido su consejo y no me arrepiento de haberme quedado a terminar esta carrera.

Le quiero dar un agradecimiento especial a John Skukalek. Gracias por enseñarme la belleza que existe en las matemáticas desde mi primer semestre en la USFQ e impulsarme a seguir esta carrera.

Quisiera también agradecer a Carlos Marín por revisar este trabajo y por sus valiosos comentarios que me ayudaron a terminar de pulirlo.

Finalmente quiero darle nuevamente las gracias a mi novia Miry. Gracias por siempre estar a mi lado apoyándome mucho, a pesar de mi mal genio. Nunca me olvidaré todos los momentos que hemos compartido y espero que siempre podamos seguir juntos, a pesar de que mis sueños nos separen por un tiempo.

DEDICATORIA

A mi familia y a mi novia

Resumen

En el presente trabajo se estudian las diferentes propiedades que tiene el espaciotiempo de Kerr, el cuál representa a un universo que contiene un agujero negro en rotación, así como una clase de movimiento acelerado que puede existir en su interior. Se utilizan tres tipos de coordenadas (Boyer-Lindquist (BL), Kerr-Star y Kerr-Schild) para estudiar de manera más clara las características principales del espaciotiempo de Kerr y sus significados físicos. Según el valor de la masa y momento angular del agujero negro, se encontraron 3 diferentes casos para el espaciotiempo de Kerr. En todos ellos existe una singularidad real del espaciotiempo, una región denominada ergoesfera donde existe un cambio de causalidad en una coordenada temporal y la existencia de viajes en el tiempo en el interior del agujero negro. Se encontró también que pueden existir desde ningún hasta dos horizontes de eventos en el espaciotiempo, dependiendo del valor de la masa y momento angular del agujero negro. Por otra parte, se estudia la posible equivalencia entre movimiento uniformemente acelerado (UA) en un espaciotiempo curvo y curvas temporales cuya aceleración tiene un módulo constante. Para ello se buscaron curvas temporales que representen a órbitas circulares alrededor del agujero negro y que cumplan con las simetrías de la métrica de Kerr en coordenadas BL dadas por sus campos vectoriales de Killing. A estas curvas se las denominó curvas con aceleración simétrica (AS). Se encontró que si bien movimiento UA implica que su aceleración tendrá un módulo constante, el caso inverso no se cumple en general para espaciotiempos curvos. Sin embargo, quedó abierta la pregunta de si existen condiciones adicionales que deben cumplir las curvas AS para tener un movimiento UA.

Palabras clave: Espaciotiempo de Kerr, horizontes de eventos, ergoesfera, movimiento uniformemente acelerado, campos vectoriales de Killing.

Abstract

In this work we study the different properties of Kerr spacetime, which represent a universe that includes a rotational black hole, as well as a certain type of accelerated motion. Three different coordinates systems were use (Boyer-Lindquist (BL), Kerr-Star and Kerr-Schild) to study the main properties of Kerr spacetime and their physical meaning. We observe 3 different types of spacetimes, depending on the mass and angular momentum of the black hole. In all of them there is a real singularity, a region called ergoesfere where a variation on the causality of a timelike coordinate is produced and the existence of time travels inside the black hole. It was also found that there exist up to 2 event horizons, depending on the values of the mass and angular momentum of the black hole. On the other hand, we study a possible equivalence between uniformly accelerated (UA) motion on a curved spacetime and timelike curves with constant acceleration modulus. We focused our research on timelike curves which represent circular orbits around the black hole and satisfies the symmetries of the Kerr metric in BL coordinates given by its Killing vector fields. We called this type curves, symmetricly accelerated (SA) curves. We found that despite UA motion implies a constant acceleration modulus, the inverse is not true in general for curved spacetimes. However, the question whether extra conditions could be included to SA curves to have UA motion was left open.

Key words: Kerr spacetime, event horizon, ergoesfere, uniformly accelerated motion, Killing vector fields.

Índice

1. Introducción y Preliminares	10
1.1. Espacios Vectoriales Lorentzianos	11
1.1.1. Causalidad y Orientación Temporal	13
1.1.2. Subespacios Vectoriales	14
1.2. Geometría Lorentziana	15
1.2.1. Tensor métrico	17
1.2.2. Conexión de Levi-Civita y Derivada Covariante	20
1.2.3. Geodésicas y Transporte Paralelo	21
1.2.4. Tensor de Curvatura de Riemann y sus Contracciones	22
1.2.5. Subvariedades Diferenciables e Hipersuperficies	24
1.3. Vectores de Killing	24
1.4. Relatividad General	26
1.4.1. Agujeros Negros y Singularidades	29
1.5. Resumen de Contenidos	31
2. El espaciotiempo de Kerr	32
2.1. Diferentes coordenadas en el espaciotiempo de Kerr	33
2.1.1. Coordenadas Boyer-Lindquist	33
2.1.2. Coordenadas Kerr-Star	37
2.1.3. Coordenadas Kerr-Schild	39
2.2. La singularidad real del espaciotiempo	40
2.3. Causalidad y Bloques Boyer-Lindquist	43
2.3.1. Espaciotiempo Slow Kerr ($m > a$)	44
2.3.2. Espaciotiempo Fast Kerr ($m < a$) y Kerr Extremal ($m = a$)	46
2.4. Horizontes de eventos	46
2.4.1. Hipótesis de Censura Cósmica y Singularidades Desnudas en Kerr	52
2.5. La Ergoesfera	52
2.5.1. Rotación del agujero negro y procesos de Penrose	56
2.6. Viajes en el tiempo	58
3. Aceleración Uniforme en Relatividad General	61
3.1. Conexión de Fermi-Walker	61
3.2. Movimiento Uniformemente Acelerado	63
3.2.1. Aceleración Uniforme en Coordenadas	65
3.3. Aceleración Uniforme y Espaciotiempos Asintóticamente Planos	66

4. Sobre una clase de aceleración en el espaciotiempo de Kerr	69
4.1. Curvas y aceleración simétricas	69
4.2. Análisis de las coordenadas t y ϕ	73
4.3. Análisis de la coordenada radial r	75
4.3.1. La función radial \tilde{R} en las fronteras de Kerr exterior	78
4.3.2. Existencia de raíces de la función radial	79
4.3.3. Caso crítico y órbitas circulares	86
4.4. Causalidad de las curvas AS	87
4.4.1. Causalidad cerca las fronteras de Kerr exterior	91
4.4.2. Raíces de la función M	92
4.4.3. Forma de los diagramas de causalidad	96
4.5. Existencia de curvas con aceleración simétrica	99
4.5.1. Órbitas Circulares	100
4.5.2. Otro tipo de curvas Acotadas	102
4.5.3. Equivalencia entre curvas AS y movimiento UA	105
5. Conclusiones	107
6. Apéndice A	110
7. Referencias	111

1. Introducción y Preliminares

La Teoría de la Relatividad General fue planteada por primer vez por Albert Einstein en 1915 como una generalización a su Teoría Especial de la Relatividad para campos gravitacionales y sistemas de referencia acelerados [1]. En su afán por encontrar la verdadera naturaleza de la fuerza gravitacional y conciliarla con los postulados de la Teoría Especial de la Relatividad, Einstein propuso que ésta era una consecuencia de la curvatura del espaciotiempo debido a la densidad de energía que se encuentra en su interior. Para formalizar este postulado Einstein derivó las famosas Ecuaciones de Campo de la Relatividad General basándose en la teoría de variedades diferenciales desarrollada por Bernhard Riemann en el siglo XVIII y los estudios realizados por el matemático francés Henri Poincaré a finales del mismo siglo [2].

Desde sus inicios, la Teoría de la Relatividad General ha permitido interpretar y predecir una gran variedad de fenómenos interesantes que suceden en nuestro universo. Probablemente, uno de los fenómenos más intrigantes que se pueden estudiar en base a esta teoría son los relacionados a la existencia de agujeros negros. Estos objetos representan regiones del espaciotiempo, dónde la fuerza de gravedad es tan intensa que ningún cuerpo ni señal pueden escapar de su interior si se desprecian efectos cuánticos [1, 3].

Existen varias soluciones de las Ecuaciones de Campo que permiten la existencia de agujeros negros. En todas ellas, se caracterizan a estos objetos en base a su masa, rotación y carga eléctrica. La solución más estudiada ha sido la propuesta por Karl Schwarzschild en 1916. En ella se predice la existencia de un agujero negro sin rotación ni carga eléctrica. Sin embargo, debido a la gran complejidad de sus ecuaciones y por la falta de motivación empírica, no se ha estudiado hasta el momento al resto de soluciones con la profundidad con que se ha realizado para el caso de Schwarzschild [4]. Es de particular interés para este trabajo estudiar las principales propiedades que tendría un agujero negro en rotación y sin carga eléctrica. A un espaciotiempo que alberga este tipo de objetos se lo denomina espaciotiempo de Kerr.

Por otro lado, si bien existen estudios generales acerca de movimiento uniformemente acelerado en Relatividad General [5, 6], no se ha realizado aún un estudio más detallado de esta clase de movimiento en el espaciotiempo de Kerr. La complejidad de las ecuaciones de esta teoría es mayor al asumir que un cuerpo tiene un movimiento uniformemente acelerado con una aceleración no

nula. Hasta el momento sólo se han podido estudiar las generalidades de esta clase de movimiento en espaciotiempos sencillos como lo son el caso de Minkowski y De-Sitter [5, 6, 7]. Sin embargo, las propiedades particulares que tendrían cuerpos uniformemente acelerados en otros espaciotiempos curvos es un tema todavía abierto a la investigación [8].

En este trabajo, se pretende estudiar las propiedades más importantes que tiene el espacio-tiempo de Kerr, así como las características de una clase de movimiento acelerado en su interior. Esta clase de movimiento consiste en órbitas circulares y temporales, cuyo módulo de su aceleración es constante ($g(\vec{a}, \vec{a}) = \text{constante}$). Lo que se intenta determinar es si las condiciones de que una curva sea temporal y cumpla con $g(\vec{a}, \vec{a}) = \text{constante}$, son suficientes para determinar que ésta tenga una aceleración uniforme en el espaciotiempo de Kerr. Para ello se utilizarán las simetrías del espaciotiempo de Kerr, así como casos particulares con respecto a las coordenadas que lo parametrizan; de manera que se pueda simplificar el estudio de las propiedades de este movimiento. Para entender de manera más sencilla este trabajo se recomienda tener conocimientos básicos de Geometría Diferencial, Relatividad General y Geometría Riemanniana.

1.1. Espacios Vectoriales Lorentzianos

Para un estudio más detallado de los resultados que se enuncian en esta sección, se puede consultar [9]. A lo largo de este capítulo se tomará a V como un espacio vectorial real y n -dimensional con $n \geq 2$.

Definición 1.1.2. *Se define un producto escalar o interior sobre el espacio vectorial V como la aplicación $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, tal que g es bilineal y simétrica. Al par (V, g) se lo denomina espacio vectorial con producto escalar. Si $\det(g) \neq 0$, se dice además que g es no degenerado.*

Teorema 1.1.2. (Teorema de Sylvester) *Sea (V, g) un espacio vectorial con producto escalar. Entonces, existe una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de V tal que $g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y ε_i puede tomar los valores de 0, 1 o -1. Es decir, la forma matricial de g sobre la base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es diagonal y se puede escribir como:*

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

La aplicación g puede ser o no definida positiva. Un caso de particular interés para la Teoría General de la Relatividad es cuando g es una métrica Lorentziana. Como se verá más adelante esta condición es suficiente para recuperar la Teoría Especial de Relatividad en los espacios tangentes a una variedad [9].

Definición 1.1.3. Sea (V, g) un espacio vectorial con producto escalar.

- Se dice que g es Lorentziana si existe una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de V donde $g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = -1$ y $g(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1$ para todo $i \neq 1$. El espacio V se dice entonces que es Lorentziano;
- Se dice que g es Euclideana si existe una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de V donde $g(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. El espacio V se dice entonces que es Euclideano;
- Se dice que g es Degenerada si existe una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de V donde $g(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 0$ para algún $\vec{e}_i \neq 0$. El espacio V se dice entonces que es Luminoso o Degenerado.

En un espacio vectorial lorentziano no todos los vectores cumplirán que su producto interior es positivo. De hecho, existirán vectores \vec{v} tal que $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$. De esta forma, se puede definir la siguiente clasificación [9].

Definición 1.1.4. Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano con producto escalar. Si $\vec{v}, \vec{w} \in V$ entonces:

- Los vectores \vec{v}, \vec{w} son ortogonales si $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$;
- El vector \vec{v} es temporal si $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$;
- El vector \vec{v} es espacial si $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$;
- El vector \vec{v} es luminoso si $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$. Es decir, si \vec{v} es ortogonal consigo mismo;
- El vector \vec{v} es causal si $g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$.

1.1.1. Causalidad y Orientación Temporal

La clasificación obtenida en la Definición 1.1.4 permite introducir el concepto de causalidad en un espacio vectorial lorentziano [9].

Proposición 1.1.5. *Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano. El conjunto de todos los vectores temporales/causales en V tiene dos partes conexas. A cada una de estas partes se las denomina conos temporales/causales.*

En base a esta proposición es posible definir de manera formal el significado de causalidad y orientación temporal en un espacio vectorial lorentziano [9].

Definición 1.1.6. *Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano con producto escalar. Una orientación temporal/causal es la elección de uno de los conos temporales/causales del espacio. Al cono elegido se lo denomina cono futuro y al otro cono se lo denomina cono pasado. Si un vector \vec{v} se encuentra en el cono futuro/pasado se dice que el vector apunta al futuro/pasado o es un vector futuro/pasado.*

La elección de uno de los conos temporales se puede realizar por medio de un vector temporal cualquiera. La siguiente proposición permite caracterizar por completo al cono temporal utilizando dicho vector y las propiedades del producto escalar g [9].

Proposición 1.1.7. *Dos vectores temporales \vec{v} , \vec{w} se encuentran en el mismo cono temporal si y solo si $g(\vec{v}, \vec{w}) < 0$.*

En el caso de los conos causales, su caracterización en base a un vector causal cualquiera es un poco más complicada. Esto se debe a que la independencia lineal de vectores luminosos no se puede comprobar utilizando el producto escalar g .

Proposición 1.1.8. *Dos vectores luminosos \vec{v} , \vec{w} son linealmente dependientes si y solo si $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. Es decir, dos vectores luminosos son linealmente dependientes (o equivalentemente múltiplos) si y solo si son ortogonales.*

Sabiendo este resultado se puede caracterizar a un cono causal de una forma similar a lo que sucede con los conos temporales [10].

Proposición 1.1.9. *Dos vectores causales \vec{v} , \vec{w} linealmente independientes están en un mismo cono causal si y solo si $g(\vec{v}, \vec{w}) < 0$.*

1.1.2. Subespacios Vectoriales

Definición 1.1.10. *Sea (V, g) un espacio vectorial con producto escalar. Sea $W \subseteq V$ un subespacio vectorial. Entonces se define al subespacio ortogonal a W como:*

$$W^\perp = \{x / g(x, w) = 0 \forall w \in W\}$$

Sobre cualquier subespacio vectorial $W \subseteq V$, se puede encontrar un producto escalar g_W que surge de la restricción de g en W . Este producto escalar está definido como $g_W(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = g(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, para todo $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$. De esta forma, se puede clasificar al subespacio W en función de la forma del producto escalar inducido [9].

Definición 1.1.11. *Sea (V, g) un espacio vectorial con producto escalar. Sea $W \subseteq V$ un subespacio vectorial.*

- *Se dice que W es temporal si g_W es lorentziana;*
- *Se dice que W es espacial si g_W es euclídeana;*
- *Se dice que W es luminoso si g_W es degenerada.*

Es posible relacionar a los subespacios temporales y espaciales en un espacio (V, g) lorentziano, utilizando las definiciones anteriores. Esto se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.12. *Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano. Un subespacio vectorial W de (V, g) es temporal si y solo si W^\perp es un subespacio vectorial espacial.*

En base a esta proposición se puede tomar la siguiente definición.

Definición 1.1.13. *Un vector \vec{v} es tangente/ortogonal al subespacio vectorial W si $\vec{v} \in W / \vec{v} \in W^\perp$.*

Debido a la Proposición 1.1.8. los subespacios luminosos de (V, g) lorentziano adquieren varias propiedades interesantes. Tres de las más importantes se muestran a continuación [10].

Proposición 1.1.14. *Sea W un subespacio luminoso de (V, g) lorentziano. Entonces:*

- *W contiene un único vector luminoso \vec{v} que es tangente y ortogonal a W . Es decir, todo vector luminoso en W será de la forma $\alpha \vec{v}$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$;*
- *Todo vector en el subespacio vectorial $W - \{\lambda \vec{v} / \lambda \in \mathbb{R}\}$ es espacial.*
- *W no contiene ningún vector temporal.*

1.2. Geometría Lorentziana

En esta sección se realizará un repaso de los conceptos básicos y resultados principales de Geometría Lorentziana. A lo largo de toda la sección se asumirá que M es una variedad diferenciable n -dimensional con $n \geq 2$ [11].

Definición 1.2.1. *Se denota $\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}^*(M)$ y $\mathfrak{S}(M)$ como los campos vectoriales, de 1-formas y de aplicaciones diferenciales de la variedad M respectivamente.*

Teniendo en cuenta la notación anterior, se puede definir a un campo tensorial de la siguiente manera [11, 12].

Definición 1.2.2. *Para todo r y s enteros positivos, se define un campo tensorial r -contravariante y s -covariante A en M como la función \mathfrak{S} -multilineal:*

$$A : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M)}_r \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_s \rightarrow \mathfrak{S}(M)$$

Un campo tensorial 0-covariante y 0-contravariante es una aplicación $f \in \mathfrak{S}(M)$, un campo tensorial 1-contravariante es un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y un campo tensorial 1-covariante es una 1-forma $\Theta \in \mathfrak{X}^(M)$.*

Es posible definir diferentes operaciones sobre los campos tensoriales. En particular, para este trabajo es suficiente recordar sólo dos de ellas.

Definición 1.2.3. Sean A un campo tensorial r -contravariante, s -covariante y B un campo tensorial m -contravariante, n -covariante de M . Se define:

- El producto tensorial de A y B al campo tensorial $(r+m)$ -contravariante y $(s+n)$ -covariante $A \otimes B$, de manera que:

$$\begin{aligned} & A \otimes B (\Theta_1, \dots, \Theta_r, \Theta_{r+1}, \dots, \Theta_{r+m}, Y_1, \dots, Y_s, Y_{s+1}, \dots, Y_{s+n}) \\ &= A (\Theta_1, \dots, \Theta_r, Y_1, \dots, Y_s) \cdot B (\Theta_{r+1}, \dots, \Theta_{r+m}, Y_{s+1}, \dots, Y_{s+n}) \end{aligned}$$

Donde $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Theta_j \in \mathfrak{X}^*(M)$ para todo i, j .

- El producto simétrico de A y B como el campo tensorial $AB = \frac{1}{2}(A \otimes B + B \otimes A)$.

Como ya se sabe, en una variedad diferenciable es posible definir un sistema de coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) y un espacio de vectores tangentes $T_p M$ para todo $p \in M$. De la misma forma, se puede definir el espacio dual $T_p^* M$ de todos los covectores de $T_p M$. En ambos espacios, todo campo vectorial Y asigna en p un vector $\vec{y}(p) \in T_p M$ y toda 1-forma Θ asigna en p un covector $\theta(p) \in T_p^* M$. El siguiente teorema nos muestra como pueden escribirse ambos en función del sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) .

Teorema 1.2.4 (Teorema de las bases). Sea (x^1, \dots, x^n) un sistema de coordenadas locales de $p \in M$, entonces, todo vector $\vec{y}(p) \in T_p M$ puede escribirse de la forma $\vec{y}(p) = \sum_j \vec{y}(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} |_p$, donde $\frac{\partial}{\partial x^j} |_p$ son los vectores coordenados asociados a (x^1, \dots, x^n) en p . Si θ_p es parte de $T_p^* M$, entonces puede escribirse como $\theta(p) = \sum_j \theta \left(\frac{\partial}{\partial x^j} |_p \right) dx^j |_p$, donde $dx^j |_p$ son los covectores asociados a (x^1, \dots, x^n) en p .

Al igual que sucede con los campos vectoriales y las 1-formas, todo campo tensorial A asigna un tensor $A(p)$ para todo $p \in M$. El teorema anterior permite escribir este tensor en función de sus elementos.

Proposición 1.2.5. Para todo r y s enteros positivos, se definen las componentes del tensor r -contravariante y s -covariante $A(p)$ como:

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p) = A(dx^{j_1} |_p, \dots, dx^{j_s} |_p, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} |_p)$$

De esta forma, todo tensor puede escribirse en función de sus componentes. Para ello, se utiliza la forma débil de la notación de suma de Einstein: en toda expresión tensorial donde se encuentren símbolos repetidos se toma la suma sobre dichos índices. A lo largo de este trabajo esta notación se utilizará siempre que sea necesario trabajar con componentes, a menos que se especifique lo contrario. Entonces, un tensor r -contravariante y s -covariante A puede escribirse de manera general para todo punto en el sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) como:

$$A = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

1.2.1. Tensor métrico

Definición 1.2.6. *Un tensor métrico o métrica g sobre una variedad diferenciable M es un campo tensorial 2-covariante no degenerado y simétrico en M . Esto es, si cumple que:*

- $\det(g) \neq 0$, para todo $p \in M$
- $g(Y, Z) = g(Z, Y)$, para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

El tensor métrico de una variedad asigna un producto escalar no degenerado g_p sobre el espacio tangente $T_p M$ para todo $p \in M$. En principio, la métrica puede tener una forma arbitraria, siempre que sea simétrica y no degenerada. Esto es precisamente lo que estudia la geometría semi-riemanniana. En este escrito se utilizará únicamente una clase de métrica que tiene relación con los principios que rigen a la Teoría General de la Relatividad.

Definición 1.2.7. *Una variedad lorentziana (M, g) es una variedad diferenciable M , donde se puede definir un tensor métrico g que induce un producto escalar lorentziano en $T_p M$ para todo $p \in M$.*

En adelante, se tomará la misma notación g para referirse al tensor métrico de la variedad M y el producto escalar inducido sobre sus espacios tangentes $T_p M$. Su significado dependerá del

contexto donde se lo utilice.

Si se tiene un sistema de coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , la Proposición 1.2.5 indica que localmente el tensor métrico puede escribirse de la forma:

$$g = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1)$$

Donde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ y $dx^i dx^j$ es el producto simétrico entre los covectores coordenados. A la ecuación (1.1) se la denomina *elemento de línea* de la métrica, debido a que se relaciona con un desplazamiento diferencial en el caso en que g sea euclideana. Debido a que g es no degenerada, es posible definir el *tensor métrico inverso* $g^{-1} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{S}(M)$, de forma que $g^{-1} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$, $g^{ij} = g(dx^i, dx^j)$ y $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$, donde δ_j^i es la delta de Kronecker.

El tensor métrico g y el tensor métrico inverso g^{-1} permiten también definir las aplicaciones \uparrow (subir el índice) y \downarrow (bajar el índice), de la siguiente manera.

Definición 1.2.8. *Sea (M, g) una variedad lorentziana. Se define la función subir el índice $\uparrow : \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que si $\Theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, entonces $g(\uparrow(\Theta), Y) = \Theta(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se define también la función bajar el índice $\downarrow : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ tal que si $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $[\downarrow(Y)](Z) = g(Y, Z)$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

En un sistema de coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , dado que $\uparrow \Theta \in \mathfrak{X}(M)$ y $\downarrow Y \in \mathfrak{X}^*(M)$, se tiene que:

$$\uparrow \Theta = (\uparrow \Theta)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\downarrow Y = (\downarrow Y)_i dx^i$$

y es fácil demostrar que:

$$(\downarrow Y)_i = Y_i = g_{ij} Y^j \quad (1.2)$$

$$(\uparrow \Theta)^i = \Theta^i = g^{ij} \Theta_j \quad (1.3)$$

Se dice que la 1-forma $\downarrow Y$ es métricamente equivalente al campo vectorial Y . Ambos objetos contienen la misma información física y geométrica de la variedad, debido a que $g(Y, Y) =$

$g^{-1}(\downarrow Y, \downarrow Y)$. La misma equivalencia se puede encontrar para cualquier campo vectorial que sea de la forma $\uparrow \Theta$.

Ahora bien, sea $\phi : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades M y N . Se puede definir la aplicación lineal $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ para todo $p \in N$, de forma que para todo $\vec{v} \in T_p M$ se tiene $d\phi_p(\vec{v}) = \frac{d}{d\tau} \phi(\gamma(\tau))|_{\tau=0}$, donde $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva diferenciable de M que cumple con $\gamma(0) = p$ y $\frac{d\gamma}{d\tau}(0) = \vec{v}$. En base a estas aplicaciones, se define el *diferencial* $d\phi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$, de manera que $d\phi(Y)|_p = d\phi_p(Y_p)$ para todo $p \in M$.

Dentro de geometría lorentziana, la equivalencia más fuerte que se pueden encontrar entre variedades M y N es una isometría.

Definición 1.2.9. *Dos variedades lorentziana (M, g) y (N, h) son isométricas si existe un difeomorfismo $\phi : N \rightarrow M$ tal que $h(Y, Z) = g(d\phi(Y), d\phi(Z))$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$. Al mapa ϕ se lo denomina isometría.*

De manera general, una isometría se puede entender como un difeomorfismo que conserva las propiedades del tensor métrico. Para formalizar este enunciado se define el *pullback* entre tensores métricos.

Definición 1.2.10. *Sean (M, g) una variedad lorentziana y N una variedad diferenciable, tal que el mapa $\phi : N \rightarrow M$ es un difeomorfismo. Sea $\bar{\phi}(g)$ tal que $\bar{\phi}(g)(Y, Z) = g(d\phi(Y), d\phi(Z))$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$. Entonces a la aplicación $\bar{\phi}(g)$ se la denomina el pullback de g por la función ϕ .*

Proposición 1.2.11. *Sean (M, g) y (N, h) variedades lorentzianas tal que el mapa $\phi : N \rightarrow M$ es un difeomorfismo. Entonces ϕ es una isometría si y solo si $\bar{\phi}(g) = h$*

La proposición anterior describe un método para encontrar variedades isométricas. Si existen variedades M y N difeomorfas, donde además (M, g) es una variedad Lorentziana, se puede definir una métrica sobre N dada por el *pullback* de g . De esta forma se tiene que (M, g) será isométrica a $(N, \bar{\phi}(g))$ y $(N, \bar{\phi}(g))$ será una variedad lorentziana.

1.2.2. Conexión de Levi-Civita y Derivada Covariante

Definición 1.2.12. Sea (M, g) una variedad lorentziana. Una conexión sobre M es una función $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, donde para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que la expresión $D(Y, Z) = D_Y Z$ cumple con:

- $D_Y Z$ es $\mathfrak{S}(M)$ -lineal en Y ;
- $D_Y Z$ es \mathbb{R} -lineal en Z ;
- $D_Y (fZ) = (Yf)Z + fD_Y(Z)$ para todo $f \in \mathfrak{S}(M)$.

El tensor métrico permite derivar una única conexión sobre la variedad que conserva su estructura y propiedades principales [11].

Teorema 1.2.13 (Teorema Fundamental de la Geometría Lorentziana). Sea (M, g) una variedad lorentziana. Entonces, existe una única conexión ∇ tal que:

- $[Y, Z](f) = Y(Z(f)) - Z(Y(f)) = (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)(f)$, donde $[Y, Z]$ es el denominado corchete de Lie de los vectores $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathfrak{S}(M)$. Es decir, si ∇ tiene torsión nula.
- $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Es decir, si $\nabla g = 0$.

Esta conexión se encuentra caracterizada por la formula de Koszul

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \quad (1.4)$$

A esta conexión se la denomina conexión de Levi-Civita y a la expresión $\nabla_Y Z$ se la denomina derivada covariante de Z con respecto a Y .

En un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) se pueden utilizar las propiedades de la conexión dadas en la Definición 1.2.12, de manera que la derivada covariante puede escribirse localmente como:

$$\nabla_Y Z = \left(Y^j \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} + Y^j Z^k \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

Donde $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ y $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Se observa que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}$ representa un vector en $T_p M$, para todo $p \in M$ definido por la coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Entonces, se puede usar el Teorema de las Bases 1.2.4 para expresarlo en función de los vectores coordenados.

Definición 1.2.14. *Se definen los símbolos de Christoffel Γ_{jk}^i de forma que*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

La definición anterior permite escribir la derivada covariante como:

$$D_Y Z = \left(Y^j \frac{\partial Z^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i Y^j Z^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.5)$$

Mediante la fórmula de Kozsul se pueden relacionar los símbolos de Christoffel con los componentes de la métrica. Esto se muestra en la ecuación (1.6). En ella no se toma en cuenta la notación de suma de Einstein [10].

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_m g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \quad (1.6)$$

1.2.3. Geodésicas y Transporte Paralelo

Definición 1.2.15. *Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva en una variedad lorentziana (M, g) . Se definen $\mathfrak{X}(\gamma)$ y $\mathfrak{S}(\gamma)$, respectivamente como el conjunto de campos vectoriales y aplicaciones diferenciables definidas sobre γ .*

Sea $\gamma(\tau)$ una curva en una variedad lorentziana (M, g) . Localmente, la curva γ puede escribirse como $\gamma(\tau) = (x^1(\tau), \dots, x^n(\tau))$, donde $x^i \in \mathfrak{S}(\gamma)$ ($i = 1, \dots, n$) y representa a un sistema local de coordenadas de (M, g) restringido a la curva [11].

Definición 1.2.16. *Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva en una variedad lorentziana (M, g) . Se define el campo de velocidades $\dot{\gamma}$ de la curva, de manera que localmente tiene la forma:*

$$\dot{\gamma}(\tau) = \dot{x}^i(\tau) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(\tau)} \in T_{\gamma(\tau)} M$$

Donde el operador $\dot{}$ representa a la derivada $\frac{d}{d\tau}$.

Definición 1.2.17. Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva en una variedad lorentziana (M, g) . Se define la conexión $\frac{D}{d\tau}$ sobre γ de manera que $\frac{DY}{d\tau} = \nabla_{\dot{\gamma}} Y$ sobre todo campo Y en $\mathfrak{X}(\gamma)$. Se dice que el campo Y es paralelo o sufre un transporte paralelo si $\frac{DY}{d\tau} = 0$.

Un campo vectorial importante que se puede encontrar en base a la conexión inducida en la curva es su *aceleración* [11].

Definición 1.2.18. Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva en una variedad lorentziana (M, g) . Se define la aceleración \vec{a} de la curva como $\vec{a} = \frac{D\dot{\gamma}}{d\tau} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$. Si \vec{a} es de la forma $\vec{a} = f\dot{\gamma}$ para alguna aplicación $f \in \mathfrak{S}(\gamma)$, se dice que γ es una pregeodésica. Si $\vec{a} = 0$ se dice que la curva es una geodésica.

Las curvas geodésicas y pregeodésicas se pueden relacionar mediante la siguiente proposición [11].

Proposición 1.2.19. Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva pregeodésica en una variedad lorentziana (M, g) . Si γ se parametriza con el parámetro longitud de arco, esta se convierte en una geodésica.

1.2.4. Tensor de Curvatura de Riemann y sus Contracciones

La información de la curvatura de una variedad lorentziana se encuentra en las componentes de la métrica y sus derivadas [13].

Definición 1.2.20. Sea (M, g) una variedad lorentziana. Se define al tensor de curvatura como la función $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (1.7)$$

Para un sistema de coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , se puede demostrar que sus componentes vienen dados por:

$$R^i{}_{jkl} = dx^i \left(R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

Las componentes del tensor de curvatura pueden también relacionarse con los símbolos de Christoffel mediante la siguiente ecuación:

$$R^i{}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj} - \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj} \quad (1.8)$$

Se observa entonces que las componentes del tensor de curvatura estarán relacionadas con las primeras y segundas derivadas del tensor métrico.

En base a las contracciones del tensor de Riemann se pueden derivar otros tensores y escalares que permiten determinar las propiedades de una variedad lorentziana [13].

Definición 1.2.21. *Se define al tensor de Ricci Ric como la contracción del tensor de Riemann, cuya componentes en un sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) vienen dadas por:*

$$R_{jl} = R^{\alpha}{}_{j\alpha l} \quad (1.9)$$

Definición 1.2.22. *Se define a la curvatura escalar S como la traza del tensor de Ricci. En notación tensorial se tiene que:*

$$S = g^{jl} R_{jl} = R^j{}_j \in \mathfrak{S}(M) \quad (1.10)$$

Ambas definiciones son fundamentales para entender la formulación matemática de la Teoría de la Relatividad General.

Definición 1.2.23. *Se define a la constante de Kretschmann K como la contracción:*

$$K = R^{ijkl} R_{ijkl} \in \mathfrak{S}(M) \quad (1.11)$$

Donde $R_{ijkl} = g_{mi} R^m{}_{jkl}$ y $R^{ijkl} = g^{jm} g^{kn} g^{ls} R^i{}_{mns}$.

La constante de Kretschmann y la curvatura escalar son ejemplos de invariantes escalares. Su valor numérico solo dependerá del punto de la variedad donde se la analice. Es decir, será invariante a una transformación de coordenadas [13].

1.2.5. Subvariedades Diferenciables e Hipersuperficies

Definición 1.2.24. Sea (M, g) una variedad lorentziana. Se dice que $U \subseteq M$ es una subvariedad diferenciable de dimensión $k < n$, si existe una subvariedad \tilde{U} de dimensión k y un mapa $\phi : \tilde{U} \rightarrow M$ tal que $\phi : \tilde{U} \rightarrow \phi(\tilde{U})$ es un difeomorfismo y $\phi(\tilde{U}) = U$.

Es posible demostrar en base a la definición anterior que $\mathfrak{X}(U) \subseteq \mathfrak{X}(M)$. Por otra parte, el tensor g inducirá una métrica g_U sobre U , tal que $g_U(Y, Z) = g(Y, Z)$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$. Un caso importante de una subvariedad U es cuando ésta es $(n - 1)$ -dimensional. A este tipo de subvariedades se las conoce como *hipersuperficies*. El resultado siguiente muestra una forma sencilla de encontrar hipersuperficies de una variedad lorentziana cualquiera [10].

Proposición 1.2.25. Sea (M, g) una variedad lorentziana, f una aplicación en $\mathfrak{S}(M)$ y c un valor regular de f , esto es, la 1-forma df es no nula en el conjunto $S = \{p \in M / f(p) = c\}$. Entonces S es una hipersuperficie cerrada de M .

Una subvariedad $U \subseteq M$ será temporal (o lorentziana), espacial o luminosa si su métrica inducida g_U es respectivamente lorentziana, riemanniana o degenerada [10].

1.3. Vectores de Killing

En geometría lorentziana, el tensor métrico y la conexión de Levi-Civita determinan la forma que tendrán los campos de aceleraciones de las curvas sobre una variedad. En particular, las simetrías que tendrán estas últimas estarán relacionadas con las simetrías de la métrica. Como se verá en la sección 4, el conocimiento de estas propiedades permite simplificar el estudio de la dinámica de cuerpos materiales en la Teoría de la Relatividad General.

Ahora bien, la información de las simetrías de la métrica se encuentra inscrita en los denominados *campos vectoriales de Killing*. Para entender su estructura se deben considerar primero las siguientes definiciones y resultados [11, 12].

Definición 1.3.1. Una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ en una variedad lorentziana (M, g) es una curva integral de $X \in \mathfrak{X}(M)$, si para todo $\tau \in I$ se tiene que $\dot{\gamma}(\tau) = X_{\gamma(\tau)}$. Es decir, si el campo de velocidades de γ es igual al campo vectorial que surge de la restricción de X a la curva γ . Si

$I = \mathbb{R}$, se dice que el campo vectorial X es completo.

Las curvas integrales de vectores completos tienen la propiedad de que una variedad M puede ser cubierta completamente por ellas. Este resultado se puede expresar formalmente en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2. *Sea X un campo vectorial completo de una variedad lorentziana (M, g) . Entonces, para todo $p \in M$ se puede encontrar una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \vec{x}$, donde $\vec{x} = X_p \in T_p M$.*

Se pueden entonces juntar todas las curvas integrales que cubren la variedad en un sólo mapa [11, 12].

Definición 1.3.3. *Sea X un campo vectorial completo de una variedad lorentziana (M, g) .*

- Se define el flujo de X como el mapa $\phi_X : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\phi(p, t) = \dot{\gamma}_p(t)$, donde $p \in M$ y $\dot{\gamma}_p(t)$ es la curva integral dada por la Proposición 1.3.2;
- Se define el grupo uniparamétrico de (M, g) como el grupo de difeomorfismos ϕ_t definidos de la forma $\phi_t(p) = \phi(p, t)$ para todo $p \in M$.

Si el campo vectorial X es completo, el grupo uniparamétrico será isomorfo a \mathbb{R} (con la operación de suma). En el caso en que X no sea completo, el grupo de difeomorfismos ϕ_t estará únicamente definido sobre un subconjunto abierto $U \subseteq M$ y será isomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R} .

Definición 1.3.4 (Derivada de Lie). *Sea (M, g) una variedad lorentziana y $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Se define la derivada de Lie \mathcal{L}_X de la métrica g como:

$$\mathcal{L}_X g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{\phi}_{t+h}(g) - \bar{\phi}_t(g)}{h} = \frac{d\bar{\phi}_t(g)}{dt} \quad (1.12)$$

Donde ϕ_t son las componentes del grupo uniparamétrico del campo X y $\bar{\phi}$ es el Pullback de la métrica.

Un campo vectorial de Killing puede definirse entonces de la siguiente manera.

Definición 1.3.5 (Vectores de Killing). *Sea (M, g) una variedad lorentziana y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $\mathcal{L}_X g = 0$, entonces X se denomina campo vectorial de Killing. Si $p \in M$ entonces a la restricción*

$X_p \in T_p M$ se lo denomina vector de Killing.

El siguiente resultado permite entender de manera más clara las propiedades de un campo vectorial de Killing.

Proposición 1.3.6. *Sea (M, g) una variedad lorentziana y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- X es un campo vectorial de Killing;
- El grupo uniparamétrico de difeomorfismos asociado a X es en realidad un grupo de isometrías;
- $g(\nabla_Z X, Y) = -g(\nabla_Y X, Z)$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$;
- $g(\nabla_Z X, Z) = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

La proposición anterior nos permite ver que los campos de Killing forman grupos de isometrías en (M, g) . Estas isometrías tienen relación con las simetrías de la métrica definida sobre la variedad, ya que el pullback de cada una de estas aplicaciones conserva la forma de la métrica.

Existe una forma sencilla de encontrar vectores de Killing en un conjunto abierto de una variedad lorentziana. Esto se realiza utilizando un conjunto de coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) [10].

Proposición 1.3.7. *Sea una variedad lorentziana (M, g) y (x^1, \dots, x^n) un conjunto de coordenadas locales de M . Si las componentes de la métrica en esta carta local no dependen de x^i para algún $i = 1, 2, \dots, n$, entonces el vector coordenado $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ es un vector de Killing.*

1.4. Relatividad General

En esta sección se repasarán los conceptos y resultados más importantes de la Teoría de la Relatividad General. Empecemos por observar que en una variedad Lorentziana, $T_p M$ es un espacio vectorial lorentziano para todo $p \in M$. De esta manera, la definición de orientabilidad temporal puede entenderse como una elección global y diferencial de los conos de luz sobre todos

los espacios tangentes. La siguiente proposición describe un método en que se puede realizar esta elección en un variedad Lorentziana [10].

Proposición 1.4.1. *Una variedad Lorentziana (M, g) tiene una orientabilidad temporal si y solo si existe un campo vectorial X temporal o luminoso que está globalmente definido sobre (M, g) .*

Usando esta proposición se puede formalizar el significado de un espaciotiempo.

Definición 1.4.2. *Un espaciotiempo se define como una variedad Lorentziana (M, g) conexa y 4-dimensional, donde se puede definir una orientabilidad temporal. A los puntos pertenecientes a un espaciotiempo se los denomina eventos.*

En base a esta definición se puede formalizar la idea de Einstein de fuerza gravitacional. Esta ya no se entiende con el concepto de acciones a distancia que planteó inicialmente Isaac Newton, es considerarla ahora como una consecuencia de la curvatura del espaciotiempo cuya información se encuentra en el interior de la métrica g [3].

La caracterización de los conos causales futuros y pasados en cada evento del espaciotiempo se puede realizar entonces por medio de la proposición 1.1.9 y usando el campo vectorial temporal o luminoso seleccionado para determinar la orientabilidad temporal. Se puede clasificar también la naturaleza de una curva en el espaciotiempo dependiendo de la causalidad de su campo de velocidades.

Definición 1.4.3. *Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva diferencial en un espaciotiempo (M, g) .*

- *Se dice que γ es temporal (espacial/luminosa/causal) si su campo de velocidades $\dot{\gamma}$ es temporal (espacial/luminosa/causal) en $T_{\gamma(\tau)}M$, para todo $\tau \in I$;*
- *Se dice que γ apunta al futuro (apunta al pasado) o es futura (pasada) si su campo de velocidades $\dot{\gamma}$ es futuro (pasado) $T_{\gamma(\tau)}M$, para todo $\tau \in I$.*

En el caso de que γ sea una geodésica, es posible obtener una interpretación física si la curva es temporal o luminosa. Una geodésica luminosa representa a un rayo de luz en el espaciotiempo; mientras que una geodésica temporal puede entenderse como una partícula real que se mueve en

caída libre o con movimiento inercial en un espaciotiempo. Para el caso de una curva temporal en un espaciotiempo, el parámetro longitud de arco se lo denomina *tiempo propio*.

Por otra parte, se puede encontrar una interpretación para el espacio tangente $T_p M$ a todo evento p en el espaciotiempo M . Para ello se utilizará primero la siguiente definición [10].

Definición 1.4.4. *Un observador en un espaciotiempo (M, g) es una curva temporal γ , que se encuentra parametrizada por el tiempo propio $(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1)$ y que apunta al futuro.*

Si γ es un observador, el espacio tangente $T_{\gamma(\tau)} M$ sobre cada punto de la curva puede entenderse como el universo espaciotemporal instantáneo que puede medir γ en el momento τ . En este espacio se tiene una aproximación lineal de la forma del universo que observa γ en el instante τ . En esta aproximación, el espaciotiempo es plano y sigue las leyes de la física que determina la Teoría de la Relatividad Especial [10].

Ahora bien, en la definición de espaciotiempo la forma de la métrica g es irrelevante, siempre que sea lorentziana. Sin embargo, en la Teoría de la Relatividad General la forma de la métrica está determinada por la distribución de materia y energía que existe en el espacio. Esta condición se expresa mediante la denominada Ecuación de Campo de Einstein. Su forma tensorial, sin tener en cuenta una constante cosmológica, se escribe como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} S g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, S es la curvatura escalar y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. En este último se encuentra la información de la cantidad de energía y materia del espaciotiempo. Si el tensor de energía-momento es nulo en una región del espaciotiempo, se dice que el espaciotiempo (M, g) es una solución de las Ecuaciones de Campo de Einstein en el vacío para esa región del espaciotiempo [1, 3].

La ecuación (1.13) junto con las ecuaciones de las geodésicas determinan completamente las propiedades geométricas de un espaciotiempo y la dinámica de los cuerpos que se mueven en él [1, 3].

La Ecuación de Campo (1.13) indica que las simetrías que tenga la distribución de masa y energía en el espaciotiempo, serán heredadas por la métrica y viceversa. Si esta distribución no

tiene una variación en un tiempo medido por un observador, la curvatura del espaciotiempo y por ende su métrica, no deberían variar según este tiempo. Esta es precisamente la noción intuitiva de un *espaciotiempo estacionario*. En él los procesos físicos son invariantes a una traslación temporal. Por otra parte, si se considera una estrella esférica y sin rotación, la métrica del espaciotiempo cerca de la estrella debe mantener una simetría esférica. Es decir, un *espaciotiempo esféricamente simétrico* puede entenderse como aquel que determina la forma del universo cerca de una distribución esférica de masa.

Ahora bien, si esta estrella llega a adquirir una velocidad de rotación no despreciable, esta simetría se rompe. Si la velocidad de rotación es constante, existe otra clase de simetría en el espaciotiempo. Ya que la estrella es esférica, se puede suponer que ésta realiza su rotación con respecto a un eje que pasa por su centro. Como la velocidad es constante, cualquier rotación que realice un observador con respecto a este eje, no generará un cambio a la forma en que éste ve al universo a su alrededor. A esta clase de simetría se la denomina simetría axial. Entonces, un *espaciotiempo esféricamente simétrico* representa al universo cerca de una distribución esférica de masa con una velocidad de rotación constante. Las definiciones formales de estos conceptos van más allá del alcance de este escrito. Sin embargo, se pueden revisar en el libro *The Large Scale Structure of Spacetime* de Hawking y Ellis [14].

1.4.1. Agujeros Negros y Singularidades

La noción de agujero negro se conocía ya desde el año 1783 debido a los trabajos del geólogo inglés John Michell. Para ese tiempo la teoría newtoniana y el concepto de velocidad de escape eran ya conocidos. Michell determinó que la velocidad de escape sería igual a la de la luz para un planeta con una densidad igual a la del Sol y de un tamaño de 500 veces el radio del Sol. No fue hasta el año 1916 en que Karl Schwarzschild encontró este tipo de objetos como una solución de las Ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. De manera general, un agujero negro se entiende como una región del espaciotiempo en que el campo gravitacional es tan fuerte que ni siquiera la luz puede escapar de él. Dentro de este tipo de objetos, las leyes de la física dejan de tener un sentido físico claro debido a dos propiedades particulares: la existencia de un horizonte de eventos

y una singularidad real del espaciotiempo.

Un horizonte de eventos es la frontera de un agujero negro. Este puede entenderse como una hipersuperficie luminosa donde la métrica del espaciotiempo es degenerada. Dependiendo de las coordenadas con que se parametrize el espaciotiempo, la métrica estará o no bien definida en el horizonte de eventos. La no definición de la métrica puede eliminarse por medio de una transformación de coordenadas. Debido a esta propiedad a un horizonte de eventos se lo suele llamar también una *singularidad de coordenadas* [1, 3]. En la sección 2.3 se estudiará este tipo de objetos tomando un agujero negro en rotación.

Para entender el significado de una singularidad real, se considera la siguiente definición [10].

Definición 1.4.5. *Una singularidad real o no removible de un espaciotiempo (M, g) se define como una región donde la constante de Kretschman K diverge.*

Debido a la invarianza de la constante de Kretschmann (Definición 1.2.23) con respecto a un cambio de coordenadas, esta definición sugiere que una singularidad real puede entenderse como una característica propia del espaciotiempo y que no depende de las coordenadas que se utilicen para su parametrización. Las propiedades de la constante de Kretschman se derivan de las propiedades del tensor métrico y en el interior de este último se encuentra la información de la curvatura del universo. Por lo tanto, se puede entender a la singularidad real del agujero negro como una región de curvatura infinita. Por supuesto, este tipo de discontinuidades no tienen una interpretación empírica clara ya que las leyes de la física cerca de ella pierden su sentido habitual [3, 1].

Por otra parte, a pesar de lo misterioso que resulta el interior de un agujero negro, se esperaría que sus efectos gravitacionales sean despreciables para observadores muy alejados del mismo. Esta condición se cumple si el espaciotiempo se vuelve plano para lugares alejados del agujero negro. Recordemos que esta propiedad se tiene en el espaciotiempo de Minkowski. Esto nos permite definir la noción de espacio asintóticamente plano [15, 3].

De forma general, la definición de un espaciotiempo asintóticamente plano envuelve conceptos que van más allá de este trabajo. Una discusión detallada del tema se puede ver en el libro *The Large Scale Structure of Spacetime* de Hawking y Ellis [14]. Sin embargo, de forma intuitiva se puede decir que un espaciotiempo es *asintóticamente plano* si en el límite al infinito de una de

las coordenadas espaciales que lo parametrizan, la métrica g se vuelve la métrica de Minkowski.

1.5. Resumen de Contenidos

El escrito está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se define formalmente al espaciotiempo de Kerr y se estudian sus propiedades principales. Entre éstas resaltan la existencia de una singularidad real homeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, una ergoesfera y dos posibles horizontes de eventos dependiendo del valor de la masa y momento angular del agujero negro. Se estudia también el significado físico de un agujero negro de Kerr en función de su masa y momento angular, así como la existencia de posibles viajes en el tiempo en su interior. En la Sección 3 se analiza la estructura matemática del movimiento uniformemente acelerado en Relatividad General. En la sección 3.3, se estudian también las propiedades de este tipo de movimiento para espaciotiempos asintóticamente planos. Finalmente, en la sección 4 se estudia una clase de curvas con aceleración no nula y de módulo constante, construidas en base a las simetrías de los vectores de Killing del espaciotiempo de Kerr. Este análisis se enfoca en la búsqueda de curvas que representen a órbitas circulares alrededor del agujero negro de Kerr.

2. El espaciotiempo de Kerr

Históricamente, el espaciotiempo de Kerr se pudo encontrar como una solución de las ecuaciones de campo de Einstein casi 50 años después de que éste postuló la teoría de la Relatividad General en el año 1915. Para el tiempo en que se descubrió esta solución, ya era familiar en la comunidad física el concepto de un agujero negro. Espaciotiempos cuyas métricas satisfacía la aparición de esta clase de objetos eran también ya conocidas para mitades del siglo XX: la solución de Schwarzschild en el vacío de las ecuaciones de campo representaban la geometría de un universo que contenía un agujero negro esféricamente simétrico (cuya topología de la singularidad real es la misma que una esfera S^2). Si bien este resultado permitió llegar a muchas conclusiones importantes en la primera mitad del siglo XX, el siguiente paso era la búsqueda de agujeros negros con topologías más generales [16].

El camino obvio a seguir fue indagar posibles soluciones de las ecuaciones de campo en el vacío que representaran a un universo con un agujero negro en rotación. La geometría de estos espaciotiempos deberían satisfacer ciertas condiciones fundamentales para tener un sentido físico claro: su métrica debe ser axialmente simétrica, estacionaria, asintóticamente plana y en el límite de no rotación, se debe recuperar la solución de Schwarzschild. Geodésicas en este espaciotiempo tendrían una simetría temporal y axial (similar a lo que sucede en mecánica no relativista con el movimiento de cuerpos sometidos a un campo de fuerzas producido por un objeto en rotación). Sin embargo, no fue hasta el año de 1963 que Roy Kerr, profesor de la Universidad de Austin, encontró un espaciotiempo que cumplía con dichas condiciones y se lo bautizó con su mismo nombre. Su solución dependía de dos parámetros: m que representaba la masa del agujero negro y a cuyo significado físico puede entenderse como el momento angular del agujero negro (medida de la rotación del objeto) [4].

El espaciotiempo de Kerr se puede definir formalmente utilizando el siguiente teorema de unicidad [15, 17].

Teorema 2.0.1 (Agujero Negro sin Pelos). *El espaciotiempo de Kerr es la única solución axialmente simétrica, estacionaria y asintóticamente plana de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío que contiene un agujero negro. Esta solución depende de dos parámetros no negativos*

m y a , denominados masa y momento angular del agujero negro respectivamente.

Este teorema es un caso especial del conocido Teorema de Unicidad de Agujeros Negros o Teorema del Agujero Negro sin Pelos, cuando la carga del agujero negro es nula [14].

2.1. Diferentes coordenadas en el espaciotiempo de Kerr

Para entender el comportamiento local de un espaciotiempo es necesario utilizar cartas coordenadas. En esta sección se analizarán los tres sistemas de coordenadas más importantes para analizar el espaciotiempo de Kerr. Es necesario introducir tres sistemas de coordenadas distintas, ya que varias de las propiedades que definen a un agujero negro de Kerr no tienen una estructura matemática clara en algunos de ellos.

2.1.1. Coordenadas Boyer-Lindquist

El primer conjunto de coordenadas que se estudia es el denominado Boyer-Lindquist. Estas coordenadas tienen una forma similar a las utilizadas usualmente en el espaciotiempo de Schwarzschild y permiten derivar ciertas propiedades del espaciotiempo de Kerr de una manera sencilla [4, 10].

Definición 2.1.1. *Se definen las coordenadas de Boyer-Lindquist (BL) para una carta local $U = \mathbb{R} \times \tilde{U}$ en el espaciotiempo de Kerr como $(t, r, \theta, \phi) \in U$, donde $t \in \mathbb{R}$ y $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) = \tilde{U}$ (coordenadas esféricas de \mathbb{R}^3). Con estas coordenadas el elemento de línea de la métrica toma la forma:*

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi, \quad (2.1)$$

donde los componentes g_{ij} de la métrica vienen dados por:

$$g_{tt} = -1 + \frac{2mr}{\rho^2}, \quad (2.2)$$

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad (2.3)$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2, \quad (2.4)$$

$$g_{\phi\phi} = \left[r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right] \sin^2(\theta), \quad (2.5)$$

$$g_{t\phi} = g_{\phi t} = -\frac{mra}{\rho^2} \sin^2(\theta), \quad (2.6)$$

y las funciones Δ y ρ en las ecuaciones anteriores son:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2, \quad (2.7)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta). \quad (2.8)$$

A las coordenadas t , r , θ , ϕ se las denomina coordenada temporal, radial, polar y azimutal respectivamente .

La métrica BL (2.1) representa el universo que vería un observador muy alejado del agujero negro de Kerr. Existen varias propiedades muy interesantes que se pueden derivar en base a esta definición. Para entender la primera de ellas, se toma $a = 0$. Este valor puede interpretarse como el límite no rotacional de un agujero negro. Al reemplazar este valor en la ecuación (2.1), podemos encontrar que el elemento de línea de la métrica en este caso se convierte en:

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

La solución anterior es precisamente la métrica de Schwarzschild [4]. Es decir, se recupera el espaciotiempo de un agujero negro sin rotación cuando el momento angular es nulo.

¿Qué significado tiene la función ρ ? Se observa que el término g_{tt} en la métrica de Schwarzschild, puede escribirse de la forma $-1 + \frac{2mr}{r^2}$. Esta expresión es similar a la definición de g_{tt} (ecuación (2.2)) para el caso de la métrica BL, con la única diferencia de que r^2 es reemplazado por ρ^2 . De esta forma, podemos ver a la función ρ como una generalización de la coordenada radial de Schwarzschild debido a la rotación del agujero negro. Se observa que el término extra $a^2 \cos^2(\theta)$ en el caso del espaciotiempo BL, permite que la métrica esté definida cuando $\rho \neq 0$. En general, este tipo de comportamiento se mantiene para cualquier $r \in \mathbb{R}$, siempre que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ y no existan raíces de la función Δ . Por lo tanto, es posible cambiar el intervalo de definición de la coordenada radial y tomarlo como todos los números reales tales que no sean raíces de la función Δ (el estudio del significado de dichas raíces se realizará en la sección 2.4). De esta forma, la coordenada radial deja de tener un significado puramente radial en el sentido clásico ya que ahora r puede ser negativo.

El espaciotiempo de Kerr tiene entonces localmente la misma topología que $\mathbb{R} \times A \times \mathbb{S}^2$, donde A es un conjunto abierto de \mathbb{R} . En el caso no rotacional (espaciotiempo de Schwarzschild) no es posible realizar esta redefinición del parámetro radial, ya que la métrica no está definida en $r = 0$. Como veremos más adelante, esto tiene consecuencias importantes en la topología del agujero negro y de la singularidad real que alberga.

En base a la Definición 2.1.1, también podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- El conjunto de eventos tales que $\theta = \frac{\pi}{2}$ representan a una subvariedad denominada *plano ecuatorial*. En la sección 4 se analizarán la dinámica de ciertas curvas con constante que se encuentran fijas en ella.
- La métrica expresada en coordenadas BL no es diagonal si $a \neq 0$. Existe un término $g_{t\phi}$ no nulo en este caso. Esto implica que los vectores ∂_t y ∂_ϕ no son ortogonales en general para todo evento en el espaciotiempo.
- Al tomar el límite $r \rightarrow \infty$, el elemento de línea tiende a $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$. Es decir, se vuelve a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas [4]. Este resultado tiene relación con el hecho de que el espaciotiempo de Kerr es asintóticamente plano. Esta misma métrica se vuelve a encontrar si se toma $m = a = 0$, lo que determina

que el espaciotiempo de Minkowski puede entenderse como un universo en el que no existen objetos masivos en el sentido clásico. También se puede concluir que en el espaciotiempo de Kerr, los efectos gravitacionales son despreciables lejos del agujero negro.

- La métrica no está definida cuando $\Delta = 0$ ó $\rho = 0$. El significado de estas regiones se explicará más a detalle en las secciones 2.3, 2.5 y tienen una profunda conexión con la existencia de un agujero negro. Por otra parte, se observa que las raíces de la función Δ (si existen) producen diferentes partes conexas del espaciotiempo en coordenadas BL. A excepción de la región $\rho = 0$, la métrica está bien definida en cada una de las partes conexas. El significado y la causalidad de cada componente conexa se estudiará más a detalle en la sección 2.4.
- La métrica BL no está definida cuando $\sin(\theta) = 0$. En estas coordenadas, la métrica no puede extenderse en esta región. Sin embargo, en la sección 2.1.3 se observará una forma de extenderla utilizando una transformación de coordenadas. Debido a esta propiedad, se puede deducir que en esta región sí existe el espaciotiempo de Kerr y se la denomina *eje polar*.
- La métrica no depende de las coordenadas t y ϕ . Como se observa en la sección 1.2, esto implica que ∂_t y ∂_ϕ son vectores de Killing y que la métrica es invariante con respecto a estas coordenadas. Es decir, un cambio de coordenadas del tipo $x \rightarrow x + dx$, que deja el resto de coordenadas fijas, es una isometría si $x = t$ o $x = \phi$. Este resultado muestra la simetría temporal (espaciotiempo estacionario) y axial de la sección del espaciotiempo de Kerr parametrizada por las coordenadas BL.
- El cambio de coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, -\phi)$ es una isometría, mientras que los cambios $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (t, r, \theta, -\phi)$, $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, \phi)$ no lo son. Para entender el significado físico de este resultado, asumamos que se graba a un cuerpo girando con el agujero negro. Si ponemos la grabación en reverso, esto es si hacemos $t \rightarrow -t$, se observará que el cuerpo se encuentra girando en el sentido opuesto. No se tendrá la misma dinámica del objeto que la que se tenía en un inicio. Para que esto se cumpla sería necesario que en la grabación el sentido de la rotación también cambiara. Esto es equivalente a decir que los

cambios $t \rightarrow -t$ y $\phi \rightarrow -\phi$, no varían el proceso físico inicial solo si se producen los dos al mismo tiempo.

Si bien los espaciotiempos de Minkowski y Schwarzschild se los puede considerar como casos especiales de la métrica de Kerr en coordenadas BL (cuando $m = a = 0$ y $a = 0$, $m \neq 0$ respectivamente), en el resto del escrito no se los estudiará. De ahora en adelante se entenderá como espaciotiempo de Kerr solo a los casos en que m y a sean ambos positivos.

2.1.2. Coordenadas Kerr-Star

Como se mencionó en la sección anterior, la métrica de Kerr en coordenadas BL no está definida cuando $\Delta = 0$. Sin embargo, este comportamiento puede eliminarse utilizando una transformación de coordenadas. Las coordenadas *Kerr-Star* permiten solucionar este problema [10].

Proposición 2.1.2. *Sea Ψ la función de transformación $(t, r, \theta, \phi) \mapsto (t^*, r^*, \theta^*, \phi^*)$, tal que $t^* = t + T(r)$, $\phi^* = \phi + A(r)$, $r^* = r$, $\theta^* = \theta$ y donde T , A son funciones cualquiera que cumplen:*

$$\frac{dT}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad (2.9)$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{a}{\Delta} \quad (2.10)$$

Si la transformación está definida sobre cada componente conexa del espacio tiempo de Kerr en coordenadas BL, entonces Ψ es un difeomorfismo y $(t^, r^*, \theta^*, \phi^*)$ es un sistema de coordenadas para cada componente conexa. A estas coordenadas se las denomina Kerr-Star.*

Comprobación. Para empezar, veamos que la transformación Ψ está bien definida ya que se la toma sobre cada componente conexa de forma separada. Esta función es sobreyectiva en cada componente conexa ya que todo posible valor de $(t^*, r^*, \theta^*, \phi^*)$ se encuentra determina-

do por el conjunto donde las coordenadas (t, r, θ, ϕ) están definidas. Supongamos ahora que $\Psi(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1) = \Psi(t_2, r_2, \theta_2, \phi_2)$. Entonces, $\theta_1 = \theta_2$, $r_1 = r_2$, $t_1 + T(r_1) = t_2 + T(r_2)$ y $\phi_1 + A(r_1) = \phi_2 + A(r_2)$. Esto implica que $t_1 = t_2$ y $\phi_1 = \phi_2$. Por lo tanto, la función Ψ es biyectiva.

Sobre las diferentes componentes conexas del espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL, la función Δ nunca cambia de signo. Entonces, las ecuaciones (2.9) y (2.10) determinan que las funciones T y A serán monótonas en cada componente conexa. Por lo tanto, existirá una transformación inversa de Ψ y será continua en cada componente conexa.

Por último, si se calcula el determinante del Jacobiano de esta transformación, se tendrá que:

$$\det(J) = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{r^2+a^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{\Delta} & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (2.11)$$

Es decir, la transformación Ψ es un difeomorfismo local y por ende una transformación de coordenadas para cada componente conexa. Q.E.D

Es posible ampliar este sistema de coordenadas a todo $r \in \mathbb{R}$. Para ello se debe entender qué sucede con la métrica BL al realizar este cambio de coordenadas.

Definición 2.1.3. *Sea Ψ^{-1} la función de transformación inversa de la proposición 2.1.2. Entonces $\overline{\Psi^{-1}}(g) = g^*$, donde g^* se define como la métrica de Kerr en coordenadas Kerr-Star. Su elemento de línea viene dado por:*

$$ds^2 = g_{tt} (dt^*)^2 + 2g_{\phi t} dt^* d\phi^* + g_{\phi\phi} (d\phi^*)^2 + \rho^2 (d\theta^*)^2 + 2dt^* dr^* - 2a \sin^2(\theta^*) d\phi^* dr^* \quad (2.12)$$

Donde las componentes g_{ij} son las mismas que las mostradas en la definición 2.1.1. Es decir, la función Ψ es una isometría si se toma a g^* como la métrica del espaciotiempo de Kerr-Star.

Debido a que $r^* = r$, la función Δ tendrá la misma forma en el sistema de coordenadas de Kerr-Star. La definición anterior nos indica que en coordenadas Kerr-Star la métrica no tiene ninguna singularidad cuando $\Delta = 0$. Por lo tanto, la métrica (2.12) en coordenadas Kerr-Star puede extenderse de forma natural sobre todo valor de $r^* \in \mathbb{R}$. A este nuevo espaciotiempo se lo denomina *Kerr-Star ampliado*.

El resultado anterior permite también obtener el siguiente corolario.

Corolario 2.1.4. *Las raíces de la función Δ son singularidades de coordenadas de la métrica BL .*

En la sección 2.5. se estudiarán más detalladamente a las regiones donde $\Delta = 0$.

2.1.3. Coordenadas Kerr-Schild

En esta sección se definirá de manera formal a la región del eje polar. Para ello, se introduce primero las coordenadas denominadas *Kerr-Schild* [4].

Proposición 2.1.5. *Sea Φ la función de transformación $(t^*, r^*, \theta^*, \phi^*) \rightarrow (t, x, y, z)$, tal que:*

$$t = t^* - r^* \tag{2.13}$$

$$x = (r^* \cos\phi^* + a \sin\phi^*) \sin\theta^* \tag{2.14}$$

$$y = (r^* \sin\phi^* - a \cos\phi^*) \sin\theta^* \tag{2.15}$$

$$z = r^* \cos\theta^* \tag{2.16}$$

Si la transformación está definida en el espaciotiempo de Kerr-Star ampliado excluyendo la región $\rho = 0$, entonces Φ es un difeomorfismo y (t, x, y, z) es un sistema de coordenadas. A estas coordenadas se las denomina Kerr-Schild.

Comprobación. Se puede comprobar que la transformación Φ es biyectiva y diferenciable sobre todo Kerr-Star ampliado. Esto se realiza usando un procedimiento similar al que se utiliza para comprobar que las coordenadas esféricas en \mathbb{R}^3 son en realidad una carta de coordenadas. Se puede ver también que el determinante del Jacobiano de esta transformación es:

$$\det(J) = \rho^2 \sin\theta^*$$

Sin embargo, si se excluye la región $\rho = 0$, entonces $\det(J) \neq 0$. Por lo tanto, Φ es en realidad un difeomorfismo y (t, x, y, z) es un sistema de coordenadas. Q.E.D.

Se puede analizar también qué sucede con la métrica en esta transformación de coordenadas. Para esto observemos la siguiente definición.

Definición 2.1.6. Sea Φ^{-1} la función de transformación inversa de la proposición 2.1.5. Entonces $\overline{\Phi^{-1}}(g^*) = g^c$, donde g^c se define como la métrica en coordenadas Kerr-Schild y su elemento de línea viene dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2m(r^*)^3}{(r^*)^4 + a^2 z^2} \left[dt + \frac{r^*(xdx + ydy)}{a^2 + (r^*)^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + (r^*)^2} + \frac{z}{r} dz \right]^2 \quad (2.17)$$

Donde $r^* = r^*(t, x, y, z)$ es una función de las coordenadas Kerr-Schild que viene dado por la relación:

$$x^2 + y^2 + \frac{(r^*)^2 + a^2}{(r^*)^2} z^2 = (r^*)^2 + a^2. \quad (2.18)$$

Es decir, la función Φ es una isometría con las métricas g^c y g^*

Podemos determinar que si $\sin(\theta^*) = 0$ se tiene $z = \pm r^*$. Para ambos valores, se obtiene también que $x = y = 0$. Al reemplazar estos valores en la métrica (2.17), no se observa ninguna degeneración ni singularidad. Por ende, el espaciotiempo de Kerr-Schild puede extenderse a las regiones donde $x = y = 0$ y $z = \pm r^*$. A este espaciotiempo se lo denomina *Kerr-Schild ampliado*.

Recordemos que $\theta = \theta^*$ y por ende el tener $\sin(\theta^*) = 0$ implica que $\sin(\theta) = 0$. En coordenadas BL esta región no podía ser estudiada, ya que la métrica no estaba definida en ella. Sin embargo, las coordenadas Kerr-Schild permiten extender la definición la métrica a esta región. Entonces, se puede definir formalmente a la región del eje polar utilizando las coordenadas Kerr-Schild.

Definición 2.1.7. Se define al eje polar como la región del espaciotiempo de Kerr-Schild ampliado donde $x = y = 0$, $z = \pm r^*$

Estas coordenadas son muy útiles para estudiar la singularidad real que tiene el interior de un agujero negro de Kerr, como se verá en la siguiente sección.

2.2. La singularidad real del espaciotiempo

En la sección 2.1.2 se pudo determinar que las raíces de la función Δ son singularidades de coordenadas que aparecen debido al uso de la métrica BL. Sin embargo, la singularidad $\rho = 0$ tiene una estructura diferente. Para estudiar sus propiedades se recuerda el significado de la

constante de Kreschman en un espaciotiempo.

Esta invariante es una medida de la curvatura local del espaciotiempo. El hecho de que exista una divergencia de dicha cantidad, indica que el espaciotiempo tendrá una curvatura infinita en una región específica. Como se vio en la sección 1.4.1, esta región se la denomina singularidad real del espaciotiempo. Desde el punto de vista de un observador, esto es equivalente a determinar que este sentirá efectos gravitatorios cada vez más intensos a medida que se acerque a la singularidad. En esta región, el espaciotiempo tiene una discontinuidad que no puede ser eliminada por un cambio de coordenadas. Es decir que en este lugar del universo, la gravedad es tan fuerte que las leyes de la física fallan y dejan de tener sentido.

Para determinar la naturaleza de la región $\rho = 0$, se calcula la constante de Krestchman para el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. Esto se muestra en el siguiente Lema.

Lema 2.2.1. *La invariante de Kretschman para la métrica Boyer-Lindquist tiene la forma:*

$$K = \frac{48m^2}{\rho^{12}} J(r, \theta), \quad (2.19)$$

donde $J(r, \theta) = r^6 - 15a^2r^4\cos^2(\theta) + 15a^4r^2\cos^2(\theta) - a^6\cos^6(\theta)$.

La comprobación de este Lema aporta muy poco al estudio de este escrito. Sin embargo los detalles de la misma se pueden encontrar en el libro *The geometry of Kerr Black Holes* de Barret O'Neill [10].

En base al resultado anterior es posible obtener el siguiente teorema que nos indica el significado de la región $\rho = 0$.

Teorema 2.2.2. *La región $\rho = 0$ representa una singularidad real del espaciotiempo de Kerr*

Comprobación. Si $\rho = 0$, entonces $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Si se toma $\rho = 0$ en la expresión (2.19), se tiene que $K \rightarrow \pm\infty$. Entonces, la región donde $\rho = 0$. Debido a que esta cantidad es una función escalar invariante del sistema de coordenadas, se tiene que la región $\rho = 0$ es de hecho una singularidad real del espaciotiempo de Kerr. Q.E.D.

El teorema anterior nos permite observar que sin importar las coordenadas que se utilice para parametrizar al espaciotiempo de Kerr, éste nunca estará definido en la región de la singularidad.

Esto no sucede con las regiones $\Delta = 0$ y $\sin(\theta) = 0$, como se observó en las secciones 2.1.2 y 2.1.3. De ahora en adelante se entenderá que al hablar del espaciotiempo de Kerr no se tomará en cuenta a la región donde $\rho = 0$.

Por otra parte, si bien las consecuencias físicas de este tipo de objetos es tópico de muchos debates actuales acerca de su existencia y posible significado en un universo real, sus propiedades matemáticas pueden ser entendidas utilizando diferentes coordenadas para el espaciotiempo de Kerr. Para empezar, se estudiará la topología de la singularidad real.

Proposición 2.2.3. *La singularidad real tiene una topología de anillo que evoluciona en el tiempo t . Es decir, en el espaciotiempo de Kerr la singularidad real es difeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ (cilindro), donde \mathbb{S}^1 es la esfera unidimensional.*

Comprobación. Se puede entender esto de dos maneras. La primera es mediante las coordenadas BL. Se recuerda que $\rho = 0$ implica $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Se puede observar fácilmente que la región $r = 0$ es difeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. Si se toma ahora $\theta = \frac{\pi}{2}$ se encontrará entonces un subconjunto difeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. La singularidad puede verse entonces como un anillo parametrizado en base a la coordenada ϕ y que evoluciona uniformemente de acuerdo a la coordenada temporal t .

Este mismo resultado se puede obtener si se usan las coordenadas Kerr-Schild. Se observa que en la singularidad, $z = 0$ y la ecuación (2.18) toma la forma:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{2.20}$$

Ya que $a > 0$, esta ecuación representa a una circunferencia en el plano $x - y$ de radio a . Es decir, para una sección $t = \text{constante}$ del espaciotiempo, la singularidad es difeomorfa a un anillo \mathbb{S}^1 . Debido a que t está definido sobre todos los reales, se tiene nuevamente que la región $\rho = 0$ es difeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. Q.E.D.

El resultado anterior muestra una variación importante con relación a la singularidad real que se tiene en el espaciotiempo de Schwarzschild. Recordemos que en el límite $a = 0$, se recupera la solución de Schwarzschild de las ecuaciones de campo de Einstein. En este caso, la singularidad tiene una topología de esfera bidimensional S^2 que evoluciona en el tiempo [4, 18, 3]. Es decir, es homeomorfa a $\mathbb{R} \times S^2$. En el espaciotiempo de Kerr en cambio, la región de la singularidad

no está definida sobre todos los posibles valores de la coordenada θ . Visto desde las coordenadas Kerr-Schild, esta región se muestra únicamente como el origen de coordenadas en el espacio tridimensional generado por las coordenadas x, y, z .

El hecho de que en Kerr ($a > 0$) la singularidad no esté definida sobre todo valor posible de θ , provee a este espaciotiempo de propiedades muy particulares. En el caso de un agujero negro de Schwarzschild, toda geodésica causal (temporal o luminosa) que llegue a la región $r = 0$ en un tiempo propio τ finito, no es extendible para coordenadas radiales negativas [16, 14]. Sin embargo, en el espaciotiempo de Kerr se pueden encontrar geodésicas que no cumplan con esta propiedad. Para encontrarlas se busca alguna geodésica que pueda atravesar la región $r^* = 0$ por la «mitad del anillo» que representa a la singularidad y que sea extendible al infinito. El caso más sencillo es tomar una geodésica luminosa que se encuentre fija en el eje polar del espaciotiempo y se observará que éstas nunca llegan a tocar la singularidad. La comprobación de la existencia de este tipo de geodésicas no se mencionará en este escrito pero se pueden encontrar todos sus detalles en el capítulo 3 del libro *The geometry of Kerr Black Holes* de Barret O'Neill [10]. Lo que se realizará aquí es tomar una de estas geodésicas y estudiarla utilizando las coordenadas de Kerr-Schild ampliadas. El eje polar en este sistema de coordenadas se obtiene cuando $x = y = 0$. En este caso se tendrá que $z = r^*$ y por ende la función ρ toma la forma $\rho^2 = z^2 + a^2$. Para una geodésica que se encuentre fija en el eje polar, la función ρ nunca será nula, ya que $a > 0$. Por ende, ésta geodésica luminosa nunca se encontrará con la singularidad y será extendible al infinito. Entonces, en un agujero negro de Kerr puede existir una posibilidad de obtener información de la forma del universo cerca de la singularidad, ya que una geodésica luminosa que se encuentre fija en el eje polar no caerá en ésta región.

2.3. Causalidad y Bloques Boyer-Lindquist

En la sección 2.1 se pudo observar que la métrica BL tiene singularidades de coordenadas cuando $\Delta = 0$. Sin embargo, siempre se tendrán subvariedades conexas que se encuentran separadas por éstas regiones y donde no existe ninguna singularidad de la métrica BL. A estas regiones se las llaman bloques Boyer-Lindquist y dependen de los valores de la masa y momento angular del agujero negro. En esta sección se analizará la causalidad de los vectores coordenados en cada uno

de estos bloques. Para ello, se considera primero el siguiente resultado.

Lema 2.3.1. Sean $a, m > 0$. Existen raíces reales de la función $\Delta(r)$ sólo si $m \geq a$. Estas raíces son:

$$r^+ = m + \sqrt{m^2 - a^2} \geq m - \sqrt{m^2 - a^2} = r^- \quad (2.21)$$

Donde $r^+ = r^- = m$ en el caso en que $m = a$.

Comprobación. Sean $a, m > 0$. Usando la definición del polinomio Δ vemos que su discriminante $4m^2 - 4a^2$ será no negativo si y solo si $m \geq a$. Si esto se cumple, la formula general para las soluciones cuadráticas determina que las posibles raíces de Δ serán:

$$r = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4a^2}}{2} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} > 0$$

Claramente, existirá una raíz única solo en el caso en que $m = a$. Esta raíz será $r = m > 0$. Q.E.D

Según este resultado, es posible clasificar los espaciotiempos que se generan para diferentes valores de m y a . Si $m > a$ se denomina al espaciotiempo como *Slow Kerr*. Su nombre hace referencia al hecho de los efectos producidos por la rotación de un agujero negro en este espacio-tiempo, son menores a los efectos gravitacionales generados por su masa. Si $m < a$ se lo llama *Fast Kerr*. La interpretación de su nombre es la misma que para *Slow Kerr*, pero cambiando los roles de la masa y la rotación del agujero negro. Finalmente, tenemos el caso de *Kerr Extremal* cuando $m = a$. En este caso, los efectos gravitatorios de la masa del agujero negro son igual de relevantes que aquellos producidos por su rotación.

2.3.1. Espaciotiempo Slow Kerr ($m > a$)

Éste es el caso más general que se puede tomar para analizar las componentes conexas del espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. En *Slow-Kerr*, podemos encontrar tres regiones conexas del espaciotiempo: $r > r^+$ llamada *exterior del agujero negro o bloque Kerr exterior*, $r^- < r < r^+$ llamado bloque *Kerr intermedio* y $r < r^-$ llamado *núcleo del agujero negro o bloque Kerr interno*. La unión de los bloques Kerr intermedio y Kerr interior se la denomina interior del agujero negro.

Antes de analizar la causalidad de los vectores coordenados en cada bloque, analicemos primero el comportamiento de la función Δ . Podemos ver que en el caso de Slow Kerr, ésta se puede escribir como $\Delta = (r - r^+)(r - r^-)$. Entonces, la función Δ será negativa en el bloque Kerr intermedio y positiva en los bloques restantes (Kerr exterior y Kerr interior).

Empecemos por analizar el vector ∂_r . Vemos que $g(\partial_r, \partial_r) = \frac{\rho^2}{\Delta}$. Por lo tanto, la causalidad de este vector dependerá del signo de Δ . En particular, ∂_r será temporal cuando $\Delta < 0$ y espacial si $\Delta > 0$. Este es un resultado interesante, ya que se esperaría que el vector coordenado radial siempre se relacione con alguna dimensión espacial. Algo similar a lo que sucede en mecánica clásica. El hecho de que ∂_r sea temporal en el espacio Kerr intermedio, da un ejemplo claro como en la Teoría de la Relatividad General las coordenadas (t, r, θ, ϕ) no representan más las nociones de tiempo y espacio clásicos. En este caso, la variable r solo representa una de las coordenadas que parametriza la variedad cuatridimensional que es el espaciotiempo. Por otra parte, observemos que $g(\partial_\theta, \partial_\theta) = \rho^2$; lo que indica que siempre ∂_θ será un vector espacial.

Los casos de los vectores ∂_t y ∂_ϕ son más complicados ya que pueden cambiar de causalidad, incluso dentro de un mismo bloque conexo. Tomemos $g(\partial_\phi, \partial_\phi) = g_{\phi\phi} = \left[r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2(\theta)}{\rho^2} \right] \sin^2(\theta)$. Si $r > 0$ o si $r \ll -1$, entonces ∂_ϕ será un vector espacial debido al término r^2 que tiene $g_{\phi\phi}$. Para un valor de $r \approx -1$, el término que envuelve un factor r será el más relevante y la función $g_{\phi\phi}$ puede llegar a ser negativa dependiendo de los valores de m , a y θ . Entonces, ∂_ϕ será espacial para los bloques Kerr intermedio y Kerr exterior ya que $r^+, r^- > 0$. Pero su causalidad variará en el núcleo del agujero negro.

Observemos que $g(\partial_t, \partial_t) = g_{tt} = -1 + \frac{2mr}{\rho^2}$. Se puede ver que existirán regiones tales que $g(\partial_t, \partial_t) = 0$ (donde el vector ∂_t se vuelve luminoso) y tales que $g(\partial_t, \partial_t) > 0$ (donde vector ∂_t se vuelve espacial). Estas regiones son importantes en el estudio de un agujero negro de Kerr y se las analizará más a detalle en la sección 2.5. Si $r \rightarrow \pm\infty$, se tendrá $-1 + \frac{2mr}{\rho^2} \rightarrow -1$. Es decir, para valores grandes de r^2 , el vector ∂_t se vuelve temporal. Esto no puede ser de otra manera ya que la métrica BL tiene un comportamiento asintótico similar a Minkowski y en este último, el vector coordenado ∂_t siempre es temporal.

2.3.2. Espaciotiempo Fast Kerr ($m < a$) y Kerr Extremal ($m = a$)

Ambos spaciotiempos pueden interpretarse utilizando el spaciotiempo de Slow Kerr. Tomemos primero Kerr extremal. La función Δ solo tiene la raíz $r = m$. Entonces, el spaciotiempo tendrá solo dos componentes conexas: $r > m$ llamado *exterior de agujero negro* y $r < m$ llamado *interior del agujero negro*. En este caso no existe el bloque de Kerr intermedio. La causalidad de los vectores temporales y la orientación temporal de ∂_t seguirá siendo la misma que para Slow Kerr, sabiendo que en Kerr extremal no existe el bloque Kerr intermedio.

En el caso en que $m > a$ (Fast Kerr), no existirá ninguna singularidad de coordenadas en la métrica BL. El spaciotiempo de Kerr en coordenadas BL, será en su totalidad una variedad conexa. En cuanto a la causalidad de los vectores coordenados y la orientación temporal de ∂_t en Fast Kerr, es igual a la que se encuentra en el núcleo del agujero negro para Slow Kerr. De hecho, se puede entender el caso Fast Kerr como una generalización del bloque Kerr interior de Slow Kerr, para todo valor de la coordenada radial.

2.4. Horizontes de eventos

Como se observó en la sección 2.1, la métrica de Kerr en coordenadas BL no está definida en el conjunto $H = \{p / \Delta(p) = 0\}$, pero sí existe en el spaciotiempo de Kerr-Star ampliado. En esta sección se estudiará el significado de este conjunto y se determinará su relación con respecto a las propiedades que se deben cumplir en la frontera de un agujero negro. Se utilizan las coordenadas de Kerr-Star para definir formalmente a un horizonte de eventos.

Definición 2.4.2. *Se denomina horizonte de eventos del spaciotiempo de Kerr a los subconjuntos H con $r^* = r_0^* = \text{constante}$, donde $\Delta(r_0^*) = 0$.*

En el spaciotiempo Slow-Kerr se tienen dos partes conexas del conjunto H . Esto sucede debido a la existencia de dos raíces diferentes de la función Δ , como lo muestra la ecuación (2.21). A estas partes conexas se las denomina *horizonte de eventos interior y exterior* y se las denota respectivamente como H^+ , H^- . Por otra parte, en Kerr Extremal existe un solo horizonte de eventos relacionado a la única raíz de Δ . Si analizamos las raíces de Δ , vemos que se encuentran cada vez más cerca a medida que $a \rightarrow m$. Entonces, el horizonte de eventos en Kerr Extremal

puede entenderse como un solapamiento de H^+ y H^- . La siguiente proposición nos ayudará a entender el significado de estos conjuntos.

Proposición 2.4.3. *Todo horizonte de eventos H en el espaciotiempo de Kerr es una hipersuperficie cerrada, conexa y luminosa*

Comprobación. Sea H un horizonte de eventos como lo muestra la definición 2.4.2. Se observa que el conjunto abierto del espaciotiempo de Kerr parametrizado con coordenadas Kerr-Star es difeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$. Si r_0^* es la raíz de Δ que define al horizonte de eventos H , entonces $r_0^* \neq 0$ y $\rho \neq 0$. Esto implica que el horizonte de eventos será difeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. Es decir, un horizonte de eventos será una hipersuperficie cerrada y conexa.

Veamos ahora qué causalidad tiene un horizonte de eventos. Observemos que en cualquier hipersuperficie $r^* = r_0^*$, la métrica Kerr-Star se vuelve:

$$g^* = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & g_{t\phi} \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ g_{t\phi} & 0 & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Entonces $\det(g^*) = \rho^2 (g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2)$. Sin embargo, se puede demostrar que $g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 = -\Delta \sin^2(\theta)$. Por lo tanto, si r_0^* es una raíz de la función Δ , se cumplirá que $\det(g^*) = 0$. En otras palabras la métrica es degenerada en cada horizonte de eventos y estos son de hecho hipersuperficies luminosas. Q.E.D.

Para entender cual es el comportamiento de los conos causales en un horizonte de eventos, se intentará definir primero una orientación temporal global para el espaciotiempo de Kerr en coordenadas Kerr-Star. Para ello, se considera el vector coordenado ∂_r^* . Según la métrica (2.12), se observa que este vector estará definido sobre todo el espaciotiempo de Kerr ampliado y será siempre un vector luminoso. Debido a que ∂_r^* es un vector causal y globalmente definido usando coordenadas Kerr-Star, se puede utilizar la proposición 1.4.2 para encontrar una orientación temporal global. Claramente, el vector ∂_r^* permite definir los conos causales futuros de este espaciotiempo.

Ahora bien, se esperaría que el vector coordenado ∂_t^* apuntara al futuro en una región alejada del agujero negro, como sucede en el caso del espaciotiempo de Minkowski. Sin embargo, en todo el

espaciotiempo de Kerr-Star se tiene que $g^*(\partial_t^*, \partial_r^*) > 0$. Según la proposición 1.1.9 esto implicaría que ∂_t^* apunta al pasado lejos del agujero negro. Por esta razón, se utiliza el vector $l^* = -\partial_r^*$ para definir una orientación temporal del espaciotiempo de Kerr en coordenadas Kerr-Star.

Definición 2.4.4. *En el espaciotiempo de Kerr-Star ampliado, se dice que un vector temporal v apunta al futuro si $g(v, l^*) < 0$, donde $l^* = -\partial_r^*$. El campo vectorial l^* define la orientación temporal del espaciotiempo de Kerr.*

El vector l^* permite también definir una orientación temporal sobre las regiones conexas del espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. Si se toma Ψ como la isometría definida en la proposición 2.1.2, se tiene que $d\Psi^{-1}(\partial_\theta^*) = \partial_\theta$ y $d\Psi^{-1}(\partial_\phi^*) = \partial_\phi$. Por lo que los vectores ∂_θ^* , ∂_ϕ^* escritos en coordenadas BL son exactamente ∂_θ y ∂_ϕ . Se define ahora el vector V sobre el espaciotiempo de Kerr de manera que en coordenadas Kerr-Star se escribe como $V = V^* = ((r^*)^2 + a^2) \partial_t^* + a \partial_\phi^*$. Utilizando el mapa $d\Psi^{-1}$ se puede observar que este campo vectorial puede escribirse en coordenadas BL como $V = (r^2 + a^2) \partial_t + a \partial_\phi$, sobre cada una de sus componentes conexas. Debido a que la forma del vector V no difiere entre las coordenadas BL y Kerr-Star, en adelante se utilizará V indistintamente en ambos sistemas para referirnos a él.

Usando la definición del vector V se puede encontrar que $d\Psi^{-1}(l^*) = \frac{1}{\Delta} V - \partial_r$ en cada componente conexa de la métrica BL. Se puede observar que en los horizonte de eventos, este vector no estará definido en coordenadas BL. Sin embargo, es posible utilizar a este vector sobre cada componente conexa para definir una orientación temporal.

Definición 2.4.5. *En el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL, se dice que un vector temporal v apunta al futuro si $g(v, l) < 0$, donde $l = d\Psi^{-1}(l^*) = \frac{1}{\Delta} V - \partial_r$.*

En base a la definición anterior, es fácil demostrar que el vector coordenado ∂_t en coordenadas BL apunta al futuro cuando es temporal. Para ello, se puede ver que $g(l, \partial_t) = \frac{1}{\Delta} g(V, \partial_t) = -1$. Entonces, por el teorema 1.1.9 ∂_t apuntará al futuro en las regiones en que éste sea temporal. Por ende, los conos futuros pueden también caracterizarse usando ∂_t siempre y cuando éste sea temporal en la región que se quiera estudiar.

Recordemos que un espaciotiempo es una variedad lorentziana de cuatro dimensiones. Debido a esto, existirán dos vectores luminosos linealmente independientes que estarán definidos sobre

todo el espaciotiempo. Se puede observar que l^* es uno de dichos vectores si se utilizan las coordenadas Kerr-Star. El siguiente resultado indica cuál es el otro vector luminoso globalmente definido.

Proposición 2.4.6. *El vector $k^* = \frac{\Delta}{2}\partial_r^* + V$ es un vector luminoso sobre todo el espaciotiempo de Kerr-Star ampliado y es linealmente independiente a l^* .*

Comprobación. Se toma $g^*(k^*, k^*)$. Debido a que ∂_r^* es un vector luminoso, se tiene que $g^*(k^*, k^*) = \Delta g^*(\partial_r^*, V) + g^*(V, V)$. Además, debido a que la función Ψ definida en la proposición 2.1.2 es una isometría, se tiene que $g^*(V, V) = g(d\Psi^{-1}(V), d\Psi^{-1}(V)) = g(V, V)$ y $g^*(\partial_r^*, V) = g(d\Psi^{-1}(\partial_r^*), d\Psi^{-1}(V)) = -\frac{1}{\Delta}g(V, V)$. Entonces, $g^*(k^*, k^*) = 0$ sobre la imagen de cada componente conexa. Sin embargo, en Kerr-Star ampliado g^* es continua en los horizontes de eventos. Entonces, $g^*(k^*, k^*) = 0$ en todo Kerr-Star ampliado. Por otra parte, se observa que $g^*(l^*, k^*) = -g^*(\partial_r^*, V) = -\rho^2 < 0$. Entonces, los resultados de la sección 1.3.1 implican que l^* y k^* son linealmente independientes y están en el mismo cono causal. Q.E.D.

Debido a la definición de un horizonte de eventos H , dr^* será normal al espacio vectorial $T_p H$ para todo $p \in H$. Se puede demostrar que $\uparrow(dr^*) = \frac{1}{\rho^2}V$ y por ende se tendrá que $dr^*(V) = \frac{1}{\rho^2}g^*(V, V)$. Ya que $g^*(V, V) = -\Delta\rho^2$ y en un horizonte de eventos $\Delta = 0$, entonces se tendrá que $dr^*(V) = 0$. Es decir $V \in T_p H$ y será luminoso en todo $p \in H$. Por la proposición 1.3.12, V es entonces el único vector luminoso tangente y normal a H .

Los vectores l^* y k^* juegan un papel importante en el espaciotiempo de Kerr-Star ampliado. Las curvas integrales de l^* representan rayos de luz que se dirigen al interior del agujero negro, mientras que las curvas integrales de k^* representan a rayos de luz que salen del agujero negro. Ambos vectores también determinan la frontera de los conos causales y por ende su evolución en el espaciotiempo [10, 18]. Para entender mejor estas propiedades se calculan la proyecciones de las curvas integrales de ambos vectores en el plano $r^* - t^*$ y para los casos Slow Kerr y Kerr Extremal (no se calcula para el caso Fast Kerr ya que no tiene un horizonte de eventos y como se verá en la sección 2.4.1 no representa un espaciotiempo con un agujero negro). A las curvas integrales de estos vectores se las denomina *curvas luminosas principales*.

Proposición 2.4.7. *La proyección en el plano $r^* - t^*$ de la curvas luminosas principales de los*

vectores l^* y k^* , siguen respectivamente las ecuaciones:

- $t^*(r^*) = t_0^*$, donde $t_0^* \in \mathbb{R}$ es una constante;
- $t^*(r^*) = 2r^* + \frac{4m}{(r^+ - r^-)} (r^+ \ln(|r^* - r^+|) - r^- \ln(|r^* - r^-|)) + t_0^*$ en el caso *Slow Kerr* y $t^*(r^*) = 2r^* + 4m \ln(|r^* - m|) - \frac{4m}{r^* - m} + t_0^*$ en el caso *Kerr Extremal*, donde $t_0^* \in \mathbb{R}$ es una constante.

Comprobación. Se recuerda que las curvas integrales γ se encuentran igualando su campo de velocidades con el campo vectorial que se quiere analizar. Debido a que se quiere calcular la proyección de las curvas principales en el plano $r^* - t^*$ se puede tomar $\tau(r^*)$, donde τ es el parámetro de la curva. Entonces, se tendrá que $t^*(\tau) = t^*(\tau(r^*))$ y utilizando la regla de la cadena se obtiene $\frac{dt^*}{d\tau} = \frac{dt^*}{dr^*} \frac{dr^*}{d\tau}$. Para el vector $l^* = -\partial_r^*$, se observa que $\frac{dr^*}{d\tau} = -1$ y $\frac{dt^*}{d\tau} = 0$. Entonces, $\frac{dt^*}{dr^*} = 0$.

Para el vector $k^* = \frac{\Delta}{2} \partial_r^* + V$, se puede ver que $\frac{dr^*}{d\tau} = \frac{\Delta}{2}$ y $\frac{dt^*}{d\tau} = (r^*)^2 + a^2$. Es decir, se tendrá:

$$\frac{dt^*}{dr^*} = 2 \frac{(r^*)^2 + a^2}{\Delta}, \quad (2.23)$$

La ecuación anterior tendrá diferentes soluciones dependiendo del número de raíces de Δ . En el caso *Slow Kerr*, esta función puede escribirse como $\Delta = (r^* - r^-)(r^* - r^+)$ y en el caso *Kerr Extremal* como $\Delta = (r^* - m)^2$. La proposición se comprueba entonces reemplazando ambas expresiones de la función Δ en la ecuación diferencial (2.23) y resolviéndola. Q.E.D.

Usando la proposición anterior, se puede obtener un gráfico de las curvas luminosas principales en el caso *Slow Kerr*. Esto se muestra en la Figura 2.1. En ella se muestra también como se relacionan los vectores l^* y k^* con los conos de luz futuros en el espaciotiempo de *Kerr-Star* ampliado. Las curvas integrales en el caso *Kerr Extremal* son similares a las mostradas en esta figura sin tener en cuenta el bloque de *Kerr* intermedio.

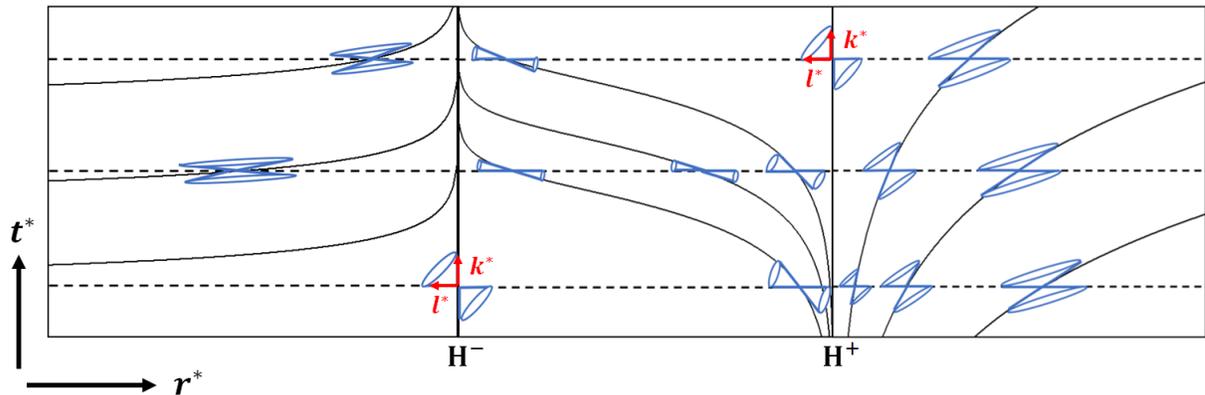


Figura 2.1: Comportamiento de conos causales cerca de un horizonte de eventos. Forma de los conos futuros y pasados a lo largo de un horizonte de eventos. En la Figura se muestra como los vectores l^* y k^* se encuentran relacionados con las fronteras de los conos causales futuro

La Figura anterior nos permite ver que los conos de luz se curvan a medida que se acercan al horizonte de eventos, de manera que tienden a apuntar hacia el interior del agujero negro. Entonces, cualquier curva temporal γ que atravesase en algún tiempo finito τ un horizonte de eventos H , solo podrá realizarlo en la dirección decreciente de la coordenada radial. Es decir, que ninguna observador que apunte al futuro en el espaciotiempo de Kerr podrá escapar del interior del agujero negro, una vez que haya pasado por H . Éste es uno de los resultados más interesantes que se tiene para este tipo de objetos, ya que esto implica que los campos de velocidades de toda curva temporal o luminosa γ que se dirija al futuro solo puede atravesar un horizonte de eventos en una dirección específica. Los observadores se dirigirán siempre a la región del interior del agujero negro.

Ahora bien, si se imagina que γ es un cohete que envía ondas de luz hacia un sensor ubicado en la Tierra, este último solo detectará información antes de que el primero traspase el horizonte de eventos. Para el sensor, el espaciotiempo más allá del horizonte de evento se verá como una especie de hoyo que nunca revela información acerca de si mismo. Es debido a esta propiedad que este objeto lleva el nombre de agujero negro. Para observadores afuera del agujero negro, el cohete simplemente desaparecerá de su universo visible y será imposible determinar su ubicación.

2.4.1. Hipótesis de Censura Cósmica y Singularidades Desnudas en Kerr

Se puede observar una característica singular que tiene el caso Fast Kerr. En la sección anterior se observó que ninguna señal puede traspasar el horizonte de eventos hacia el exterior de un agujero negro. Por otro lado, debido a que la curvatura del espaciotiempo se hace cada vez más grande cerca de una singularidad, en esta región falla la causalidad y determinismo de las leyes físicas no cuánticas. Con esta motivación, Roger Penrose en 1969 propuso la denominada *hipótesis de censura cósmica débil* para evitar perder estas propiedades. Ésta determina que en un universo físico, una singularidad real no debería ser visible para un observador alejado de ella. Debe ser necesaria la existencia de un horizonte de eventos en el universo, que le impida a este observador realizar mediciones de esta región del espaciotiempo. Si se llama singularidad desnuda a aquella que no se encuentra rodeada por un horizontes de eventos, la hipótesis de censura cósmica débil se puede escribir como: no existen singularidades desnudas en el universo [3, 19].

Para un agujero negro en Fast Kerr, la función Δ no tiene raíces. Entonces, no existirá en este caso ningún horizonte de eventos que envuelva a la singularidad real [10]. Es decir, se tendrá una singularidad desnuda en el universo. Si se asume cierta la hipótesis de censura cósmica, esto nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, no existe un sentido físico claro del significado del espaciotiempo en Fast Kerr.

2.5. La Ergoesfera

Como se observó en la sección 2.3, la causalidad del vector ∂_t depende del comportamiento de la función g_{tt} . Es posible tomar a g_{tt} como una función sobre el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. Podemos observar que existirá una región en el espaciotiempo donde $g_{tt} > 0$ y el vector ∂_t se vuelva espacial. Debido a esto, podemos utilizar la siguiente definición.

Definición 2.5.1. *Al conjunto abierto del espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL donde el vector ∂_t se vuelve espacial se la denomina ergoesfera.*

Al igual que se mencionó con relación al vector ∂_r en la sección anterior, el hecho de que exista una ergoesfera es una contradicción si se lo observa desde el punto de vista de las teorías

no relativistas. Se esperaría que el vector ∂_t siempre fuera temporal, ya que t hace referencia al tiempo medido por un observador lejos de un agujero negro. Sin embargo, en la Teoría de la Relatividad General t representa únicamente una coordenada que se utiliza para parametrizar el espaciotiempo. No existe aquí un concepto de tiempo absoluto como lo tiene la teoría newtoniana.

Para entender la naturaleza de la ergoesfera y sus propiedades, se empezará por estudiar las raíces de g_{tt} en función de la coordenada radial y la coordenada polar.

La ecuación $g_{tt} = 0$ admite dos posibles soluciones. Éstas son:

$$r_E^\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2(\theta)} \quad (2.24)$$

De la misma manera que se utilizaban las raíces de Δ para definir los horizontes de eventos, se puede usar el resultado anterior para encontrar otro tipo de hipersuperficies.

Proposición 2.5.2. *La región E_r del espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL tal que $g_{tt}(p) = 0$ para todo $p \in E_r$ es una hipersuperficie cerrada y se denomina frontera de la ergoesfera.*

Comprobación. Se observa que la función g_{tt} es infinitamente diferenciable y en los puntos donde $g_{tt} = 0$ la diferencial dg_{tt} no se anulan. Entonces, al usar la proposición 1.2.25 podemos observar que la región donde $g_{tt} = 0$ representa una hipersuperficie cerrada del espaciotiempo de Kerr. Q.E.D.

La ecuación (2.23) nos muestra que existirán dos subconjuntos conexos de E_r . Estos se denominan *frontera exterior de la ergoesfera* E_r^+ si $r_E^+ = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2(\theta)}$ y *frontera interior de la ergoesfera* E_r^- cuando $r_E^- = m - \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2(\theta)}$. En los casos de Slow Kerr y Kerr Extremal, la ecuación (2.24) determina que E_r^- se encontrará entre $0 < r < r^-$ y E_r^+ se encontrará entre $r^+ < r < 2m$ (se recuerda que en el caso de Kerr Extremal $r^+ = r^-$). Es decir, en esos casos la fronteras internas y externas de la ergoesfera estarán ubicadas en los bloques Kerr interior y Kerr exterior. Ahora bien, si $g_{tt} = 0$, entonces $-\rho^2 + 2mr = 0$. Si $\theta \rightarrow 0$ o $\theta \rightarrow \pi$, esta condición se transforma en $\Delta \rightarrow 0$. Por lo tanto, las fronteras de la ergoesfera y los horizontes de eventos se juntan cada vez más a medida que se acerquen al eje polar.

La forma de la ergoesfera dependerá de los valores de a y m . En los casos de Slow Kerr y Kerr extremal, las fronteras de la ergoesfera estarán definidas para cualquier valor de la coorde-

nada polar θ . Para estos espaciotiempos, la ergoesfera comprenderá la totalidad del bloque Kerr intermedio (en Slow Kerr), al igual que una sección de los bloques Kerr interior y Kerr exterior. Sin embargo, para Fast Kerr, las fronteras de la ergoesfera no estarán definidas para todos los valores de θ . Solo existirán fronteras para los valores de θ , donde $|\cos(\theta)| \leq m$. Las Figuras 2.2, 2.3 y 2.4 muestran la forma de la ergoesfera en un diagrama exponencial para la función r y para diferentes valores de a y m , en una sección del espaciotiempo con $\phi = \text{constante}$ y $t = \text{constante}$.

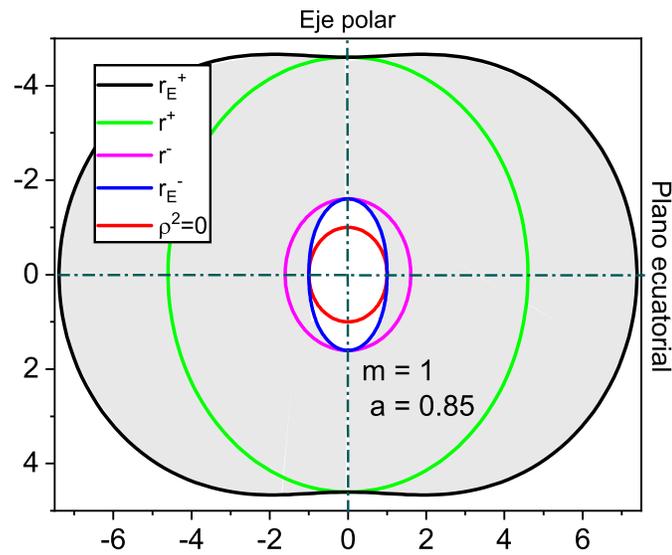


Figura 2.2: Horizontes de eventos y ergoesfera en el espaciotiempo Slow Kerr. La Figura muestra un diagrama polar sobre la función e^r en una sección $\phi = \text{constante}$ y $t = \text{constante}$ del espaciotiempo. La zona sombreada representa a la ergoesfera.

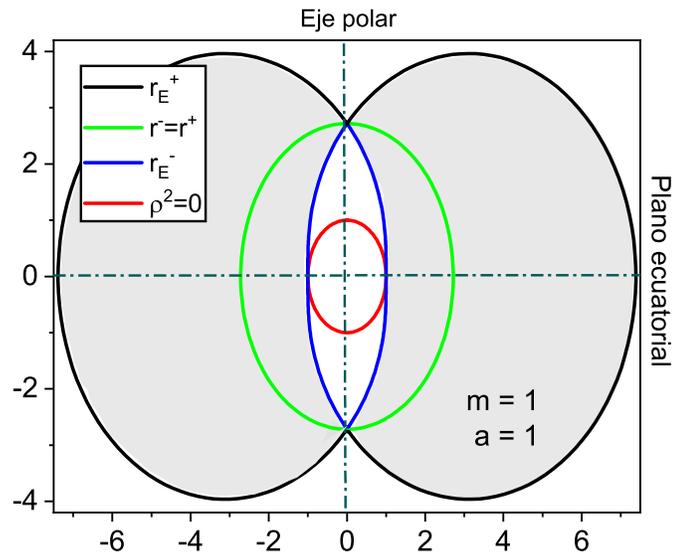


Figura 2.3: Horizontes de eventos y ergoesfera en el espaciotiempo Kerr Extremal. La Figura muestra un diagrama polar sobre la función e^r en una sección $\phi = \text{constante}$ y $t = \text{constante}$ del espaciotiempo. La zona sombreada representa a la ergoesfera.

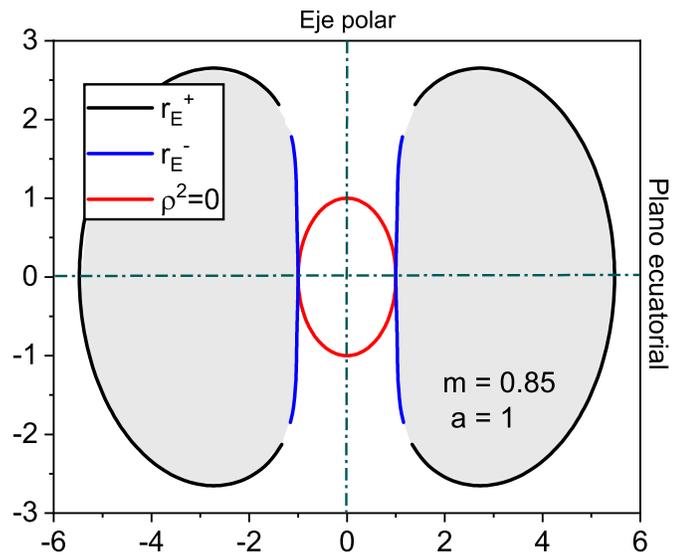


Figura 2.4: Horizontes de eventos y ergoesfera en el espaciotiempo Fast Kerr. La Figura muestra un diagrama polar sobre la función e^r en una sección $\phi = \text{constante}$ y $t = \text{constante}$ del espaciotiempo. La zona sombreada representa a la ergoesfera.

La naturaleza causal de E_r se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.3. *La frontera de la ergoesfera E_r es una hipersuperficie temporal del espacio-tiempo de Kerr.*

Comprobación. Por la proposición 2.5.2, la 1-forma dg_{tt} será normal a E_r . Si se toma $h = \rho^2 g_{tt}$, se puede ver que en la frontera de la ergoesfera $dh = \rho^2 dg_{tt}$. Esto quiere decir que dh será también normal a E_r . Por otra parte, se observa que:

$$dh = 2(m - r) dr - 2a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta$$

Ahora bien, el vector $\uparrow(dh)$ será siempre ortogonal a la frontera de la ergoesfera. Al utilizar la métrica BL inversa mostrada en el Apéndice A, se puede observar que:

$$g(\uparrow(dh), \uparrow(dh)) = g^{-1}(dh, dh) = \frac{4\Delta}{\rho^2} (m - r_e)^2 + 4 \frac{[a^2 \cos(\theta) \sin(\theta)]^2}{\rho^2}$$

En el caso de Fast Kerr, la función Δ será positiva en todo el espaciotiempo. Para los espaciotiempos de Slow Kerr y Kerr extremal, se tiene que la frontera interior se encuentra localizada entre $r = 0$ y $r = r^-$ (bloque Kerr interior); mientras que la frontera exterior se encuentra entre $r = r^+$ y $r = 2m$ (bloque Kerr exterior). En ambas secciones del espaciotiempo se cumple que $\Delta > 0$; por lo tanto $g(\uparrow(dh), \uparrow(dh)) > 0$. Es decir, el vector $\uparrow(dh)$ será siempre espacial en E_r . Finalmente, usando la proposición 1.1.13 y el hecho de que $\uparrow(dh)$ es normal a E_r , se encuentra que la frontera de la ergoesfera es una hipersuperficie temporal. Q.E.D.

2.5.1. Rotación del agujero negro y procesos de Penrose

La existencia de la ergoesfera y su frontera en el espaciotiempo de Kerr no sólo tiene su importancia en el hecho de que contradice las nociones clásicas de tiempo (la coordenada t deja de tener un análogo newtoniano en esta sección). Existen otras propiedades interesantes cuya interpretación física son de mayor relevancia.

Para entender estas propiedades, se toma la región del espaciotiempo donde la ergoesfera y el exterior del agujero negro se intersecan. En ella es posible observar las consecuencias que se

obtienen debido a la rotación del mismo. Antes de observar esto se probará el siguiente Lema [10].

Lema 2.5.4. *Sea $\gamma = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ una curva temporal que apunta al futuro en el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. Entonces $\dot{t} > 0$ siempre que γ se encuentre en el exterior del agujero negro.*

Comprobación. Se toma para iniciar la 1-forma dt . Al usar la métrica BL inversa mostrada en el apéndice A, se puede ver que $g(\uparrow(dt), \uparrow(dt)) = g^{-1}(dt, dt) = -\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta \sin^2(\theta)}$. Esta función es negativa en el exterior del agujero negro. Entonces, $\uparrow(dt)$ es un vector temporal en esta región. Al usar la definición 1.2.8 de la función \uparrow , se puede encontrar que

$$\uparrow(dt) = -\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta \sin^2\theta} \partial_t + \frac{g_{\phi t}}{\Delta \sin^2\theta} \partial_\phi \quad (2.25)$$

Se recuerda ahora que el vector l es luminoso y apunta al futuro. Al usar la proposición 1.1.9 encontramos entonces que $\uparrow(dt)$ es un vector que apunta al pasado en Kerr exterior, ya que $g(l, \uparrow(dt)) > 0$. Sea ahora $\gamma = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ una curva futura en el espaciotiempo de Kerr. Entonces, la proposición 1.1.9 determina que $g(\uparrow(dt), \dot{\gamma}) > 0$. Además, $g(\uparrow(dt), \dot{\gamma}) = \dot{t}$. Por ende, se tendrá que $\dot{t} > 0$ siempre que γ este en el exterior del agujero negro. Q.E.D.

Proposición 2.5.5. *Sea $\gamma = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ una curva temporal que apunta al futuro en la región donde se intersecan la ergoesfera y el exterior del agujero negro. Entonces, $\dot{\phi}$ será monótona y positiva [10].*

Comprobación. Debido a que γ es temporal, se tiene que:

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \sum_i g_{ii} (\dot{x}^i)^2 + 2g_{\phi t} \dot{\phi} \dot{t} < 0 \quad (2.26)$$

Donde la sumatoria de i se realiza sobre las coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Si γ está en el exterior del agujero negro, se tendrá que g_{rr} , $g_{\theta\theta}$ y $g_{\phi\phi}$ serán todas positivas. Por otra parte, ya que γ se encuentra en la ergoesfera, $g_{tt} > 0$. Si la expresión (2.26) se cumple, entonces $2g_{\phi t} \dot{\phi} \dot{t} < 0$. Sin embargo, en el exterior del agujero negro $g_{\phi t} < 0$ y por el Lema 2.5.4 también se tendrá que $\dot{t} > 0$. Por lo tanto, se concluye que $\dot{\phi} > 0$. Q.E.D.

El resultado anterior permite mostrar una propiedad importante de los observadores que se

encuentran cerca de un agujero negro de Kerr. Recordemos que la frontera de la ergoesfera no es un horizonte de eventos. Esto quiere decir que un observador que traspase la ergoesfera en una dirección podrá volver a salir de ella por otra dirección. Sin embargo, el momento que éste traspase la frontera de la ergoesfera, experimentará inevitablemente una rotación monótona y positiva con respecto a su coordenada ϕ . Esta especie de arrastre que sentirá se debe a la existencia de una rotación no nula del agujero negro. De esta forma, la ergoesfera puede entenderse como la sección del espaciotiempo donde los efectos rotacionales del agujero negro dejan de ser despreciables. Un observador en esta región puede tener la energía suficiente para contrarrestar el campo gravitatorio del agujero negro, pero no podrá evitar sufrir el arrastre debido a su movimiento rotacional [4, 10].

En el caso de Slow Kerr o Kerr Extremal, se podría tener una partícula material que evitara caer en el primer horizonte de eventos r^+ , pero no en la ergoesfera. El arrastre que experimentaría esta partícula al entrar a la ergoesfera generaría un aumento del momento angular total del universo. Sin embargo, si se asume que el momento angular total debe conservarse, el momento angular del agujero negro debe decrecer. Esto implica que el agujero negro tendrá una energía rotacional menor. Si se supone ahora que la partícula material decae en dos diferentes partes, donde la una cae en el interior del horizonte de eventos y la otra sale de la ergoesfera; se observará que ésta última se lleva un poco de la energía rotacional inicial del agujero negro y por ende parte de su información. Por esta razón, se le llama a la intersección de la ergoesfera y el exterior del agujero negro como *ergoregión*. A este fenómeno se lo denomina proceso de Penrose y es una de los fundamentos de lo que en la actualidad se llama Termodinámica de agujeros negros [4, 14, 3].

2.6. Viajes en el tiempo

Existen ciertas propiedades intrigantes y que muestran el carácter poco intuitivo de las leyes físicas en el interior de un agujero negro de Kerr. Dentro del agujero negro, no solo los vectores coordenados pueden cambiar su causalidad, también se pueden realizar viajes en el tiempo. Para entender por dónde se empezará a estudiar este fenómeno, se recuerda que el vector ∂_t apunta al futuro en las regiones donde es temporal. En ellas, la coordenada t puede interpretarse como el tiempo que mide un observador muy alejado del agujero negro. Ahora bien, si suponemos que

α es una curva temporal, que apunta al futuro y que esta fija en alguna de estas regiones. Si la coordenada t de α es decreciente en algún intervalo, entonces una persona viajando sobre esta curva vería que viajó al pasado del observador muy alejado del agujero negro. En esta sección se mostrará que de hecho esta clase de fenómenos existen (al menos matemáticamente), en el bloque Kerr interior de un agujero negro. Para ello, se considera primero la siguiente definición.

Definición 2.6.1. *El sector del espaciotiempo de Kerr donde ∂_ϕ se vuelve temporal se denomina maquina del tiempo de Carter y se lo denota con la letra \mathcal{F} .*

Es precisamente en la región \mathcal{F} que pueden producirse viajes en el tiempo y la definición anterior indica que esto se produce debido a que existen regiones en que ∂_ϕ es temporal. Recordemos que esto sucede cuando r es cercano a -1 , es decir, en el bloque Kerr interior. Es decir, la maquina de tiempo de Carter y los viajes en el tiempo se encuentran en este bloque. La siguiente proposición muestra un ejemplo de una curva α que representa a un viaje en el tiempo hacia el pasado en Kerr interior [10].

Proposición 2.6.3. *Sea $p_0 = (t_0, r_0, \frac{\pi}{2}, \phi_0)$ un evento en la región \mathcal{F} . Entonces, existe un número real positivo B tal que la curva $\alpha = (t_0 - \tau, r_0, \frac{\pi}{2}, \phi_0 - B\tau) \in \mathcal{F}$ es temporal, apunta al futuro y $t(\tau)$ será siempre decreciente .*

Comprobación. El carácter causal del vector ∂_ϕ depende del signo de la función $g_{\phi\phi}$ y esta última sólo depende de las coordenadas r y θ . Ya que la curva α mantiene estas coordenadas constanes, entonces $\alpha(\tau) \in \mathcal{F}$ para todo τ . Se puede ver que $\dot{\alpha}(\tau) = -\partial_t - B\partial_\phi$. Entonces se tiene:

$$g(\alpha, \alpha) = B^2 g_{\phi\phi} + 2B g_{\phi t} + g_{tt}. \quad (2.27)$$

Por otra parte, se recuerda que en coordenadas BL, el vector l determina la orientación temporal hacia el futuro del espaciotiempo. Entonces se observa que:

$$g(l, \alpha) = \frac{1}{\Delta} g(V, \dot{\alpha}) = -B a + 1 \quad (2.28)$$

Ya que α se encuentra siempre en la maquina de tiempo de Carter, entonces $g_{\phi\phi}$ será siempre

constante y negativo. Entonces, para un valor B lo suficientemente grande, las ecuaciones (2.27) y (2.28) serán negativas para todo τ . Por ende, para este valor la curva α será temporal y apuntará al futuro. Finalmente, se comprueba que $t(\tau)$ será decreciente ya que $\frac{dt}{d\tau} < 0$ para todo τ . Q.E.D.

El resultado anterior muestra la razón de llamar al espacio \mathcal{F} como máquina del tiempo de Carter. Dentro de esta región la coordenada t representa al tiempo medido por un observador muy alejado del agujero negro. Entonces, la proposición 2.6.3 nos indica que existen observadores que pueden viajar en el tiempo hacia el pasado. Esto es un resultado muy interesante y muestra lo extraño que resulta el concepto de causalidad en Relatividad General. Si bien este resultado surge como una solución matemática en el espaciotiempo de Kerr, el hecho de que algún observador real pueda experimentar este tipo de viajes no resulta tan factible. La máquina del tiempo \mathcal{F} se encuentra en una región muy cercana a la singularidad. En ella, los efectos gravitatorios son tan intensos que cualquier cohete se despedazaría [1].

3. Aceleración Uniforme en Relatividad General

En mecánica clásica, para entender el movimiento uniformemente acelerado es suficiente con conocer la dirección de la aceleración y su módulo en un instante cualquiera. Debido a que de forma clásica los cuerpos se mueven en un espacio euclideo, la aceleración no cambiará de magnitud en todo el movimiento. Esto es diferente en Relatividad General, ya que la curvatura del espaciotiempo cambiará la dirección de la aceleración. Para entender el movimiento uniformemente acelerado en Relatividad General, es necesario entender primero la estructura matemática que existe detrás del mismo y que permite satisfacer la propiedad de «invarianza» en la dirección de la aceleración. En esta sección se estudiará dicha estructura y se la utilizará para obtener resultados generales cuando se trabaja sobre espaciotiempos asintóticamente planos.

3.1. Conexión de Fermi-Walker

Se asume que se tiene un espaciotiempo (M, g) .

Definición 3.1.1. Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva temporal en el espaciotiempo (M, g) . Se definen los subespacios vectoriales $T_\tau \subseteq T_{\gamma(\tau)}M$ y $R_\tau \subseteq T_{\gamma(\tau)}M$, tal que $T_\tau = \text{gen} \{ \dot{\gamma}(\tau) \}$ y $R_\tau = T_\tau^\perp$ para todo $\tau \in I$. Al subespacio R_τ se lo denomina espacio en reposo instantáneo.

Los subespacios anteriores cumplirán con el siguiente Lema [8].

Lema 3.1.2. Sea $\gamma(\tau)$ una curva temporal en el espaciotiempo (M, g) . Entonces:

- $T_\tau \oplus R_\tau = T_{\gamma(\tau)}M$ para todo τ ;
- R_τ es un espacio vectorial euclideo de dimensión $n - 1$ y $T_\tau = R_\tau^\perp$.

Comprobación. Sea γ una curva temporal a lo largo de M . Ya que γ es un observador, entonces $\dot{\gamma}$ será un vector temporal tal que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$. Ya que (M, g) es un espaciotiempo, se puede encontrar una base ortogonal de vectores $\{ \dot{\gamma}, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \}$, tal que $\text{gen} \left(\frac{\dot{\gamma}(\tau)}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right) = T_{\gamma(\tau)}M$ para todo τ . La proposición quedará demostrada al tomar $T_\tau = \text{gen} \left(\frac{\dot{\gamma}(\tau)}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \right)$ y $R_\tau = \text{gen} (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.
Q.E.D.

El resultado anterior indica que todo campo vectorial \vec{v} definido en $T_{\gamma(\tau)}M$, puede descomponerse de tal forma que $\vec{v}^T \in T_\tau$ y $\vec{v}^R \in R_\tau$. El espacio R_τ puede entenderse como el universo espacial que observa γ en un instante τ fijo [8].

Para entender el movimiento uniformemente acelerado, es necesario definir una conexión diferente a la de Levi-Civita. Para ello, se considera primero el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3. *Sea ∇ la conexión de Levi-Civita del espaciotiempo (M, g) y $\gamma(\tau)$ una curva temporal sobre la misma. Entonces, existe una única conexión $\hat{\nabla}$ definida sobre γ tal que:*

$$\hat{\nabla}_Y Z = (\nabla_Y Z^T)^T + (\nabla_Y Z^R)^R \quad (3.1)$$

Para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$ y donde Z^T, Z^R son los campos vectoriales definidos como las proyecciones de Z sobre los espacios T_τ, R_τ . A esta conexión se la denomina Conexión de Fermi-Walker.

Esta proposición permite derivar las siguientes propiedades con respecto a la conexión de Fermi-Walker.

- $\hat{\nabla}_Y Z^T = (\nabla_Y Z^T)^T$, para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$.
- $\hat{\nabla}_Y Z^R = (\nabla_Y Z^R)^R$, para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Es decir, la conexión de Fermi-Walker preserva los subespacios T_τ y R_τ a lo largo de la curva γ .

Definición 3.1.4. *Sea $\gamma(\tau)$ una curva temporal en la variedad (M, g) y $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Se define $\frac{\hat{D}Y}{d\tau}$ como $\frac{\hat{D}Y}{d\tau} = \hat{\nabla}_{\dot{\gamma}} Y$, donde $\hat{\nabla}$ es la conexión de Fermi-Walker definida a lo largo de γ .*

La conexión de Fermi-Walker se relaciona con la conexión de Levi-Civita mediante el siguiente resultado [20, 8].

Proposición 3.1.5. *Sea $\gamma(\tau)$ una curva temporal en el espaciotiempo (M, g) . Si ∇ es la conexión de Levi-Civita definida sobre M y $\hat{\nabla}$ la conexión de Fermi-Walker definida sobre γ , entonces:*

- $\frac{\hat{D}Y}{d\tau} = \frac{DY}{d\tau} + g(\dot{\gamma}, Y) \frac{D\dot{\gamma}}{d\tau} - g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{d\tau}, Y\right) \dot{\gamma}$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$.
- $\frac{\hat{D}}{d\tau} = \frac{D}{d\tau}$ si y solo si γ es una geodésica.

La proposición anterior nos permite ver que si la curva resulta ser una geodésica ambas conexiones coinciden, lo que se espera de una conexión que no introduce una estructura diferente sobre las geodésicas del espaciotiempo.

De manera análoga con la conexión de Levi-Civita, es posible definir un transporte paralelo de un vector mediante la definición del operador \hat{D} .

Definición 3.1.6. Sea $\gamma(\tau)$ una curva temporal en el espaciotiempo (M, g) y $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Se dice que Y es Fermi-Walker paralelo si $\hat{D}Y = 0$ a lo largo de γ .

En base a la definición anterior, es posible encontrar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.7. El campo de vectores tangentes a un observador es siempre Fermi-Walker paralelo .

Comprobación. Tomemos el campo de velocidades $\dot{\gamma}$ de una curva γ que representa a un observador en el espaciotiempo. En este caso, se tiene que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1$ y esto implica que $g(a, \dot{\gamma}) = 0$. Al usar estas propiedades y la proposición 3.1.5, se puede observar que $\hat{D}\dot{\gamma} = 0$. Q.E.D.

3.2. Movimiento Uniformemente Acelerado

En la sección anterior se pudo determinar que todo observador γ cumple que su campo de velocidades es Fermi-Walker paralelo. Sin embargo, ¿qué sucede con el vector aceleración y qué relación tiene con el transporte paralelo de la conexión de Fermi-Walker? Para entender esto se considera primero la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Sea $\gamma(\tau)$ una curva temporal en el espaciotiempo (M, g) y $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Si $\frac{DX}{d\tau}$ es Fermi-Walker paralelo, entonces la cantidad $g\left(\frac{DX}{d\tau}, \frac{DX}{d\tau}\right)$ será constante.

Comprobación. Si $\frac{DX}{d\tau}$ es Fermi-Walker paralelo, entonces al tomar $Y = \frac{DX}{d\tau}$ en la proposición 3.1.5 se puede encontrar que:

$$\frac{D^2X}{d\tau^2} = g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{d\tau}, \frac{DX}{d\tau}\right)\dot{\gamma} - g\left(\dot{\gamma}, \frac{DX}{d\tau}\right)\frac{D\dot{\gamma}}{d\tau} \quad (3.2)$$

Se toma el término $g\left(\frac{D^2X}{D\tau^2}, \frac{DX}{D\tau}\right)$. Al utilizar la ecuación anterior, se puede determinar que $g\left(\frac{D^2X}{D\tau^2}, \frac{DX}{D\tau}\right) = 0$. Además, se observa que:

$$g\left(\frac{D^2X}{D\tau^2}, \frac{DX}{D\tau}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} g\left(\frac{DX}{D\tau}, \frac{DX}{D\tau}\right)$$

Por lo tanto, $\frac{d}{d\tau} g\left(\frac{DX}{D\tau}, \frac{DX}{D\tau}\right) = 0$. Es decir, $g\left(\frac{DX}{D\tau}, \frac{DX}{D\tau}\right) = \text{constante}$. Q.E.D.

Si se toma a X como la velocidad de una curva γ , el resultado anterior permite obtener el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. *Sea $\gamma(\tau)$ una curva temporal en el espaciotiempo (M, g) . Si $\vec{a} = \frac{D\dot{\gamma}}{d\tau}$ es Fermi-Walker paralela, entonces:*

$$g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha = \text{constante} \quad (3.3)$$

El corolario 3.2.2 muestra la razón de definir el movimiento uniformemente acelerado utilizando la noción del transporte paralelo de Fermi-Walker. Al ser la aceleración de una curva γ Fermi-walker paralela, ésta cumplirá que su modulo será constante para todo punto sobre la curva. Si se entiende también al transporte paralelo de Fermi-Walker como una forma de mantener la dirección de los campos vectoriales a lo largo de la curva, entonces se puede decir que la aceleración de una curva con aceleración uniforme será también constante. Precisamente esto es algo similar a lo que sucede si se estudia movimiento uniformemente acelerado en mecánica newtoniana..

Definición 3.2.3. *Sea $\gamma(\tau)$ una curva temporal en el espaciotiempo (M, g) . Se dice que γ tiene un movimiento uniformemente acelerado (UA) si su aceleración es Fermi-Walker paralela. Es decir, si $\frac{\hat{D}}{D\tau}\left(\frac{D\dot{\gamma}}{Dt}\right) = 0$ a lo largo de γ .*

En el caso de que γ sea un observador, el movimiento UA toma una forma más sencilla.

Proposición 3.2.4. *Sea $\gamma(\tau)$ un observador en el espaciotiempo (M, g) . Si γ tiene un movimiento UA, entonces:*

$$\frac{D\vec{a}}{D\tau} = \frac{D^2\dot{\gamma}}{D\tau^2} = \alpha\dot{\gamma} \quad (3.4)$$

donde $\alpha = g(\vec{a}, \vec{a}) = \text{constante}$.

Comprobación. Si γ es un observador cumplirá que $g(\vec{a}, \dot{\gamma}) = 0$. Además, ya que γ tiene movimiento UA, su aceleración será Fermi-Walker paralela. Al tomar entonces $X = \dot{\gamma}$ en la ecuación (3.2), se puede encontrar fácilmente la ecuación (3.4). Q.E.D.

Al utilizar los resultados anteriores, se puede determinar que resolver el problema del movimiento UA para un observador γ se reduce a resolver el problema de ecuaciones diferenciales determinado por la expresión (3.4) y las condiciones iniciales $\gamma(\tau_0) = \gamma_0$, $\dot{\gamma}(\tau_0) = \dot{\gamma}_0$, $\vec{a}(\tau_0) = \vec{a}_0$. Sin embargo, hallar una solución analítica de la ecuación (3.4) resulta muy complicado si la forma de la métrica del espaciotiempo no es sencilla. Es necesario entonces buscar métodos alternativos para llegar a una solución [10, 8].

3.2.1. Aceleración Uniforme en Coordenadas

Consideremos γ un observador uniformemente acelerado en el espaciotiempo (M, g) . Por lo tanto, cumple con las condiciones (3.3) y (3.4). Utilizando un sistema de coordenadas γ puede escribirse de la forma $\gamma(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$, donde τ es el tiempo propio de γ y x^i ($i = 0, 1, 2, 3$) son las componentes del observador en una parametrización $\{x^i\}$ de (M, g) . Se recuerda que en notación tensorial la velocidad de la curva viene dada por $\dot{\gamma}(\tau) = \dot{x}^i(\tau) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Por otra parte, según lo visto en la sección 2.2.2, su aceleración cumplirá que $\vec{a}(\tau) = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, donde las componentes a^i serán:

$$a^i(\tau) = \ddot{x}^i(\tau) + \Gamma_{jk}^i(\gamma(\tau)) \dot{x}^j(\tau) \dot{x}^k(\tau) \quad (3.5)$$

Se puede entonces demostrar el siguiente Lema.

Lema 3.2.5. *Sea $\gamma(\tau)$ un observador en el espaciotiempo (M, g) . Entonces:*

$$\frac{D\vec{a}}{d\tau} = \left(\dot{a}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j a^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.6)$$

Donde a^i , \dot{x}^i son las componentes de la aceleración y velocidad del observador respectivamente.

Comprobación. Se recuerda que $\frac{D\vec{a}}{d\tau} = \nabla_{\dot{\gamma}} \vec{a} = \nabla_{\dot{x}^j(\tau) \frac{\partial}{\partial x^j}} \left(a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$. Ya que ∇ representa una conexión en el espaciotiempo (M, g) y usando la definición 1.2.14 de los símbolos de Christoffel,

se puede llegar a la expresión siguiente:

$$\frac{D\vec{a}}{D\tau} = \left(\dot{x}^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j a^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Finalmente, al tomar $\dot{x}^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}(\tau) = \dot{a}^i$, la expresión anterior se reduce a la ecuación (3.6). Q.E.D.

En base al Lema anterior, se puede encontrar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.6. *Sea $\gamma(\tau)$ un observador en el espaciotiempo (M, g) . Entonces, la ecuación (3.4) puede escribirse de la forma:*

$$\ddot{x}^i + \dot{\Gamma}_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^m \dot{x}^l \dot{x}^j \dot{x}^k + 3\Gamma_{jk}^i \ddot{x}^j \dot{x}^k = \alpha \dot{x}^i \quad (3.7)$$

Comprobación. La formula anterior puede derivarse fácilmente al reemplazar las componentes de la aceleración en la ecuación (3.6), usando ecuación (3.4) y sabiendo que los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a sus dos índices inferiores. Q.E.D.

Finalmente, observemos que la condición $\alpha = g(\vec{a}, \vec{a})$ puede escribirse en coordenadas de la forma:

$$\alpha = g_{ij} a^i a^j \quad (3.8)$$

Donde g_{ij} son las componentes de la métrica.

Por lo tanto, un observador tiene movimiento UA si y solo si cumple simultáneamente las ecuaciones (3.7) y (3.8). Si bien estas expresiones permiten plantear este problema en función de un sistema de coordenadas del espaciotiempo, encontrar una solución puede ser muy complicado incluso desde el punto de vista numérico. Observemos por ejemplo que la ecuación diferencial (3.8) es no lineal y de tercer orden. En ella se muestra uno de los principales problemas que se puede encontrar en la Teoría de la Relatividad General: la no linealidad y complejidad de las ecuaciones que describen el movimiento de un objeto en el espaciotiempo.

3.3. Aceleración Uniforme y Espaciotiempos Asintóticamente Planos

En el caso del espaciotiempo de Kerr el análisis de movimiento UA es muy complicado de manera general. La resolución de las ecuaciones mostradas en la sección anterior tiene una gran

complejidad debido a la forma de las componentes de la métrica en cualquier sistema de coordenadas. Sin embargo, es posible utilizar el hecho de que el espaciotiempo de Kerr es asintóticamente plano para entender el movimiento UA si un observador está muy lejos del agujero negro. Para ello se utilizan las coordenadas Kerr-Schild mostradas en la sección 2.3 y se toma la aproximación $r \rightarrow \infty$. En este límite, la continuidad de los símbolos de Christoffel implica que deberían aproximarse a los encontrados en el espaciotiempo de Minkowski. Ya que el valor de estos símbolos son nulos en el espaciotiempo de Minkowski, se tendrá entonces que en el límite $r \rightarrow \infty$ los símbolos de Christoffel y sus derivadas serán nulas en Kerr-Schild.

Para simplificar el análisis, se supone que se tiene un observador γ cuyo movimiento se encuentra únicamente a lo largo de las coordenadas t y x . La ecuación (3.7) puede entonces escribirse para ambas coordenadas, de manera que:

$$\ddot{t} = \alpha \dot{t} \quad (3.9)$$

$$\ddot{x} = \alpha \dot{x} \quad (3.10)$$

Si se asume que $\alpha > 0$, la solución general de estas ecuaciones es de la forma:

$$\dot{x}(\tau) = A \cosh(\sqrt{\alpha} \tau) + B \sinh(\sqrt{\alpha} \tau) \quad (3.11)$$

$$\dot{t}(\tau) = C \cosh(\sqrt{\alpha} \tau) + D \sinh(\sqrt{\alpha} \tau) \quad (3.12)$$

Donde A , B , C y D son constantes.

Proposición 3.3.1. *Sea $\gamma(\tau)$ un observador UA y que apunte al futuro en el espaciotiempo de Kerr-Schild. Si se toma el límite $r \rightarrow \infty$ y el movimiento sólo se produce a lo largo de las coordenadas t y x , entonces γ será de la forma:*

$$\gamma(\tau) = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sinh(\sqrt{\alpha} \tau) + t_0, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cosh(\sqrt{\alpha} \tau) + x_0, y_0, z_0 \right) \quad (3.13)$$

Donde t_0 , x_0 , y_0 y z_0 son constantes. A esta clase de observadores se los denomina observadores de Rindler [5, 6].

Comprobación. Si el observador tiene movimiento UA, se debe cumplir la ecuación (3.8). Sin embargo, ya que en el límite asintótico g es la métrica de Minkowski, esta ecuación se convierte

en $\alpha = -(\dot{t})^2 + (\dot{x})^2$. Por otra parte, para que γ sea en efecto un observador, se debe cumplir que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1$. En el límite asintótico esta ecuación se convierte en $-(\dot{t})^2 + (\dot{x})^2 = -1$. Usando las formulas (3.11) y (3.12), se puede determinar que ambas condiciones quedan satisfechas si $A = D = 0$ y $B = C = 1$. Esto implica que $\dot{t} = \cosh(\sqrt{\alpha}\tau)$ y $\dot{x} = \sinh(\sqrt{\alpha}\tau)$. Sin embargo, ambas ecuaciones pueden integrarse de manera que se cumpla la ecuación (3.13) teniendo a t_0 y x_0 como constantes de integración. Q.E.D.

En el espaciotiempo de Minkowski los observadores de Rindler son aquellos que tienen movimiento UA. Resulta interesante observar que, a pesar de lo complicado que resulta encontrar una solución general para observadores UA en el espaciotiempo de Kerr, las condiciones (3.9) y (3.10) permiten determinar el comportamiento de los mismos en el límite asintótico. Este comportamiento es coherente con lo que se esperaría si el espaciotiempo se vuelve plano en el límite $r \rightarrow \infty$ [5].

Debido a la forma de la métrica en el espaciotiempo de Minkowski, la condición (3.8) es suficiente para analizar el movimiento UA [6]. Sin embargo, no existe una comprobación de este hecho para un espaciotiempo en general. Si un observador cumple con $g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha = \text{constante}$, no determina automáticamente que tenga aceleración uniforme si se tiene en cuenta la definición 3.2.3. Entonces, ¿qué significado tienen observadores que sólo cumplen con esta condición y no con la ecuación (3.7)? El estudio de esta clase de movimiento se realizará en la siguiente sección.

4. Sobre una clase de aceleración en el espaciotiempo de Kerr

En la sección 3 se estudió la estructura matemática del movimiento UA en relatividad general. Cómo se pudo observar, las ecuaciones que determinan esta clase de movimiento resultan muy complicadas como para obtener una solución general en cualquiera de los sistemas de coordenadas del espaciotiempo de Kerr vistos en la sección 2.1. Sin embargo, es posible utilizar las simetrías de este espaciotiempo en coordenadas BL para estudiar una clase diferente de movimiento acelerado. En esta sección se analizará qué significado tienen las curvas temporales que cumplen con la ecuación (4.1) y si esta condición es equivalente a un movimiento UA como se muestra en la definición 3.2.3.

$$g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha = \text{constante} \quad (4.1)$$

Debido a que un observador en la Tierra no puede extraer ninguna información de alguna partícula que entra en el agujero negro, resulta conveniente analizar si este tipo de movimiento acelerado le permite mantenerse fuera de dicha región. Entonces, se estudiarán únicamente la dinámica de curvas temporales en un espaciotiempo de Slow Kerr en coordenadas BL y en la sección de Kerr exterior.

4.1. Curvas y aceleración simétricas

De manera general, evaluar la ecuación (4.1) en coordenadas BL resulta muy complicado. Sin embargo, se puede simplificar el análisis utilizando las simetrías de la métrica BL. Para esto, se recuerda que los vectores ∂_t y ∂_ϕ son vectores de Killing en el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. Este resultado nos indica que existirá cierta simetría con relación a las coordenadas t y ϕ en la métrica BL. Entonces, se puede simplificar el análisis de la ecuación (4.1) asumiendo que las curvas tienen relación con estas simetrías. La definición siguiente permite entender esto de forma más clara..

Definición 4.1.2. Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ una curva en el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. Se dice que γ es simétrica si $a^t = a^\phi = 0$, donde \vec{a} es su vector aceleración

El siguiente resultado permite ver que las curvas simétricas explotan completamente las simetrías en las coordenadas t y ϕ que tiene la métrica BL.

Proposición 4.1.3. *Una curva γ es simétrica si y solo si $g(\partial_t, \dot{\gamma}) = -E$ y $g(\partial_\phi, \dot{\gamma}) = L$, donde E, L son constantes llamadas energía y momento angular.*

Comprobación. Se observa primero que de manera general se tiene que:

$$\frac{d}{d\tau}g(\partial_\mu, \dot{\gamma}) = g\left(\frac{D\partial_\mu}{d\tau}, \dot{\gamma}\right) + g\left(\partial_\mu, \frac{D\dot{\gamma}}{d\tau}\right)$$

Para cualquier vector coordenado ∂_μ .

Debido a que ∂_t y ∂_ϕ son vectores de Killing, entonces la proposición 1.2.6 y la forma de la métrica BL nos indican que la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d}{d\tau}g(\partial_\phi, \dot{\gamma}) = g(\partial_\phi, \vec{a}) = g_{\phi\phi}a_c^\phi + g_{\phi t}a_c^t$$

$$\frac{d}{d\tau}g(\partial_t, \dot{\gamma}) = g(\partial_t, \vec{a}) = g_{tt}a^t + g_{\phi t}a_c^\phi$$

Sea ahora γ una curva simétrica, entonces claramente el lado derecho de ambas ecuaciones será cero. Por lo tanto, $g(\partial_\phi, \dot{\gamma})$ y $g(\partial_t, \dot{\gamma})$ serán constantes a lo largo de la curva.

Para comprobar la otra dirección de la proposición, se toma $g(\partial_\phi, \dot{\gamma}) = L$ y $g(\partial_t, \dot{\gamma}) = -E$. Entonces, se tiene que:

$$0 = g_{\phi\phi}a_c^\phi + g_{\phi t}a_c^t \quad (4.2)$$

$$0 = g_{tt}a^t + g_{\phi t}a_c^\phi \quad (4.3)$$

Al tomar $g_{tt} \cdot (4.2) - g_{\phi t} \cdot (4.3)$, se tiene que $(g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{\phi t}^2)a_c^\phi = 0$. Además, se puede demostrar que $g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{\phi t}^2 = \Delta \sin^2(\theta)$. Pero este término es siempre diferente de cero en el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL, entonces $a_c^\phi = 0$. Un análisis similar se puede realizar para encontrar que $a^t = 0$. Q.E.D.

Las constantes E y L tienen una clara interpretación física. Para ello, toma a γ como una curva temporal y se usa el hecho que cuando $r \rightarrow \infty$, la métrica BL se convierte en Minkowski. En este límite se cumple que $E = \dot{t}$ y $L = r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}$. El primer término representa a la energía relativista de una partícula sobre su masa en reposo, mientras que el segundo término representa al momento angular newtoniano de la partícula sobre su masa en reposo. Las constantes E y L obtienen su nombre de esta interpretación.

Si bien la ecuación (4.1) se simplifica de manera considerable al tener una curva simétrica, la existencia de una aceleración a lo largo de la coordenada θ no permite obtener una ecuación más sencilla de analizar. Si se quiere estudiar el movimiento de una partícula cerca de un agujero negro, resulta más relevante la evolución que puede tener la coordenada radial. Por ello, se asumirá también que la curva simétrica γ solo tiene aceleración radial. Es decir, $a_c^\theta = 0$. Esta condición es en realidad una ecuación diferencial que depende de las cuatro coordenadas BL. Sin embargo, se puede buscar si algún valor constante de θ satisface trivialmente esta ecuación. El siguiente resultado muestra la existencia de este valor.

Proposición 4.1.4. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ una curva simétrica. Si $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2} =$ constante, entonces $a^\theta = 0$.*

Comprobación. Para comprobar esto se utiliza la definición de a^θ dada por la definición 1.1.13. Cómo se asume que la coordenada θ es constante, entonces la componente en θ de la aceleración se reduce a

$$a^\theta = \Gamma_{\mu\nu}^\theta \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu$$

Como se observa en el apéndice A, los únicos símbolos de Christoffel no nulos son: Γ_{rr}^θ , $\Gamma_{t\phi}^\theta$, $\Gamma_{\phi\phi}^\theta$ y $\Gamma_{\theta\theta}^\theta$. El término relacionado a este último símbolo se anula ya que se asume que $\dot{\theta} = 0$. En cuanto al resto de símbolos, todos ellos son de la forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\theta = \sin(2\theta) F_{\mu\nu}(r, \theta)$$

Donde $F_{\mu\nu}$ es una función diferenciable en todo el espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL. Entonces, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene que $a^\theta = 0$. Q.E.D.

Si γ es una curva temporal y apunta al futuro, ésta representará a una partícula real en el espaciotiempo. Se recuerda que cuando r se encuentra fuera de la ergoesfera, ∂_t es un vector temporal que apunta al futuro. Por lo tanto, si se espera que γ apunte al futuro fuera de la ergoesfera, la proposición 1.3.8 determina entonces que $E > 0$.

En el resto del capítulo se intentarán buscar curvas que cumplan con todas las condiciones anteriores en el bloque Kerr exterior y compararlas con aquellas que experimentan un movimiento UA. Para simplificar la notación, se considera la siguiente definición.

Definición 4.1.5. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ una curva en el bloque de Kerr exterior de un espaciotiempo Slow Kerr en coordenadas BL. Se dice que γ tiene un movimiento con aceleración simétrica (AS) si es temporal, simétrica con energía positiva, se encuentra siempre en el plano ecuatorial y el modulo de su aceleración es constante. Es decir, si cumple con las siguientes ecuaciones:*

$$g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0 \quad (4.5)$$

$$g(\partial_t, \dot{\gamma}) = -E, E > 0 \quad (4.6)$$

$$g(\partial_\phi, \dot{\gamma}) = L, L \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

$$r > r^+ \quad (4.8)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (4.9)$$

$$\vec{a} = a^r \partial_r \quad (4.10)$$

A las constantes α , E y L se los denomina parámetros de movimiento.

En la sección 2.6 se pudo observar que el vector ∂_t es espacial dentro de la ergoesfera. Recor-

demostramos que este vector solo permite caracterizar a los conos causales cuando es temporal. Si se quiere entonces analizar la orientación temporal de una curva AS, se debe usar el vector l que es luminoso en todo Kerr exterior. De esta manera se puede incluir la condición adicional $g(\dot{\gamma}, l) < 0$ a la definición 4.1.5, para estudiar curvas γ con aceleración simétrica que solo apunten al futuro. Estas curvas pueden convertirse en observadores si se los parametriza con su tiempo propio.

4.2. Análisis de las coordenadas t y ϕ

En esta sección se analizarán las implicaciones de las ecuaciones (4.6) y (4.7). Para ello, se observa primero que los elementos g_{tt} , $g_{t\phi}$ y $g_{\phi\phi}$ de la métrica toman la siguiente forma en el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$g_{tt} = -1 + \frac{2m}{r}$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2ma}{r}$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 + a^2 + \frac{2ma^2}{r}$$

En base a estas ecuaciones, es posible obtener expresiones simplificadas que determinan la evolución de las coordenadas t y ϕ . Esto se observa en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva con aceleración simétrica. Entonces, la variación de las coordenadas t y ϕ viene dado por:*

$$\dot{t} = \frac{aD}{r^2} + (r^2 + a^2) \frac{P}{\Delta r^2}, \quad (4.11)$$

$$\dot{\phi} = \frac{D}{r^2} + \frac{aP}{\Delta r^2}, \quad (4.12)$$

donde P y D son funciones de los parámetros de movimiento y la coordenada radial, dadas por:

$$D(L, E) = L - aE, \quad (4.13)$$

$$P(r, L, E) = (r^2 + a^2)E - aL. \quad (4.14)$$

Comprobación. Debido a que γ tiene aceleración simétrica, se tiene que:

$$g(\dot{\gamma}, \partial_t) = \dot{t}g_{tt} + \dot{\phi}g_{t\phi} = -E \quad (4.15)$$

$$g(\dot{\gamma}, \partial_\phi) = \dot{t}g_{t\phi} + \dot{\phi}g_{\phi\phi} = L \quad (4.16)$$

Ya que en Kerr exterior $\Delta > 0$, entonces se pueden realizar las operaciones $a \cdot (4.13) + (4.14)$ y $[-(r^2 + a^2) \cdot (4.13) - a \cdot (4.14)]$, de manera que:

$$(r^2 + a^2)\dot{\phi} - a\dot{t} = D \quad (4.17)$$

$$-a\dot{\phi} + \dot{t} = \frac{P}{\Delta} \quad (4.18)$$

Al despejar \dot{t} y $\dot{\phi}$ de estos resultados se obtienen las ecuaciones (4.11) y (4.12). Q.E.D.

En la sección 4.3, se observará como las ecuaciones (4.11) y (4.12) nos ayudarán a simplificar el análisis de la coordenada radial para curvas AS. Se puede extraer además información de este tipo de movimiento, cerca del horizonte de eventos exterior H^+ . Para ello, se recuerda que si la curva γ tiende a H^+ en el bloque de Kerr exterior, entonces $r \rightarrow r^+$ y $\Delta \rightarrow 0$. Sabiendo esto se puede encontrar el siguiente corolario.

Corolario 4.2.2. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva con aceleración simétrica. Entonces:*

- $\dot{t} \rightarrow \infty$ y $\dot{\phi} \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow (r^+)^+$, si $P(r^+) \neq 0$
- $\dot{t} \rightarrow \frac{aL}{2mr^+} \left(\frac{r^++m}{r^+-m} \right)$ y $\dot{\phi} \rightarrow \frac{aL}{2r^+(r^+-m)}$ cuando $r \rightarrow (r^+)^+$, si $P(r^+) = 0$.

Comprobación. La comprobación de la primera parte de corolario es trivial ya que $\Delta > 0$ en Kerr exterior y $\Delta \rightarrow 0$ cerca de horizonte de eventos. Por ende, las ecuaciones (4.9) y (4.10) permiten observar claramente que $\dot{t} \rightarrow \infty$ y $\dot{\phi} \rightarrow \infty$, siempre que $P(r^+) \neq 0$.

Para la segunda parte, observemos que si $P(r^+) = 0$, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow (r^+)^+} P = \lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \Delta = 0$$

Utilizando la regla de la regla de l'Hôpital tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \frac{P}{\Delta} = \frac{r^+ E}{r^+ - m}$$

Vemos también que si $P(r^+) = 0$, entonces se tiene

$$L = \frac{2mr^+}{a} E \quad (4.19)$$

Al reemplazar estos resultado en las ecuaciones (4.11) y (4.12), se pueden encontrar los límites de \dot{t} y $\dot{\phi}$ para este caso. Q.E.D.

Definición 4.2.3. Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva AS. Si sus parámetros de movimiento cumplen con la ecuación (4.17), entonces se dice que γ se encuentra en el caso crítico de energía y momento angular.

Como se mencionó en la sección 2.5, el hecho de que $\dot{\phi}$ no sea nulo cerca del horizonte de eventos, tiene relación con el hecho de que el agujero negro tiene una rotación. Ahora bien, cuando la curva no se encuentra en el caso crítico es fácil derivar una interpretación de los resultados del corolario 4.2.2 que envuelven a la coordenada t . Para ello recordemos que ésta puede entenderse como el tiempo que mide un observador muy alejado del agujero negro. El hecho de que $\dot{t} \rightarrow \infty$ implica que este observador lejano nunca verá cómo la curva γ logrará atravesar el horizonte de eventos, en caso de que lo hiciera. En el caso crítico, la interpretación es más complicada y se observará en el sección 4.3.3.

4.3. Análisis de la coordenada radial r

En esta sección se analizarán las propiedades y consecuencias de la ecuaciones (4.4) y (4.10). Este estudio es el más importante con relación a las diferentes coordenadas de una curva con AS, debido a que su aceleración únicamente está lo largo del vector coordenado radial. Para empezar

el estudio de esta ecuación, se considera el siguiente resultado.

Proposición 4.3.1. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva AS en el bloque de Kerr exterior. Entonces el módulo de su aceleración cumplirá que $\alpha \geq 0$.*

Comprobación. Según la ecuación (4.10) se tiene que $a^r = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{g_{rr}}} = \pm \frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{r}$. Ya que $\Delta > 0$ en Kerr exterior, se tiene que $\alpha \geq 0$. Q.E.D.

La proposición 4.3.1 nos muestra que existen dos posibles soluciones para la ecuación (4.10). Se llama a la solución $a^r = \frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{r} > 0$ como la *rama positiva* y a $a^r = -\frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{r} < 0$ como la *rama negativa* de la ecuación (4.10). Éstas representan curvas con aceleraciones en el mismo sentido paralelo y sentido contrario del vector coordenado radial respectivamente. El caso en que $\alpha = 0$ simplemente representa una geodésica fija en el plano ecuatorial. En adelante se tomará $\alpha \geq 0$.

Para continuar con el análisis de las ecuaciones (4.4) y (4.10) se encuentra ahora una expresión para la componente radial de la velocidad, en el caso de tener una curva AS.

Proposición 4.3.2. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva con aceleración simétrica. Entonces, la coordenada radial seguirá la siguiente ecuación denominada ecuación radial.*

$$\ddot{r} = \left[\frac{mr - a^2}{r\Delta} \right] (\dot{r})^2 + \tilde{R}(r, L, E, \alpha) \quad (4.20)$$

Donde \tilde{R} se la denomina función radial y tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & \pm \frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{r} - \frac{mP}{r^4} \left[\frac{aD}{r^2} + (r^2 + a^2) \frac{P}{\Delta r^2} \right] + \frac{\Delta}{r} \left[1 - \frac{ma^2}{r^3} \right] \left[\frac{D}{r^2} + \frac{aP}{\Delta r^2} \right]^2 \\ & + \frac{a\Delta m}{r^4} \left[\frac{aD}{r^2} + (r^2 + a^2) \frac{P}{\Delta r^2} \right] \left[\frac{D}{r^2} + \frac{aP}{\Delta r^2} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Comprobación. Se recuerda que

$$a^r = \ddot{r} + \Gamma_{\mu\nu}^r \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu$$

Sin embargo, al tomar $\theta = \frac{\pi}{2}$ se observa que los únicos símbolos de Christoffel no nulos serán:

$$\Gamma_{tt}^r, \Gamma_{t\theta}^r, \Gamma_{\theta\theta}^r, \Gamma_{rr}^r, \Gamma_{\phi\phi}^r \text{ y } \Gamma_{t\phi}^r.$$

Ya que $\dot{\theta} = 0$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\pm \frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{r} = \ddot{r} + \Gamma_{rr}^r (\dot{r})^2 + \Gamma_{tt}^r (\dot{t})^2 + \Gamma_{\phi\phi}^r (\dot{\phi})^2 + 2\Gamma_{t\phi}^r \dot{t}\dot{\phi}$$

Al utilizar las formulas de los símbolos de Christoffel mostradas en el apéndice A y la ecuación (4.12), se puede encontrar que esta expresión se reduce a

$$\pm \frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{r} == \ddot{r} + \left[\frac{1}{r} + \frac{m-r}{\Delta} \right] (\dot{r})^2 + \frac{mP}{r^4} \dot{t} - \frac{\Delta}{r} \left[1 - \frac{ma^2}{r^3} \right] (\dot{\phi})^2 - \frac{a\Delta m}{r^4} \dot{t} \dot{\phi}$$

Al usar las ecuaciones (4.9) y (4.10), la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\ddot{r} = - \left[\frac{1}{r} + \frac{m-r}{\Delta} \right] (\dot{r})^2 + \tilde{R}(r, L, E, \alpha)$$

Donde \tilde{R} es la función mostrada en la ecuación (4.20). Finalmente, usando la definición de la función Δ se puede llegar a a ecuación (4.20). Q.E.D.

Al igual que sucedía con la ecuación (4.10), existirán dos ramas de la ecuación radial y dos ramas de la función radial. El nombre de estas ramas serán negativa y positiva dependiendo del signo con el que aparece el radical $\sqrt{\alpha}$ es sus respectivas expresiones.

Debido a que se está trabajando en el bloque de Kerr exterior de un espaciotiempo de Slow Kerr, se puede encontrar el siguiente Lema.

Lema 4.3.3. *En el caso de un espaciotiempo de Slow Kerr, se tendrá que $\frac{mr-a^2}{r\Delta} > 0$ en todo el bloque Kerr exterior.*

Comprobación. Ya que se tiene un espaciotiempo de Slow Kerr, entonces $r^+ > m > a > 0$. Por otra parte, en el bloque Kerr exterior se tiene que $r > r^+$ y $\Delta > 0$. Por ende, $mr - a^2 > 0$ y $r\Delta > 0$, de donde se comprueba el lema. Q.E.D.

El Lema anterior nos muestra que el signo de \ddot{r} estará determinado por el signo la función radial. De hecho, la ecuación (4.20) muestra que el comportamiento de la función radial será la que determine la evolución de la coordenada r a lo largo de la curva. Debido a la complejidad de esta función, no es posible realizar un análisis general en el bloque de Kerr exterior. Sin embargo, se puede estudiar como se comporta la función \tilde{R} y la coordenada radial en las fronteras de este bloque.

4.3.1. La función radial \tilde{R} en las fronteras de Kerr exterior

Se puede observar que las fronteras del bloque de Kerr exterior se tienen cuando $r \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow (r^+)^+$. En la primera frontera el espaciotiempo se vuelve plano, mientras que en la segunda se alcanza el horizonte de eventos H^+ . Resulta más sencillo empezar primero por $r \rightarrow \infty$.

Proposición 4.3.4. *En la frontera $r \rightarrow \infty$ del bloque de Kerr exterior, se tiene que $\tilde{R} \rightarrow \pm\sqrt{\alpha}$.*

Comprobación. Es fácil observar que el único término de la función radial \tilde{R} que no tiende a cero en la frontera $r \rightarrow \infty$ es $\pm\frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{r}$. Además, si $r \rightarrow \infty$ este término tiende a $\pm\sqrt{\alpha}$. Q.E.D.

Este resultado permite observar que la función radial tiende a ser constante en la sección asintóticamente plana del bloque Kerr exterior. En esta región, la coordenada r de las curvas AS adquiere una forma sencilla, como lo muestra el corolario 4.3.5. En la sección 4.5 se utilizará este resultado para analizar la existencia de partículas reales cerca de esta frontera.

Corolario 4.3.5. *Cerca de la frontera $r \rightarrow \infty$ del bloque de Kerr exterior, se tiene $r(\tau) \approx (\pm\sqrt{\alpha})\tau^2 + k_1\tau + k_2$, donde k_1 y k_2 son constantes.*

Comprobación. Debido a la proposición 4.3.4, la ecuación radial se reduce a $\ddot{r} \approx \pm\sqrt{\alpha}$ cuando $r \rightarrow \infty$. Q.E.D.

Ahora bien, el análisis de la función radial cerca del horizonte de eventos H^+ dependerá de si la curva AS está o no en el caso crítico de sus parámetros de movimiento.

Proposición 4.3.6. *En la frontera $r \rightarrow (r^+)^+$ del bloque de Kerr exterior, se tiene que:*

- $\tilde{R} \rightarrow -\infty$, si $P(r^+) \neq 0$
- $\tilde{R} \rightarrow 0$, si $P(r^+) = 0$ (caso crítico de los parámetros de movimiento)

Comprobación. Se recuerda que si $r \rightarrow (r^+)^+$, entonces $\Delta \rightarrow 0^+$. Por lo tanto, se tiene que el término $\pm\frac{\sqrt{\alpha\Delta}}{r}$ puede despreciarse en la función \tilde{R} si $r \rightarrow (r^+)^+$. En el resto de términos de la función radial, aquellos que contengan un factor Δ^{-1} representarán los términos dominantes cerca del horizonte de eventos. A los términos faltantes se los puede despreciar de \tilde{R} si $r \rightarrow (r^+)^+$.

Por lo tanto, se puede escribir que:

$$\lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \tilde{R} = \lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \left[-\frac{mP^2}{\Delta r^6} (r^2 + a^2) + \frac{a^2 P^2}{\Delta r^5} \left(1 - \frac{ma^2}{r^3} \right) + \frac{ma^2 P^2}{\Delta r^8} (r^2 + a^2) \right]$$

$$\lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \tilde{R} = \lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \left[\frac{P^2}{\Delta r^5} (-mr + a^2) \right] = \frac{-mr^+ + a^2}{(r^+)^5} \lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \frac{P^2}{\Delta}$$

El Lema 4.3.3 muestra que el término $-mr^+ + a^2$ será negativo en el caso Slow Kerr. Entonces, si $P(r^+) \neq 0$, claramente $\tilde{R} \rightarrow -\infty$.

Para la segunda parte de la proposición, se observa que en el caso crítico se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow (r^+)^+} P^2 = \lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \Delta = 0$$

Al utilizar la regla de L'Hôpital podemos encontrar que

$$\lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \frac{P^2}{\Delta} = \lim_{r \rightarrow (r^+)^+} \left(\frac{2rE}{r-m} P \right) = 0$$

Por lo tanto, en el caso crítico $\tilde{R} \rightarrow 0$ si $r \rightarrow (r^+)^+$. Q.E.D.

En el caso de que una curva se acerque al horizonte de eventos H^+ , no es posible determinar un comportamiento general de la coordenada radial de las curvas AS. Esto, debido al término extra que depende de \dot{r} en la ecuación (4.20). Este término se anula en el límite asintóticamente plano de Kerr exterior, pero no cuando $r \rightarrow r^+$; lo cual hace más difícil determinar el comportamiento de la coordenada radial a lo largo de la curva.

4.3.2. Existencia de raíces de la función radial

Es importante conocer las posibles raíces que tendrá la función radial. El conocimiento de dichas raíces facilitará el estudio de la causalidad y el sentido físico de curvas con AS que se realizará en las secciones 4.4 y 4.5. Por otra parte, la existencia de dichas raíces simplifica la búsqueda y el estudio de las curvas AS. Esto se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.7. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_0, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva simétrica en el bloque de Kerr exterior, donde r_0 es una constante. Si r_0 es una raíz de \tilde{R} , entonces γ satisface trivialmente la ecuación radial (4.19).*

Comprobación. Si r_0 es una constante, entonces $\ddot{r} = \dot{r} = 0$. Ya que $\tilde{R}(r_0) = 0$, se tiene que la ecuación radial queda automáticamente satisfecha. Q.E.D.

A pesar de la complejidad de la función radial, es posible determinar de manera general la existencia de raíces para la rama positiva.

Proposición 4.3.8. *Existe por lo menos una raíz de la rama positiva de la función radial si los parámetros de movimiento no se encuentran en el caso crítico.*

Comprobación. Se puede observar que en todo el bloque Kerr exterior, la función radial es continua y diferenciable. Debido a las proposiciones 4.3.4 y 4.3.6, se observa que la rama positiva en el caso no crítico de la función radial cumple que $\tilde{R} \rightarrow \sqrt{\alpha}$, si $r \rightarrow \infty$ y $\tilde{R} \rightarrow -\infty$, si $r \rightarrow (r^+)^+$. Por lo tanto, usando el Teorema del Valor Intermedio se puede determinar que existe un número real $r_0 \in (r^+, \infty)$ tal que $\tilde{R}(r_0) = 0$. Q.E.D.

Las raíces de la función radial tienen una clara interpretación física. Supongamos que $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_0, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ es una curva con aceleración simétrica, donde r_0 es una raíz de \tilde{R} . Las ecuaciones (4.11) y (4.12) determinarán que \dot{t} y $\dot{\phi}$ serán siempre constantes para γ . Ahora bien, el hecho que r_0 sea constante quiere decir que la curva nunca variará su coordenada radial. Al igual que sucede en mecánica clásica, se puede entender a esta curva como una trayectoria circular alrededor de un objeto. En este caso, el objeto es el mismo agujero negro. Si bien la curva γ sí sufre una rotación dada por la coordenada ϕ , ésta nunca llegará a atravesar el horizonte de eventos. Entonces, γ representaría a una partícula material cuya aceleración es la suficiente para evitar caer en el agujero negro pero no para evitar sentir los efectos rotacionales del mismo. La Figura 4.1 muestra la evolución del plano ecuatorial con relación a la coordenada t y como se puede entender de forma gráfica a la curva γ que tiene una órbita circular.

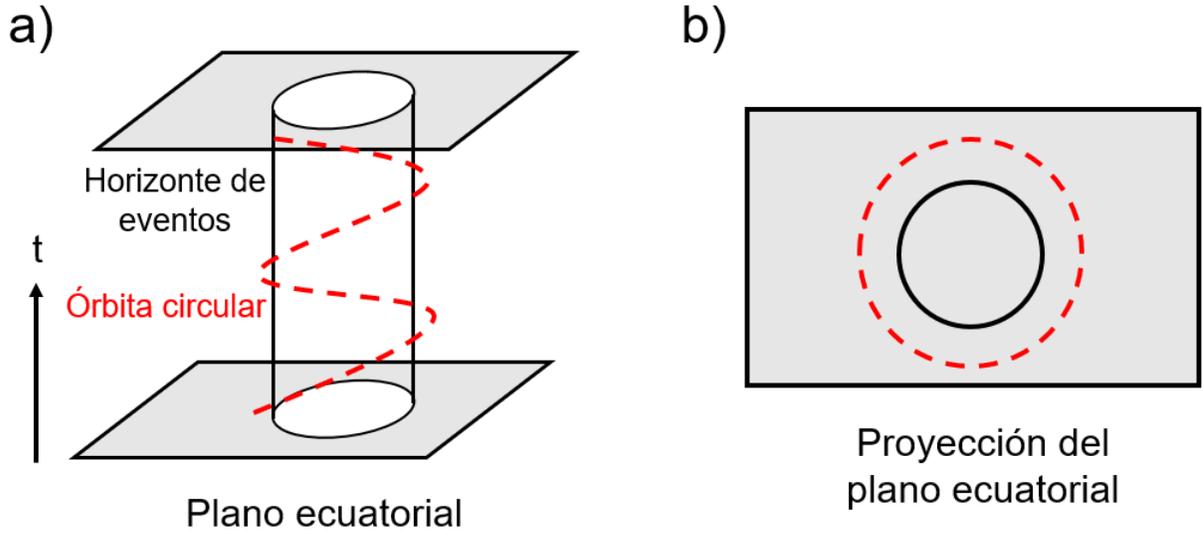


Figura 4.1: Órbitas circulares en el bloque Kerr exterior. a) Evolución temporal de horizonte de eventos y la órbita circular en el plano ecuatorial. b) Proyección de la órbita circular y el horizonte de eventos en el plano ecuatorial.

Debido a este resultado, se toma la siguiente definición.

Definición 4.3.9. Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva con aceleración simétrica. Se dice que γ es una órbita circular si $r(\tau) = r_0 = \text{constante}$ y r_0 es una raíz de la función radial.

Este tipo de curvas son el caso más sencillo para empezar a buscar curvas AS. Lo que resta por analizar es la causalidad de dichas curvas y si éstas apuntan al futuro. En la sección 4.5 se realizará este estudio.

Se encontró que de manera general la rama positiva tiene al menos una raíz de la función radial, siempre que no se considere el caso crítico. Sin embargo, es necesario determinar si los otros casos de \tilde{R} contienen también este tipo de raíces. Debido a la forma de esta función este estudio resulta muy complicado hacerlo analíticamente. Por esta razón, es necesario utilizar herramientas numéricas que permitan entender de manera aproximada su comportamiento.

Se observa que la función \tilde{R} depende de las constantes m , a y de los parámetros de movimiento de la curva γ . Utilizando el software *Mathematica*, es posible reescribir la función radial de la forma

$$\tilde{R} = \frac{\pm r^3 \Delta \sqrt{\Delta \alpha} + \mathcal{P}(r)}{r^4 \Delta} \quad (4.22)$$

Donde $\mathcal{P}(r)$ es un polinomio de cuarto orden en r que viene dado por la siguiente ecuación

$$\mathcal{P}(r) = -mE^2r^4 + L^2r^3 - 2m(L - aE)(2L - aE)r^2 + 4m^2(L - aE)^2r - a^2m(L - aE)^2 \quad (4.23)$$

Se puede ver que el término $\pm r^3 \Delta \sqrt{\Delta \alpha}$ en la ecuación (4.21) es una función monótona y que crece como r^6 en el bloque de Kerr exterior. Es decir, para valores grandes de r esta función es la que tiene más relevancia en el numerador de la función radial. Ahora bien, si $E, L \ll \alpha$ (es decir si son cantidades pequeñas con relación a α), los valores que puede tomar el polinomio \mathcal{P} serán despreciables con relación al término que envuelve el radical $\sqrt{\Delta \alpha}$. Por esta razón, la existencia de más raíces de la función radial está sujeta a que la energía y momento angular de la curva sean cantidades grandes en comparación a α .

Para tener una idea aproximada del comportamiento de la función radial, se graficó la forma que ésta toma para distintas cantidades de las constantes m, a y los parámetros de movimiento. Como resultado de esto se encontró que, sin importar sus valores, la forma de \tilde{R} siempre sigue una de las curvas mostradas en las Figuras 4.2 - 4.7. En ellas se tomó a $m = 3, a = 2$ y $\alpha = 1$ como parámetros fijos. Para este caso, $r^+ = 3 + \sqrt{5}$. El rango de la coordenada radial mostrado en estas Figuras está completamente contenido en el bloque de Kerr exterior. Cabe recalcar que si bien estos parámetros nos dan una idea del comportamiento de la función \tilde{R} , no representan necesariamente valores de un agujero negro real. Es necesario utilizar valores de masa y momento angular acordes a un sistema real para analizar las consecuencias físicas de estos resultados.

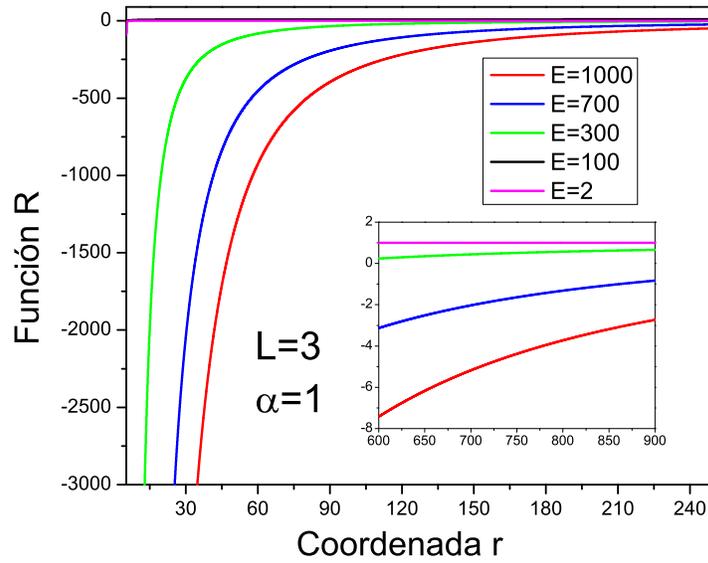


Figura 4.2: Comportamiento de la rama positiva de \tilde{R} con $L = 3$ fijo. El recuadro interior muestra el comportamiento de \tilde{R} para valores grandes de r . Todas las curvas son crecientes y tienden al valor límite $\sqrt{\alpha}$ si $r \rightarrow \infty$. Solo parece existir una raíz de \tilde{R} en Kerr exterior.

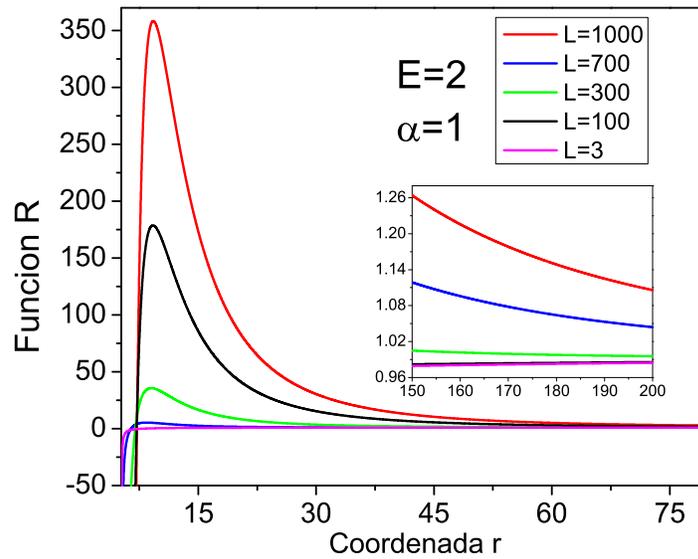


Figura 4.3: Comportamiento de la rama positiva de \tilde{R} con $E = 2$ fijo. El recuadro interior muestra el comportamiento de \tilde{R} para valores grandes de r . Para el caso de valores grandes de L^2 existe una región donde la función \tilde{R} es decreciente. Todas las curvas tienen una única raíz en Kerr exterior.

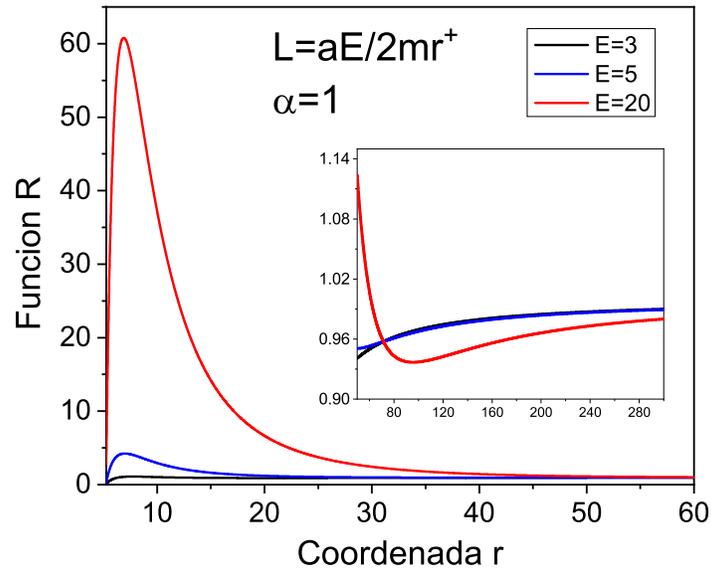


Figura 4.4: Comportamiento de la rama positiva de \tilde{R} con L en el caso crítico. El recuadro interior muestra el comportamiento de \tilde{R} para valores grandes de r . No se muestra evidencia de ninguna raíz de \tilde{R} en Kerr exterior

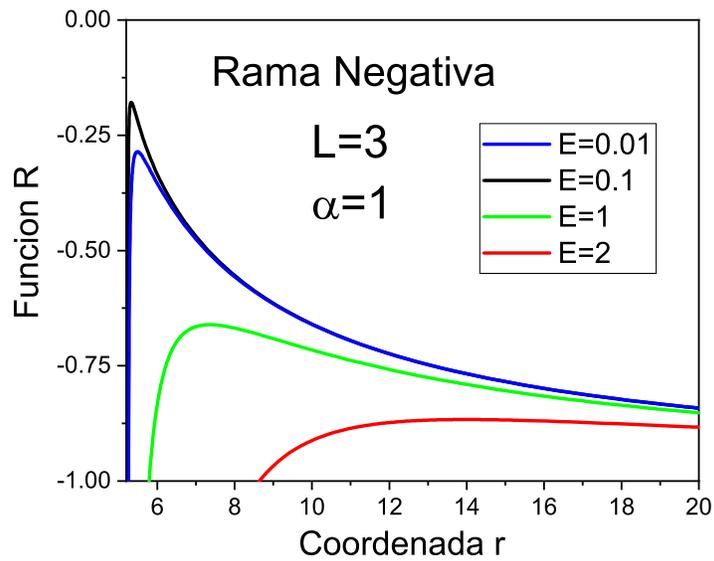


Figura 4.5: Comportamiento de la rama negativa de \tilde{R} con $L = 3$ fijo. No parece existir una raíz de \tilde{R} en Kerr exterior.

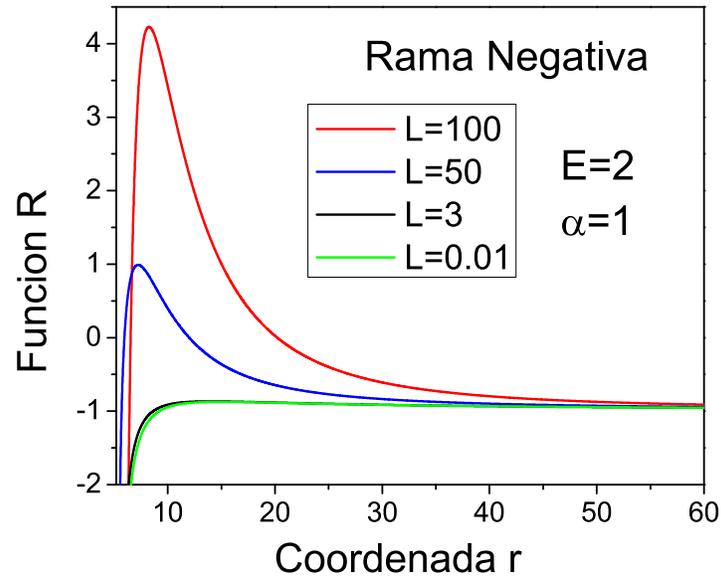


Figura 4.6: Comportamiento de la rama negativa de \tilde{R} con $E = 2$ fijo. Para el caso de valores grandes de L^2 existen dos raíces de la función \tilde{R} .

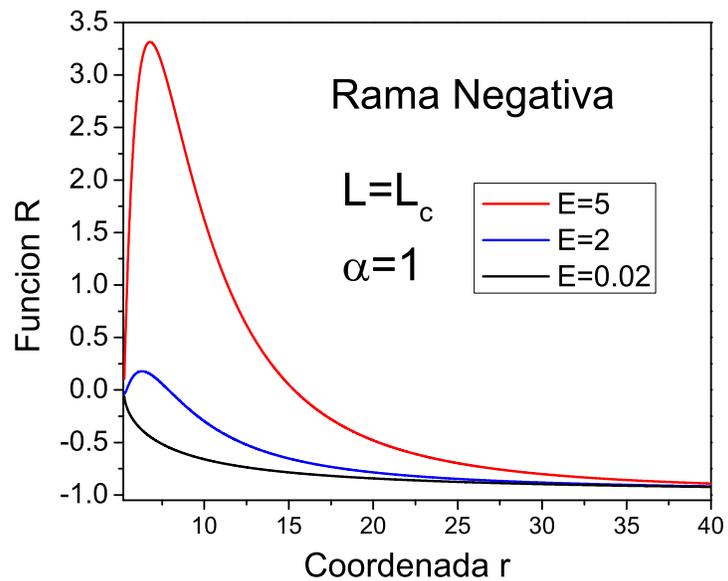


Figura 4.7: Comportamiento de la rama negativa de \tilde{R} con L en el caso crítico. Para todo valor de E la función \tilde{R} tiene una raíz en r^+ . Para valores grandes de E existe una raíz de la función \tilde{R} en Kerr exterior.

En base a estas Figuras se ha podido llegar a las siguientes suposiciones, las cuáles solo pueden

ser tomadas como hipótesis:

- Parecería ser que para la rama negativa existen como máximo 2 raíces de \tilde{R} en el bloque de Kerr exterior (ver Figura 4.6). Existen dos raíces positivas sólo si se toman valores grandes de $|L|$. Este resultado si bien no tiene un sustento formal, se puede entender al ver la forma del polinomio \mathcal{P} . Para valores de r cercanos al horizonte de eventos, el término $L^2 r^3$ es muy relevante. Este término es siempre positivo y produce un gran crecimiento en la función radial para valores grandes de L^2 .
- Para el caso crítico de la rama positiva parecen no existir raíces de \tilde{R} en el bloque de Kerr exterior (Ver Figura 4.4). Según la definición 4.3.9, esto implicaría que no existen órbitas circulares en este caso.
- Para la rama positiva, sin tomar en cuenta el caso crítico, parecería ser que solo existe una raíz de la función radial en el bloque de Kerr exterior (Figura 4.2 y 4.3).

Lastimosamente, la forma de la función \tilde{R} es muy compleja y encontrar una expresión analítica de sus raíces reales en función de los parámetros de movimiento es un problema muy complicado de resolver. De forma numérica se pueden encontrar sus raíces, pero esto solo se puede realizar para valores específicos de E , L , m , a y α .

4.3.3. Caso crítico y órbitas circulares

Como se puede observar en la Figura 4.4, el caso crítico parece no tener raíces en Kerr exterior para la rama positiva de la función \tilde{R} . Se puede usar esto y el corolario 4.2.2 para entender el significado de este comportamiento. Observemos primero que $\frac{E}{L}$ tendría unidades de una velocidad angular. El siguiente resultado nos muestra que de hecho la cantidad $\frac{E}{L} = \frac{a}{2mr^+}$ en el caso crítico, puede entenderse como la velocidad de rotación del horizonte de eventos H^+ en Slow Kerr [4, 18].

Proposición 4.3.10. *Sea $\gamma^*(\tau) = (t^*(\tau), r^+, \frac{\pi}{2}, \phi^*(\tau))$ una geodésica luminosa fija en el horizonte de eventos H^+ del espaciotiempo de Kerr-Star ampliado. Entonces, cumplirá que:*

$$\Omega = \frac{d\phi^*}{dt^*} = \frac{a}{2mr^+} \quad (4.24)$$

a lo largo de la curva $\gamma^*(\tau)$.

Comprobación. Para encontrar la ecuación de la geodésica luminosa en H^+ se toma $ds^2 = 0$ en la métrica Kerr-Star (2.12). Debido a la definición de γ , se tiene que las coordenadas θ^* y r^* son constantes, entonces se tiene también que $dr^* = d\theta^* = 0$. De esta forma, se obtiene que:

$$g_{tt}(dt^*)^2 + 2g_{t\phi}dt^*d\phi^* + g_{\phi\phi}(d\phi^*)^2 = (dt^*)^2(g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2) = 0$$

Al reemplazar los valores de g_{tt} , $g_{t\phi}$, $g_{\phi\phi}$ y resolviendo la ecuación cuadrática anterior en función de Ω , se encuentra fácilmente la ecuación (4.24). Q.E.D.

Debido a que H^+ es una hipersuperficie luminosa, se tiene que las únicas geodésicas causales fijas en esta región son luminosas. Por esta razón se toma a Ω como la velocidad de rotación del horizonte de eventos. Se puede ver entonces que el caso crítico representa a curvas con AS cuyos parámetros de movimiento son tales que les permiten adquirir la misma velocidad angular del horizonte de eventos H^+ .

Ahora bien, supongamos que la hipótesis que no existen raíces de \tilde{R} en el caso crítico es cierta. Tomemos también a una curva γ que cumpla con las mismas condiciones del movimiento AS, excepto que ahora ésta puede ser también luminosa. Entonces, la única posibilidad de que γ tenga una trayectoria circular será cuando ésta sea la geodésica luminosa de la proposición 4.3.10, en cuyo caso ya no estaríamos en Kerr exterior. En particular, no existirán curvas AS y no se podrá utilizar este tipo de movimiento para evitar caer en un agujero, accediendo a una órbita circular.

4.4. Causalidad de las curvas AS

En las secciones anteriores se han analizado las propiedades que deben cumplir las coordenadas de una curva AS. Para finalizar el estudio de este tipo de curvas, falta estudiar la causalidad y en qué regiones del bloque Kerr exterior existen en realidad curvas AS. Para ello se encontrará la

forma que tiene la función $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ en el bloque de Kerr exterior, para diferentes valores de energía E y momento angular L .

Proposición 4.4.1. *Sea γ una curva simétrica con energía E y momento angular L , que cumple con la ecuación (4.4) y se encuentra fija en el plano ecuatorial. Entonces, la función $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ dependerá únicamente de la coordenada radial r y su derivada \dot{r} . La forma de esta función será:*

$$g(r, \dot{r}) = (\dot{r})^2 \frac{r^2}{\Delta} - \frac{M(r)}{\Delta r} \quad (4.25)$$

Donde $M(r)$ es un polinomio de tercer orden con relación a la coordenada radial r y que viene dado por la siguiente ecuación:

$$M(r) = E^2 r^3 + (E^2 a^2 - L^2) r + 2m(L - aE)^2 \quad (4.26)$$

Comprobación. Observemos que $\dot{\gamma}$ puede escribirse como $\dot{\gamma} = \dot{r}\partial_r + \dot{t}\partial_t + \dot{\phi}\partial_\phi$. Al usar la definición de E , L (vease proposición 4.1.3) y la forma de la métrica BL, se puede encontrar que:

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = g\left(\dot{r}\partial_r + \dot{t}\partial_t + \dot{\phi}\partial_\phi, \dot{\gamma}\right) = (\dot{r})^2 g_{rr} - \dot{t}E + \dot{\phi}L$$

La ecuación anterior puede reescribirse reemplazando los valores de las funciones \dot{t} y $\dot{\phi}$ dados en las ecuaciones (4.9) y (4.10). Entonces, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = (\dot{r})^2 \frac{r^2}{\Delta} - \frac{E}{r^2} \left(aD(E, L) + \frac{(r^2 + a^2)P(r, E, L)}{\Delta} \right) + \frac{L}{r^2} \left(D(E, L) + \frac{aP(r, E, L)}{\Delta} \right)$$

Donde D y P son las funciones definidas en las ecuaciones (4.11) y (4.12). Ya que los parámetros del movimiento son constantes, la expresión anterior muestra que la función $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ solo dependerá de la coordenada radial r y su derivada \dot{r} . De esta forma, se puede escribir $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = g(r, \dot{r})$. Ahora bien, el segundo término de la expresión anterior puede reescribirse utilizando las definiciones de D , P y la función Δ (véase ecuación 2.7):

$$\frac{1}{\Delta r^2} (E^2 (r^3 + 2ma^2 + ra^2) - 4amLE - L^2 (r - 2m))$$

Al reagrupar estos términos como un polinomio de la coordenada radial r , se puede encontrar fácilmente la ecuación (4.26). Q.E.D.

Debido a la proposición anterior, se puede tomar en adelante a $g(r, \dot{r})$ como una función escalar definida sobre \mathbb{R}^2 dado por r, \dot{r} como las coordenadas independientes x, y respectivamente. Lo que se intentará es entender la causalidad de una curva con las características dadas en la proposición 4.4.1 y según sus valores de r y \dot{r} . Esto se puede realizar de forma gráfica mediante un diagrama de contorno sobre el plano definido por r y \dot{r} , donde se muestre las regiones donde la función $g(r, \dot{r})$ es negativa, positiva y nula. A este tipo de diagramas se los denominará *diagramas de causalidad*. Las regiones de estos diagramas donde $g(r, \dot{r})$ sea negativa, serán aquellas donde pueden existir las curvas AS. La Figura 4.8 muestra un ejemplo de diagrama de causalidad. Las curvas de color negro representan a las regiones en que $g(r, \dot{r}) = 0$.

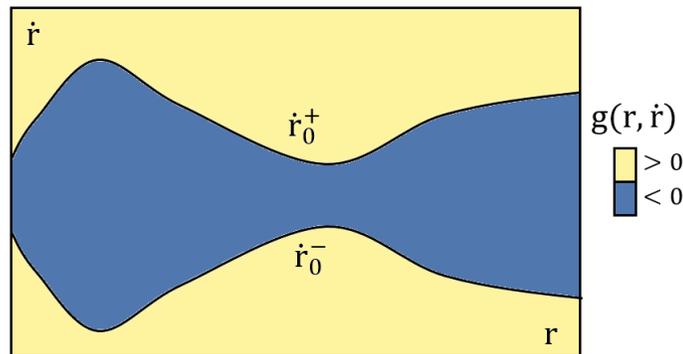


Figura 4.8: Ejemplo de Diagrama de Causalidad

Debido a que $g(r, \dot{r})$ es continua en cada bloque BL, en cada uno de ellos las regiones donde esta función sea negativa serán regiones abiertas y conexas de \mathbb{R}^2 . Lo mismo sucederá con las regiones donde $g(r, \dot{r})$ sea positiva. Ambas regiones estarán separadas por el conjunto de puntos tales que $g(r, \dot{r}) = 0$. Entonces, para entender la forma de los diagramas de causalidad, se debe empezar por estudiar estos últimos.

Proposición 4.4.2. *En un diagrama de causalidad el conjunto de valores donde $g(r, \dot{r}) = 0$, vienen dados por la unión de las curvas:*

$$\dot{r}_0^\pm(r) = \pm \sqrt{\frac{M(r)}{r^3}} \quad (4.27)$$

Comprobación. Al resolver la ecuación $g(r, \dot{r}) = 0$, se puede fácilmente encontrar $\dot{r}_0^\pm(r)$. Q.E.D.

Podemos ver que siempre se tendrá que $r_0^+ \geq 0 \geq r_0^-$. El siguiente resultado nos permitirá caracterizar a la función $g(r, \dot{r})$, estudiando las propiedades de las curvas \dot{r}_0^\pm .

Proposición 4.4.3. *Sea $(r, \dot{r}) \in \mathbb{R}^2$ y $(r, \dot{r}_0^\pm(r)) \in \mathbb{R}^2$. Si $|\dot{r}| > |\dot{r}_0^\pm(r)|$, entonces $g(r, \dot{r}) > 0$ y si $|\dot{r}| < |\dot{r}_0^\pm(r)|$, entonces $g(r, \dot{r}) < 0$.*

Comprobación. Si $|\dot{r}| > |\dot{r}_0^\pm(r)|$, se observa que $g(\dot{r}, r) > (\dot{r}_0^\pm)^2 \frac{r^2}{\Delta} - \frac{M(r)}{\Delta r} = 0$ por la definición de \dot{r}_0^\pm . Por otro lado, si $|\dot{r}| < |\dot{r}_0^\pm(r)|$, se observa que $g(\dot{r}, r) < (\dot{r}_0^\pm)^2 \frac{r^2}{\Delta} - \frac{M(r)}{\Delta r} = 0$. Q.E.D.

El resultado anterior nos muestra que el conocer la forma que tendrán \dot{r}_0^\pm nos permitirá determinar completamente la causalidad en el bloque de Kerr exterior. Debido a que $r_0^+ = -r_0^-$, se puede ver que las regiones de los diagramas de causalidad que se encuentren «encerradas» por estas curvas serán aquellas donde $g(r, \dot{r}) < 0$ (ver Figura 4.8).

Ahora bien, la ecuación (4.27) muestra que \dot{r}_0^\pm están completamente determinadas por la forma de la función M . Entonces, se intentará entender las propiedades de \dot{r}_0^\pm y $g(r, \dot{r})$ en función de M .

Las curvas \dot{r}_0^\pm estarán bien definidas cuando $M \geq 0$. Si bien estas curvas no estarán definidas en el caso en que M sea negativa, si se puede obtener cierta información acerca de $g(r, \dot{r})$.

Proposición 4.4.4. *Si $M(r) < 0$ en alguna región del bloque Kerr exterior, entonces $g(r, \dot{r}) > 0$ en esa región.*

Comprobación. Según la ecuación (4.27), si $M(r) < 0$; entonces $g(r, \dot{r}) > 0$ ya que $\Delta > 0$ en Kerr exterior. Q.E.D.

El resultado anterior se puede reescribir de una manera más simple e intuitiva: en las regiones de un diagrama de causalidad donde las curvas \dot{r}_0^\pm no se puedan definir para ningún valor de su coordenada radial, se tendrá que $g(r, \dot{r}) > 0$.

4.4.1. Causalidad cerca las fronteras de Kerr exterior

Al igual que se realizó con la función radial \tilde{R} en la sección 4.3, se puede estudiar la causalidad de $g(r, \dot{r})$ en las fronteras de Kerr exterior. Tomemos primero el caso asintóticamente plano. Observemos que en el límite $r \rightarrow \infty$, la función M es positiva ya que E también lo es. En este caso, ambas curvas \dot{r}_0^\pm estarán definidas y el resultado siguiente nos permite ver como serán los diagramas de causalidad en este límite.

Proposición 4.4.5. *Si $r \rightarrow \infty$, entonces $\dot{r}_0^\pm \rightarrow \pm E$.*

Comprobación. Se puede determinar fácilmente que $\dot{r}_0^\pm \rightarrow \pm E$ en el límite $r \rightarrow \infty$. Q.E.D.

La proposición anterior nos permite ver que para valores grandes de r , la función $g(r, \dot{r})$ será negativa solo si $|\dot{r}| < E$. Este resultado nos permite también determinar que el tamaño de las regiones negativas de un diagrama de causalidad, dependerá del valor de la energía E . El tamaño de estas regiones aumentará a medida que el valor de la energía aumente.

Ahora bien, la siguiente proposición nos determina el comportamiento de la función M cerca del horizonte de eventos.

Proposición 4.4.6. *La función M cumple que:*

- $M(r^+) = 0$ si se tiene el caso crítico $L = \frac{2mr^+}{a}E$;
- $M(r^+) > 0$ en otro caso.

Comprobación. Se observa que:

$$M(r^+) = E^2(r^+)^3 + (E^2a^2 - L^2)r^+ + 2m(L - aE)^2.$$

Ya que $(r^+)^2 = 2mr^+ - a^2$, entonces se puede escribir la ecuación anterior como:

$$M(r^+) = r^+ (2mr^+E^2 - L^2) + 2m(L - aE)^2 = L^2(2m - r^+) - 4amEL - 4m^2E^2r^+.$$

Se observa que $r^+ \cdot r^- = a^2$. Entonces se puede reescribir la ecuación anterior de forma que se tiene:

$$M(r^+) = L^2(r^-) - 4amEL - 4m^2E^2r^+ = r^- \left(L^2 - \frac{4amEL}{r^-} - \frac{4a^2m^2E^2}{(r^-)^2} \right).$$

Finalmente, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$M(r^+) = \left(L - \frac{2amE}{r^-}\right)^2 r^-.$$

Ya que r^- es siempre positiva, entonces $M(r^+) \geq 0$. Ahora bien, $M(r^+) = 0$ si y solo si $L = \frac{2amE}{r^-}$. Ya que $r^+ \cdot r^- = a^2$, se tiene entonces que $L = \frac{2amE}{r^-}$ es precisamente el caso crítico $L = \frac{2mr^+}{a}E$. Q.E.D.

Debido a la continuidad de la función M , se puede ver que fuera del caso crítico de E y L , ésta será positiva para valores de r cercanos a r^+ . En estos valores, las curvas \dot{r}_0^\pm estarán definidas y existirá una región cercana a r^+ donde $g(r, \dot{r})$ será negativa. Esta será aquella que «encierran» las curvas \dot{r}_0^\pm en el diagrama de causalidad. Esto permite determinar que en esta región, toda curva con las características mencionadas en la proposición 4.4.1 será temporal siempre que no se encuentre en el caso crítico.

4.4.2. Raíces de la función M

Observemos ahora el caso en que $M = 0$, es decir en las raíces de la función M . Estos valores representan a las intersecciones de las curvas \dot{r}_0^\pm y puntos dónde $g(r, \dot{r}) = 0$. En estos puntos las curvas AS no estarán definidas. El conocimiento de estas intersecciones nos permitirán también entender mejor el comportamiento de \dot{r}_0^\pm . Entonces, es necesario determinar las raíces que tendrá la función M . Debido a que M es un polinomio se pueden utilizar los signos de Descartes para determinar su cantidad de raíces máximas en Kerr exterior. Cabe recalcar que los signos de Descartes nos permiten determinar la cantidad máxima de raíces positivas y negativas de un polinomio. Si queremos analizar a la función M en Kerr exterior es necesario analizar cuáles de estas raíces pueden entrar en esta región. Una explicación detallada de como se utilizan los signos de Descartes para cualquier polinomio, se puede encontrar en [21].

Proposición 4.4.7. *En el bloque Kerr exterior, la función M tiene:*

- Máximo 2 raíces si $L^2 > a^2 E^2$,
- Ninguna raíz si $L^2 \leq a^2 E^2$

Comprobación. Tomemos primero el caso en que $L^2 > a^2 E^2$. Al utilizar los signos de Descartes sobre la ecuación (4.26), podemos ver que existen máximo dos raíces positivas de la función M . Ya que Kerr exterior está definido para valores de $r > r^+ > 0$, entonces el máximo número de raíces que M puede tener en esta región será cuando sus dos raíces positivas sean mayores a r^+ .

Tomemos ahora el caso $L^2 = a^2 E^2$. Si $L > 0$, entonces M tendrá una única raíz triple en $r = 0$. Claramente, esta raíz está fuera del bloque Kerr exterior. Si $L < 0$, los signos de descartes aplicados a la ecuación (4.26), determinan que no existirán raíces positivas de M .

Finalmente, los signos de Descartes determinan que tampoco existirán raíces positivas si $L^2 < a^2 E^2$. Q.E.D.

Observemos ahora que comportamiento tiene M si no tiene raíces en Kerr exterior.

Lema 4.4.8. *Si no existen raíces de M en Kerr exterior, entonces $M(r)$ será positiva en todo este bloque.*

Comprobación. Por la ecuación (4.26) podemos ver que M será positiva si $r \rightarrow \infty$, ya que $E > 0$. Ya que M es continua y no tiene raíces en Kerr exterior, entonces necesariamente será positiva en todo este bloque. Q.E.D.

El resultado anterior indica que las curvas \dot{r}_0^\pm estarán definidas sobre todo Kerr exterior si la función M no tiene raíces. Entonces, se puede utilizar la proposición 4.4.3 para caracterizar completamente a los diagramas de causalidad.

Si existen raíces de M la situación es más complicada. Para entender qué sucede con la función $g(r, \dot{r})$ se analizarán primero los puntos extremales de M .

Lema 4.4.9. *La función M tiene como mucho un valor extremal positivo. Este valor es un mínimo dado por $r_{min} = \sqrt{\frac{L^2 - E^2 a^2}{3E^2}}$ y se tiene si y solo si $L^2 > a^2 E^2$.*

Comprobación. Al utilizar la ecuación (4.26), se tiene que $\frac{dM}{dr} = 3E^2 r^2 + (E^2 a^2 - L^2)$. Entonces, los posibles valores extremales son $r = \pm \sqrt{\frac{L^2 - E^2 a^2}{3E^2}}$. Por lo tanto, este valor existirá si solo si $L^2 \geq a^2 E^2$. En el caso en que $L^2 = a^2 E^2$, el único valor extremal de M será $r = 0$; el cuál estará fuera de Kerr exterior. Ahora bien, el único valor extremal en Kerr exterior se encontrará cuando $L^2 > a^2 E^2$ y será $r = \sqrt{\frac{L^2 - E^2 a^2}{3E^2}}$. Ya que $\frac{d^2 M}{dr^2} = 6E^2 r > 0$, entonces se puede ver que de hecho este valor será un mínimo de la función M . Q.E.D.

Supongamos primero que existen dos raíces diferentes de M en Kerr exterior.

Lema 4.4.10. *Si existen dos raíces positivas diferentes $r_1 < r_2$ de M , entonces el mínimo r_{min} dado en el Lema 4.4.9 cumplirá que $r_1 < r_{min} < r_2$ y $M(r_{min}) < 0$.*

Comprobación. Se toman r_1 y r_2 como raíces diferentes de M . Los signos de Descartes aplicados a la ecuación (4.26) indican que ambas serán raíces simples, ya que existen como mucho dos raíces positivas de la función M . Entonces, $r_1 \neq r_{min}$, $r_2 \neq r_{min}$ y $M(r_{min}) \neq 0$. Ya que $M(r_1) = M(r_2) = 0$ y M es diferenciable sobre todos los reales, entonces por el Teorema de Rolle y el Lema 4.4.9 se tiene que $r_1 < r_{min} < r_2$. Se observa ahora que M es positiva en el límite $r \rightarrow \infty$, ya que $E > 0$. Si $M(r_{min}) > 0$, entonces existiría otro valor extremal positivo de M diferente de r_{min} . Esto es una contradicción al Lema 4.4.7. Por lo tanto, $M(r_{min}) < 0$. Q.E.D.

El resultado anterior permite obtener la siguiente proposición.

Proposición 4.4.11. *Si la función M tiene dos raíces diferentes $r_1 < r_2$ en Kerr exterior, entonces M será negativa en (r_1, r_2) y positiva en $(r^+, r_1) \cup (r_2, \infty)$.*

Comprobación. Es fácil ver que la función M es positiva en el límite $r \rightarrow \infty$, ya que $E > 0$. Debido a la continuidad de M y al Lema 4.4.10, se puede ver entonces que necesariamente M será negativa en (r_1, r_2) y positiva en $(r^+, r_1) \cup (r_2, \infty)$. Q.E.D.

Supongamos ahora que existe una única raíz de M en Kerr exterior. Entonces, se puede encontrar el siguiente resultado.

Proposición 4.4.12. *Si la función M tiene una sola raíz r_a en Kerr exterior, entonces:*

- *Si r_a es una raíz simple, entonces M será negativa en (r^+, r_a) y positiva en (r_a, ∞) .*
- *Si r_a es una raíz doble, entonces M será no negativa en todo Kerr exterior.*

Comprobación. Si r_a es una raíz simple, entonces se tendrá que la otra raíz positiva de M será menor a r^+ . Ya que M es positiva cuando $r \rightarrow \pm\infty$, entonces el Lema 4.4.9 determina que M será negativa en (r^+, r_a) y positiva en (r_a, ∞) . Si r_a es una raíz doble de M , entonces se tiene que $r_a = r_{min}$. Por lo tanto, el Lema 4.4.8 determina que M será positiva en todo Kerr exterior a excepción de r_a . Q.E.D.

Las proposiciones 4.4.11 y 4.4.12 indican que en el caso de que M tenga raíces en Kerr exterior y por lo tanto $L^2 > a^2 E^2$ por la proposición 4.4.7, no se podrá utilizar únicamente la proposición 4.4.3 para caracterizar a los diagramas de causalidad. Ya que existirán regiones donde M sea negativa, será necesario utilizar también la proposición 4.4.4.

Ahora bien, se sabe que en el caso crítico M tiene una raíz en r^+ . El siguiente resultado nos permite ver que para este caso existe una única raíz de M que se encuentra en Kerr exterior.

Proposición 4.4.13. *En el caso crítico de E y L , la función M tendrá una única raíz simple r_a en Kerr exterior y $M(r) < 0$ para todo $r \in (r^+, r_a)$.*

Comprobación. Observemos que si E y L se encuentran en el caso crítico, entonces $L = \frac{2amE}{r^-}$. Ya que $2m > r^-$, entonces se observa que en este caso $L^2 > a^2 E^2$. Por ende, las proposiciones 4.4.7 y 4.4.10 indican que existirá un mínimo y dos raíces de M . El valor del mínimo será:

$$r_{min} = \sqrt{\frac{2m^2 a^2 + a^4 + 2m^2 \sqrt{m^2 - a^2}}{3(r^-)^2}} \quad (4.28)$$

donde $M(r_{min}) < 0$.

En el caso crítico, la proposición 4.4.6 indica que r^+ es una raíz de la función M . Para determinar la existencia de la raíz r_a basta con probar que $r_{min} > r^+$, ya que $M(r_{min}) < 0$ y M es positiva si $r \rightarrow \infty$. Se puede observar que $a^4 + 2m^2 a^2 = a^2(a^2 + 2m^2) > 3a^4$, debido a que $m > a > 0$. Por otra parte, la ecuación (2.21) determina que $a^4 = (r^+ r^-)^2$. Entonces, $2m^2 a^2 + a^4 + 2m^2 \sqrt{m^2 - a^2} > 3(r^+ r^-)^2$. Al usar la ecuación (2.28) se puede determinar finalmente que $r_{min} > r^+$. Q.E.D.

Según lo obtenido en la proposición anterior y la proposición 4.4.6, en el caso crítico la función M será negativa en (r^+, r_a) . En esa región, las curvas β^\pm no estarán definidas y por ende $g(r, \dot{r})$ será positiva.

La proposición 4.4.13 permite también encontrar un corolario importante.

Proposición 4.4.14. *La función M tendrá una raíz única simple en Kerr exterior sólo en el caso crítico de E y L .*

Comprobación. Supongamos que para valores de E y L fuera del caso crítico, existiera una raíz única y simple de M en Kerr exterior. Denotemos a esta raíz como r_a . La proposición 4.4.6 indica que M será negativa en (r^+, r_a) . Ya que M es continua, esto sería una contradicción al hecho de que $M(r^+) = 0$ fuera del caso crítico. Q.E.D.

4.4.3. Forma de los diagramas de causalidad

Lo único que falta para determinar la forma de los diagramas de causalidad, es conocer las secciones donde las curvas \dot{r}_0^\pm son decrecientes y crecientes. La siguiente proposición nos permite determinar dichas regiones en función de sus derivadas y también nos brinda cierta información de esta última cerca de las raíces de la función M .

Proposición 4.4.15. *En Kerr exterior, las funciones \dot{r}_0^\pm y sus derivadas cumplirán que:*

- Si $L^2 \leq a^2 E^2$, \dot{r}_0^+ será siempre decreciente y \dot{r}_0^- será siempre creciente
- Si $L^2 > a^2 E^2$, para valores de r cercanos a r^+ , \dot{r}_0^+ será decreciente y \dot{r}_0^- será creciente
- Si $L^2 > a^2 E^2$, para valores grandes de r , \dot{r}_0^+ será creciente y \dot{r}_0^- será decreciente
- Si M tiene una raíz simple en r_a , entonces $\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} \rightarrow \infty$ si $r \rightarrow r_a$,
- Si M tiene una raíz doble en r_a , entonces existe un r_c tal que $\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} \rightarrow \pm \sqrt{\frac{r_a + r_c}{r_a^3}}$ si $r \rightarrow r_a$ por la derecha y $\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} \rightarrow \mp \sqrt{\frac{r_a + r_c}{r_a^3}}$ si $r \rightarrow r_a$ por la izquierda.

Comprobación. Tomemos primero $\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr}$. Según las ecuaciones (4.26) y (4.27), esto puede escribirse como

$$\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} = \pm \sqrt{\frac{r^3}{M(r)} \left(-\frac{(E^2 a^2 - L^2)}{r^3} - \frac{3m(L - aE)^2}{r^4} \right)} \quad (4.29)$$

Al tomar $L^2 \leq a^2 E^2$, entonces claramente \dot{r}_0^+ será siempre decreciente y \dot{r}_0^- será siempre creciente, debido al signo de la derivada de cada función.

Si $L^2 > a^2 E^2$, se observa que para valores pequeños de r , el término que envuelve el factor $\frac{1}{r^4}$ es el más dominante en el paréntesis de la ecuación (4.29). Ya que el coeficiente que envuelve a

este término es positivo, entonces \dot{r}_0^+ será decreciente y \dot{r}_0^- será creciente en esta región. Por otra parte, para valores grandes de r el término dominante es $\frac{1}{r^3}$. Ya que el coeficiente que envuelve a este término es negativo, entonces \dot{r}_0^+ será creciente y \dot{r}_0^- será decreciente.

Para el caso en que M tiene una raíz simple en r_a , la ecuación anterior indica claramente que $\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} \rightarrow \infty$ en el límite $r \rightarrow r_a$. Para el caso en que M tenga una raíz doble, se observa que se puede escribir a esta función de la forma $M(r) = (r - r_a)^2(r + r_c)$, donde r_c es un número real positivo. Entonces, en este caso se tiene:

$$\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} = \begin{cases} \pm \left[\sqrt{\frac{r+r_c}{r^3}} + \sqrt{\frac{r^3}{r+r_c} \frac{|r-r_a|}{2}} \right] & r > r_a \\ \pm \left[-\sqrt{\frac{r+r_c}{r^3}} + \sqrt{\frac{r^3}{r+r_c} \frac{|r-r_a|}{2}} \right] & r < r_a \end{cases}$$

Por lo tanto, en el límite $r \rightarrow r_a$ por la derecha, $\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} \rightarrow \pm \sqrt{\frac{r_a+r_c}{r_a^3}}$, mientras que en el límite $r \rightarrow r_a$ por la izquierda, $\frac{d\dot{r}_0^\pm}{dr} \rightarrow \mp \sqrt{\frac{r_a+r_c}{r_a^3}}$,. Q.E.D.

La Figura 4.6 muestra los diagramas de causalidad construidos en base a los resultados analíticos obtenidos a lo largo de esta sección. Una curva es AS sí, entre otras cosas, es temporal. Entonces, solo en las zonas de color azul de los diagramas de causalidad existirán este tipo de curvas. Por otra parte, éstas deben ser temporales en toda su extensión. Curvas que sean solo temporales en ciertas regiones de Kerr exterior y espaciales en otras, no se consideran AS. Las zonas de color blanco estarán entonces restringidas para las curvas AS, ya que éstas se volverían espaciales en estas regiones. Estos diagramas se utilizarán en la sección 4.9 para analizar de manera general la existencia de curvas AS.

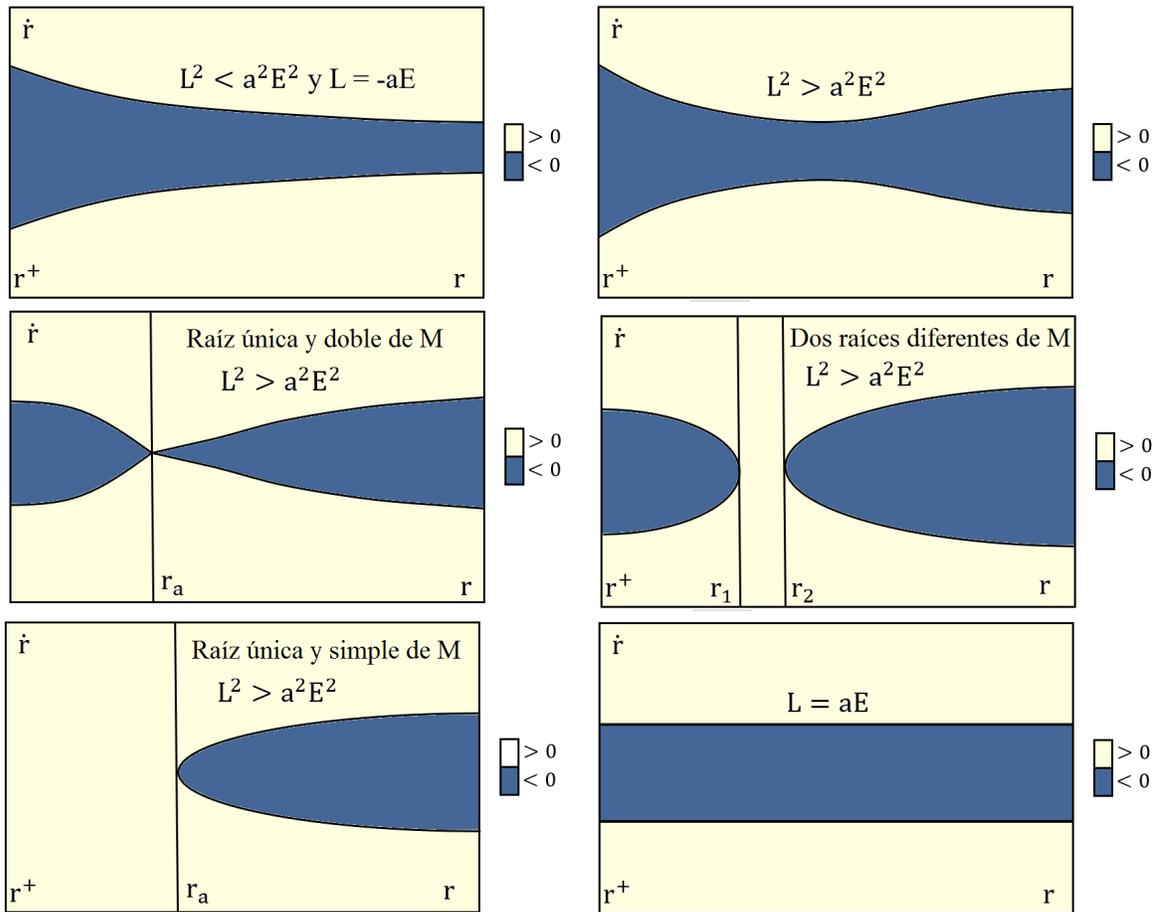


Figura 4.9: Diagramas de causalidad en Kerr exterior obtenidos de forma analítica. Se utilizó la notación r_1 y r_2 si la función M tiene dos raíces diferentes en Kerr exterior y r_a si la función M tiene una única raíz en Kerr exterior.

Para estudiar la validez de estos resultados, se realiza un diagrama de causalidad tomando como valores fijos a $E = 2$, $a = 2$ y $m = 3$. La Figura 4.10 muestra los diagramas obtenidos según el valor del momento angular L . Como se puede ver, la forma de cada uno de ellos guarda relación con lo obtenido analíticamente en la Figura 4.9.

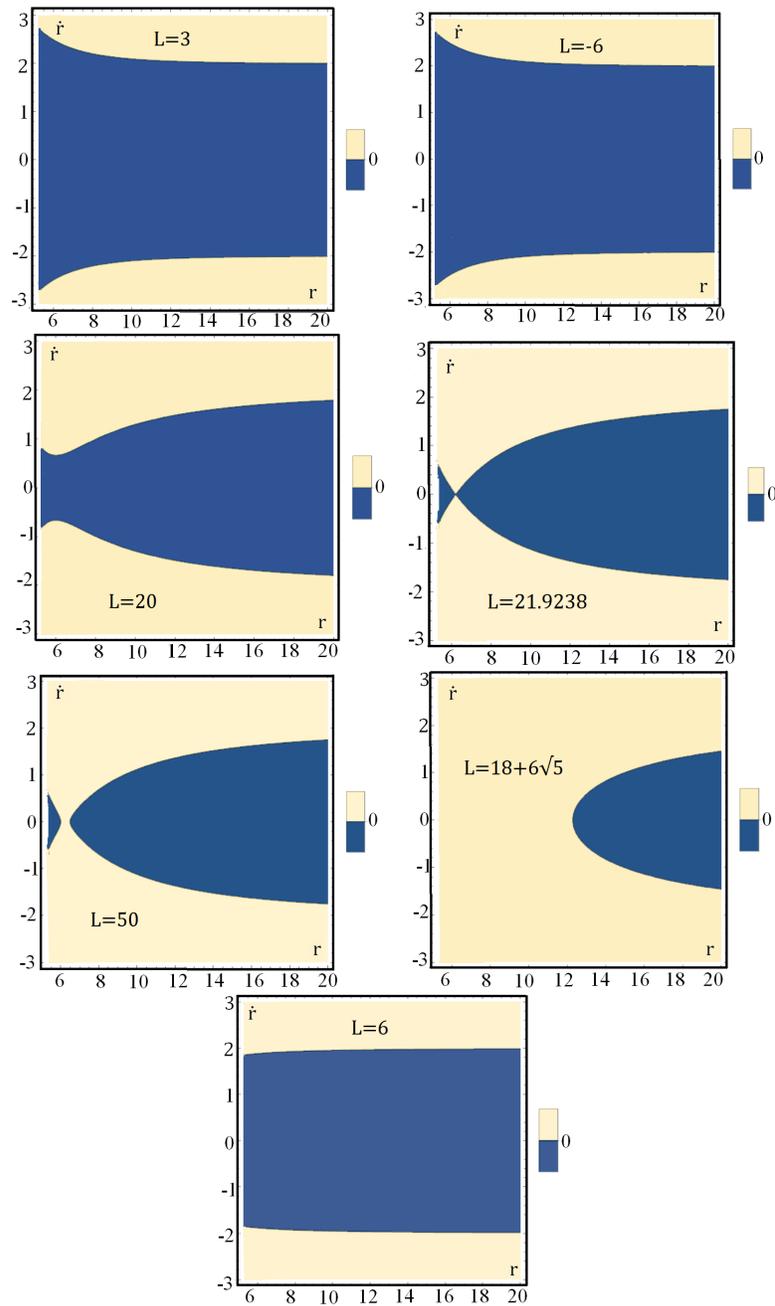


Figura 4.10: Diagramas de causalidad en Kerr exterior obtenidos de forma numérica. Para todos los diagramas se mantuvieron fijos $E = 2$, $a = 2$ y $m = 3$.

4.5. Existencia de curvas con aceleración simétrica

Para determinar si curvas AS pueden existir en el bloque de Kerr exterior, es necesario evaluar

de manera conjunta las soluciones de las ecuaciones (4.4)-(4.7). Solo existirán curvas AS si se cumplen todas estas ecuaciones al mismo tiempo. En esta sección se estudiará si existen en realidad este tipo de soluciones y la forma que deben tener. Para realizar este análisis se utiliza la siguiente clasificación.

Definición 4.5.1. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una curva con aceleración simétrica. Se dice que la curva γ es acotada si es una órbita circular o si existen dos números r_1 y r_2 , tal que $r_1 < r(\tau) < r_2$ para todo valor de τ . La curva γ no es acotada si existe un número $r_1 > r^+$, tal que la coordenada radial toma cualquier valor en (r_1, ∞) .*

En base a los resultados encontrados en las secciones 4.3 y 4.4, se puede extraer una información importante acerca de las curvas AS no acotadas.

Proposición 4.5.2. *No existen curvas AS no acotadas en Kerr exterior.*

Comprobación. Supongamos que existen tales curvas. Recordemos que en el corolario 4.3.5 se mostró que para el límite $r \rightarrow \infty$, las soluciones de la ecuación radial (4.4) son de la forma $r(\tau) \approx (\pm\sqrt{\alpha})\tau^2 + k_1\tau + k_2$ (donde k_1 y k_2 son constantes). Entonces, se tendrá que $\dot{r}(\tau) \approx 2(\pm\sqrt{\alpha})\tau + k_1$. Ahora bien, la proposición 4.4.5 nos indica que en este límite \dot{r} debe cumplir que $|\dot{r}| < E$, para que la curva sea temporal. Pero, para un valor de τ lo suficientemente grande, $|\dot{r}(\tau)|$ será mayor a E , lo cuál es una contradicción ya que entonces esta curva no puede satisfacer las ecuaciones (4.4) y (4.5) a la vez para el límite $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto, no existirán curvas AS no acotadas en Kerr exterior. Q.E.D.

El resultado anterior nos muestra que de hecho el estudio de la existencia de las curvas AS debe realizarse únicamente sobre los observadores acotados.

4.5.1. Órbitas Circulares

Se estudiarán primero el caso de órbitas circulares. Recordemos que su existencia está sujeta a las posibles raíces que puede tener la función radial \tilde{R} . Cómo se observó en la sección 2.3, sólo fue posible comprobar que existirán dichas raíces para la rama positiva de \tilde{R} . Entonces, nos enfocaremos únicamente en esta rama.

Proposición 4.5.3. *Si $L^2 \leq a^2 E^2$, entonces existirá al menos una órbita circular para la rama*

positiva de la función \tilde{R}

Comprobación. Recordemos que en la proposición 4.3.8 se pudo determinar que existirá por lo menos una raíz de la rama positiva. Ahora bien, llamemos a esta raíz r_c . En el caso en que $L^2 \leq a^2 E^2$ los diagramas de causalidad de la sección 4.4.3 nos indica que si $\dot{r} = 0$, entonces $g(r_c, \dot{r}) < 0$. Por lo tanto, la curva $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_c, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ será de hecho una órbita radial. Es decir, será una curva AS que siempre será temporal para cualquier valor de τ . Q.E.D.

En el caso en que $L^2 > a^2 E^2$, la situación es más complicada debido a la existencia de raíces de la función M . Los diagramas de causalidad de la sección 4.4.3 nos indica que en este caso no es suficiente con tener $\dot{r} = 0$ para asegurar que $g(r_c, \dot{r}) < 0$. Si la raíz de la función radial \tilde{R} se encuentra en los intervalos donde M se vuelve negativa, no existirá una órbita circular ya que esta tendría un carácter espacial. Sin embargo, se puede utilizar una propiedad de la función \tilde{R} para encontrar órbitas circulares fuera del caso crítico.

Proposición 4.5.4. *Si $L^2 > a^2 E^2$ y éstos valores no se encuentran en el caso crítico, entonces existe un valor de α tal que se podrá encontrar por lo menos una órbita circular para la rama positiva de la función \tilde{R} .*

Comprobación. Observemos que los diagramas de causalidad fuera del caso crítico tienen una región donde $g(r, 0) < 0$ cerca de r^+ . La raíz r_c de la función \tilde{R} puede o no encontrarse dentro de esta región. Si se encuentra en el interior, la curva $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_c, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ claramente representará a una órbita circular. Si r_c no se encuentra en esta región, observemos que a medida que α aumenta, el valor de r_c se acerca cada vez mas a r^+ . Esto, ya que un aumento del parámetro α le permite a la función \tilde{R} tener un crecimiento mayor cerca de r^+ . Entonces, existirá un valor de α tal que r_c entre en la región cercana a r^+ , donde $g(r, 0) < 0$. Para este caso la curva $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_c, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ será una órbita circular en Kerr exterior. Q.E.D.

Las proposiciones anteriores nos indican que en la rama positiva de la función \tilde{R} fuera del caso crítico, siempre se podrá encontrar un valor de α tal que exista una órbita circular en Kerr exterior. Esto tiene una clara interpretación física. Supongamos que se tiene una nave que viaja cerca de un agujero negro de Kerr. Si esta nave no se encuentra en el caso crítico de energía y momento angular, tiene una posibilidad de evitar caer al agujero negro utilizando un movimiento

AS. Para ello, sus propulsores deben activarse en el momento justo en que esté se encuentre cerca de una órbita circular y tienen que proveerle de una aceleración suficiente para que pueda mantenerse en ella. Por supuesto, si al agotarse el combustible de la nave, ésta volverá a la situación en que se encontraba inicialmente. Entonces, durante el tiempo en que se encuentra en la órbita circular, la nave debería buscar otro tipo de movimiento si quiere regresar a la Tierra.

Finalmente, se puede observar que de hecho este tipo de viajes no tienen una orientación temporal extraña para cierta clase de órbitas circulares.

Corolario 4.5.5. *Si $0 < L \leq aE$, entonces existirá al menos una órbita circular que apunte al futuro para la rama positiva de la función \tilde{R} .*

Comprobación. Debido a la proposición 4.5.2. se tiene que para este caso existirá al menos una órbita circular para la rama negativa. Llamemos a esta órbita $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_c, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$. Se puede observar que $\dot{\gamma} = t\dot{\partial}_t + \dot{\phi}\dot{\partial}_\phi$. Se observa entonces que $g(\dot{\gamma}, l) = \frac{1}{\Delta}g(\dot{\gamma}, V) = \frac{r_c^2 + a^2}{\Delta}g(\dot{\gamma}, \partial_t) + \frac{a}{\Delta}g(\dot{\gamma}, \partial_\phi)$, donde l es el vector luminoso de la proposición 2.4.5. Al usar la definición de E y L se puede escribir que $g(\dot{\gamma}, l) = -E\frac{r_c^2 + a^2}{\Delta} + L\frac{a}{\Delta}$. Ya que $\Delta > 0$ en Kerr exterior, entonces si $0 < L \leq aE$, se tiene que $g(\dot{\gamma}, l) < 0$. Por lo tanto, la proposición 2.4.5 indica que γ apuntará al futuro. Q.E.D.

4.5.2. Otro tipo de curvas Acotadas

En esta sección se analizará el otro tipo de curvas AS acotadas en Kerr exterior. La existencia de este tipo de curvas parece estar relacionado con una posible segunda raíz de la función \tilde{R} . Ya que solo se pudo determinar de manera numérica que la rama negativa de esa función tiene esta propiedad, los resultados obtenidos en esta sección pueden ser tomados únicamente como sugerencias. Una comprobación formal quedaría pendiente para un próximo estudio.

Se toma entonces a la rama positiva de la función \tilde{R} con los parámetros $E = 2$, $L = 50$, $a = 2$, $m = 3$ y $\alpha = 1$. En este caso, la función radial tiene dos raíces reales $r_1 \approx 5.95814$ y $r_2 \approx 11.9983$. La forma de la función \tilde{R} se muestra en la Figura 4.11.

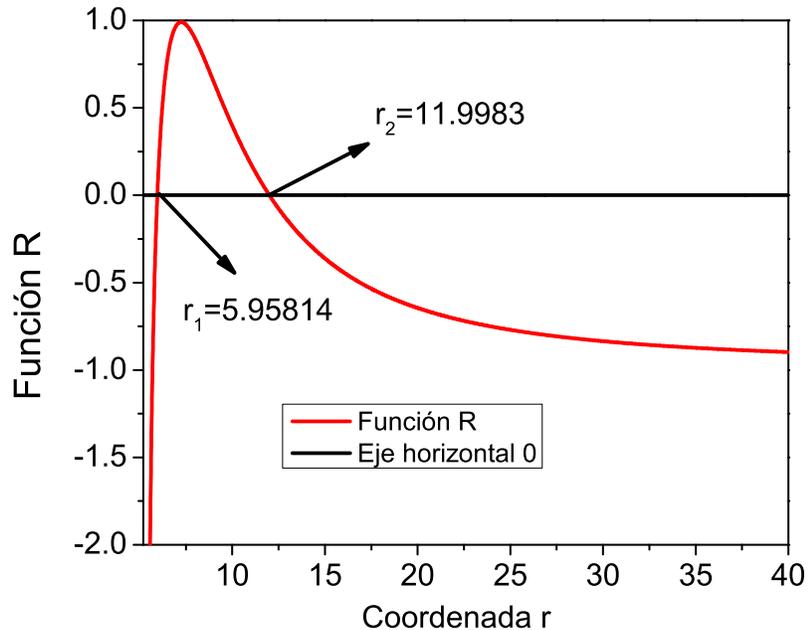


Figura 4.11: Comportamiento de la rama negativa de \tilde{R} con $E = 2$, $L = 50$, $a = 2$, $m = 3$ y $\alpha = 1$. La función presenta dos raíces en Kerr exterior.

Sea una curva $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ que sea simétrica, fija en el plano ecuatorial y que cumpla con la rama negativa de la ecuación radial (4.4). Se estudiará que sucede con este tipo de curvas cerca de la segunda raíz de la función radial. Para ello, se asume que $E = 2$, $L = 50$, $a = 2$, $m = 3$, $\alpha = 1$ y la curva γ cumple que $\dot{r}(0) = 0$, $r(0) \approx r_2$. Utilizando el software *Mathematica* se puede simular el comportamiento de estas curvas para valores finitos de τ . La Figura 4.12 muestra los resultados obtenidos con diferentes valores iniciales de $r(0)$. En ella se gráfica el comportamiento de $r(\tau)$, $\dot{r}(\tau)$ y $g(r(\tau), \dot{r}(\tau))$ para valores de $\tau \in (0, 300)$. En esta Figura la curva r^+ representa al primer horizonte de eventos de Slow Kerr.

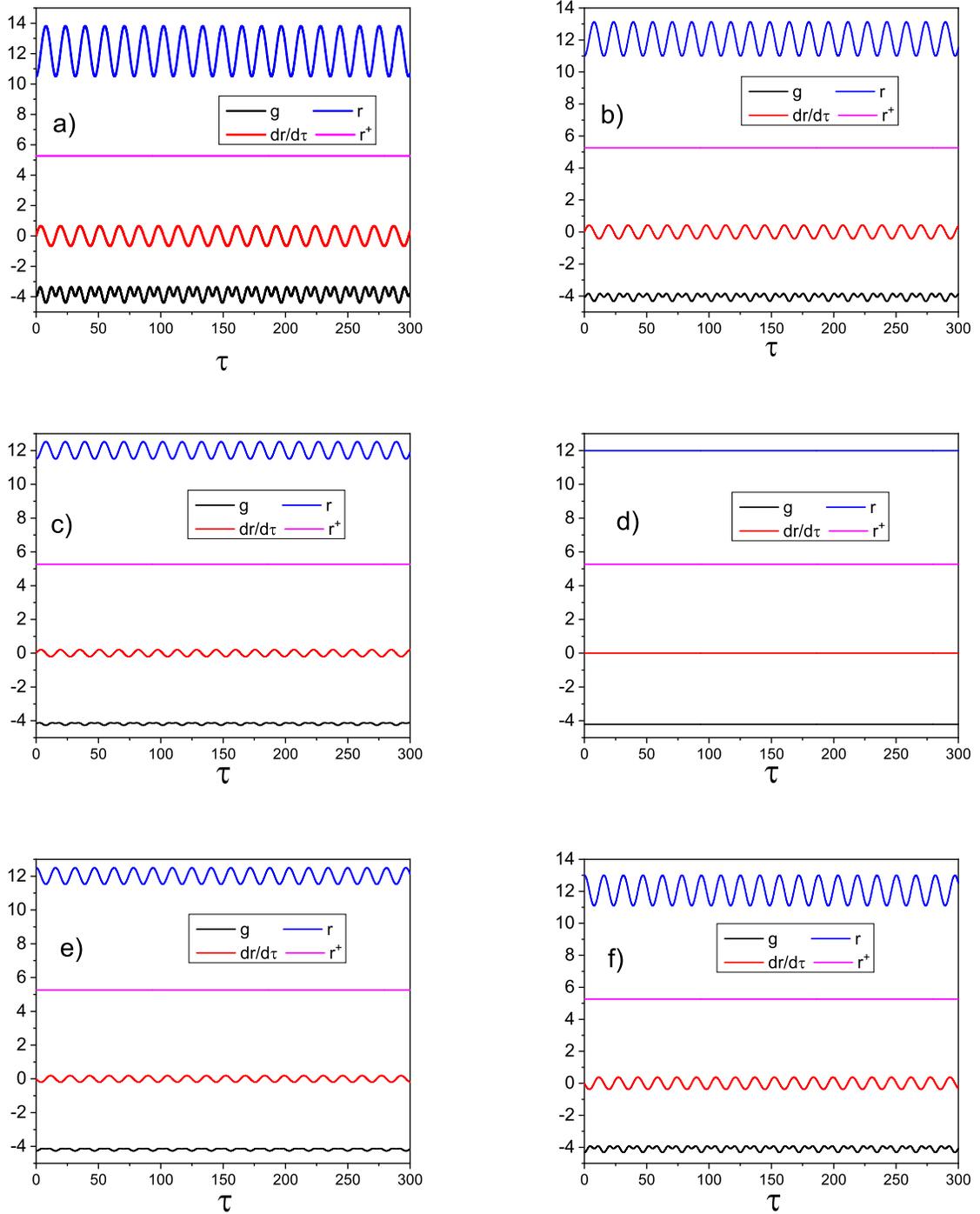


Figura 4.12: Observadores acotados en el exterior del agujero negro de Kerr. Las condiciones iniciales usadas para resolver la ecuación radial son: a) $r(0) = 10.5$, a) $r(0) = 11$, b) $r(0) = 11.5$, d) $r(0) = 12$, e) $r(0) = 12.5$ y f) $r(0) = 13$. Para todos los casos se tomó $\dot{r}(0) = 0$.

Según la Figura anterior, las curvas γ que cumplen esta condición parecerían ser curvas AS acotadas alrededor de r_2 . Esto se determina, ya que en todo el intervalo de $\tau \in (0, 300)$ todas ellas son temporales ($g(r, \dot{r}) < 0$) y no dan señal de que su comportamiento periódico varíe para valores más grandes de τ . De la misma forma, estos resultados sugieren que la raíz r_2 es una órbita circular y que tiene un carácter estable. Esto, ya que pequeñas variaciones de sus condiciones iniciales, generan movimientos acotados cerca de la misma. Este tipo de comportamiento se repite para cualquier caso de la rama negativa que contenga una segunda de la función \tilde{R} . Este resultado es muy interesante ya que r_2 representaría a una órbita circular más accesible para una situación real, ya que las condiciones para que una nave acceda a este tipo de movimiento serán más flexibles que el caso analizado en la sección 4.5.1.

4.5.3. Equivalencia entre curvas AS y movimiento UA

Hasta el momento se ha estudiado las propiedades que deben cumplir las curvas AS. Sin embargo, todavía no se ha estudiado la posible equivalencia entre estas curvas y movimiento UA. Para ello, se utilizan las órbitas circulares encontradas en el capítulo 4.5.1. Según la proposición 4.5.3, existirán curvas AS en forma de órbitas circulares para la rama positiva de \tilde{R} y valores de parámetros de movimiento que cumplan $0 < L < aE$. Debido a que estas curvas son temporales, se puede utilizar la conexión de Fermi-Walker definida sobre ellas para determinar si su aceleración es Fermi-Walker paralela. Para ello, se observa primero el siguiente resultado.

Proposición 4.5.6. *Sea $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_0, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ una órbita circular AS que se encuentren en la rama positiva de la función \tilde{R} . Entonces, su aceleración cumplirá que:*

$$\frac{\hat{D}\vec{a}}{d\tau} = \left[\frac{\sqrt{\alpha\Delta}}{r_0} \left(\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\phi r}^t \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} - \alpha \right) \right] \dot{t} \partial_t + \left[\frac{\sqrt{\alpha\Delta}}{r_0} \left(\Gamma_{tr}^\phi \frac{\dot{t}}{\dot{\phi}} + \Gamma_{\phi r}^\phi - \alpha \right) \right] \dot{\phi} \partial_\phi \quad (4.30)$$

Comprobación. Debido a que γ es AS, entonces será en particular temporal y puede definirse una conexión de Fermi-Walker sobre ella. Ahora bien, observemos que $\vec{a} = a^r \partial_r$ y $\dot{\gamma} = \dot{t} \partial_t + \dot{\phi} \partial_\phi$. Por ende, se tiene que $g(\vec{a}, \dot{\gamma}) = 0$. Al utilizar la proposición 3.1.5, podemos ver entonces que:

$$\frac{\hat{D}\vec{a}}{d\tau} = \frac{D\vec{a}}{d\tau} - \alpha\dot{\gamma} \quad (4.31)$$

Ahora bien, recordemos que en la rama positiva se tiene $a^r(r) = \frac{\sqrt{\alpha\Delta}}{r}$. Ya que para la curva γ se cumple que $r = r_0 = \text{constante}$, entonces $(a^r)^\cdot = 0$. Al utilizar la ecuación 3.6 y el hecho que $a^i = 0$ si $i \neq r$, se puede escribir que:

$$\frac{D\vec{a}}{d\tau} = \Gamma_{jk}^i a^i \dot{x}^k \partial_i = \Gamma_{rt}^i a^r \dot{t} \partial_i + \Gamma_{r\phi}^i a^r \dot{\phi} \partial_i$$

Finalmente, la ecuación (4.30) puede encontrarse al reemplazar la ecuación anterior en la relación (4.31) y al tomar los símbolos de Christoffel no nulos mostrados en el Apéndice A. Q.E.D.

En base al resultado anterior, se puede encontrar el siguiente teorema importante.

Teorema 4.5.7. *Existen curvas AS que no tienen movimiento UA*

Comprobación. Tomemos a $m = 3$ y $a = 2$ como la masa y momento angular del agujero negro de Kerr. Claramente, se tendrá el caso Slow Kerr. Tomemos ahora a la órbita circular $\gamma(\tau) = (t(\tau), r_0, \frac{\pi}{2}, \phi(\tau))$ con parámetros $E = 3$, $L = 2$, $\alpha = 1$ y que existe en la rama positiva de la función \tilde{R} . Se puede comprobar que $r_0 \approx 9.749$ y $0 < L < aE$. Por la proposición 4.5.3 se tendrá que γ será una curva AS. Supongamos que γ tiene movimiento UA. Entonces, su aceleración debería ser Fermi-Walker paralela. Sin embargo, al utilizar la ecuación (4.30) podemos encontrar que:

$$\frac{\hat{D}\vec{a}}{d\tau} \approx -1.3623 \dot{t} \partial_t - 0.8718 \dot{\phi} \partial_\phi \neq 0$$

Lo cuál es una contradicción. Entonces, γ es una curva AS que no tiene movimiento UA. Q.E.D.

5. Conclusiones

En base al análisis de la métrica de Kerr en diferentes coordenadas, fue posible determinar las principales características de un espaciotiempo que contiene un agujero negro en rotación. En la región $\rho = 0$, se pudo encontrar una singularidad real (o no removible) del espaciotiempo, cuya topología es homeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$ (proposición 2.2.3). Es decir, tiene una topología de anillo que evoluciona en el tiempo. Esto muestra una notable diferencia con la singularidad del espaciotiempo de Schwarzschild (la cuál tiene una topología homeomorfa a \mathbb{S}^2), no solo en su estructura topológica sino también en el comportamiento de las geodésicas luminosas en sus cercanías. Como se observa a final de la sección 2.2, en comparación con un agujero negro de Schwarzschild, no todas las geodésicas luminosas que ingresan a un agujero negro de Kerr caen en la singularidad. Existen de hecho geodésicas luminosas fijas en el eje polar (eje de rotación del agujero negro), que son extendibles para todo valor de la coordenada radial y pueden pasar por el medio del «anillo» que representa a la singularidad [10].

El estudio de las singularidades de coordenadas en la métrica BL permitió entender la naturaleza de los denominados horizontes de eventos. Estos objetos son hipersuperficies luminosas que representan a las fronteras del agujero negro (proposición 2.4.3). Dependiendo de los valores de masa m y momento angular a del agujero negro de Kerr, éste puede llegar tener hasta dos horizontes de eventos. En base a un análisis de la desviación de los conos de luz mostrada en la Figura 2.1, fue posible estudiar una de sus propiedades más importantes: ninguna geodésica luminosa o temporal puede escapar del interior del agujero negro una vez que atraviesa uno de los horizontes de eventos. En el caso Fast Kerr ($m < a$), se pudo encontrar que no existen agujeros negros en el espaciotiempo. La hipótesis de censura cósmica nos sugiere que este espaciotiempo no tiene un sentido físico claro, ya que en él existiría una singularidad desnuda (ver sección 2.4.1).

En el espaciotiempo de Kerr se pudo observar también la existencia de un región denominada Ergoesfera, la cuál se estudió en la sección 2.5. En ella la coordenada t se vuelve espacial y pierde su interpretación de coordenada temporal según el punto de vista clásico. En el caso Slow Kerr ($m > a$), parte de esta región se encuentra incluso fuera de los horizontes de eventos. Esto nos muestra cómo es necesario romper los paradigmas clásicos de tiempo y espacio para entender los fundamentos de la Teoría de la Relatividad General. En esta teoría, el tiempo deja

de ser un parámetro absoluto y universal para convertirse simplemente en una coordenada que parametriza al espaciotiempo. Algo similar sucede con el caso de la coordenada radial r . Debido a que la métrica BL no tiene ninguna singularidad cuando $r = 0$, siempre y cuando $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, el espaciotiempo puede extenderse a valores negativos de la coordenada radial r . Si bien para esta extensión del espaciotiempo de Kerr la coordenada r sigue siendo espacial, su noción clásica relacionada a la distancia medida entre dos puntos deja de tener validez (ver sección 2.3).

Por otra parte, en el capítulo 3 se pudo entender el significado y la estructura matemática detrás del movimiento uniformemente acelerado (UA) en Relatividad General. Mediante el uso de la conexión de Fermi-Walker fue posible encontrar la ecuación (3.7), cuyas soluciones permiten caracterizar a las curvas que tienen movimiento UA [8]. Debido a la complejidad de los símbolos de Christoffel en cualquiera de las coordenadas estudiadas, no fue posible encontrar soluciones analíticas de dicha ecuación. Queda abierto todavía el problema de encontrar métodos alternativos que permitan encontrar soluciones de una manera más sencilla. Sin embargo, fue posible llegar a una conclusión general con respecto a espaciotiempos asintóticamente planos. Para el límite asintótico, los observadores que tienen movimiento UA, son precisamente aquellos que tienen este mismo movimiento en el espaciotiempo de Minkowski: observadores de Rindler (proposición 3.3.1). Esto tiene sentido ya que el espaciotiempo tiende, de manera continua, a ser plano en este límite.

Al igual que sucede en mecánica clásica, la definición 3.3.2 de movimiento UA implica que el módulo de la aceleración de una curva es constante ($g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha = \text{constante}$). Sin embargo, queda claro que esta última condición, junto con la restricción que la curva sea temporal, no son suficientes para que ésta tenga un movimiento UA (teorema 4.5.7). En la sección 4 se estudia esta diferencia, tomando curvas que tienen aceleración simétrica AS (definición 4.1.5). Éstas se definieron como curvas temporales que cumplen con $g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha = \text{constante}$ y las simetrías del espaciotiempo de Kerr en coordenadas BL (plasmadas en los vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ). El estudio realizado permitió encontrar órbitas circulares que giran alrededor del agujero negro y que cumplen con la condición de ser AS si sus parámetros de movimiento cumplen que $0 \leq L \leq aE$ (proposición 4.5.3). Debido a la forma sencilla de la evolución de sus coordenadas, estas órbitas se utilizaron para estudiar la diferencia entre movimiento UA y curvas temporales que cumplen

con $g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha = \text{constante}$.

Al tomar $m = 3$, $a = 2$, $L = 2$, $E = 3$ y $\alpha = 1$, se pudo encontrar un ejemplo particular de una órbita circular AS que no tiene un movimiento UA. Esto determina que en general no existe la equivalencia entre curvas AS y movimiento UA en un espaciotiempo curvo. No es suficiente el tener $g(\vec{a}, \vec{a}) = \alpha = \text{constante}$ y una curva temporal para hablar de movimiento UA. Cabe recalcar que estos parámetros nos permitieron demostrar el Teorema 4.5.7, sin embargo no representan necesariamente a un sistema físico real. Si bien se pudo determinar que no existe esta equivalencia, quedan abiertas todavía varias preguntas interesantes: ¿Qué significado tienen las curvas AS? ¿Existen algunas condiciones extra que deben cumplir las curvas AS para que tengan un movimiento UA según la definición 3.3.2? y ¿Se cumplen todavía estos resultados si se toman parámetros de movimiento más acordes a un sistema físico real? Debido a la complejidad de las ecuaciones derivadas en la sección 4, encontrar respuestas a estas inquietudes resulta muy complicado en el espaciotiempo de Kerr. Sería interesante analizar qué sucede con las curvas AS en un espaciotiempo más sencillo como por ejemplo el de Schwarzschild.

6. Apéndice A

Tensor métrico inverso y símbolos de Christoffel de la métrica BL

Sabiendo la forma de las componentes g_{ij} de la métrica BL y usando la definición del tensor métrico inverso se puede encontrar la métrica BL inversa. La ecuación 6.1 muestra su forma matricial [16].

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta \sin^2\theta} & 0 & 0 & \frac{g_{\phi t}}{\Delta \sin^2\theta} \\ 0 & \frac{1}{g_{rr}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{\theta\theta}} & 0 \\ \frac{g_{\phi t}}{\Delta \sin^2\theta} & 0 & 0 & -\frac{g_{tt}}{\Delta \sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Donde g_{ij} son la componentes de la métrica BL.

Al usar la ecuación (1.6) se pueden calcular los símbolos de Christoffel en coordenadas BL, usando el tensor métrico g y el tensor métrico inverso g^{-1} . Las expresiones simplificadas de los símbolos no nulos se muestran en las siguientes ecuaciones [16].

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= -\frac{m}{\Delta \rho^4} (\rho^2 - 2r^2) (r^2 + a^2), & \Gamma_{r\phi}^t &= \frac{a \sin^2\theta}{\Delta} \left[\frac{m}{\rho^4} (\rho^2 - 2r^2) (r^2 + a^2) - \frac{2mr^2}{\rho^2} \right], \\ \Gamma_{\phi\theta}^t &= \frac{mra^3}{\rho^2} \sin^2\theta \sin(2\theta), & \Gamma_{\theta t}^t &= -\frac{mra^2}{\rho^2} \sin(2\theta), & \Gamma_{tt}^r &= -\frac{\Delta r}{\rho^4} (\rho^2 - 2r^2), \\ \Gamma_{r\theta}^r &= \Gamma_{\theta\theta}^r = -\Delta \Gamma_{rr}^\theta = -\frac{a^2}{2\rho^2} \sin(2\theta), & \Gamma_{rr}^r &= \frac{r}{\rho^2} + \frac{m-r}{\Delta}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{\Delta r}{\rho^2}, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{r}{\rho^2}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{\Delta}{\rho^2} \sin^2\theta \left[r + \frac{ma^2}{\rho^4} (\rho^2 - 2r^2) \sin^2\theta \right], & \Gamma_{tr}^\phi &= -\frac{ma}{\Delta \rho^4} (\rho^2 - 2r^2), \\ \Gamma_{t\phi}^r &= -\frac{ma\Delta}{\rho^6} (\rho^2 - 2r^2) \sin^2\theta, & \Gamma_{t\phi}^\theta &= \frac{mar}{\rho^6} (r^2 + a^2) \sin(2\theta), & \Gamma_{t\theta}^\phi &= -\frac{2mra}{\rho^4} \cot g\theta, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\frac{\sin(2\theta)}{2\rho^2} \left[r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho^2} \left(2 + \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2\theta \right) \sin^2\theta \right], \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{r}{\Delta} \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) + \frac{ma}{\Delta \rho^4} (\rho^2 - 2r^2) \sin^2\theta, \\ \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \frac{\cot g\theta}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) (r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho^2} \sin^2\theta) + \frac{2mra^2}{\rho^2} (r^2 + a^2) \sin^2\theta \right]. \end{aligned}$$

Donde Δ y ρ son las funciones definidas en el capítulo 2.1.

7. Referencias

Referencias

- [1] Marin, C. (2011). La expansión del universo. Quito: USFQ.
- [2] Martinez, A. (2007). La curvatura de Riemann a travez de la historia. SMM. 44, 29-52.
- [3] Misner, C., Thorne, K. & Wheeler, A. (1973). Gravitation. San Francisco: W.H. Freeman and Company.
- [4] Heinicke, C. & Hehl, F. (2015). Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation, an introduction. International Journal of Modern Physics. D 24, 1530006.
- [5] Blanco, O. (2017). Observadores de Rinfler y Limite Near Horizon. Quito: USFQ.
- [6] Barret, J. F. (2006). The Hyperbolic Theory of Special Relativity. Reino Unido: University of Southampton
- [7] Fernandez, G. (2016). Observadores uniformemente acelerados en De Sitter. España: Universidad de Granada.
- [8] De la Fuente, D. (2016). Some Problems on Prescribed Mean Curvature and Kinematic in General Relativity. España: Universidad de Granada.
- [9] John, B., Ehrlich, P. & Easley, K. (1996). Global Lorentzian Geometry. Nueva York: Marcel Dekker.
- [10] O'Neill, B. (2015). The geometry of Kerr Black Holes. Nueva York: Dover Publications.
- [11] O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. San Diego: Academic Press.
- [12] Sanchez, M & Flores, J.L. (2003). Introducción a la Geometria Diferencial de Variedades. Granada: Universidad de Granada.
- [13] Henry, R. (2000). Kretschmann Scalar for a Kerr-Newman Black Hole. The Astrophysical Journal. 535, 350-353.
- [14] Hawking, S. & Ellis, G.F. (1973). The large scale estructura of spacetime. USA: Cambridge University Press.
- [15] Mazur, P. (2001). Black Hole Uniqueness Theorems. Cornell University Library. arXiv:hep-th/0101012.
- [16] Frolov, V. & Zelnikov, A. (2011). Introduction to Black Hole Physics. Gran Bretaña: Oxford University Press.

- [17] Mars, M. (2000). Uniqueness properties of the Kerr metric. Cornell University Library. arXiv:gr-qc/0004018
- [18] Chandrasekhar, S. (1983). The mathematical theory of black holes. Nueva York: Oxford University Press.
- [19] Duztas, K. (2017). Cosmic censorship and the third law of black hole dynamics. arXiv:1706.03927.
- [20] Sachs, R. & Wu, H. (1977). General Relativity for Mathematicians. Nueva York: Springer-Verlag.
- [21] Anderson, B., Jackson, J. & Sitharam, M. (1998). Descartes' Rule of Signs Revisited. The Amer. Math. Monthly. 105, 447-451.