

|

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

Simulación de una Montaña Rusa usando Teorías Multicuerpo

Gabriel Fuad Abedrabbo Ode

Tesis de grado presentada como requisito para la obtención del título de
Ingeniero Mecánico

Quito

junio de 2007

**Universidad San Francisco de Quito
Colegio de Ciencias e Ingeniería**

HOJA DE APROBACIÓN DE TESIS

Simulación de una Montaña Rusa usando Teorías Multicuerpo

Gabriel Fuad Abedrabbo Ode

Laurent Sass, Ph.D.

Director de la Tesis y

Miembro del Comité de Tesis

.....

Fernando Romo, M.Sc.

Decano del Colegio de Ciencias e Ingeniería y

Miembro del Comité de Tesis

.....

Víctor Guerrero, Ph.D.

Miembro del Comité de Tesis

.....

Martin Hirschhorn, M.Sc.

Miembro del Comité de Tesis

.....

Quito, 22 de junio de 2007

© Derechos de autor
Gabriel Fuad Abedrabbo Ode
2007

Agradecimientos para

Laurent Sass por su apoyo incondicional
en el desarrollo de esta tesis.

Los miembros del jurado: Fernando
Romo, Laurent Sass, Martin Hirschhorn y
en especial a Víctor Guerrero por su
valioso aporte.

A mi familia por su respaldo y confianza
en todo momento.

Personal de Vulcano Park por su apertura
al momento de mi investigación.

Profesores y compañeros que han
formado parte de mi desarrollo
profesional.

Resumen

Las simulaciones de sistemas mecánicos se han convertido en una herramienta muy importante para el desarrollo de nuevas tecnologías. En esta tesis se realizó una simulación de una montaña rusa a través del método de los Sistemas Multicuerpo. Un sistema multicuerpo es un conjunto de cuerpos rígidos unidos entre sí por medio de articulaciones que pueden permitir ya sea rotación y/o traslación entre estos. En esta tesis se puso énfasis en la construcción de un modelo de contacto válido entre la rueda y el riel de la montaña rusa, un ingrediente fundamental al momento de hacer simulaciones. El modelado de la montaña rusa se basó en sistemas ferroviarios; pero, debido a la variación en el tipo de recorrido entre las montañas rusas y los ferrocarriles, en esta tesis se han realizado nuevas hipótesis en el diseño de un modelo de contacto entre la rueda y el riel de las mismas. Para verificar que las hipótesis realizadas en el modelo de la montaña rusa sean consistentes, se han realizado pruebas bajo diferentes condiciones tales como: subidas, bajadas y trayectorias basadas en funciones matemáticas que representen las situaciones que pueden presentarse en un sistema real. Para validar el modelo se han comparado los resultados obtenidos en este trabajo con resultados obtenidos en otras investigaciones basadas en sistemas ferroviarios.

Abstract

Mechanical system simulations have become a very important tool in the development of new technologies. In this thesis, a simulation of a roller coaster using the Multibody Systems method was developed. Multibody systems are groups of bodies joined by articulations that can allow rotation and/or translation between the bodies. This thesis concentrates on the construction of a valid wheel/rail contact model that is necessary to perform a simulation. The modeling of the roller coaster was based on railway systems; however, due to the important differences existing between railway rails and roller-coaster rails, many hypotheses had to be introduced. The validation of the hypotheses was performed on the roller coaster model by considering different kinds of tracks such as: climb, descend, and tracks based on mathematical functions that represent situations that can occur in a real system. Additionally, the simulation validation was performed comparing the results obtained in this work with the ones obtained in other investigations based on railway simulations.

Tabla de contenido

Agradecimientos para	iviv
Resumen.....	viv
Abstract	vivi
Tabla de contenido.....	viiivii
1 Introducción	14
1.1 Historia de las montañas rusas [11].....	11
1.2 Historia de los sistemas multicuerpo [6].....	55
1.3 Objetivos de la tesis	66
1.3.1 Objetivo General.....	66
1.3.2 Objetivos específicos.....	66
1.4 Metodología.....	77
2 Introducción a los sistemas multicuerpo.....	99
2.1 Sistema multicuerpo.....	99
2.1.1 Estructuras abiertas.....	99
2.1.2 Estructuras cerradas.....	1010
2.2 Ecuaciones de Newton-Euler Recursivo.....	1212
2.3 Modelo de contacto.....	1313
2.4 Restricciones del movimiento	1313
2.5 Resolución de las ecuaciones.....	1616
2.5.1 Resolución de ecuaciones de un sistema no restringido.....	1616
2.5.2 Resolución de ecuaciones de un sistema restringido.....	1616
2.5.3 Herramientas utilizadas para la resolución de ecuaciones.....	1919
2.6 Generación de las ecuaciones.....	1919
2.7 Modelos de contacto entre la rueda y el riel de una montaña rusa ya realizados.....	2020
2.7.1 Descripción de rieles través de curvas paramétricas[1].....	2020
2.7.2 Posibles soluciones para simplificar el contacto[2].....	2222
3 Construcción del modelo	2424
3.1 Sistema real	2424
3.2 Configuración de referencia	2424
3.3 Descripción del modelo de contacto utilizado	2626
3.4 Parámetros de la simulación.....	3232
3.5 Implementación del modelo.....	3434
4 Análisis de resultados.....	3737
4.1 Pruebas de estabilidad en plano.....	3737
4.2 Pruebas en subida y bajada	4040

4.3	Implementación de una trayectoria sinusoidal	4242
4.4	Análisis de sensibilidad de las variables del sistema	4444
4.5	Validación del modelo	4545
4.6	Animación	4545
5	Conclusiones y Recomendaciones	4646
5.1	Conclusiones	4646
5.2	Recomendaciones	4747
5.3	Investigación propuesta: Desarrollos aplicables para la simulación y simplificación de curvas en tres dimensiones	4747
5.3.1	Conceptos	4848
5.3.2	Cálculos realizados e implementación	4949
5.4	Estimaciones preliminares	4949
6	Anexos	5050
6.1	Anexo 1 (Parámetros de simulación simbólica)	5050
6.1.1	Datos	5050
6.1.2	Sensores	5858
6.1.3	Restricciones de Lazo cerrado	5959
6.2	Anexo 2 (Parámetros numéricos)	6060
6.2.1	Datos numéricos	6060
6.2.2	Posición de sensores	6363
6.2.3	Condiciones iniciales	6464
6.3	Anexo 3 (Implementación del modelo)	6767
6.3.1	Programas realizados para esta tesis	6767
6.3.2	Otros archivos utilizados para la tesis	7777
	Bibliografía	7878
	Agradecimientos para	iv
	Resumen	v
	Abstract	vi
	Tabla de contenido	vii
1	Introducción	1
1.1	Historia de las montañas rusas [11]	1
1.2	Historia de los sistemas multicuerpo [6]	5
1.3	Objetivos de la tesis	6
1.3.1	Objetivo General	6
1.3.2	Objetivos específicos	6
1.4	Metodología	7
2	Introducción a los sistemas multicuerpo	9
2.1	Sistema multicuerpo	9
2.1.1	Estructuras abiertas	9
2.1.2	Estructuras cerradas	10

<u>2.2</u>	<u>Ecuaciones de Newton-Euler Recursivo</u>	<u>12</u>
<u>2.3</u>	<u>Modelo de contacto</u>	<u>13</u>
<u>2.4</u>	<u>Restricciones del movimiento</u>	<u>13</u>
<u>2.5</u>	<u>Resolución de las ecuaciones</u>	<u>16</u>
<u>2.5.1</u>	<u>Resolución de ecuaciones de un sistema no restringido</u>	<u>16</u>
<u>2.5.2</u>	<u>Resolución de ecuaciones de un sistema restringido</u>	<u>16</u>
<u>2.5.3</u>	<u>Herramientas utilizadas para la resolución de ecuaciones</u>	<u>19</u>
<u>2.6</u>	<u>Generación de las ecuaciones</u>	<u>19</u>
<u>2.7</u>	<u>Modelos de contacto entre la rueda y el riel de una montaña rusa ya realizados</u>	<u>20</u>
<u>2.7.1</u>	<u>Descripción de rieles través de curvas paramétricas[1]</u>	<u>20</u>
<u>2.7.2</u>	<u>Posibles soluciones para simplificar el contacto[2]</u>	<u>22</u>
<u>3</u>	<u>Construcción del modelo</u>	<u>24</u>
<u>3.1</u>	<u>Sistema real</u>	<u>24</u>
<u>3.2</u>	<u>Configuración de referencia</u>	<u>24</u>
<u>3.3</u>	<u>Descripción del modelo de contacto utilizado</u>	<u>26</u>
<u>3.4</u>	<u>Parámetros de la simulación</u>	<u>32</u>
<u>3.5</u>	<u>Implementación del modelo</u>	<u>34</u>
<u>4</u>	<u>Análisis de resultados</u>	<u>37</u>
<u>4.1</u>	<u>Pruebas de estabilidad en plano</u>	<u>37</u>
<u>4.2</u>	<u>Pruebas en subida y bajada</u>	<u>40</u>
<u>4.3</u>	<u>Implementación de una trayectoria sinusoidal</u>	<u>42</u>
<u>4.4</u>	<u>Análisis de sensibilidad de las variables del sistema</u>	<u>44</u>
<u>4.5</u>	<u>Validación del modelo</u>	<u>45</u>
<u>4.6</u>	<u>Animación</u>	<u>45</u>
<u>5</u>	<u>Conclusiones y Recomendaciones</u>	<u>46</u>
<u>5.1</u>	<u>Conclusiones</u>	<u>46</u>
<u>5.2</u>	<u>Recomendaciones</u>	<u>47</u>
<u>5.3</u>	<u>Investigación propuesta: Desarrollos aplicables para la simulación y simplificación de curvas en tres dimensiones</u>	<u>47</u>
<u>5.3.1</u>	<u>Conceptos</u>	<u>48</u>
<u>5.3.2</u>	<u>Cálculos realizados e implementación</u>	<u>49</u>
<u>5.4</u>	<u>Estimaciones preliminares</u>	<u>49</u>
<u>6</u>	<u>Anexos</u>	<u>50</u>
<u>6.1</u>	<u>Anexo 1 (Parámetros de simulación simbólica)</u>	<u>50</u>
<u>6.1.1</u>	<u>Datos</u>	<u>50</u>
<u>6.1.2</u>	<u>Sensores</u>	<u>58</u>
<u>6.1.3</u>	<u>Restricciones de Lazo cerrado</u>	<u>59</u>
<u>6.2</u>	<u>Anexo 2 (Parámetros numéricos)</u>	<u>60</u>

<u>6.2.1</u>	<u>Datos numéricos</u>	<u>60</u>
<u>6.2.2</u>	<u>Posición de sensores</u>	<u>63</u>
<u>6.2.3</u>	<u>Condiciones iniciales</u>	<u>64</u>
6.3	Anexo 3 (Implementación del modelo)	67
<u>6.3.1</u>	<u>Programas realizados para esta tesis</u>	<u>67</u>
<u>6.3.2</u>	<u>Otros archivos utilizados para la tesis</u>	<u>77</u>
Bibliografía		78

1 Introducción

Día a día el mundo se ve inmerso en desarrollos tecnológicos cada vez más avanzados. Esto hace que los ingenieros tengan que luchar para poder obtener resultados de una manera más rápida y eficiente. Por otro lado, gracias a las importantes capacidades de computación disponibles hoy en día, los ingenieros han podido desarrollar herramientas de simulación en todos los campos. Utilizando computadoras personales ahora es posible predecir el comportamiento de toda clase de sistemas a través de herramientas de cálculo numéricas, las cuales resuelven las ecuaciones características de los sistemas.

Los principales objetivos de las simulaciones incluyen:

- Predecir el comportamiento de un sistema
- Optimizar el diseño
- Diseñar sistemas de control para el sistema

Al momento de hacer las simulaciones, se debe tomar en cuenta que existen dos fases fundamentales: la primera es obtener las ecuaciones dinámicas y la segunda es la resolución de las ecuaciones y el análisis de resultados. Existen desde hace mucho tiempo distintas formas de resolver y analizar numéricamente las ecuaciones a través de cálculos matriciales o procesos iterativos, pero los métodos para sistematizar la generación de ecuaciones y así obtener un modelo a través de la computadora son procesos relativamente nuevos (años 60). La ventaja principal de una generación automática de las ecuaciones radica en la posibilidad de considerar sistemas complejos y grandes, para los cuales un proceso manual es tedioso además de ir a la par de altas probabilidades de error.

Para construir modelos de sistemas mecánicos, es fundamental poder describir precisamente la estructura del mismo, junto con las interacciones entre el sistema y su entorno. En esta tesis se tratará sobre la simulación de una montaña rusa. Se construirá un modelo de un vagón de montaña rusa, basándose en la teoría multicuerpo descrita más adelante. En este caso particular, las interacciones entre el sistema y su entorno producidas por el contacto entre las ruedas del vagón y los rieles son muy importantes en la simulación, por lo que este tema también será tratado en detalle.

La teoría multicuerpo está en pleno desarrollo desde sus inicios en los años 60. Actualmente, la construcción de nuevos modelos de contacto y el desarrollo de modelos multifísicos son importantes campos de investigación. [3]

1.1 Historia de las montañas rusas [11]

A pesar de no tener otra funcionalidad que la de entretener al público, las montañas rusas hoy en día se han convertido en una gran industria que avanza a pasos acelerados, utilizando ingeniería y tecnología de punta.

El inicio de lo que hoy se conoce como montañas rusas comenzó en los fríos inviernos rusos del siglo XV, como se puede ver en la ilustración 1. Las sensaciones de velocidad y de caída se mantienen iguales entre dichas

montañas rusas y las que existen ahora, aunque la tecnología y el diseño de estas ha variado mucho desde aquellos días.



Ilustración 1. Inicios de las montañas rusas.[11]

Las montañas rusas comenzaron como colinas construidas de troncos y cubiertas de hielo con longitudes de alrededor de 200 metros. Estas podían llevar a sus pasajeros a velocidades de hasta 80 kilómetros por hora. Las personas que deseaban disfrutar de este recorrido necesariamente tenían que subir 20 metros, lo que equivale a 5 pisos, para

montarse en un bloque de hielo con un asiento de paja. Tantos esfuerzos para un descenso que no pasaba de unos segundos.

No obstante, a pesar de ciertas incomodidades, como la de tener que caminar hacia la cima o solo poder utilizar esa diversión durante el invierno, el deleite era tan grande que día a día las montañas rusas se volvieron más populares. Esto llevó a que las personas trabajen para superar esas trabas y conviertan esos toboganes en las montañas rusas que hoy se conocen.

El primer gran paso se dio en 1804 en París donde se añadieron pequeñas ruedas a los trineos, ver ilustración 2. En esta montaña rusa no se dio una mayor importancia a la seguridad de los vagones, causando que algunas personas salgan lastimadas. Trece años después se colocó ruedas que aseguraban el vagón con el riel para mejorar la seguridad. Eventualmente aparecieron montañas rusas que tenían cables para subir sus vagones hasta la cumbre.

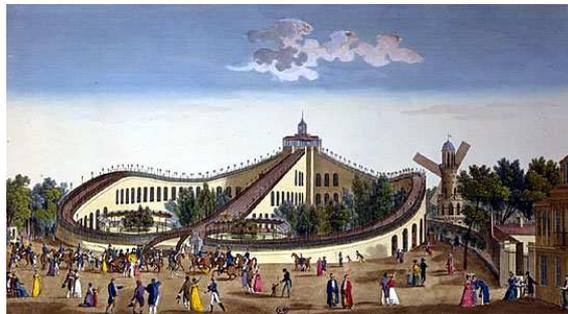


Ilustración 2. Primera montaña rusa con ruedas.[11]

A finales del siglo XIX las compañías de buses construyeron parques de diversiones al final de sus líneas popularizando así a las montañas rusas en todo Estados Unidos.

Poco a poco las montañas rusas se fueron haciendo más parecidas a las que se tienen hoy. Una de las innovaciones que se hicieron fue hacerlas continuas, cerrándolas y haciendo que el final del trayecto se conecte con el principio del mismo, además de añadir un sistema que lleve a los vagones hacia la cima y de esta forma lograr que el sistema no necesite de la fuerza humana.



Ilustración 3. Inicios de los rizados.[11]

inseguro y por ello no fueron construidos hasta el año 1895. Las aceleraciones centrífugas en el recorrido eran demasiado altas y ocasionaban daños en los pasajeros por lo que los rizados dejaron de funcionar. Volvieron a ser usados solo cuando se desarrolló un nuevo diseño de rizados con una forma más ovalada, como se observa en la ilustración 4, que lograba reducir las fuerzas centrífugas y de esta manera mejorar la seguridad para sus ocupantes. Estos diseños tenían un espacio limitado de asientos pero agradaron a muchos entusiastas por lo cual se incrementó la popularidad de las montañas rusas con rizo. Ello obligó a un nuevo desarrollo para la seguridad que consistía en unas barras para sujetar a los pasajeros.

Otro gran avance que se dio en las montañas rusas fue el de añadir los rizados, como el que se observa en la ilustración 3. La idea se tuvo en París a mediados del siglo XIX. Se basaba en los juguetes de niños en los que una pequeña bola recorría un rizo manteniéndose en contacto con los rieles gracias a la aceleración centrífuga. Los rizados se veían como algo



Ilustración 4. Rizos modernos.[11]

A inicios del siglo XX, en los años 20, más de 1500 montañas rusas funcionaban en los Estados Unidos. Existía una gran variedad entre las que se tenían: The Fireball que llegaba a una velocidad superior a 100 km/h. The Fireball fue superado pronto por Bobs una montaña rusa realizada en colaboración entre algunos inventores entre los cuales se encontraba Harry Traver. Esta montaña rusa consistía de una trayectoria de casi un kilómetro con 16 caídas y 12 curvas. Traver era conocido por el diseño de tres montañas rusas del terror: el Cyclone de Crystal Beach Ontario con una caída de 27 metros, Lightning en Revere Beach y el Cyclone del Parque Palisades (Fort Lee, N. J.).

La más clásica de las montañas de esta época es probablemente el Cyclone de Nueva York construida en 1927 (ver ilustración 5), y que sigue en funcionamiento hasta hoy. Tiene una caída de 58°, lo cual es intenso incluso con los parámetros que se utilizan para la construcción de montañas rusas modernas. Se dice que es tan fuerte esta montaña rusa que alguna vez se subió una persona muda en ella y al terminar el trayecto dijo "Me siento enfermo".



Ilustración 5. Cyclone de Nueva York construida en 1927.[11]

En los años 30 comenzó una caída en la construcción de montañas rusas. El bajo poder adquisitivo de las personas hizo que muchas montañas rusas dejen de funcionar y que muy pocas se construyan. Solo el ingenio de Walt Disney hizo que revivan los parques de diversiones luego de abrir las puertas de Disneyland de California en 1955. El éxito que tubo Disneyland hizo que pronto se abrieran otros parques como Six Flags, King Island y Bus Gardens en el que se incluyeron también recorridos sobre agua.

Otra etapa de las montañas rusas surgió del desarrollo de montañas rusas de acero en 1959. Estas constan de rieles tubulares de acero y de ruedas de nylon. Así, se expandió las posibilidades de diseño de estas haciendo los recorridos mucho más suaves.

A pesar de haber mejorado en velocidad y seguridad respecto a las montañas rusas existentes a inicios del siglo XX, la configuración de la construcción que tienen las montañas rusas actuales no ha cambiado mucho. Poco a poco se han hecho cambios en la trayectoria de las montañas rusas, introduciendo por ejemplo trayectorias con la forma de un tornillo en las cuales el vehículo rota en el eje longitudinal 360°. También se han hecho cambios en los rieles, con lo que hoy en día se tiene montañas rusas con vagones suspendidos bajo el riel, o sistemas con un solo riel. Incluso, aparecen prototipos que ubican al vehículo entre los rieles (ver ilustración 6).



Ilustración 6. Nuevos modelos de montañas rusas.[11]

Los mecanismos de propulsión también han evolucionado, cambiando las cadenas por fuerzas electromagnéticas, generando aceleraciones más intensas. Un ejemplo de este sistema se observa en la montaña rusa Superman The Escape con una altura máxima de 127 metros y velocidades de 160 km/h alcanzadas en solo 7 segundos (ver ilustración 7).

Esta breve historia demuestra como las montañas rusas se han transformado en verdaderas obras de ingeniería requiriendo potentes herramientas de diseño y simulación. Con las simulaciones se puede predecir el comportamiento de un nuevo diseño de vehículo o trayectoria y saber con exactitud que sensaciones van a experimentar los pasajeros. Situaciones como la de accidentes causados por los rizos en sus inicios, pueden ser evitados. Hoy se puede predecir y corregir el comportamiento de las montañas rusas sin que se desperdicie ni una sola barra de acero. También es posible tener una construcción mucho más eficiente, mejorando la precisión de los cálculos y de los modelos, reduciendo de esta manera los factores de seguridad y los costos de fabricación.



**Ilustración 7.
Superman the
Escape.[14]**

1.2 Historia de los sistemas multicuerpo [6]

El estudio del movimiento de sistemas articulados siempre despertó el interés de muchos físicos. Isaac Newton inició la mecánica clásica con el desarrollo de sus famosas leyes en 1686 en su libro "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica". Lo que intentó Newton es convertir en números los fenómenos de la naturaleza. Las leyes de Newton solo se pueden aplicar a partículas por lo que todavía no se hablaba de un cuerpo rígido.

El concepto de cuerpo rígido, principal elemento de la teoría de sistemas multicuerpo, fue introducido en 1775 por Euler en "Nova methodus montum rigidarum determinandi" [15]. Euler ocupaba el principio del cuerpo libre. La teoría multicuerpo propone describir el movimiento dinámico de un conjunto de cuerpos articulados entre sí [16]. (ver sección 2.2)

Un sistema de cuerpos rígidos con restricciones fue considerado en 1743 por D'Alembert en "Traité de Dynamique" [17]. En este tratado, D'Alembert propone una clara diferencia entre las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo libre y las fuerzas internas provocadas por las reacciones que aparecen en las articulaciones entre los cuerpos.

Una formulación matemática más consistente fue desarrollada por Lagrange combinando el trabajo de D'Alembert con el Principio del Trabajo Virtual¹. Como

¹ La teoría del trabajo virtual dice: las fuerzas provocadas por las restricciones deben eliminarse entre sí debido a que estas no producen trabajo.

resultado de esto se obtiene un conjunto de ecuaciones de segundo orden describiendo el comportamiento de un sistema multicuerpo. También un análisis sistemático de sistemas mecánicos con restricciones fue desarrollado en 1788 por Lagrange [18]. El principio variacional es aplicado al total de la energía del sistema tanto cinética como potencial considerando sus restricciones en el movimiento.

Una de las aplicaciones en las que se utilizó esta teoría en el año 1906 fue la biomecánica. En esta se logró hacer simulaciones de movimiento de un ser humano caminando. Esto también encontró utilidad al momento de estudiar campos como el atletismo u otros deportes.

La mecánica clásica, los cuerpos rígidos y sus aplicaciones se han tornado muy complejos desde los años 60. Las barreras causadas por el número de cuerpos y las no-linealidades de las ecuaciones fueron superadas gracias al desarrollo de las computadoras. La sistematización de los procesos de generación de las ecuaciones ha permitido que los sistemas estudiados se puedan tornar más y más complejos.

En los 80's, sistemas de software completos para el modelado, simulación y animación, fueron puestos en el mercado como son: Adams, Simpack, Working model, entre otros (ver sección 2.6).

Hoy todavía se está avanzando cada vez más en los sistemas multicuerpo y ya se está empezando a tratar temas que antes no podían ser introducidos, tales como: flexibilidad, fricción, contacto, impacto y por último control.

1.3 Objetivos de la tesis

1.3.1 Objetivo General

- Construir e implementar un modelo de montaña rusa basándose en la teoría multicuerpo.

1.3.2 Objetivos específicos

- Construir un modelo multicuerpo de la montaña rusa.

Para esto se debe analizar:

- 1) Todos los cuerpos que componen el vehículo.
- 2) Analizar que tipo de articulaciones existe y cuales son los movimientos permitidos.
- 3) Su geometría, tanto para saber sus dimensiones como para saber las variables dinámicas de masa y de inercia de todos los cuerpos que lo componen.

En este modelo también se debe tomar en cuenta la rigidez de la suspensión, u otras partes donde exista movimiento entre los cuerpos del vehículo y darles parámetros adecuados. En algunos casos donde no se tiene un mayor impacto sobre el comportamiento del vehículo se podrá despreciar las articulaciones.

- Desarrollar un modelo de contacto rueda/riel válido.

El desarrollo de un modelo de contacto válido es fundamental al momento de realizar una simulación, debido a que los resultados que se obtienen dependen mucho de la interacción que se tiene entre el sistema (el vagón) y su entorno (el riel).

- Implementar el modelo, deducir las ecuaciones y resolverlas con herramientas de cálculo por computadora.
- Verificar situaciones hipotéticas para analizar la estabilidad y el desempeño del modelo en condiciones diversas.
- Desarrollar un trabajo fácil de comprender, de tal forma que esta tesis se convierta en un manual para incentivar y ayudar a futuros estudiantes que deseen estudiar y profundizar en el estudio de sistemas multicuerpo.

1.4 Metodología

La simulación de la montaña rusa se realizó en 5 etapas, introducidas en la ilustración 8 y detalladas en las secciones correspondientes.

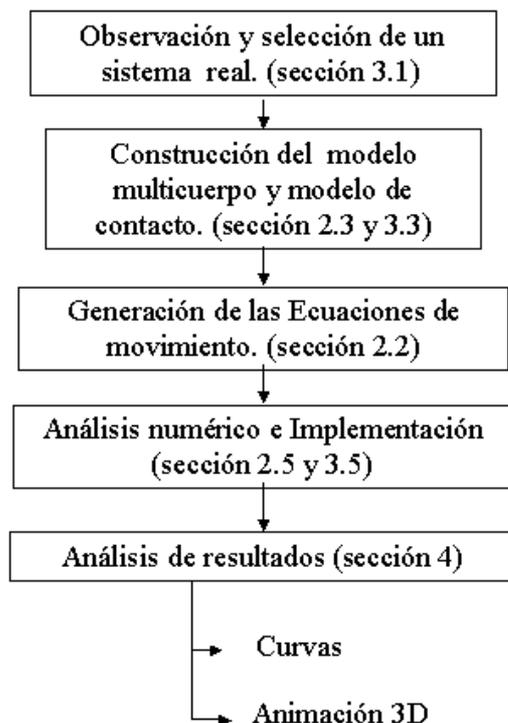


Ilustración 8. Etapas en que se dividió la simulación de la montaña rusa.

En la primera fase, se tomó como base para el modelado la montaña rusa existente en Vulcano Park (Quito) para la observación de todos los parámetros necesarios para la simulación (sección 3.1).

La segunda fase consiste en la construcción del modelo del vehículo basándose en la estructura y características de la montaña rusa real y convirtiéndolos en un lenguaje de computadora que pueda ser utilizado por el programa que generará las ecuaciones. En esta fase también se construye un modelo de contacto entre las ruedas y los rieles de la montaña rusa (sección 2.3 y 3.3).

La tercera fase de la simulación consiste en generar las ecuaciones dinámicas del sistema. La generación de las ecuaciones es simbólica y es realizada por el programa Robotran mediante el método Newton-Euler Recursivo explicado en la sección 2.2.

La cuarta fase consiste en la resolución de las ecuaciones. Para esto se debe utilizar métodos de integración numérica para la resolución de las ecuaciones diferenciales y métodos iterativos para la resolución de las ecuaciones no lineales utilizando el programa Matlab. La resolución de las ecuaciones es explicada con más detalle en las secciones 2.5 y 3.5.

La fase final de la simulación del modelo realizado consiste en el análisis de resultados y puede ser dividido en 2 partes.

- Análisis de los resultados mediante gráficas donde se puede observar en detalle el comportamiento del sistema.
- Animación de la montaña rusa.

Los resultados han sido analizados en la sección 4.

2 Introducción a los sistemas multicuerpo

En este capítulo se presentará los conceptos básicos requeridos para el desarrollo de un modelo multicuerpo de tipo vehicular con rieles.

2.1 Sistema multicuerpo

Un sistema multicuerpo es un conjunto de cuerpos rígidos unidos entre sí a través de juntas que pueden permitir ya sea una rotación o una traslación entre estos. Para el análisis se considera que el movimiento de un cuerpo depende del movimiento de un cuerpo anterior así como el movimiento del cuerpo siguiente depende de este. A esto se le llama una estructura de tipo padre e hijo, donde el cuerpo que está más cerca de la base fija es el padre y el cuerpo que lo sigue es el hijo. Existen dos tipos de estructuras:

- Estructuras abiertas
- Estructuras cerradas

2.1.1 Estructuras abiertas

Este tipo de estructura es la configuración más básica y parte de la suposición que cada cuerpo tiene un solo padre. Se puede representar en forma de árbol, como se ve en la ilustración 9, en la cual las ramas constituyen las articulaciones y los nodos los cuerpos.

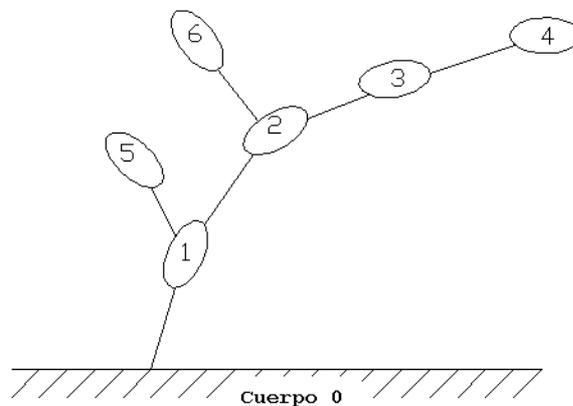


Ilustración 9. Diagrama de árbol.

En la ilustración 9 se observa que:

- El cuerpo 1 es hijo de la base fija (cuerpo 0).
- Los cuerpos 5 y 2 son hijos del cuerpo 1.
- Los cuerpos 6 y 3 son hijos del cuerpo 2.
- El cuerpo 4 es hijo del cuerpo 3.

- Los cuerpos 4, 5 y 6 no tienen hijos; por tanto, se les denomina como cuerpos hoja.

El péndulo doble es un ejemplo sencillo de este tipo de estructuras (ver ilustración 10).

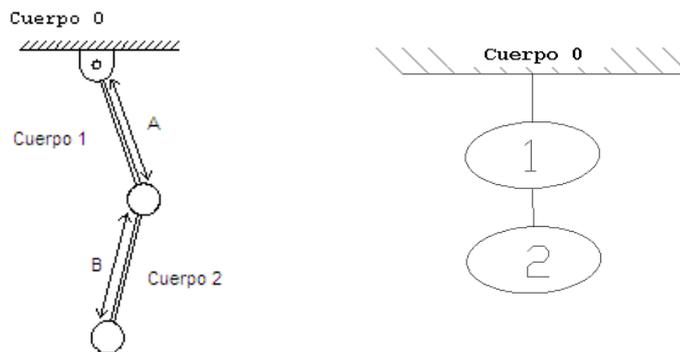


Ilustración 10. A la izquierda se observa el péndulo doble, a la derecha se presenta el árbol asociado.

La definición de la estructura del sistema constituye el primer paso en la elaboración de un modelo multicuerpo. Esta incluye la relación de padre e hijo y el tipo de articulación entre los cuerpos.

2.1.2 Estructuras cerradas

En las estructuras cerradas ciertos cuerpos pueden tener dos o más padres. El hecho de que un cuerpo tenga más de un padre se debe a la presencia de lazos. Un ejemplo de este tipo de estructuras se presenta en la ilustración 11, en la cual, el cuerpo 2 tiene a 6 y 1 como posibles padres. En realidad la presencia de lazos complica la definición de la relación padre hijo ya que 2 podría ser hijo o padre de 6.

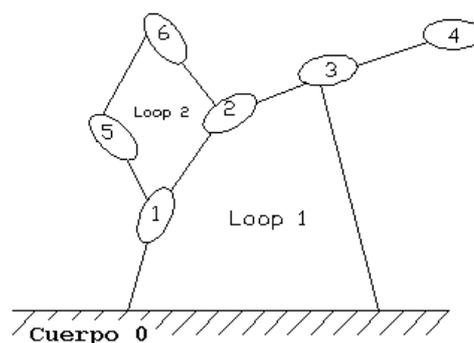


Ilustración 11 Diagrama de árbol de una estructura cerrada.

El mecanismo de biela y pistón es una estructura cerrada muy común y se representa en las ilustraciones 12 y 13.

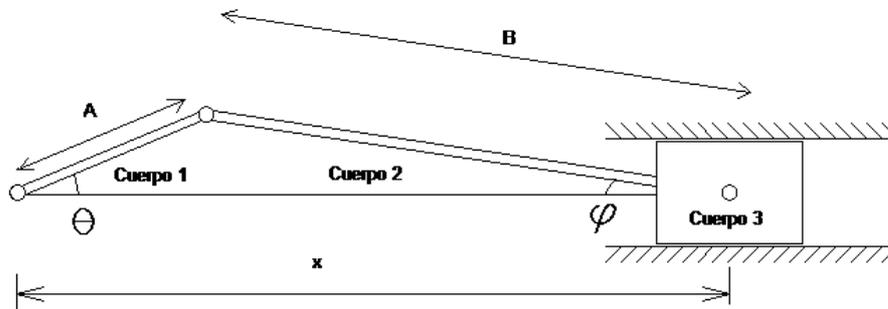


Ilustración 12. Mecanismo biela-pistón.

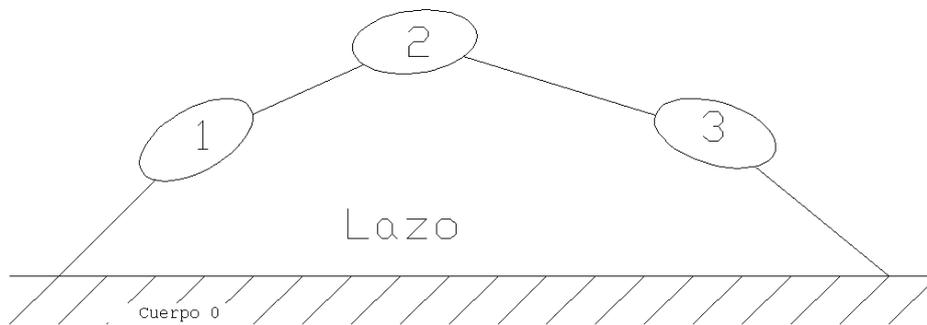


Ilustración 13. Configuración de referencia del mecanismo biela-pistón.

La presencia de lazos restringe los posibles movimientos debido a que se consideran los cuerpos como rígidos y por lo tanto no deformables. Una relación matemática que traduce esa limitación del movimiento se denomina restricción. Por ejemplo, las restricciones² de movimiento para el sistema biela pistón son:

Ecuación 2-1

$$x = A \cos(\theta) + B \cos(\varphi)$$

Ecuación 2-2

$$0 = A \sin(\theta) - B \sin(\varphi)$$

Se podrá observar más adelante que las estructuras cerradas pueden ser consideradas como estructuras abiertas, tomando en cuenta las restricciones asociadas a la presencia de lazos. Esto es explicado detalladamente en la sección 2.5.2.

² Una restricción es una relación matemática entre las variables que caracterizan el comportamiento del sistema.

2.2 Ecuaciones de Newton-Euler Recursivo

Las ecuaciones de Newton y Euler son las bases fundamentales para la obtención del modelo de cualquier sistema multicuerpo y aunque se puede llegar a ecuaciones muy complejas, estas parten de la segunda ley de Newton:

Ecuación 2-3

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{m}_i \mathbf{a}_i$$

Donde:

\mathbf{F}_i es la resultante de fuerzas en el cuerpo i .

\mathbf{m}_i es la masa del cuerpo i .

\mathbf{a}_i es la aceleración del centro de masa del cuerpo i .

Esta ley puede ser extendida a movimientos de rotación a través de la ecuación de Euler:

Ecuación 2-4

$$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i$$

Donde:

\mathbf{M}_i es la resultante de momentos del cuerpo i .

\mathbf{I}_i es el momento de inercia del cuerpo i .

$\boldsymbol{\alpha}_i$ es la aceleración angular del cuerpo i .

La complejidad del sistema se debe al gran número de ecuaciones y a las no-linealidades de las mismas a medida que el número de cuerpos crece.

La recursividad es aplicada a la cinemática partiendo de que el movimiento de un cuerpo hijo es igual al movimiento del cuerpo padre más el movimiento relativo que existe entre ellos. Para realizar un cálculo cinemático recursivo es necesario partir de la posición de la base fija y avanzar en la estructura hacia los cuerpos hoja.

Para hacer los cálculos dinámicos de todo el sistema, se parte del principio de recursividad, basándose en la tercera ley de Newton: "Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto son de igual intensidad y colineales y tienen sentidos opuestos".

Para aplicar la recursividad al cálculo de las fuerzas de interacciones se debe partir de las fuerzas aplicadas en un cuerpo hoja (cuerpo N) y de esta manera calcular las fuerzas internas entre este y su padre (cuerpo $N-1$). Al definir las fuerzas internas de este (cuerpo $N-1$) con el cuerpo hijo (cuerpo N), se puede calcular las fuerzas que existen con el padre de este (cuerpo $N-2$) y

así continuar hasta poder calcular las fuerzas internas que existen entre el primer cuerpo y la base fija.

La resolución de este sistema deja una ecuación dinámica de la siguiente forma:

Ecuación 2-5

$$\mathbf{M}(q, t)\ddot{q} + \mathbf{c}(q, \dot{q}, t, F_{Ext}, L_{Ext}, g) = \mathbf{Q}$$

donde:

q igual al desplazamiento relativo de cada articulación.

\mathbf{M} es la matriz de masa.

\mathbf{c} es una matriz formada por los términos de coriolis, la velocidad, las fuerzas y las variables geométricas presentes en el sistema.

\mathbf{Q} es un vector formado por las fuerzas externas aplicadas a los cuerpos.

2.3 Modelo de contacto

El modelo de contacto es la interacción que existe entre el vehículo y su entorno, y es fundamental para poder hacer la simulación. Varios sistemas pueden tener la misma estructura pero comportamientos diferentes debido a la variación en las interacciones con su entorno. El modelo de contacto deja como resultado las fuerzas de contacto y la posición y trayectoria del vehículo:

Las fuerzas de contacto son las fuerzas con las que interactúa un cuerpo con el sistema. En este caso se las puede observar como las fuerzas y torque que introduce el riel, por medio de la rueda, al vehículo. Estas fuerzas se oponen al deslizamiento de la rueda con respecto al riel.

El contacto con el riel también entrega la posición vertical y orientación del vehículo basándose en la posición en el eje longitudinal del recorrido. Esta orientación es fundamental para predecir el comportamiento del vehículo.

2.4 Restricciones del movimiento

Dentro del modelado de sistemas multicuerpo; usualmente, la mayoría de los cuerpos dependen exclusivamente del movimiento que tiene su cuerpo padre y el tipo de articulación entre ellos si la estructura analizada es abierta. A pesar de aquello existen cuerpos que tienen movimientos restringidos por la configuración del sistema. Existen diversos tipos de restricciones.

1) El primer tipo de restricción de movimiento es ocasionada por las estructuras cerradas. Las estructuras cerradas causan una restricción en el movimiento debido a que el mismo cuerpo depende de 2 o más padres por lo que su movimiento es limitado.

Para tomar en cuenta esas restricciones, una estrategia consiste en "abrir" la estructura cerrada para transformarla en una estructura abierta y considera las restricciones sobre el movimiento de la estructura abierta [10]. Para ello la propuesta de Jean Claude Samin y Paul Fiset se considera 3 métodos de corte:

- a) Introduciendo un cuerpo fantasma que tenga el mismo comportamiento que el cuerpo original pero que cada uno de ellos dependa de su propio padre. Al forzar a que el cuerpo original y el cuerpo fantasma tengan el mismo movimiento se generarán restricciones como se lo vio en la sección 2.1.2. (ver ilustración 14).[19]

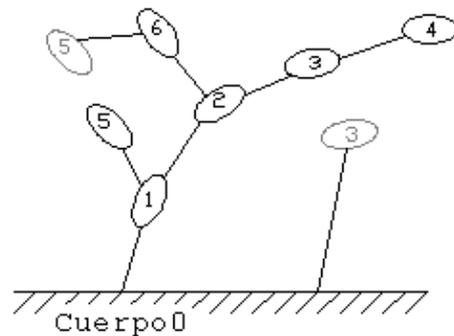


Ilustración 14. Solución de estructuras cerradas por medio de cuerpos fantasma.[19]

- b) Eliminando una de las articulaciones para abrir el lazo. Para poder realizar este corte es necesario que las articulaciones sean libres³ y esféricas⁴. Para realizar este corte es necesario que la parte A1 de la junta y la parte A2 de la junta mantengan la misma posición como se observa en la ilustración 15.[19]

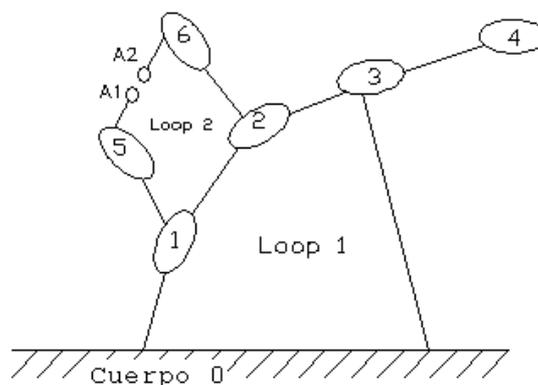


Ilustración 15. Solución de estructuras cerradas por medio de ruptura de la articulación.[19]

- c) El último método de corte se utiliza para lazos conectados por una barra, cuya masa e inercia son despreciables y las juntas entre los

³ No transmiten fuerzas ni torques.

⁴ Permiten rotación en los tres ejes, pero no permiten translación.

cuerpos y la barra son libres y esféricas. Para resolver este tipo de lazo se remueve la barra. La definición de esta restricción consiste en fijar una distancia entre los puntos A1 y A2, como se puede observar en la ilustración 16.[19]

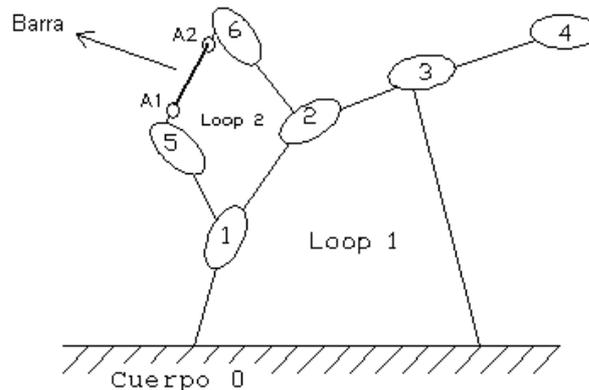


Ilustración 16. Método de corte mediante la eliminación de una barra con masa e inercia despreciables.[19]

Estas son posibles soluciones para tratar las estructuras cerradas, aunque depende del programa de computadora que se utilice para generar las ecuaciones.

2) El segundo tipo de restricciones consiste en forzar a las articulaciones a cumplir con un movimiento establecido por el usuario. En este trabajo se bloqueó articulaciones para que estas permanezcan sin movimiento. Además, en las ruedas se restringió el movimiento de tal forma que tanto la rueda derecha e izquierda tengan la misma velocidad tanto para el eje delantero como para el eje trasero. De la misma forma este tipo de funciones matemáticas se podría utilizar para simular reductores de velocidad en sistemas que así lo requieran.

3) Por último se tienen las restricciones producidas por el contacto con el riel, que tal como se explicó en la sección 2.3, restringen la posición y orientación del vehículo en función de la posición longitudinal.

Las restricciones de movimiento, ya sean estas de lazo cerrado, de juntas o de usuario pueden ser escritas de la siguiente forma:

Ecuación 2-6

$$M(q,t)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, t, F_{Ext}, L_{Ext}, g) = Q + J^T(q,t)\lambda$$

$$h(q,t) = 0$$

donde: $J(q,t)$ es la matriz del Jacobiano y λ son coeficientes desconocidos llamados multiplicadores de Lagrange. (Ecuación 2-7.)

Ecuación 2-7

$$J(q,t) = \frac{\partial h(q,t)}{\partial q^T}$$

2.5 Resolución de las ecuaciones**2.5.1 Resolución de ecuaciones de un sistema no restringido**

Un sistema no restringido es un sistema en el cual no existen restricciones en el movimiento de los cuerpos, por lo tanto solo se encuentran ecuaciones diferenciales ordinarias⁵ ODE, mismas que pueden ser resueltas a través de cualquier método de integración numérica o incluso manualmente.

2.5.2 Resolución de ecuaciones de un sistema restringido

Un sistema restringido es aquel que presenta estructuras cerradas u otro tipo de restricciones. El sistema de ecuaciones que presenta este sistema es una combinación de ecuaciones diferenciales ordinarias con ecuaciones algebraicas, DAE, similar a la ecuación 2-6. La presencia de este tipo de restricciones en el movimiento se traduce en la dependencia de las variables del movimiento entre sí. Por ejemplo, en el caso de la biela-pistón, la trayectoria presentada en el pistón depende directamente del ángulo de la biela, como se puede observar en la ilustración 12. Este tipo de estructuras tiene 2 tipos de coordenadas generalizadas:

- Independientes
- Dependientes

Para definir el número de variables independientes que existen en el sistema se debe tomar en cuenta el número de cuerpos que tiene el sistema y la cantidad de restricciones.

$$\text{Grados de libertad} = \# \text{ de Variables independientes} = 6 * \# \text{ de cuerpos} - \# \text{ de restricciones.}$$

Resolver ecuaciones del tipo DAE es problemático, por lo tanto es recomendable transformarlas en ecuaciones del tipo ODE. Para transformar estas ecuaciones se utiliza el método de Coordinate Partitioning. Por medio de este método se puede reducir las ecuaciones iniciales en un arreglo de (n-m) ecuaciones diferenciales. Donde n es el número de ecuaciones y m es el número de restricciones.

En este método el vector q de las coordenadas generalizadas es particionado de la siguiente forma:

Ecuación 2-9

$$q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

⁵ Una ecuación ordinaria es aquella que no presenta derivadas parciales.

Donde u representa $(n-m)$ coordenadas independientes y v representa m coordenadas dependientes.

La matriz J puede ser particionada de manera similar:

Ecuación 2-10

$$J = \begin{pmatrix} J_u & J_v \end{pmatrix}$$

Donde J_v es una matriz de $(m \times m)$. Esta matriz no será singular si las variables dependientes e independientes son escogidas de una manera adecuada.

Para eliminar el factor λ , las matrices M y c también deben ser particionadas.

Ecuación 2-11

$$\begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uv} \\ M_{vu} & M_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_u \\ c_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_u^T \\ J_v^T \end{pmatrix} \lambda$$

eliminando λ se tiene:

Ecuación 2-12

$$\begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uv} \\ M_{vu} & M_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + B_{vu}^T \begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uv} \\ M_{vu} & M_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + c_u + B_{vu}^T c_v = Q_u + B_{vu}^T Q_v$$

donde:

Ecuación 2-13

$$B_{vu} = -(J_v)^{-1} J_u$$

Luego se puede obtener las ecuaciones de velocidad y aceleración dependientes del sistema.

Ecuación 2-14

$$\dot{v} = B_{vu} \dot{u} - (J_v)^{-1} \frac{dh}{dt}$$

Ecuación 2-15

$$\ddot{v} = B_{vu} \ddot{u} - (J_v)^{-1} \dot{b}$$

donde:

Ecuación 2-16

$$b \left[J + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial q} \right] \dot{q} + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

Con lo que se deduce las ecuaciones diferenciales del sistema en términos de las variables independientes exclusivamente.

Ecuación 2-17

$$\left(M_{uu} + M_{uv} B_{vu} + B_{vu}^T M_{vv} + B_{vu}^T M_{vv} B_{vu} \right) \ddot{u} - \left(M_{uv} + B_{vu}^T M_{vv} \right) (J_v)^{-1} b + c_u + B_{vu}^T c_v = Q_u + B_{vu}^T Q_v$$

Y que puede ser reducido:

Ecuación 2-18

$$M_{red}(u, v, t) \ddot{u} + c_{red}(\dot{u}, u, v, t) = Q_{red}$$

El proceso requiere la resolución inicial de las restricciones para poder calcular las variables dependientes v en función de las variables independientes u . Un proceso iterativo de Newton-Raphson es indispensable para resolver las restricciones no-lineales.

En la ilustración 17 se puede observar la implementación del Coordinate Partitioning.

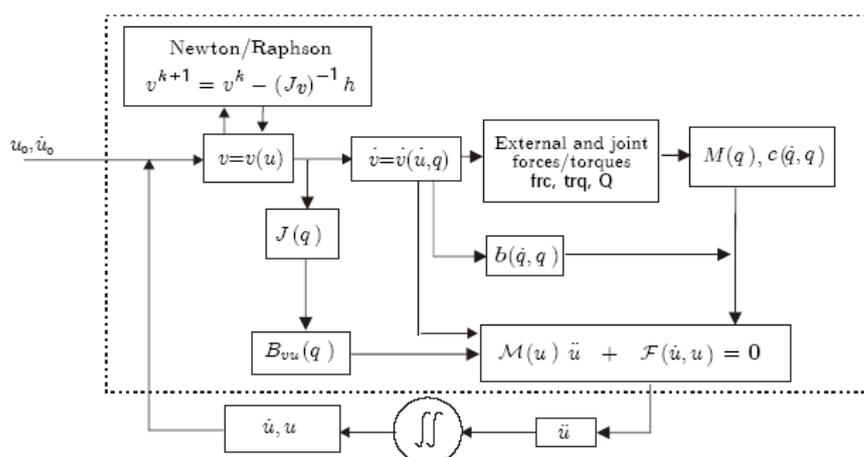


Ilustración 17. Implementación de un sistema restringido.[19]

2.5.3 Herramientas utilizadas para la resolución de ecuaciones

Matlab es un lenguaje de computación diseñado especialmente para tratar funciones numéricas. Este tiene grandes ventajas para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales y matriciales con gran facilidad. Una de las desventajas es que al no compilar los programas que se realizan se tiene una velocidad menor que la que se podría obtener con un lenguaje compilado como es el lenguaje C, lo cual puede resultar de importancia para simulaciones muy grandes.

Se tiene también herramientas para resolver ecuaciones diferenciales, aunque, estas funciones no están diseñadas para resolver ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno. Por ello, se debe introducir las ecuaciones diferenciales como un arreglo de ecuaciones diferenciales de primer orden.

La programación en Matlab tiene una gran similitud con la mayor parte de lenguajes ya que se puede utilizar estructuras como el if, while, for entre otras como se podrá ver en el código fuente, el cual se encuentra adjuntado al final de este documento.

2.6 Generación de las ecuaciones

La generación de las ecuaciones es un proceso por medio del cual se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema a través de un programa de computadora. Esto es muy importante ya que el número de ecuaciones crece rápidamente con el número de cuerpos como se ve en la ilustración 17:

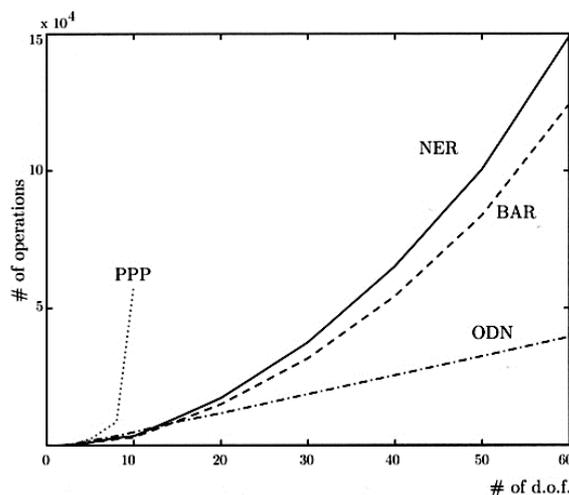


Ilustración 18. Incremento en el número de ecuaciones debido al incremento de cuerpos.[10]

En la ilustración 18 se puede observar como se incrementa el número de operaciones matemáticas en las ecuaciones en relación con el número de

grados de libertad. Es muy crítico reducir al máximo el número de operaciones matemáticas, ya que cuando el modelo aumenta de tamaño los tiempos de ejecución suelen ser considerables⁶.

Es importante diferenciar entre 2 métodos utilizados para generar las ecuaciones de un sistema.

- Generación numérica de las ecuaciones

$$5x^2 + 10x + 4 = 0$$

- Generación simbólica de las ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La generación simbólica de las ecuaciones es un proceso más eficiente que la generación de ecuaciones numéricas, ya que este permite realizar una mejor simplificación de las mismas. Con ello se reduce el número de operaciones matemáticas realizadas al momento de la implementación del modelo.

La generación de las ecuaciones, se puede hacer sin necesidad de un programa, pero dado que la cantidad de ecuaciones crece rápidamente al aumentar el número de cuerpos, la probabilidad de cometer un error y el tiempo que toma realizarlas sería demasiado alto.

Por último es muy importante no confundir el análisis con el modelado. El modelado es la parte en la que se analiza el sistema y se genera las ecuaciones de movimiento, ya sea de manera manual o a través de programas de computadora. Por otro lado, la parte de análisis es la resolución de las ecuaciones y el estudio del comportamiento del modelo.

2.7 Modelos de contacto entre la rueda y el riel de una montaña rusa ya realizados

La literatura científica relacionada con la teoría multicuerpo menciona varias maneras de considerar el contacto rueda-riel. Por ejemplo, João Pombo y Jorge Ambrosio, discuten sobre la representación de los rieles por medio de curvas paramétricas. Otro ejemplo son las simplificaciones que realizan en su trabajo Andrés Kecskeméthy y Martin Tändler, estableciendo únicamente las restricciones en el movimiento, que implique el contacto entre ruedas y rieles metálicos.

A continuación se presenta un resumen de las teorías que defienden estos autores en sus artículos respectivos.

2.7.1 Descripción de rieles través de curvas paramétricas[1]

(JOÃO POMBO y JORGE AMBROSIO)

El análisis de una montaña rusa o cualquier tipo de sistema de vehículo guiado por rieles requiere una descripción precisa de la geometría de los rieles.

⁶ Para obtener 10 segundos de simulación de la montaña rusa la computadora tardó 30 minutos.

La trayectoria debe ser descrita por 2 rieles paralelos en todo su trayecto y su marco de referencia debe incluir pendientes verticales, curvas y peraltes. A este análisis pueden añadirse perturbaciones externas o flexibilidad de los rieles, permitiendo que estos se muevan fuera de la referencia tomada. Esto demuestra la complejidad asociada a los conceptos de contacto. Ilustra también el alto nivel de realismo, considerado en las simulaciones multicuerpo actuales.

Dependiendo de la aplicación, se puede describir la trayectoria a través de curvas paramétricas o en caso de trayectorias más simples, uniendo trayectorias rectilíneas y curvas a través de elementos de transición, los cuales deben garantizar continuidad en la primera y segunda derivada. Al unir trayectorias rectilíneas con trayectorias curvas, se puede presentar una falta de exactitud en la longitud de la trayectoria de la montaña rusa, por lo tanto, es necesario introducir una cantidad suficiente de tramos, para que la discretización de la misma sea precisa. También se pueden utilizar splines cúbicas; aunque, estas hacen que existan oscilaciones no deseadas.

2.7.1.1 Peraltes

Cuando se presenta una curva y la trayectoria es horizontal, los vehículos que van por los rieles tienden a ser inestables, debido a la presencia de una aceleración centrífuga que tiende a sacar al vagón de su recorrido. Para evitar esto el riel exterior es puesto más alto que el riel interior. La sobre-elevación h_t y el ángulo de inclinación ϕ_t constituyen el peralte que se construye en las curvas de la montaña rusa (ver ilustración 19).

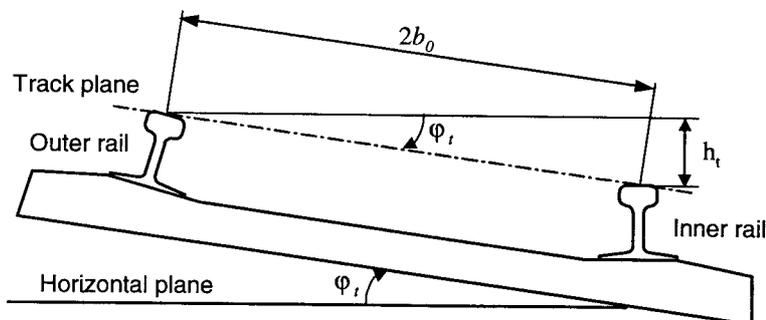


Ilustración 19. Peralte.[1]

$$\phi_t = \arcsin (h_t / L)$$

El objetivo del peralte es lograr que las fuerzas sobre los dos rieles sean iguales, lo cual garantiza una máxima tracción y menor desgaste y fuerza sobre rieles.

2.7.1.2 Curvas de transición

Cuando se hace una simulación se debe tomar en cuenta que al momento de pasar a la curva no se puede pasar de un trayecto plano a un peralte bruscamente ya que esto generaría una aceleración lateral muy fuerte. Es

necesario que al pasar de una superficie plana al peralte, este cambio sea continuo y suave pasando por una curva de transición.

En la referencia [1], Pombo y Ambrosio tratan de las propiedades matemáticas de este tipo de curvas en la simulación. A continuación se analizará algunas de las conclusiones obtenidas en este trabajo aplicables a esta tesis.

Conclusiones:

- La forma en que se aplica este tipo de simulaciones parte de crear una curva expresada de una forma paramétrica. Esto permite implementar los peraltes y las curvas de transición aunque en esta tesis se analizará una forma más simple de implementar este tipo de curvas (capítulo 5).
- Las funciones polinómicas no introducen oscilaciones no deseadas en el sistema, pero se tiene dificultades al momento de hacer simulaciones de superficies planas.
- Finalmente, aunque este trabajo presenta una buena aplicación al momento de hacer una simulación en trayectorias en tres dimensiones, el introducir las curvas propuestas causaría un gran costo en el tiempo de la simulación.

2.7.2 Posibles soluciones para simplificar el contacto[2]

(ANDRÉS KECSKEMÉTHY y MARTIN TÄNDL)

El movimiento en curvas en el espacio es un tema de mucho interés en algunos campos de la ingeniería tales como: máquinas CNC, control de robots y diseño de vías de tren o montañas rusas. En la simulación de estos sistemas existen varias alternativas para realizar el modelo:

- 1) Un modelo simplificado, utilizando masas puntuales y simplificando la trayectoria haciéndola plana.
- 2) Un modelo intermedio en el cual se mantienen las simplificaciones físicas pero sin hacer hipótesis en la trayectoria.
- 3) Un modelo completo sin dejar de lado la geometría de los cuerpos y la fricción del sistema.

Es muy importante tomar en cuenta que las hipótesis pueden reducir significativamente el tiempo de cálculo para simular el sistema. Para las simulaciones también se pueden utilizar diferentes tipos de marcos de referencia, entre los cuales existen: Bishop, Darboux y Frenet.

Un marco de referencia consiste en un sistema de tres vectores ortogonales que se encuentran sujetos a un punto. El punto al que estos se encuentren sujetos puede estar localizado en la base fija o en cualquier cuerpo.

Uno de los problemas más graves que se tiene cuando se ocupa un marco de referencia de Frenet, es que se encuentran puntos de inflexión cuando los ángulos llegan a 90° , lo cual lleva a una división por cero.

Aunque en este trabajo se encontraron muchos análisis a nivel del diseño de la trayectoria, una de las hipótesis de mayor trascendencia es la forma en

que simplifican el modelo de contacto entre la rueda y el riel, como se ve en la ilustración 20:

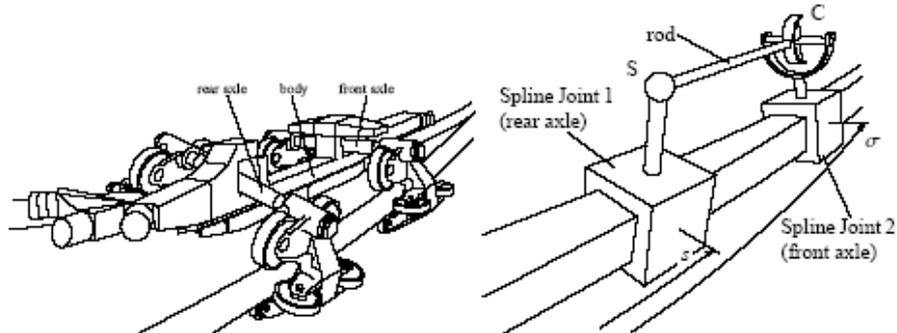


Ilustración 20. Simplificación del modelo de contacto.[2]

Lo que se observa en la ilustración es una manera simple de evitar analizar el contacto de cada rueda. Esta hipótesis es muy válida debido a que el sistema de ruedas no permite que el sistema se desvíe de una manera muy grande. Sin embargo, este modelo no es aplicable al presente trabajo debido a que no se pueden observar los efectos causados por el contacto entre la rueda y riel, lo cual constituye uno de los objetivos de esta tesis. Si no se tiene una gran cantidad de desviaciones laterales, es posible utilizar este método, debido a que reduce los costos de tiempo en la simulación.

Otro punto de importancia en esta forma de simplificar el contacto es que se puede hacer toda la simulación sin tener que hacer 2 rieles. Es necesario construir una sola línea de guía con la información sobre el ángulo de inclinación, lo cual no solo simplifica la simulación en el contacto sino que a su vez se hace más fácil la construcción de un modelo de la trayectoria.

3 Construcción del modelo

3.1 Sistema real

El modelo utilizado para este estudio está basado en la montaña rusa instalada en Vulcano Park, parque de diversiones ubicado en las instalaciones del Teleférico en la ciudad de Quito.

Cada vagón cuenta con cuatro ruedas y dos ejes. El eje delantero conecta las 2 ruedas delanteras y está sujeto al chasis por medio de un pivote, permitiendo una rotación en el pivote, como se puede ver en la foto superior de la ilustración 21. Este sistema también cuenta con una suspensión ubicada en los extremos de cada eje. La misma configuración se puede encontrar en el eje trasero, como se observa en la parte inferior de la ilustración 21. El chasis tiene capacidad para 4 personas. El sistema completo está formado por tres vagones unidos entre sí, pero en esta tesis se analizará cada vagón por separado. Las ruedas del vehículo tienen una geometría diseñada para bloquear desviaciones laterales. Esto se puede observar claramente en la parte inferior de la ilustración 21 y se debe al incremento del radio interno de las ruedas.

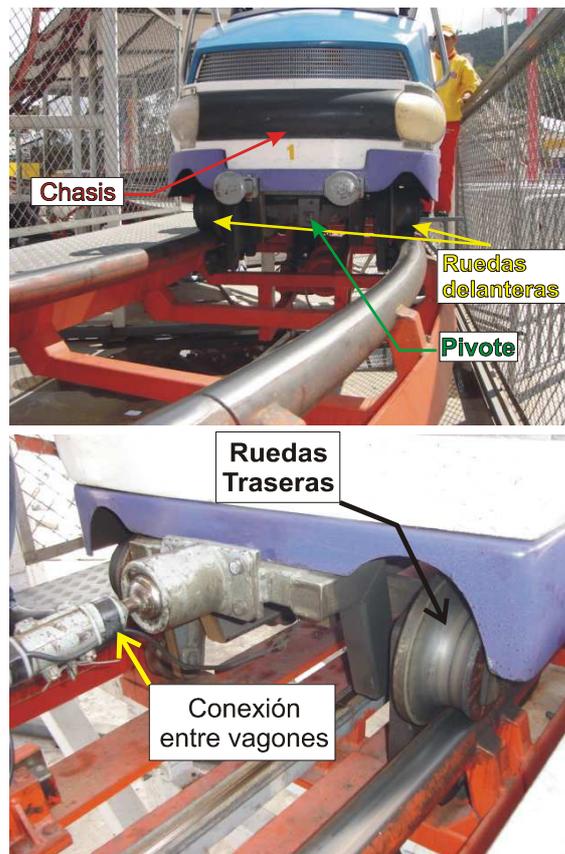


Ilustración 21. Partes de la montaña rusa.

Las características geométricas de las partes que conforman el vagón serán explicadas en la sección 3.4 y las hipótesis que se realizan para el modelado serán detalladas en la sección 3.2 y 3.3.

3.2 Configuración de referencia

En la ilustración 22 se observa el marco de referencia que será utilizado para esta simulación.

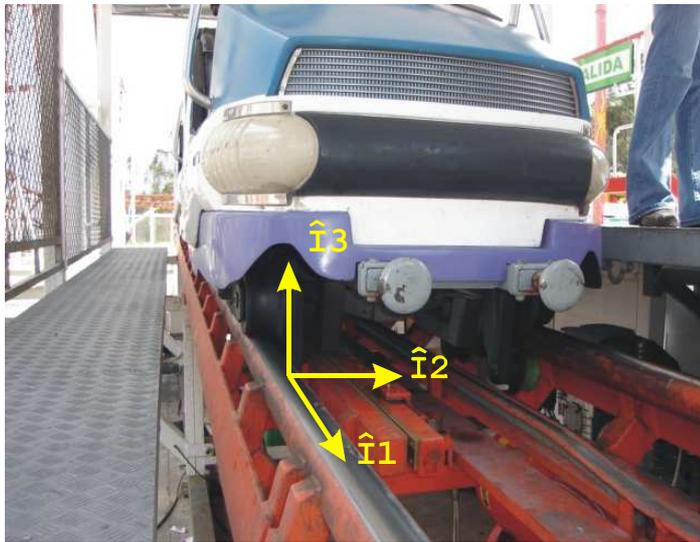


Ilustración 22. Marco de referencia.

A continuación, en la ilustración 23, se puede ver la configuración de referencia del vehículo, la cual sirve de base para la definición de la estructura del sistema multicuerpo. El modelo construido consta de 34 cuerpos y 34 articulaciones descritas a continuación y que se encuentran implementadas en la sección 6.1.1.

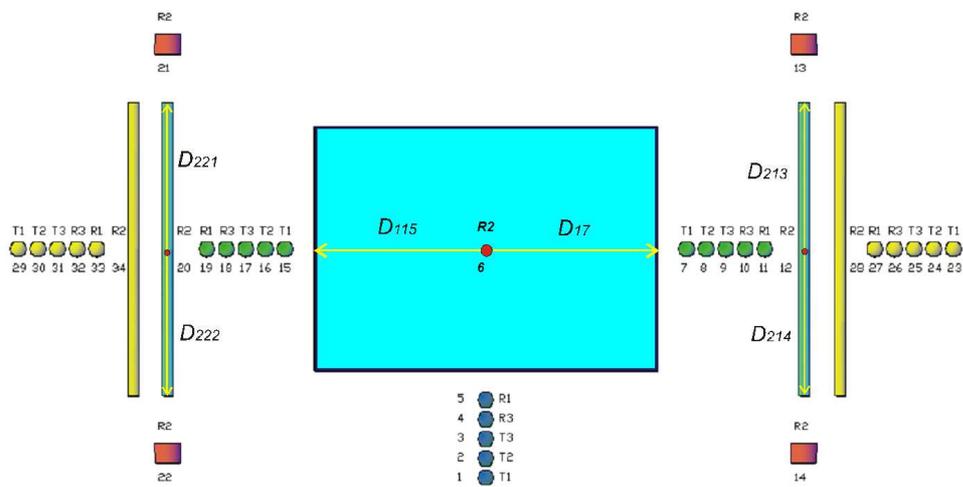


Ilustración 23 Configuración de referencia de la montaña rusa.

Por convención, Robotran supone que cada cuerpo tiene un solo grado de libertad con respecto a su padre. Por lo tanto, solo se puede introducir una articulación de un grado de libertad entre cuerpos, ya sea esta de translación o de rotación. En el caso de las articulaciones que tengan un mayor número de grados de libertad, se debe incluir cuerpos ficticios sin masa ni dimensiones

entre el cuerpo padre e hijo. Por ejemplo, el chasis (cuerpo 6), tiene 6 grados de libertad con respecto a la base fija, por lo cual es precedido por 5 cuerpos ficticios que le permiten una traslación T1 en el eje 1 (longitudinal), traslación T2 en el eje 2 (transversal), traslación T3 en el eje 3 (vertical) así como las rotaciones R3, R1 y R2 definidas por los cuerpos 4, 5 y 6 (chasis) respectivamente. El cuerpo 6 tiene toda la información de inercias y masa del chasis. Los cuerpos ficticios no tienen ni masa ni inercia aunque como tienen articulaciones se puede incluir fuerzas articulares o se puede añadir restricciones de movimiento. La conexión entre el chasis y el eje delantero se realiza por medio de los cuerpos 7, 8, 9, 10, 11 y 12 (barra) los cuales presentan articulaciones en el eje longitudinal, lateral y vertical así como las rotaciones respectivas. De la misma forma, el eje posterior se conecta con el chasis mediante los cuerpos 15, 16, 17, 18, 19. El cuerpo 12 lleva la información de masa e inercia del eje delantero y se conecta con las ruedas mediante una junta que permiten una rotación en el eje I2. Se puede observar que las barras también están conectadas con la base fija a través de los cuerpos 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33 y 34. La razón para colocar estos cuerpos es tener una idea de la velocidad y posición absolutas que existen entre la base fija y los ejes, ya que sin estos solo se podría conocer la posición y velocidad de los ejes sumando la velocidad o la posición del chasis con la velocidad y posición que existe entre ellos, complicando la implementación del sistema. Los cuerpos 28 y 34 son cuerpos ficticios con igual velocidad y posición que los cuerpos 12 y 20 (las barras) respectivamente, por lo tanto se consideran como cuerpos fantasmas de los mismos y sirven para resolver las restricciones provocadas por los lazos cerrados, como se puede ver en la sección 2.4.1.a.

Es necesario definir el comportamiento de las articulaciones a través de la caracterización de las fuerzas internas que existen. Por ejemplo, en las articulaciones 11 y 19 se aplica un torque de torsión equivalente al torque provocado por las fuerzas generadas por los resortes de la suspensión. De esa manera se evitan cálculos complejos de la deformación de los resortes. También se han introducido fuerzas articulares en los cuerpos 24 y 30 que representan los topes que existen en el sistema real cuando la montaña rusa tiene un movimiento lateral que excede los 5 mm y por lo tanto solo se presentan al llegar a este valor.

Los movimientos de las articulaciones 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 20, fueron bloqueados debido a que en ellas no existe un movimiento que afecte a la simulación. Es posible hacer un modelo sin estos cuerpos, pero, el colocarlos brinda una mayor flexibilidad al momento de hacer cambios en el modelado o incluir posibles torques provocados por los conectores.

Los vectores D17, D115, D213, D214, D221 y D222 representan la posición del centro de gravedad del cuerpo padre hacia el centro de gravedad del cuerpo hijo.

3.3 Descripción del modelo de contacto utilizado

Como se explica en la introducción de esta tesis, el modelo de contacto es fundamental para describir el funcionamiento de un sistema multicuerpo respecto al entorno.

En esta tesis, se desarrolló un modelo de contacto basado en el perfil de la rueda, el perfil del riel y la posición relativa de los rieles respecto a las ruedas. En la ilustración 24 se observa como estos elementos han sido considerados:

- Se asume un solo punto de contacto entre la rueda y el riel, con una fuerza normal y fuerzas laterales de fricción

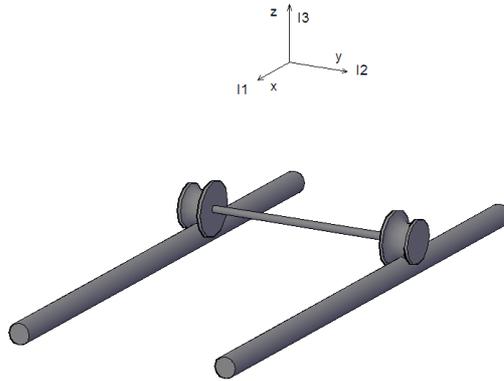


Ilustración 24. Geometría de las ruedas.

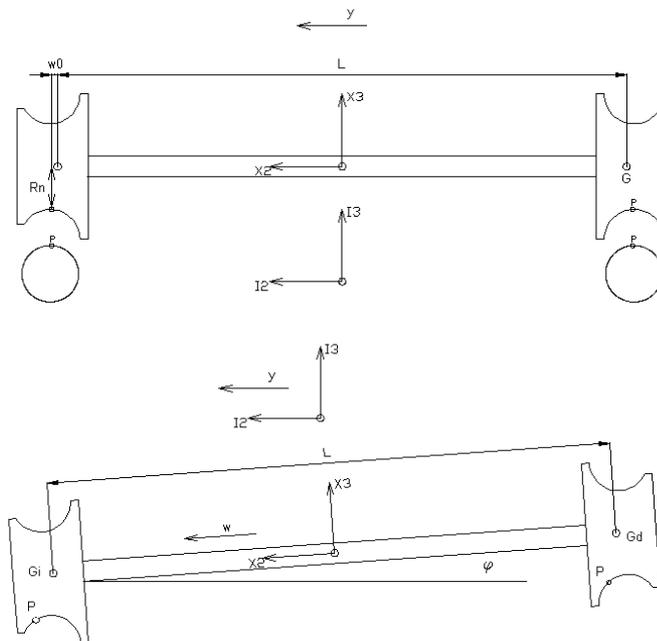


Ilustración 25. Parámetros de contacto.

En la ilustración 25 se observan los siguientes parámetros de contacto: P es el punto de contacto, Rn es el radio en el punto de contacto cuando el eje está centrado en los rieles, $w0$ es la distancia en el eje transversal entre el centro de gravedad de la rueda y el punto de contacto cuando el eje está centrado en los rieles, y es el desplazamiento lateral en el marco $\{\hat{i}\}$. w es el desplazamiento

lateral en el marco $\{\hat{X}\}$. L es la distancia entre los centros de gravedad. G es el centro de gravedad de la rueda. En esta gráfica también se puede observar los marcos de referencia $\{\hat{I}\}$ y $\{\hat{X}\}$. Estos son los marcos de referencia asociados a la base fija y al eje de las ruedas respectivamente.

Se puede ver en la ilustración 26 que para encontrar el punto de contacto se necesita de dos vectores, el primero va desde el punto de referencia hasta el centro de gravedad de la rueda y el segundo desde el centro de gravedad de la rueda hacia el punto de contacto.

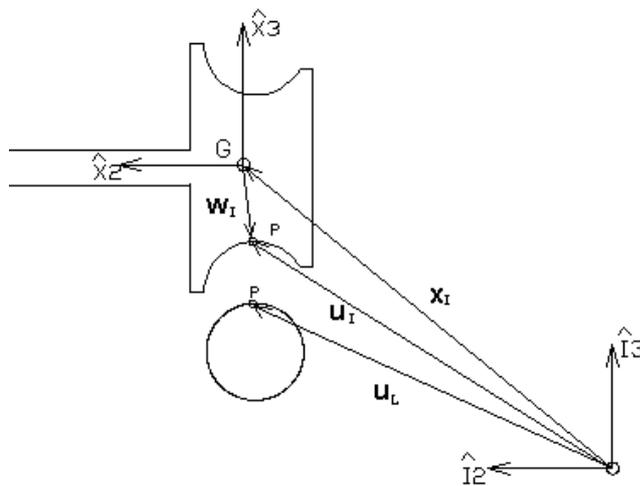


Ilustración 26. Vectores.

El vector absoluto entre la base fija y el punto de contacto está definido de la siguiente forma:

Ecuación 3-1

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{x}_I + \mathbf{w}_I$$

Ecuación 3-2

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{x}_D + \mathbf{w}_D$$

Donde el vector que va desde el punto de referencia hacia el centro de gravedad de la rueda izquierda se lo representa de la siguiente manera:

Ecuación 3-1

$$\mathbf{x}_I = \overrightarrow{OG_I}$$

Donde \mathbf{x}_l es el vector que va desde la base fija hacia el centro de gravedad de la rueda izquierda. O es el punto de referencia en la base fija. G_l es el centro de gravedad de la rueda izquierda.

El vector de la ecuación 3-2 va desde el centro de gravedad de la rueda izquierda hacia el punto de contacto entre la rueda y el riel izquierdos. La ilustración 27 ayudará a comprender dichos parámetros.

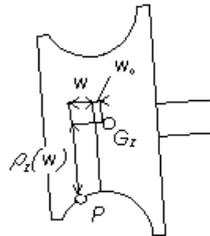


Ilustración 27. Detalle de parámetros en la rueda.

Ecuación 3-2

$$\mathbf{w}_l = \overline{G_l P_l} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 - w \\ -\rho_l(w) \end{pmatrix}$$

Donde P_l es el punto de contacto de la rueda con el riel izquierdo. Además:

Ecuación 3-3

$$\rho_l = R_n - \lambda(w_0 - w)$$

Donde:

ρ_l representa la función del perfil de la rueda izquierda.

λ es la pendiente local del perfil de la rueda.

En las ecuaciones 3-3 y 3-4 se observa la variación del radio de la rueda en función del desplazamiento lateral de las ruedas. Donde R_n es el radio natural de la rueda⁷. λ depende de una forma lineal de la posición lateral y viene dada de la siguiente manera:

Ecuación 3-4

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{2w}{r}$$

⁷ El radio natural_r es el radio de la rueda cuando el desplazamiento lateral es igual a cero.

Donde r es el radio del riel.

Por otra parte, w depende de la rotación en el eje vertical y el eje longitudinal del sistema aunque la rotación en el eje vertical (Ψ) se considera despreciable.

Ecuación 3-5

$$w = \frac{y}{\cos \varphi}$$

De la misma forma se obtiene los dos vectores para la rueda derecha:

Ecuación 3-6

$$\mathbf{x}_D = \overline{OG}_D$$

Ecuación 3-7

$$\mathbf{w}_D = \overline{G}_I \overline{P}_I = \left[\hat{\mathbf{X}} \right]^T \begin{pmatrix} 0 \\ -w_0 - w \\ -\rho_D(w) \end{pmatrix}$$

donde:

Ecuación 3-8

$$\rho_D = R_n - \lambda(w_0 + w)$$

Debido a que las ruedas y el riel son de acero, se considera que son indeformables, por lo tanto no existe penetración de las ruedas en el riel: $P \in Riel$. Con este vector se obtienen las restricciones ocasionadas por el riel a partir de asumir:

Ecuación 3-9

$$\mathbf{u}_I \cdot \hat{\mathbf{I}}_3 = \mathbf{u}_L \cdot \hat{\mathbf{I}}_3$$

Donde \mathbf{u}_L representa el perfil del riel. $\mathbf{u}_I \cdot \hat{\mathbf{I}}_3$ representa la altura a la que se encuentra el punto de contacto.

De esto se obtiene la posición en el eje 3 del punto de contacto a partir del desplazamiento en el eje 1 del mismo.

Por ultimo, la definición del Jacobiano es indispensable para resolver las restricciones (ver sección 2.5.2). El Jacobiano de este sistema viene dado por: [8,9]

Ecuación 3-10

$$(\dot{\mathbf{x}}_I + \boldsymbol{\omega}^x \times \mathbf{w}_L) \cdot \hat{\mathbf{R}}_{I3} = 0$$

Ecuación 3-11

$$(\dot{\mathbf{x}}_D + \boldsymbol{\omega}^x \times \mathbf{w}_D) \cdot \hat{\mathbf{R}}_{D3} = 0$$

donde $\boldsymbol{\omega}^x$ es la velocidad angular absoluta y $\{\hat{\mathbf{R}}_I\}$ es un marco de rotación que va de la siguiente manera:

Ecuación 3-12

$$[\hat{\mathbf{R}}_I] = \begin{pmatrix} \cos(a \tan(\zeta)) & 0 & -\sin(a \tan(\zeta)) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(a \tan(\zeta)) & 0 & \cos(a \tan(\zeta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_I) & \sin(\alpha_I) \\ 0 & -\sin(\alpha_I) & \cos(\alpha_I) \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{I}}]$$

Donde ζ es la pendiente del riel.

Ecuación 3-13

$$\alpha_I = \varphi + \beta$$

Ecuación 3-14

$$\alpha_D = \varphi - \beta$$

φ representa la inclinación del eje y β la inclinación del perfil de la rueda con respecto al punto de contacto.

Las restricciones ocasionadas por el contacto se implementaron en la sección 6.3.1.4.

Las fuerzas de contacto tanto laterales, longitudinales y los torques de contacto se calculan sobre la base de la teoría del Pr. Kalker [8,9]. Para esto se debe implementar estas fuerzas como fuerzas externas aplicadas a las ruedas y calcularlas por medio de un algoritmo ya desarrollado especialmente para ruedas de sistemas ferroviarios. La implementación de las fuerzas ocasionadas por el contacto se llevó a cabo en la sección 6.3.1.5.

También es necesario analizar como parte del modelo los topes laterales que se han introducido. Estos topes funcionan únicamente cuando el modelo sobrepasa las desviaciones de 5 mm. Es importante tomarlos en cuenta debido a que si bien cuando el sistema es estable estos no funcionan, son una parte

del contacto real presente en la montaña rusa y se observan en las velocidades críticas de la misma. Estos toques laterales se deben a la geometría de la rueda, por lo tanto deben ser analizados en el contacto. Los toques han sido implementados en la sección 6.3.1.3.

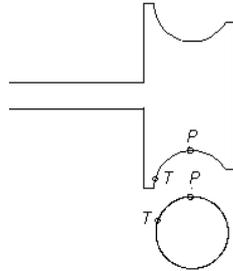


Ilustración 28. Puntos de contacto con desviaciones laterales mayores a 5 mm.

Como se puede observar en la ilustración 28, al tener una desviación lateral superior a 5 mm se tienen 2 puntos de contacto. Este fenómeno ha sido introducido a través de resortes laterales que actúan únicamente cuando la rueda llega a esta posición extrema.

3.4 Parámetros de la simulación

Para resolver las ecuaciones, es necesario reemplazar los parámetros conocidos por su valor real. Para ello se realizaron mediciones en la montaña rusa de Vulcano Park. Debido a que no se puede obtener medidas de masa, se utilizó hipótesis geométricas para obtener datos cercanos a los valores requeridos. Los valores medidos fueron los siguientes:

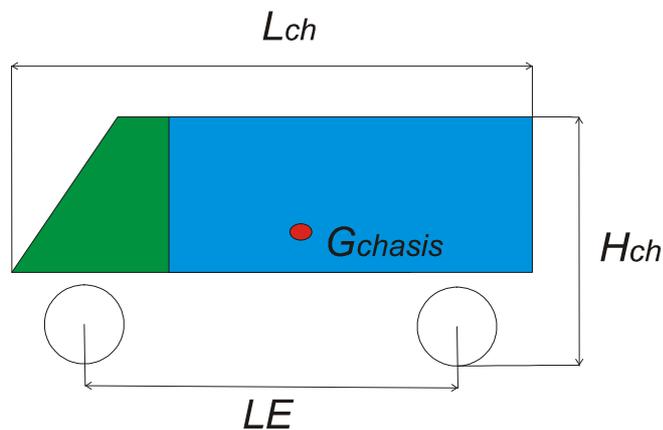


Ilustración 29. Dimensiones del vagón.

En la ilustración 29 se observa las dimensiones del vagón de la montaña rusa, donde:

$LE:$ 1.25 m

L :	0.74 m
Rn :	0.1 m
H_{ch} (cuerpo 6):	1.1 m
L_{ch} (cuerpo 6):	1.5 m
Diámetro de los ejes(cuerpos 12 y 20):	0.025 m

Luego de estas mediciones se asume que las partes de la estructura, con excepción del vagón, están hechas de acero por lo cual se utiliza su densidad y dimensiones para calcular posteriormente la masa.

Masa de las ruedas (cuerpos 13, 14, 21 y 22):

$$m_{13} = m_{14} = m_{21} = m_{22} = 14.75 \text{ kg}$$

Masa de los ejes (cuerpos 12 y 20):

$$m_{12} = m_{20} = 6.7 \text{ kg}$$

Inercia de las ruedas (cuerpos 13, 14, 21 y 22):

$$I_{13} = I_{14} = I_{21} = I_{22} = \begin{bmatrix} 0.0795 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0795 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$$

Inercia de los ejes (cuerpos 12 y 20):

$$I_{12} = I_{20} = \begin{bmatrix} 0.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0.23 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$$

En el caso del vagón se asume una plataforma de acero con una masa elevada con la masa promedio de 4 personas.

Masa del vagón (cuerpo 6):

$$m_6 = 600 \text{ kg}$$

Inercia del vagón (cuerpo 6):

$$I_6 = \begin{bmatrix} 52 & 0 & 0 \\ 0 & 103 & 0 \\ 0 & 0 & 106 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2$$

Cabe destacar que en estas medidas se asume que las personas no se mueven dentro de la montaña rusa, lo cual es una hipótesis válida debido a las seguridades que proveen las montañas rusas actuales.

El ángulo de contacto varía según la posición lateral con una función de:

Ecuación 3-15

$$\lambda = 0.05 + \frac{w}{0.02}$$

donde:

λ es el ángulo de contacto de la rueda con el riel.

w es el desplazamiento lateral.

$\lambda_0 = 0.05$ rad.

Para calcular los parámetros citados anteriormente se debe analizar la geometría de la rueda y el riel, además del desgaste que existe en el riel como se ve en la ilustración 30. Ese desgaste indica los límites del ángulo de la tangente común entre el punto de contacto entre la rueda y el riel.



Ilustración 30. Desgaste causado en el riel por la rueda.

Entre los datos numéricos requeridos también se encuentran las condiciones iniciales, las cuales no se tratarán en este capítulo debido a que varían según la simulación que se realiza.

3.5 Implementación del modelo

Luego de obtener todos los datos que se requieren para la simulación y las ecuaciones de movimiento de la montaña rusa es necesario hacer la implementación en la computadora, en donde se tiene los siguientes pasos: (Ver ilustración 31)

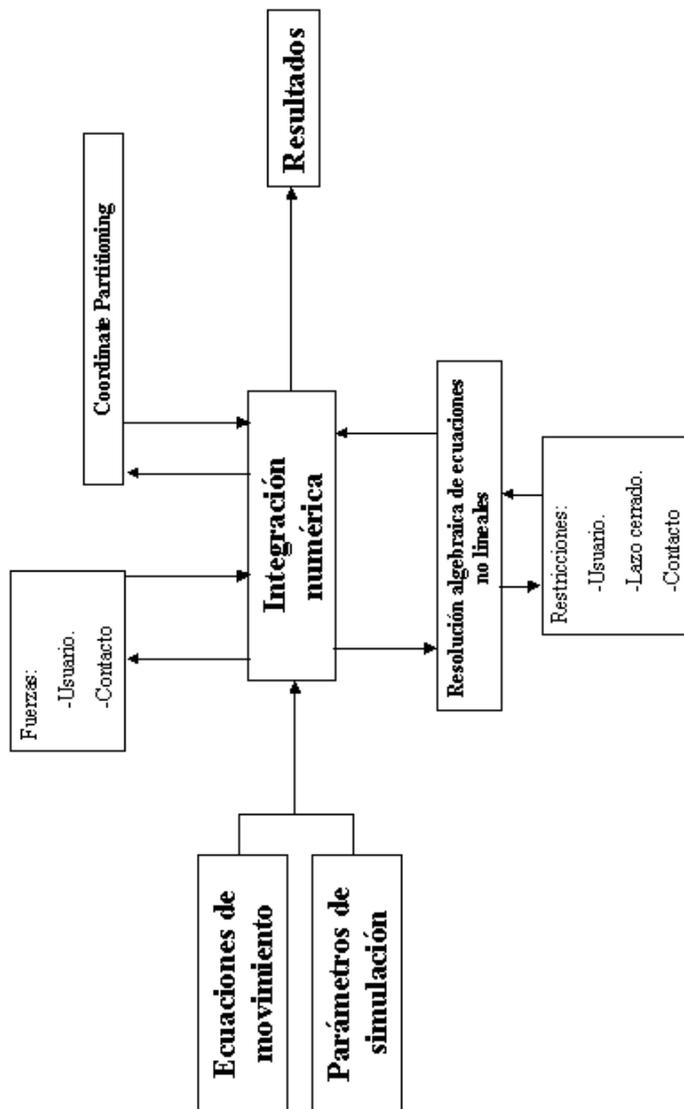


Ilustración 31. Implementación del sistema.

En la ilustración 31 se puede observar los pasos necesarios para la implementación en la computadora, los cuales consisten en:

1) Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento por medio de Robotran, es necesario asignar valores a las variables, por lo tanto se crean archivos que contengan todos los parámetros necesarios para integrar dichas ecuaciones.

2) Luego de obtener las ecuaciones es necesario resolver las ecuaciones no-lineales mediante métodos iterativos. En este caso se ha utilizado Newton-Raphson. Este tipo de ecuaciones aparecen debido a las restricciones como se vio en la sección 2.6.

3) Se definen las fuerzas provocadas por el usuario y se calcula las fuerzas del contacto por medio de algoritmos utilizados en sistemas ferroviarios tal como se puede observar en la sección 3.3.

4) Se realiza el proceso de Coordinate Partitioning, por medio del cual se transforma un sistema de ecuaciones que depende de las variables dependientes e independientes en un sistema de ecuaciones puramente diferencial y que depende exclusivamente de las variables independientes tal como se explicó en la sección 2.6.

5) Para finalizar, luego de obtener un sistema de ecuaciones puramente diferencial, es necesario integrar dichas ecuaciones y de esta manera obtener una matriz de resultados, donde la primera columna representa el tiempo y las siguientes representan las posiciones y velocidades relativas de los cuerpos.

4 Análisis de resultados

En esta tesis se pudo obtener resultados del comportamiento de un vagón de la montaña rusa bajo diversas condiciones de funcionamiento.

4.1 Pruebas de estabilidad en plano

Las pruebas de estabilidad en el plano se realizan para comprobar si se tiene un buen modelo de contacto y saber la velocidad a la que se puede recorrer el trayecto sin que la rueda entre en contacto con los topes laterales.

Estos topes laterales están diseñados para bloquear el recorrido de la rueda cuando esta pasa de 5 mm de desplazamiento lateral y aunque estos no permiten que la rueda exceda ese recorrido, un diseño ideal es el que logra que la geometría de la rueda por sí sola sea la que lleve hacia el centro del recorrido. Estos topes deben trabajar únicamente cuando la montaña rusa pasa por etapas de transición entre curvas y rectas, para evitar desgaste en el riel.

Se realizó pruebas a diversas velocidades para verificar el comportamiento:

Caso 1: Velocidad inicial de 10 m/s (36 km/h) y una desviación lateral de 4 mm.

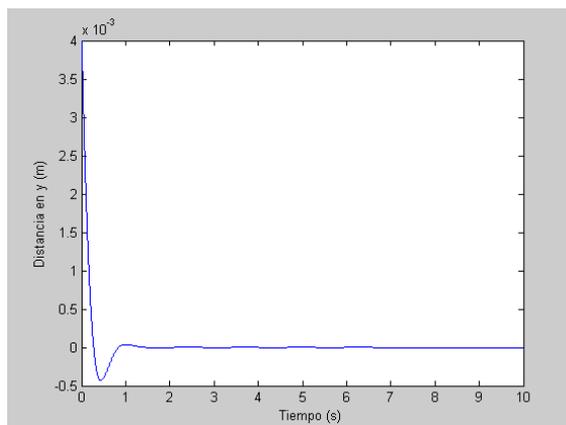


Ilustración 32. Estabilidad lateral para una velocidad de 10 m/s.

En ilustración 32 se observa el desplazamiento lateral. En este caso se ha puesto una desviación inicial de 4 mm para comprobar si la montaña rusa se estabiliza por sí misma. Se puede observar que el tiempo de estabilización es cercano a 1s.

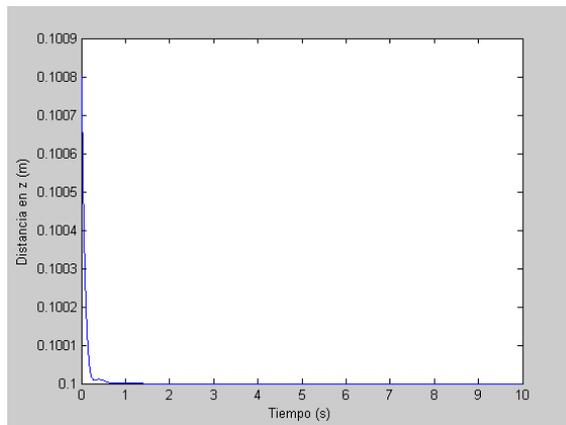


Ilustración 33. Posición vertical para una velocidad de 10 m/s.

En ilustración 33 se observa la posición vertical del centro de gravedad del chasis. Se puede observar en la ilustración 33 que la posición estable del vagón corresponde a un mínimo de energía potencial.

Caso 2: Velocidad 25 m/s (90 km/h) y una desviación de 4 mm.

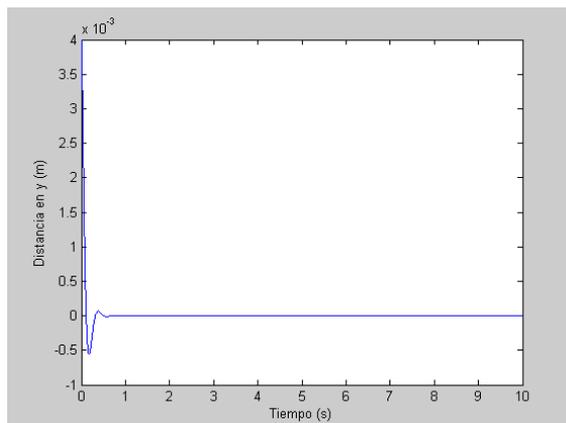


Ilustración 34 Estabilidad lateral para una velocidad de 25 m/s

En la ilustración 34 se observa que el vagón se estabiliza en 0.4s aproximadamente.

Caso 3: Velocidad 70 m/s. (252 km/h) y 4 mm de desviación lateral.

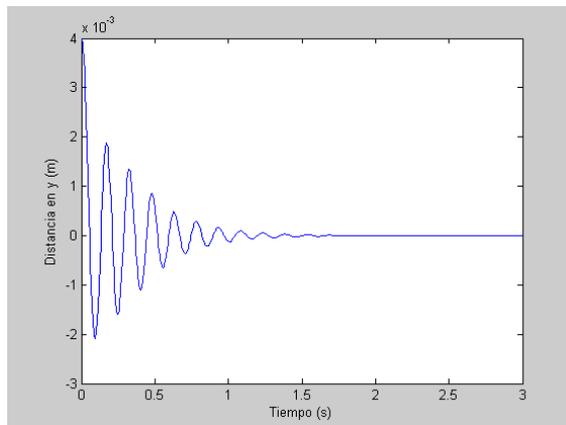


Ilustración 35. Estabilidad lateral para una velocidad de 70 m/s.

En la ilustración 35 se observa la aparición de oscilaciones, también se observa que el tiempo de estabilización es mayor y llega aproximadamente a 1.5 s. Estas oscilaciones indican que esta velocidad es cercana a la velocidad crítica.

Caso 4: Velocidad 100 m/s (360 km/h)

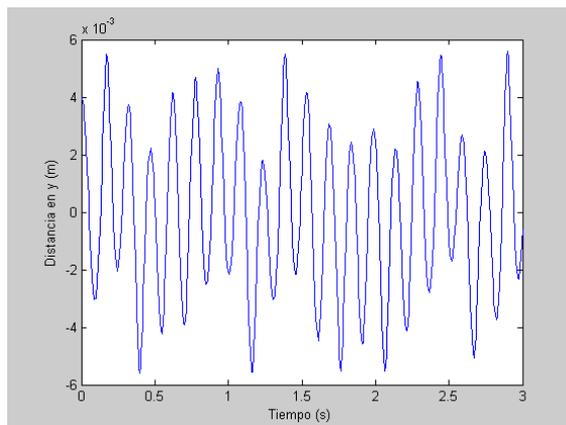


Ilustración 36. Desviación lateral para una velocidad de 100 m/s.

En la ilustración 36 se observa un sistema totalmente inestable y en el cual los topes son los encargados de evitar que el vagón salga disparado de los rieles. Este comportamiento presenta una curva muy interesante para estudiar, debido a que se observa una distancia pico a pico similar en todas las condiciones pero desplazándose lateralmente con una trayectoria en zigzag. También se puede observar que la velocidad crítica se encuentra entre los 70 y 100 m/s, que es una velocidad mucho más alta que la alcanzada por una montaña rusa. La velocidad crítica es definida con exactitud en la sección 4.2.

Este tipo de comportamiento inestable se tiene que evitar al máximo en el diseño por dos razones:

- Vibraciones no deseadas que pueden causar daños en mecanismos e incomodidad de los pasajeros.

- Desgaste por el contacto de los topes sobre el riel.

4.2 Pruebas en subida y bajada

Para comprobar la validez del modelo, se hicieron pruebas en subida y bajada, verificando un comportamiento consistente entre la pendiente de la trayectoria y la aceleración del vagón. Adicionalmente, las pruebas en subida permitieron obtener con exactitud la velocidad crítica. La velocidad crítica es el nombre que se utiliza para la velocidad máxima a la cual la montaña rusa es estable. Las pruebas tanto en bajada como en subida se realizaron con una pendiente del 10%.

Caso 1: Subida.

Para hacer el análisis de la velocidad crítica se parte de una velocidad de 100 m/s, velocidad en la que se observa una clara inestabilidad y se analiza en que momento se tiene un comportamiento estable (ver ilustración 37).

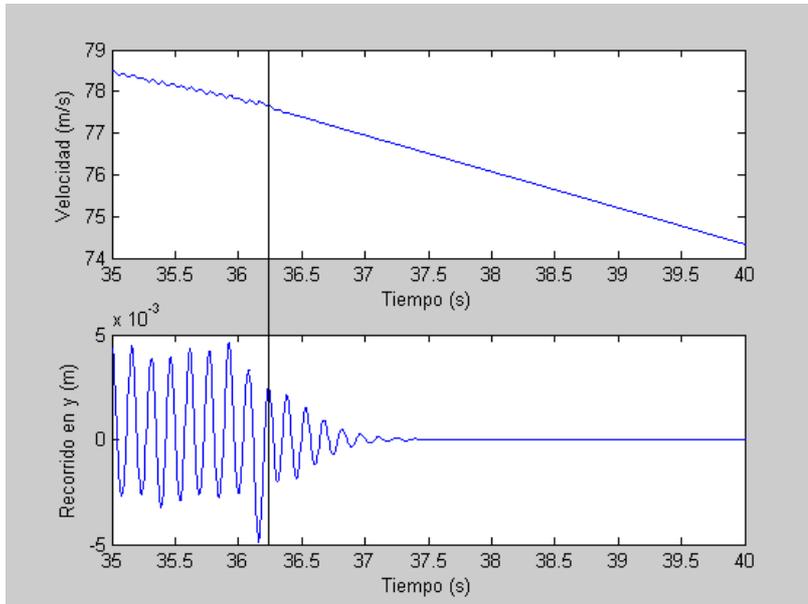


Ilustración 37. Análisis de la velocidad crítica del vagón.

En la ilustración 37 se puede observar que la velocidad crítica es de 78 m/s. Se debe tomar en cuenta que la integración numérica devuelve las velocidades en los ejes \hat{I}_1 e \hat{I}_3 , por lo que es necesario cambiar esas velocidades por una velocidad absoluta⁸ por medio de la ecuación 4-1 (ver ilustración 38).

⁸ Se denomina velocidad absoluta a la rapidez de la montaña rusa.

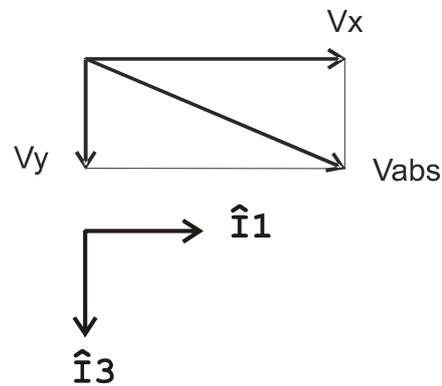


Ilustración 38. Velocidad absoluta.

Ecuación 4-1

$$V_{abs} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Donde V_x es la velocidad en el eje x. V_y es la velocidad en el eje y. V_{abs} es la rapidez del vagón.

También se analiza si el sistema cumple con las leyes de la energía, como se ve en la ilustración 39.

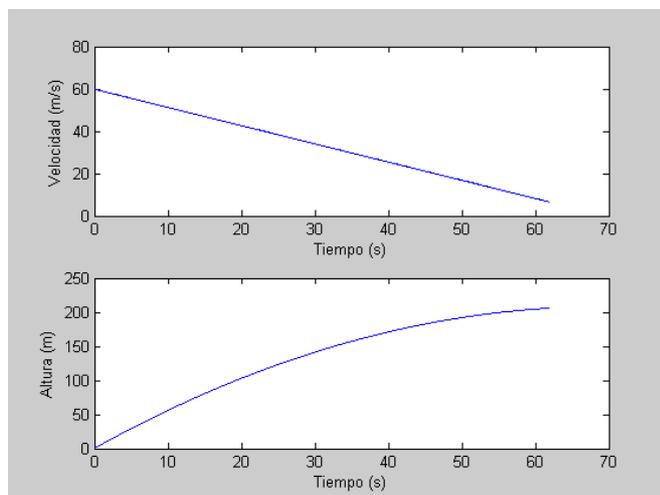


Ilustración 39. Resultados de las pruebas en subida.

Se puede observar en la ilustración 38 que la velocidad del vagón disminuye con el ascenso del mismo por la montaña rusa.

Bajada:

En la ilustración 40 se observa el comportamiento de la montaña rusa en bajada.

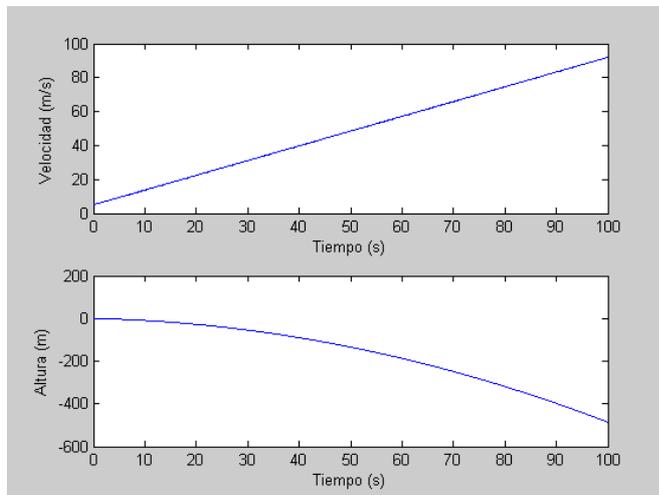


Ilustración 40. Resultados de las pruebas en bajada.

4.3 Implementación de una trayectoria sinusoidal

El objetivo de implementar una montaña rusa en una trayectoria sinusoidal es analizar como se comporta el contacto de la misma en situaciones en las cuales el riel no es plano.

La geometría de esta montaña rusa es de la siguiente forma:

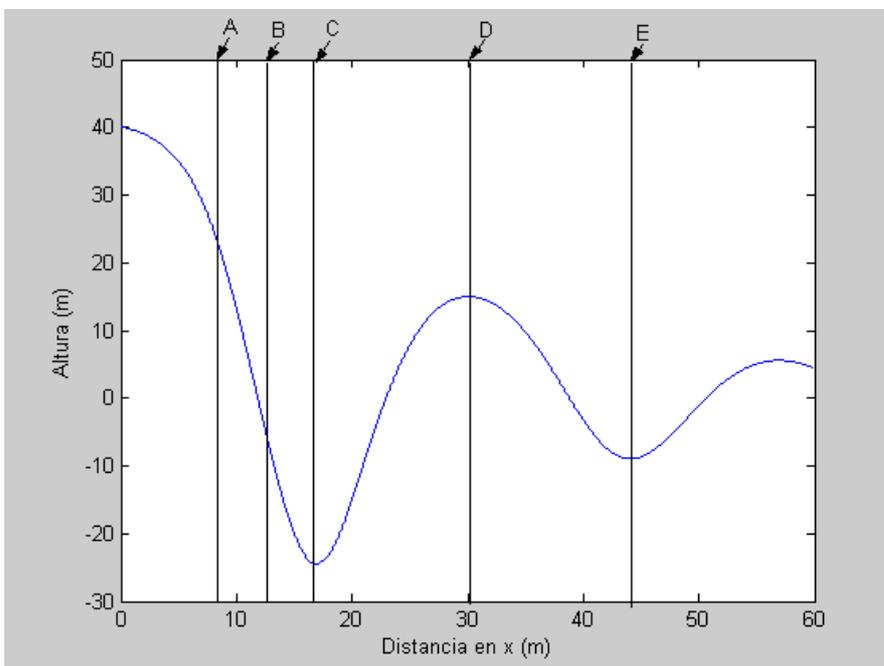


Ilustración 41. Geometría de la montaña rusa.

En esta montaña rusa se obtuvo los siguientes resultados:

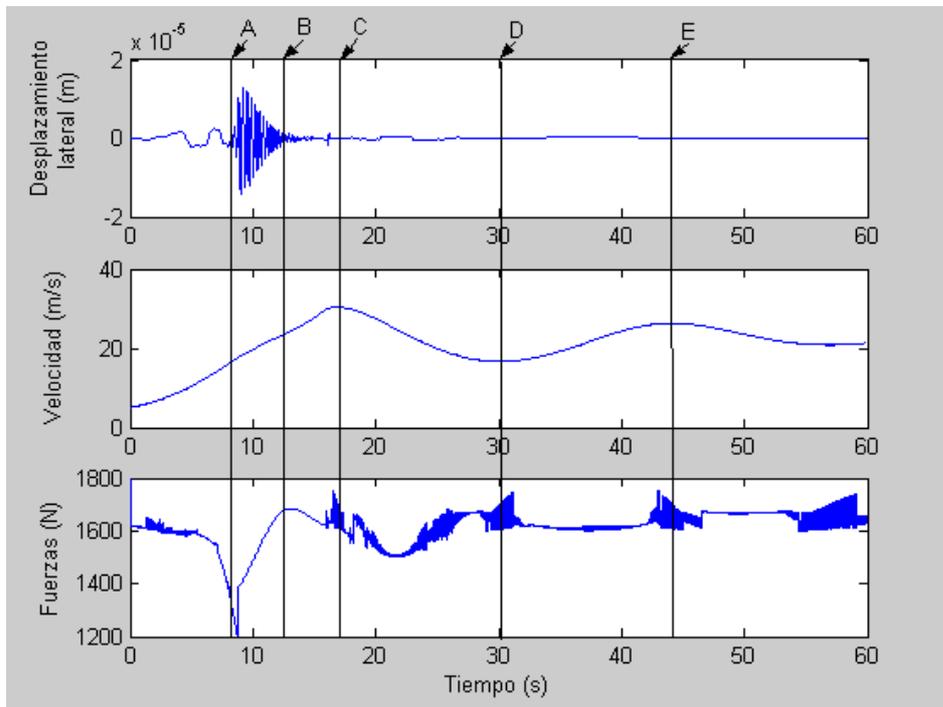


Ilustración 42. Resultados obtenidos en la trayectoria sinusoidal.

En la ilustración 42 se puede observar que la velocidad máxima no sobrepasa los 30 m/s, lo cual es un parámetro muy aceptable y muy por debajo de la velocidad crítica del sistema.

Se observan fuerzas normales que están a nivel de los 1742 N, lo cual es un parámetro que debe ser utilizado por los diseñadores al momento de construir esta montaña rusa.

En las figuras 41 y 42 se analizarán los puntos de mayor trascendencia para la simulación:

- A) En esta posición de la trayectoria se puede observar un aumento en la pendiente. Este aumento en la pendiente provoca una disminución en las fuerzas normales entre las ruedas y el riel de la montaña rusa. Esto se debe a que la montaña rusa tiende a seguir una trayectoria recta. Se puede observar que al disminuir las fuerzas normales el contacto se ve afectado, por lo cual existe un incremento en la amplitud del desplazamiento lateral de la misma; aunque, no existe inestabilidad en el vagón.
- B) En este punto de inflexión de la trayectoria se observa un comportamiento inverso al tratado en el punto anterior. Se observa un incremento en las fuerzas normales de contacto. Se puede observar en la ilustración 42 que al incrementarse las fuerzas normales entre el punto A y B el vagón se vuelve más estable.

- C) Las fuerzas de contacto más altas se producen en el punto más bajo de la montaña rusa y se deben a la aceleración que existe en el eje vertical. En este punto se observa un máximo en la velocidad lo cual es coherente si se analiza energéticamente el sistema. También se observan oscilaciones en las fuerzas, estas oscilaciones se encuentran a 22 Hz y son generadas por vibraciones ocurridas en los ejes. La frecuencia natural de los ejes con las ruedas es aproximadamente 18 Hz y por lo tanto estos vibrarán a esta frecuencia ante cualquier perturbación externa. El vagón del chasis tiene una frecuencia natural más baja y por lo tanto no afecta al comportamiento del sistema.
- D) y E) En estas posiciones de la trayectoria se observan picos del recorrido. Estos picos coinciden con la velocidad, lo cual demuestra una coherencia entre los resultados obtenidos entre la velocidad y la posición.

4.4 Análisis de sensibilidad de las variables del sistema

Es fundamental al momento de hacer una simulación verificar la importancia que tiene cada una de las variables para el comportamiento del sistema. En esta parte se analizará las siguientes variables:

Variación en la rigidez de las articulaciones 11 y 19.

En la ilustración 43 se puede observar los resultados producidos luego de cambiar la rigidez.

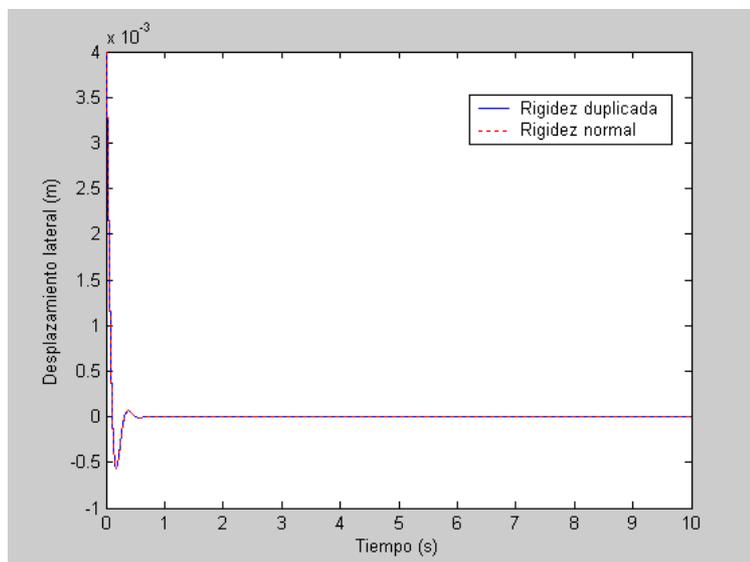


Ilustración 43. Variación de la estabilidad debida a la rigidez de las articulaciones 11 y 19

Se puede observar claramente en la ilustración 43 que al cambiar los parámetros en las articulaciones no se ha dado un cambio significativo en la estabilidad del sistema. También se realizó un análisis con este cambio para

verificar la velocidad crítica del sistema. Luego de variar la rigidez la velocidad crítica varió de 78 m/s a 77 m/s lo que indica una mayor estabilidad en el primer caso pero sin una variación significativa.

Se realizó también una prueba de sensibilidad variando las masas e inercias del eje y de las ruedas obteniendo resultados similares al que se observó en la ilustración 43 y por lo tanto no han sido tomados en cuenta.

4.5 Validación del modelo

A pesar de que no se encontró otras simulaciones en montañas rusas, el modelo fue validado mediante la comparación de los resultados obtenidos con simulaciones realizadas en ferrocarriles. La estabilización de la montaña rusa debe ser similar a la de los ferrocarriles en su comportamiento, aunque varían en la amplitud y frecuencia observadas.

El modelo también ha sido verificado analizando el comportamiento bajo condiciones como Subida o Bajada. Bajo estas condiciones se debe verificar una coherencia entre los resultados obtenidos y verificar que exista una coherencia entre estos y las leyes de la física.

Luego de un análisis de todos los resultados y las pruebas se observó una coherencia entre los resultados esperados y los resultados obtenidos, por lo tanto se puede considerar que el modelo es totalmente válido.

4.6 Animación

La animación de la montaña rusa es realizada sobre la base de los resultados obtenidos. En esta fase del diseño permite visualizar el comportamiento del sistema fácilmente. Es importante realizar la animación del modelo debido a que se puede representar el comportamiento que tendrá el mismo en un entorno real. La ilustración 44 permite visualizar las imágenes realizadas en la simulación de esta tesis.

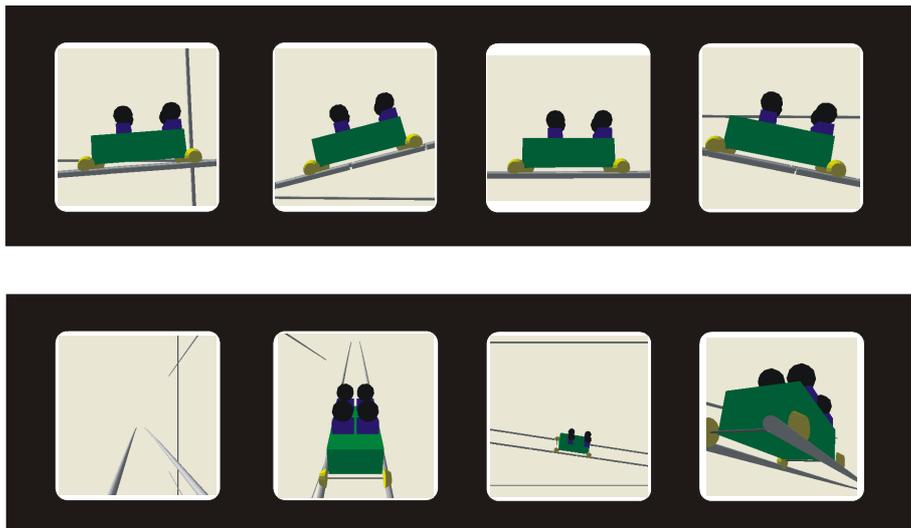


Ilustración 44. Animación de la montaña rusa.

5 Conclusiones y Recomendaciones

El principal objetivo de esta tesis fue desarrollar e implementar el modelo de una montaña rusa a través de sistemas multicuerpo.

5.1 Conclusiones

La primera parte de esta tesis consistió en realizar un modelo de la montaña rusa. Es recomendable que al momento de construir un modelo se analicen detalladamente todos los aspectos del modelo. Al momento de hacer el modelado es extremadamente importante analizar la importancia de cada parámetro de simulación. La importancia de cada parámetro se basa en dos aspectos: el primer aspecto es analizar la sensibilidad del sistema ante un cambio en algún parámetro, el segundo aspecto depende de la importancia de los resultados en cada sección del modelo. Por ejemplo, existen hipótesis que se pueden realizar en el modelo de contacto tal como se lo puede observar en la sección 2.7.2, que a pesar de dar una idea clara del comportamiento general de la montaña rusa no permitía observar la estabilidad de la misma.

La segunda parte de la tesis fue desarrollar un modelo de contacto válido entre la rueda y el riel de la montaña rusa. Para el desarrollo del mismo se partió de modelos de contacto utilizados para la simulación de sistemas ferroviarios. El comportamiento de un sistema ferroviario es muy parecido al de una montaña rusa, aunque, debido a las diferencias de las condiciones de trabajo de las mismas, causado por el tipo de trayectoria que recorren, fue indispensable desarrollar variaciones al modelo de contacto utilizado en la simulación de trenes.

En la tercera parte se realizó la generación simbólica de las ecuaciones. El programa utilizado en esta sección fue Robotran, con algoritmos específicos para la generación de ecuaciones que permiten reducir al máximo la cantidad de operaciones que realiza la computadora al momento de simular. La cantidad de ecuaciones crece aceleradamente al aumentar la cantidad de cuerpos, por lo tanto, al reducir el número de operaciones que realiza la computadora en la simulación se traduce en grandes ahorros de tiempo.

En la cuarta parte se realizó la simulación del sistema. Aquí se pudo observar la cantidad de tiempo que toma realizar una simulación y la importancia de realizar un modelo eficiente.

Los resultados obtenidos en este trabajo se pueden observar en el capítulo 4. Estos resultados muestran un comportamiento coherente con un sistema real. La montaña rusa muestra una estabilidad hasta velocidades que llegan a 280 km/h lo cual representa una velocidad 2.5 veces más alta que la montaña rusa más rápida existente. El comportamiento en trayectorias con pendiente y sinusoidales muestran una coherencia entre la velocidad alcanzada y la altura.

Luego de un análisis de los resultados obtenidos se puede concluir que se tiene un modelo de la montaña rusa con un comportamiento muy cercano a un sistema real.

5.2 Recomendaciones

Al momento de realizar un modelo es necesario que se encuentren presentes todos los aspectos necesarios para que la simulación sea cercana a la realidad; aunque, también es necesario simplificar el modelo en lugares de baja trascendencia para la simulación para mejorar la velocidad de la simulación.

Es importante comparar la simulación de un sistema con la simulación de un sistema ya construido para verificar si se ha realizado una implementación correcta del modelo.

Es importante también realizar la simulación de un sistema antes de la construcción de un prototipo debido a que esto incrementará la velocidad en el desarrollo y reducirá los costos de la construcción.

5.3 Investigación propuesta: Desarrollos aplicables para la simulación y simplificación de curvas en tres dimensiones

Al momento de simular montañas rusas en la computadora se presentan grandes problemas de parametrización de los datos, además de tener un gran costo cuando se habla del tiempo de simulación. Por lo tanto, en esta tesis se plantea un modelo alternativo de simulaciones con bajo costo de tiempo y que simplifican al momento de parametrizar las curvas en el espacio.

Esta teoría podría ser aplicada a una gran variedad de curvas en el espacio como pueden ser rizados, los cuales generan problemas de simulación cuando el ángulo del riel se encuentra a 90° creando divisiones por cero debido a términos divididos para el coseno del ángulo ($\cos(90^\circ)=0$), recorridos en espiral, curvas peraltadas u otro tipo de curvas en el espacio.

Hipótesis:

- La fuerza que se aplica en los dos rieles debe ser igual⁹.
- La longitud recorrida por las ruedas exteriores de la curva e interiores es igual.

Ventajas:

- Un costo de cálculos numéricos menor, lo que significa un menor tiempo de simulación.
- Un sistema simple de parametrización de las curvas en el espacio.
- Fácil implementación del sistema.

Limitaciones:

⁹ Para que la fuerza sobre los rieles sea igual se debe tener una velocidad igual a la velocidad con la que se calculó el peralte.

- Se debe hacer la simulación de todo el trayecto por secciones. Para esto se debe tomar en cuenta las condiciones iniciales de cada trayecto como las condiciones finales del trayecto previo.
- Se puede generar errores en la transición de un trayecto a otro.

Para empezar con el desarrollo de las ecuaciones que se van a utilizar para el sistema se debe explicar que la hipótesis que se aplica al decir que la fuerza sobre los dos rieles es igual es completamente válida debido a que el peralte debe ser lo suficientemente grande para que la fuerza que se aplica sobre ellos sea normal al riel y de esta forma obtener un desgaste igual en los dos rieles.

5.3.1 Conceptos

5.3.1.1 Peralte



Ilustración 45. Peralte de la montaña rusa en Vulcano Park.

El peralte es una inclinación que se aplica en una trayectoria curva para garantizar que un vehículo no experimente o experimente una menor aceleración centrífuga en la dirección lateral del vagón. Un ejemplo en donde se ve este tipo de trayectos es Daytona u otras pistas de carreras para permitir una mayor velocidad de los vehículos en las curvas.

Aunque el peralte en las carreteras no necesariamente garantiza que las fuerzas en las ruedas derechas e izquierdas sea exactamente la misma debido a que la rapidez de los vehículos puede variar según el conductor, si es una hipótesis válida para una montaña rusa donde la velocidad en cada parte del trayecto siempre es muy similar.

5.3.1.2 Gravedad Relativa

Es la fuerza gravitatoria que experimenta la persona dentro del vagón de la montaña rusa.

5.3.2 Cálculos realizados e implementación

El objetivo principal de esto es obtener un factor que se multiplique la fuerza normal que actúa sobre el riel y de esta forma poder calcular las fuerzas que se obtienen en este sistema.

La fuerza que actúa sobre el riel es:

Ecuación 5-1

$$P = M * g$$

Donde M es la masa del vagón y g es la gravedad.

Luego se calcula el ángulo de peralte óptimo para este sistema.

Ecuación 5-2

$$\alpha = \arctan\left(\frac{V^2}{r * P}\right)$$

Donde V es la velocidad, r es el radio de la curva y P es la carga del vagón aplicada sobre los rieles.

Por último se calcula la fuerza normal con un peralte.

Ecuación 5-3

$$N_p = (P * \cos(\alpha)) + \left(\frac{V^2 * \sin(\alpha)}{r}\right)$$

De esta manera se obtiene el porcentaje en el aumento de las fuerzas normales.

Ecuación 5-4

$$\frac{N_p - N}{N} * 100\%$$

Donde N_p Es la fuerza normal presente en el peralte y N es la fuerza normal en una trayectoria horizontal.

5.4 Estimaciones preliminares

Luego de hacer algunas mediciones se analizó el porcentaje de aumento de fuerzas normales y se obtuvo los siguientes resultados para un radio de 2.5 m.

- 1) Con una velocidad de 50 m/s se obtuvo un factor de aumento de 1.1%.
- 2) Con una velocidad de 75 m/s se obtuvo un factor de aumento de 5.7%.
- 3) Con una velocidad de 100 m/s se obtuvo un factor de aumento de 17.2%.

Por lo cual se puede considerar que para las velocidades que se tienen en esta montaña rusa los valores son totalmente despreciables. Es importante analizar estos factores debido a que aumentan considerablemente al aumentar la velocidad. Este método puede ser de gran ayuda al momento de calcular las fuerzas existentes en un rizo.

6 Anexos

6.1 Anexo 1 (Parámetros de simulación simbólica)

6.1.1 Datos

En este archivo se describe la configuración de nuestros cuerpos.

contchas.dat

34 Número de Cuerpos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 12 6 15 16 17 18 19 20 20 0 23 24 25 26 27 0 29 30 31 32 33

En la parte anterior se define la configuración de padre e hijo de los cuerpos.

----- Description of the joints-----

T1	q1	qp1	qpp1	Se define una translación en el eje 1 del cuerpo 1.
T2	q2	qp2	qpp2	
T3	q3	qp3	qpp3	
R3	q4	qp4	qpp4	
R1	q5	qp5	qpp5	
R2	q6	qp6	qpp6	
T1	q7	qp7	qpp7	
T2	q8	qp8	qpp8	
T3	q9	qp9	qpp9	
R3	q10	qp10	qpp10	
R1	q11	qp11	qpp11	
R2	q12	qp12	qpp12	
R2	q13	qp13	qpp13	
R2	q14	qp14	qpp14	
T1	q15	qp15	qpp15	
T2	q16	qp16	qpp16	
T3	q17	qp17	qpp17	
R3	q18	qp18	qpp18	
R1	q19	qp19	qpp19	
R2	q20	qp20	qpp20	
R2	q21	qp21	qpp21	
R2	q22	qp22	qpp22	
T1	q23	qp23	qpp23	
T2	q24	qp24	qpp24	
T3	q25	qp25	qpp25	
R3	q26	qp26	qpp26	
R1	q27	qp27	qpp27	

Se define las masas de los cuerpos, acá se debe definir cuales cuerpos tienen masa y cuales no la tienen (Muchos de los cuerpos solo definen movimiento pero en realidad no tienen masa)

0

0

0

0

0

m6

0

0

0

0

0

m12

m13

m14

0

0

0

0

0

m20

m21

m22

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

----- Inertia matrices -----

Se define las matrices de inercia de los cuerpos.

0 0 0

 0 0

		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
161	0	0
	162	0
		163
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
1121	0	0
	1122	0
		1123
1131	0	0
	1132	0
		1133
1141	0	0
	1142	0
		1143

0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
I201	0	0
	I202	0
		I203
I211	0	0
	I212	0
		I213
I221	0	0
	I222	0
		I223
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0

	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0
0	0	0
	0	0
		0

----- External forces -----

Se define que cuerpos dependen de fuerzas externas, en este caso solo las ruedas dependen de fuerzas externas para aplicarlos al contacto.

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

fr131	fr132	fr133	Fuerzas externas para la rueda izquierda delantera.
-------	-------	-------	---

fr141	fr142	fr143
-------	-------	-------

0	0	0
0	0	0
0	0	0

trq221 trq222 trq223

```

0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0

```

----- Gravity vector -----

```

0    0    g

```

6.1.2 Sensores

Los sensores definen diversos parámetros de cada cuerpo, estos pueden ser: posición, velocidad, aceleración, matriz de rotación y el Jacobiano.

contchas.sen

7 number of sensors

----- 1 -----Chasis

```

6    0
0    0    0

```

P V A

----- 2 -----Eje delantero

```

12   0
0    0    0

```

P V A J R

----- 3 -----Rueda delantera izquierda

13 0 Se define el sensor desde el cuerpo 13 (rueda) hacia el cuerpo 0 (Tierra).

0 0 0 Posición del sensor con respecto al cuerpo.

P V A J R Parámetros que se obtienen del sensor.

----- 4 -----Rueda delantera derecha

```

14   0
0    0    0

```

P V A J R

----- 5 -----Eje trasero

```

20   0
0    0    0

```

```
P V A J R
----- 6 -----Rueda trasera izquierda
```

```
21 0
0 0 0
```

```
P V A J R
----- 7 -----Rueda trasera derecha
```

```
22 0
0 0 0
```

```
P V A J R
-----end of contact.sen -----
```

6.1.3 Restricciones de Lazo cerrado

File name : contchas.con ;

```
2          6ddl
```

En la parte anterior se define el número de lazos cerrados y el número de grados de libertad.

```
-----
12 28  En esta línea se define 2 cuerpos que llevaran la misma posición(ver 2.1.1.2)
```

```
0 0 0  Estos valores definen la distancia entre centros del cuerpo 12 y cuerpo 28
```

```
-----
20 34
```

```
0 0 0
```

```
=====
0
```

```
=====
0
```

```
=====
0          user
```

```
-----
```


----- Masses -----

0

0

0

0

0

600 Masa del Chasis

0

0

0

0

0

6.7 Masa de los ejes.

14.75 Masa de las ruedas.

14.75

0

0

0

0

0

6.7

14.75

14.75

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

----- Inertia matrices -----

0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0
52 0 0 0 103 0 0 0 106 Inercia del chasis.
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0.23 0 0 0 0.0003 0 0 0 0.23 Inercia de los ejes.
0.0795 0 0 0 0.15 0 0 0 0.0795 Inercia de las ruedas.
0.0795 0 0 0 0.15 0 0 0 0.0795
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0.23 0 0 0 0.0003 0 0 0 0.23
0.0795 0 0 0 0.15 0 0 0 0.0795
0.0795 0 0 0 0.15 0 0 0 0.0795
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0
----- Gravity vector -----
0 0 -9.81

```

6.2.2 Posición de sensores

File name: contact.sen

```

-----Eje
0 0 0 Posición de los sensores con respecto al centro de su cuerpo.
0 0 0
0 0 0

```

```

0    0    0
0    0    0
0    0    0
0    0    0
----end-----

```

6.2.3 Condiciones iniciales

Para realizar una simulación es necesario definir las condiciones iniciales de las variables independientes.

contchas.ijv

```
-----q-----
```

```
0.000000000000e+00
```

```
0.004000000000e+00
```

```
60.000000000000e+00
```

Desplazamiento lateral de la rueda para análisis de estabilidad.

Altura inicial de la que parte la simulación Para el caso del recorrido sinusoidal.

```
0.000000000000e+00
```

```
0.004000000000e+00
```

```
0.000000000000e+00
```

```
0.000000000000e+00
```

```
0.000000000000e+00
```

0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.004000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00

-----qp-----

5.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00

Velocidad inicial del vehículo.

50.000000000000e+00
50.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
50.000000000000e+00
50.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00
0.000000000000e+00

Velocidad angular inicial de las ruedas.

6.3 Anexo 3 (Implementación del modelo)

6.3.1 Programas realizados para esta tesis

6.3.1.1 *Contchas.m*

Este archivo es el encargado de realizar la integración numérica de nuestro sistema.

```
close all;
clear all;
warning off;
global_def;
%Se asigna la dirección de lectura y escritura de nuestros archivos
pathproj = 'C:\Documents and Settings\Gabucho\Mis documentos\Sinoidal';
% Se asigna el nombre a nuestro proyecto
prjname = 'contchas';
%Se inicializa los valores en para luego poder utilizarlos
nloop = 0;
ncap = 7;
nwhl = 0;
nlnk = 0;
tprev = 0;
%Se crea un archivo de resultados
fnameres=strcat(pathproj,'\prjname,\results\posicion.res');
FichRes=fopen(fnameres, 'w+');
fnamefuerzas=strcat(pathproj,'\prjname,\results\fuerzas.res');
FichF=fopen(fnamefuerzas, 'w+');
fnamevelocidad=strcat(pathproj,'\prjname,\results\velocidad.res');
FichVel=fopen(fnamevelocidad, 'w+');
%LoadData es un archivo que permite cargar los datos numéricos a la
%memoria.
LoadData;
% Se asigna los parámetros de integración y se llama a la función ode45 la
%cual ayuda con la resolución de las ecuaciones diferenciales.
OPTIONS = odeset('Refine',1,'OutputFcn', 'Imprimir');
[t,qnew] = ode45('contactSimu',[0 100],[q(quu) qd(quu)],OPTIONS);
fclose all;
```

6.3.1.2 *Contactsimu.m*

En este archivo se define la función a integrar además de resolver las ecuaciones algebraicas no lineales.

```
function yp=contactSimu(t,y)
```

```

global_def;
global FnAvDD FnAvGD FnAvDT FnAvGT dl6p dl3p dl3s dl1p dl1s lrod ucc dbp dbs
q(quu) = y(1:nbu);
qd(quu) = y(nbu+1:2*nbu);
%Se llama a cuser para obtener las restricciones y el jacobiano
%concerniente al contacto.
[Rest1, Jacobiano1] = cuser(q);
% Se llama a constr, este archivo nos entrega las restricciones y el
%jacobiano concerniente a los lazos cerrados
[Rest2, Jacobiano2,bb2] =
constr(q,qd,d,dl6p,dl3p,dl3s,dl1p,dl1s,lrod,ucc,dbp,dbs,l,masse,ln,g,0,1);
bb1=zeros(4,1);
bb=[bb1;bb2';0;0;0;0;0;0;0;0;0];
%Se pone las restricciones en las articulaciones que se necesite que se queden
%fijas
jaco7=zeros(1,34);
jaco7(7)=1;
jaco8=zeros(1,34);
jaco8(8)=1;
jaco9=zeros(1,34);
jaco9(9)=1;
jaco10=zeros(1,34);
jaco10(10)=1;
jaco12=zeros(1,34);
jaco12(12)=1;
jaco15=zeros(1,34);
jaco15(15)=1;
jaco16=zeros(1,34);
jaco16(16)=1;
jaco17=zeros(1,34);
jaco17(17)=1;
jaco18=zeros(1,34);
jaco18(18)=1;
jaco20=zeros(1,34);
jaco20(20)=1;
%Se Restringe la velocidad de la rueda derecha e izquierda para que sean
%iguales y así llegar al equilibrio mas rápidamente
Rest3 = q(14)- q(13);
Rest4 = q(22)- q(21);
jaco13=zeros(1,34);

```

```

jaco13(13)=-1;
jaco13(14)=1;
jaco21=zeros(1,34);
jaco21(21)=-1;
jaco21(22)=1;
%Se ensambla la matriz del Jacobiano
Jacobiano=[Jacobiano1;Jacobiano2;jaco7;jaco8;jaco9;jaco10;jaco12;jaco15;jaco16;jaco17;jaco
18;jaco20;jaco13;jaco21];
%Se realiza el cordinate partitioning
Ju=Jacobiano(:,quu);
Jv=Jacobiano(:,qv);
%Se ensambla la matriz de Restricciones
Restricciones=[Rest1'; Rest2'; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; Rest3; Rest4] ;
cont = 0;
%Se realiza la interacción de Newton-Raphson para obtener los valores de
%las variables dependientes a partir de las independientes
while (abs(Restricciones(1)) > 1E-5 | abs(Restricciones(2)) > 1E-5 | abs(Restricciones(3)) > 1E-
5 | abs(Restricciones(4)) > 1E-5 | abs(Restricciones(5)) > 1E-5 | abs(Restricciones(6)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(7)) > 1E-5 | abs(Restricciones(8)) > 1E-5 | abs(Restricciones(9)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(10)) > 1E-5 | abs(Restricciones(11)) > 1E-5 | abs(Restricciones(12)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(13)) > 1E-5 | abs(Restricciones(14)) > 1E-5 | abs(Restricciones(15)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(16)) > 1E-5 | abs(Restricciones(17)) > 1E-5 | abs(Restricciones(18)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(19)) > 1E-5 | abs(Restricciones(20)) > 1E-5 | abs(Restricciones(21)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(22)) > 1E-5 | abs(Restricciones(23)) > 1E-5 | abs(Restricciones(24)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(25)) > 1E-5 | abs(Restricciones(26)) > 1E-5 | abs(Restricciones(27)) > 1E-5 |
abs(Restricciones(28)) > 1E-5);
q(qv)=q(qv)' - (inv(Jv)*Restricciones);
%Se asigna los nuevos valores para la siguiente interacción
[Rest1, Jacobiano1] = cuser(q);
[Rest2, Jacobiano2,bb2] =
constr(q,qd,d,dl6p,dl3p,dl3s,dl1p,dl1s,lrod,ucc,dbp,dbs,l,masse,ln,g,0,1);
Jacobiano=[Jacobiano1;Jacobiano2;jaco7;jaco8;jaco9;jaco10;jaco12;jaco15;jaco16;jaco17;jaco
18;jaco20;jaco13;jaco21];
Jv=Jacobiano(:,qv);
Rest3 = q(14)- q(13);
Rest4 = q(22)- q(21);
Restricciones=[Rest1'; Rest2'; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; Rest3; Rest4] ;
end
Ju=Jacobiano(:,quu);
Jv=Jacobiano(:,qv);
%Calculo de la velocidad.
Bvu=-inv(Jv)*Ju;
qd(qv)=Bvu*qd(qu)';
%Calculo fuerzas de contacto.

```

```

if t == 0
    FnAvDD = 0;
    FnAvGD = 0;
    FnAvDT = 0;
    FnAvGT = 0;
end

frc = zeros(3,nbody);
trq = zeros(3,nbody);
[frc,trq] = fu_user(frc,trq,q,qd,t);
%Llamamos a dirdynaner.
[M,C] = dirdynaner(q,qd,d,l,masse,ln,frc,trq,g);
%Se llama a Q_user.
Qq = Q_user(Qq,q,qd,t);
%Se realiza el coordinate partitioning.
Muu=M(quu,quu);
Mvu=M(qv,quu);
Muv=M(quu,qv);
Mvv=M(qv,qv);
Cu=C(quu)';
Cv=C(qv)';
Qu=Qq(quu)';
Qv=Qq(qv)';
%Ecuaciones
Mred=(Muu+Muv*Bvu+Bvu*Mvu+Bvu*Mvv*Bvu);
Cred=(Muv+Bvu*Mvv)*(inv(Jv))*bb+Cu'+Bvu*Cv';
Qred=Qu+Bvu*Qv;
qdd(quu) = Mred\Qred - Cred);
%Calculo fuerzas normales por medio de los Multiplicadores de Lagrange.
Fnormales = inv(Jv)*(Mvu*qdd(quu)+Mvv*qdd(qv)+Cv'-Qv);
FnAvDD = Fnormales(1);
FnAvGD = Fnormales(2);
FnAvDT = Fnormales(3);
FnAvGT = Fnormales(4);
yp = [qd(quu) qdd(quu)]';

```

6.3.1.3 Q_user.m

En este archivo se definen las fuerzas internas de las articulaciones.

%Se definen las fuerzas en las articulaciones.

```
function [Qq] = Q_user(Qq,q,qd,tsim);
```

```

global nbody;
%Se inicializa los valores en cero.
Qq = zeros(1,nbody);
%Se asigna las fuerzas articulares
Qq(11) = -0.5e4*q(11)-800*qd(11);
Qq(19) = -0.5e4*q(19)-800*qd(19);
if q(24) >= 0.005; % Se pone el if para definir una fuerza que funcione pasada una
distancia lo cual es utilizado para implementar topes.
    Qq(24) = -5e6*(q(24)-0.005);
end
if q(24) <= -0.005;
    Qq(24) = -5e6*(q(24)+0.005);
end
if q(30) >= 0.005;
    Qq(30) = -5e6*(q(30)-0.005);
end
if q(30) <= -0.005;
    Qq(30) = -5e6*(q(30)+0.005);
end

```

6.3.1.4 Cuser.m

En este programa se realiza el cálculo de la posición del cuerpo con debido al riel.

```

function [Restr, JAC] = cuser(q)
%Dentro de cuser se hace el cálculo de las restricciones del contacto.
global_def;
global RoDD RoID WDD WID FnAvDD FnAvGD AGD RoDT RoIT WDT WIT FnAvDT FnAvGT
AGT uDD uID uDT uIT;
JAC = zeros(4,34);
%lambda = 2.626e-2;
%lambda = 0.3;
lambdald = 0.05 + 1/0.02*q(24);
lambdaDd = 0.05 - 1/0.02*q(24);
lambdalt = 0.05 + 1/0.02*q(30);
lambdaDt = 0.05 - 1/0.02*q(30);
betald = atan(lambdald);
betaDd = atan(lambdaDd);
betalt = atan(lambdalt);
betaDt = atan(lambdaDt);
Rn = 0.10;
LentreRuedas = 0.74;

```

```

LentreRieles = 0.74;
wo = (LentreRuedas-LentreRieles)/2;
% Marco X, asociado con eje de las ruedas delanteras
[Psens,AGD,JACXD,Vsens,OmegaX,Asens,OMPsens] = dirkinerig(q,qd,qdd,d,dc,2);
wD = q(24)/cos(q(27));
% Marco YD, asociado con la rueda derecha delantera
[XDD,AMD,JACDD,Vsens,OMSens,Asens,OMPsens] = dirkinerig(q,qd,qdd,d,dc,4);
% Calculo de la restricción
RoDD= Rn - lambdaDd*(wo+wD);
WDD = [0; -wo-wD;-RoDD];
uDD = XDD' + AGD*WDD;
%Se calcula las restricciones para el perfil del suelo.
pendiente= -1/5*sin(1/300*uDD(1)*pi)*pi*exp(-1/600*uDD(1))-1/10*cos(1/300*uDD(1)*pi)*exp(-1/600*uDD(1));
Restr(1) = uDD(3)-(60*cos(uDD(1)*pi/300)*exp(-uDD(1)/600));
% Calculo del marco RD
alphaRD = q(27)-betaDd;
RDD= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaRD) sin(alphaRD);0 -sin(alphaRD) cos(alphaRD)];
RDD3 = RDD(3,:);

% Calculo del Jacobiano
W = AGD*WDD;
JAC(1,:) = RDD3*(JACDD(1:3,:)-[0 -W(3) W(2); W(3) 0 -W(1); -W(2) W(1) 0]*JACDD(4:6,:));
% Marco YI, asociado con la rueda izquierda delantera
[XID,AMI,JACID,Vsens,OMSens,Asens,OMPsens] = dirkinerig(q,qd,qdd,d,dc,3);
RoID= Rn - lambdaId*(wo-wD);
WID = [0; wo-wD;-RoID];
uID = XID' + AGD*WID;
% Se calcula las restricciones para el perfil del suelo.
pendiente= -1/5*sin(1/300*uID(1)*pi)*pi*exp(-1/600*uID(1))-1/10*cos(1/300*uID(1)*pi)*exp(-1/600*uID(1));
Restr(2) = uID(3)-(60*cos(uID(1)*pi/300)*exp(-uID(1)/600));
% Calculo del marco RD
alphaID = q(27)+betaId;
RID= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaID) sin(alphaID);0 -sin(alphaID) cos(alphaID)];
RID3 = RID(3,:);
% Calculo del Jacobiano
W = AGD*WID;
JAC(2,:) = RID3*(JACID(1:3,:)-[0 -W(3) W(2); W(3) 0 -W(1); -W(2) W(1) 0]*JACID(4:6,:));

```

```

% Marco X, asociado con eje de las ruedas traseras
[Psens,AGT,JACXT,Vsens,OmegaX,Asens,OMPsens] = dirkinerig(q,qd,qdd,d,dc,5);
wT = q(30)/cos(q(33));
% Marco YD, asociado con la rueda derecha
[XDT,AMD,JACDT,Vsens,OMsens,Asens,OMPsens] = dirkinerig(q,qd,qdd,d,dc,7);
% Calculo de la restricci3n
RoD= Rn - lambdaDt*(wo+wT);
WDT = [0; -wo-wT;-RoD];
uDT = XDT' + AGT'*WDT;
% Se calcula las restricciones para el perfil del suelo.
pendiente= -1/5*sin(1/300*uDT(1)*pi)*pi*exp(-1/600*uDT(1))-1/10*cos(1/300*uDT(1)*pi)*exp(-
1/600*uDT(1));
Restr(3) = uDT(3)-(60*cos(uDT(1)*pi/300)*exp(-uDT(1)/600));
% Calculo del marco RD
alphaRT = q(33)-betaDt;
RDT= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaRT) sin(alphaRT);0 -sin(alphaRT) cos(alphaRT)];
RDT3 = RDT(3,:);
% Calculo del Jacobiano
W = AGT'*WDT;
JAC(3,:) = RDT3*(JACDT(1:3,:)-[0 -W(3) W(2); W(3) 0 -W(1); -W(2) W(1) 0]*JACDT(4:6,:));
% Marco YI, asociado con la rueda izquierda trasera
[XIT,AMI,JACIT,Vsens,OMsens,Asens,OMPsens] = dirkinerig(q,qd,qdd,d,dc,6);
RoI= Rn - lambdaI*(wo-wT);
WIT = [0; wo-wT;-RoI];
uIT = XIT' + AGT'*WIT;
% Se calcula las restricciones para el perfil del suelo.
pendiente= -1/5*sin(1/300*uIT(1)*pi)*pi*exp(-1/600*uIT(1))-1/10*cos(1/300*uIT(1)*pi)*exp(-
1/600*uIT(1));
Restr(4) = uIT(3)-(60*cos(uIT(1)*pi/300)*exp(-uIT(1)/600));
% Calculo del marco RD
alphaIT = q(33)+betaI;
% RIT= [1,0,0;0,cos(alphaIT) sin(alphaIT);0 -sin(alphaIT) cos(alphaIT)]*[cos(atan(pendiente))
0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0 cos(atan(pendiente))];
RIT= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaIT) sin(alphaIT);0 -sin(alphaIT) cos(alphaIT)];
RIT3 = RIT(3,:);
% Calculo del Jacobiano
W = AGT'*WIT;
JAC(4,:) = RIT3*(JACIT(1:3,:)-[0 -W(3) W(2); W(3) 0 -W(1); -W(2) W(1) 0]*JACIT(4:6,:));

```

6.3.1.5 Fu_user.m

En este programa se hace el calculo de las fuerzas de contacto.

```
function [frc,trq] = fu_user(frc,trq,q,qp,tsim);
global_def;
global RoDD RoID WDD WID FnAvDD FnAvGD AGD RoDT RoIT WDT WIT FnAvDT FnAvGT
AGT uDD uID uDT uIT;
%Se asignan valores a lambda(pendiente del perfil de la rueda) y el radio de
%la rueda Rw
lambdaId = 0.05 + 1/0.02*q(24);
lambdaDd = 0.05 - 1/0.02*q(24);
lambdaIdt = 0.05 + 1/0.02*q(30);
lambdaDdt = 0.05 - 1/0.02*q(30);
betaId = atan(lambdaId);
betaDd = atan(lambdaDd);
betaIdt = atan(lambdaIdt);
betaDdt = atan(lambdaDdt);
Rw = 0.10;
%Se llama a dirkinerig
[xAvDD,XAvDD,JAvDD,xpAvDD,omAvDD,xppAvDD,ompAvDD] =
dirkinerig(q,qp,qdd,d,zeros(1,34),4);
[xAvGD,XAvGD,JAvGD,xpAvGD,omAvGD,xppAvGD,ompAvGD] =
dirkinerig(q,qp,qdd,d,zeros(1,34),3);
[xAvDT,XAvDT,JAvDT,xpAvDT,omAvDT,xppAvDT,ompAvDT] =
dirkinerig(q,qp,qdd,d,zeros(1,34),7);
[xAvGT,XAvGT,JAvGT,xpAvGT,omAvGT,xppAvGT,ompAvGT] =
dirkinerig(q,qp,qdd,d,zeros(1,34),6);
pendiente= -1/5*sin(1/300*(q(1)+0.625)*pi)*pi*exp(-1/600*(q(1)+0.625))-
1/10*cos(1/300*(q(1)+0.625)*pi)*exp(-1/600*(q(1)+0.625));
alphaRD = q(27)-betaDd;
RAvDD= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaRD) sin(alphaRD);0 -sin(alphaRD) cos(alphaRD)];
alphaID = q(27)+betaId;
pendiente= -1/5*sin(1/300*(q(1)-0.625)*pi)*pi*exp(-1/600*(q(1)-0.625))-1/10*cos(1/300*(q(1)-
0.625)*pi)*exp(-1/600*(q(1)-0.625));
RAvGD= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaID) sin(alphaID);0 -sin(alphaID) cos(alphaID)];
alphaRT = q(33)-betaDdt;
RAvDT= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaRT) sin(alphaRT);0 -sin(alphaRT) cos(alphaRT)];
alphaIT = q(33)+betaIdt;
RAvGT= [cos(atan(pendiente)) 0 -sin(atan(pendiente)); 0,1,0;sin(atan(pendiente)) 0
cos(atan(pendiente))]*[1,0,0;0,cos(alphaIT) sin(alphaIT);0 -sin(alphaIT) cos(alphaIT)];
glissAvDD = [0; 0; 0];
glissAvGD = [0; 0; 0];
```

```

glissAvDT = [0; 0; 0];
glissAvGT = [0; 0; 0];
vAvDD = xpAvDD'+[0 -omAvDD(3) omAvDD(2); omAvDD(3) 0 -omAvDD(1); -omAvDD(2)
omAvDD(1) 0]*AGD*WDD;
vAvDD = RAvDD*vAvDD;
if ((xpAvDD(1) ~= 0))
    glissAvDD = [vAvDD(1)/xpAvDD(1); vAvDD(2)/xpAvDD(1); -
RAvDD(3,:)*omAvDD/xpAvDD(1)];
end
vAvGD = xpAvGD'+[0 -omAvGD(3) omAvGD(2); omAvGD(3) 0 -omAvGD(1); -omAvGD(2)
omAvGD(1) 0]*AGD*WID;
vAvGD = RAvGD*vAvGD;
if ((xpAvGD(1) ~= 0))
    glissAvGD = [vAvGD(1)/xpAvGD(1); vAvGD(2)/xpAvGD(1); -
RAvGD(3,:)*omAvGD/xpAvGD(1)];
end
vAvDT = xpAvDT'+[0 -omAvDT(3) omAvDT(2); omAvDT(3) 0 -omAvDT(1); -omAvDT(2)
omAvDT(1) 0]*AGT*WDT;
vAvDT = RAvDT*vAvDT;
if ((xpAvDT(1) ~= 0))
    glissAvDT = [vAvDT(1)/xpAvDT(1); vAvDT(2)/xpAvDT(1); -
RAvDT(3,:)*omAvDT/xpAvDT(1)];
end
vAvGT = xpAvGT'+[0 -omAvGT(3) omAvGT(2); omAvGT(3) 0 -omAvGT(1); -omAvGT(2)
omAvGT(1) 0]*AGT*WIT;
vAvGT = RAvGT*vAvGT;
if ((xpAvGT(1) ~= 0))
    glissAvGT = [vAvGT(1)/xpAvGT(1); vAvGT(2)/xpAvGT(1); -
RAvGT(3,:)*omAvGT/xpAvGT(1)];
end
%Se llama a creep que es un archivo creado para hacer el calculo de
%todas las fuerzas de contacto
FNAvDD = FnAvDD;
FAvDD = creep(glissAvDD,Rw, abs(FNAvDD));
FNAvGD = FnAvGD;
FAvGD = creep(glissAvGD,Rw, abs(FNAvGD));
FNAvDT = FnAvDT;
FAvDT = creep(glissAvDT,Rw, abs(FNAvDT));
FNAvGT = FnAvGT;
FAvGT = creep(glissAvGT,Rw, abs(FNAvGT));
%Se carga los valores a las fuerzas y torques generados por el contacto
frc(:,14) = frc(:,14) + XAvDD*RAvDD*[FAvDD(1);FAvDD(2); 0];

```

```

trq(:,14) = trq(:,14) + XAvDD*([0 -WDD(3) WDD(2); WDD(3) 0 -WDD(1); -WDD(2) WDD(1)
0]*RAvDD*[FAvDD(1);FAvDD(2); 0])+XAvDD*RAvDD*[0;0; FAvDD(3)];
frc(:,13) = frc(:,13) + XAvGD*RAvGD*[FAvGD(1);FAvGD(2); 0];
trq(:,13) = trq(:,13) + XAvGD*([0 -WID(3) WID(2); WID(3) 0 -WID(1); -WID(2) WID(1)
0]*RAvGD*[FAvGD(1);FAvGD(2); 0])+XAvGD*RAvGD*[0;0; FAvGD(3)];
frc(:,22) = frc(:,22) + XAvDT*RAvDT*[FAvDT(1);FAvDT(2); 0];
trq(:,22) = trq(:,22) + XAvDT*([0 -WDT(3) WDT(2); WDT(3) 0 -WDT(1); -WDT(2) WDT(1)
0]*RAvDT*[FAvDT(1);FAvDT(2); 0])+XAvDT*RAvDT*[0;0; FAvDT(3)];
frc(:,21) = frc(:,21) + XAvGT*RAvGT*[FAvGT(1);FAvGT(2); 0];
trq(:,21) = trq(:,21) + XAvGT*([0 -WIT(3) WIT(2); WIT(3) 0 -WIT(1); -WIT(2) WIT(1)
0]*RAvGT*[FAvGT(1);FAvGT(2); 0])+XAvGT*RAvGT*[0;0; FAvGT(3)];

```

6.3.1.6 *Contchas.par*

En este archivo se definen las variables independientes y dependientes para la simulación.

File name : contact.par

34 6 0 Acá se presenta el número de cuerpos y el número de grados de libertad. (ver 2.1.6.1)

1 24 30 5 13 21 Se definen los cuerpos independientes.

6.3.1.7 *Imprimir.m*

Imprimir es un programa muy útil debido a que genera un archivo con los resultados que se obtienen de la simulación.

```

function status=Imprimir(t,y,flag,varargin)
%Este archivo se encarga de imprimir los resultados que serán utilizados en
%la simulación grafica
global_def;
global FnAvDD FnAvGD FnAvDT FnAvGT;
contador = 0;
%Imprimimos el tiempo en la pantalla para saber en que tiempo de la
%simulación nos encontramos al momento de correrla.
t
%Imprimimos los resultados en el archivo de resultados.
if t == 0
    fprintf(FichRes,'% 12.8e ',[t(1), q]);
    fprintf(FichRes, '\n');
    fprintf(FichF,'% 12.8e ',[t(1), FnAvDD,FnAvGD,FnAvDT,FnAvGT]);
    fprintf(FichF, '\n');
end
if nargin < 3
if t-tprev > 0.001
    fprintf(FichRes,'% 12.8e ',[t(1), q]);
    fprintf(FichRes, '\n');

```

```

fprintf(FichF,'% 12.8e',[t(1), FnAvDD,FnAvGD,FnAvDT,FnAvGT]);
fprintf(FichF, '\n');
fprintf(FichVel, '% 12.8e',[t(1), qd]);
fprintf(FichVel, '\n');
tprev =t;
end
end
status = 0;

```

6.3.2 Otros archivos utilizados para la tesis

Además de los programas explicados anteriormente, se tiene otros programas que han sido generados automáticamente por Robotran. Estos no se los presenta debido a que son muy extensos y en ellos no se han realizado modificaciones por parte del usuario. También existen programas ya realizados como parte del paquete para la lectura de archivos de datos y realizar la implementación de una forma más simple.

Entre los programas utilizados se tienen los siguientes:

Dirdynaner.m	Presenta las ecuaciones dinámicas del sistema.
Dirkinerig.m	Presenta las ecuaciones cinemáticas.
Constr.m	Este archivo entrega las restricciones por lazo cerrado.
LoadData.m	Toma los datos numéricos de los archivos descritos en la sección 7.2
Creep.m	Calcula las fuerzas de contacto del modelo.

Bibliografía

- [1] POMBO, Joao y Jorge Ambrósio. *General Spatial Curve Joint for Rail Guided Vehicles*. Submitted to Multibody System Dynamics, 2003.
- [2] KECSKEMÉTHY, Andrés y Martin Tändl. *A Multi-Stage Approach for Finding Feasible Solutions in the Optimization of Trajectory and Banking of Spatial Tracks*. Madrid, Spain, 2005.
- [3] SASS, Laurent. *Symbolic Modeling of Electromechanical Multibody Systems*. PhD Thesis, Université Catholique de Louvain, 2004.
- [4] SASS, Laurent., J. McPhee, C. Schmitke, P Fisetete and C. Greiner. *A Comparison of Different Methods for Modeling Electromechanical Multibody Systems*. Submitted to Multibody System Dynamics, 2003.
- [5] PFEIFFER, F.. *Dynamics of Roller Coaster*. ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Long Beach, California, USA, 2005.
- [6] W. SCHIEHLEN. *Multibody Systems Dynamics: Roots and Perspectives*, University of Stuttgart, D-70550 Stuttgart, Germany, 1997.
- [7] FISETTE, P. and J.C SAMIN. *A new wheel/rail contact model for independent wheels*. Archive of Applied mechanics, Springer-Verlag, vol. 64, pp. 180-191, 1994.
- [8] KALKER, J. J.. *A strip theory for rolling with slip and spin*. Proceedings, Kon. Ned. Akad. Wet. , Amsterdam, B70, pp. 10-67.
- [9] KALKER, J. J. *On the rolling contact of two elastic bodies in presence of dry friction*. Doctoral Thesis, Technical University of Delft, The Netherlands, 1967.
- [10] FISETTE, Paul. *Symbolic Modeling of Multibody Systems*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands. 2003.
- [11] Enciclopedia Británica en línea. ["historia de las montañas rusas"<](http://www.britannica.com/coasters/)
<[http://www.britannica.com/coasters/>](http://www.britannica.com/coasters/)
- [12] MERIAM, J. L. Y L. G. Kraige. *Mecánica para ingenieros. Dinámica*, Editorial Reverté, Barcelona, 1998.-
- [13] S. NAKAMURA. *"Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab"*. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.,
- [14] [Coaster Grotto homepage. Mayo 2007.](http://www.coastergrotto.com/photo.jsp?pic=75c04.jpg)
<<http://www.coastergrotto.com/photo.jsp?pic=75c04.jpg>>.
- [15] Newton, I., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Royal Society, London, 1687.
- [16] Euler, L., *Nova methods motum corporum rigidarum determinandi*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 20, 1776, 208–238.
See also Euler, L., *Opera Omnia*, Series II, Vol. 9, 99–125.
- [17] D' Alembert, J., *Traité de Dynamique*, Paris, 1743.

Con formato

Con formato

Con formato

Con formato

Con formato

Con formato

- [18] Lagrange, J.-L., *Mécanique Analytique*, L'Académie Royal des Sciences, Paris, 1788.
- [19] FISETTE, Paul. *Robotran 6.3 – FSA. Documento electrónico del Manual de Robotran*. Bélgica, Marzo 2004. ~~Manual de Robotran~~