

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

**Métricas de agujeros negros cerca del horizonte de
sucesos**

Daniel Alejandro Bustamante López

Matemáticas

Trabajo de fin de carrera presentado como requisito para la obtención del título
de Licenciado en Matemáticas

Quito, 24 de mayo de 2021

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

**HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE FIN DE
CARRERA**

Métricas de agujeros negros cerca del horizonte

Daniel Alejandro Bustamante López

Nombre del profesor, Título académico: Oihane F. Blanco, Ph. D.

Quito, 24 de mayo de 2021

© DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombres y apellidos:	Daniel Alejandro Bustamante López
Código:	00324911
Cédula de Identidad:	1720440120
Lugar y fecha:	Quito, 24 de mayo de 2021

ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETHeses>.

UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETHeses>.

RESUMEN

Se estudia la métrica cerca del horizonte de sucesos de los cuatro tipos de agujeros negros clásicos: Schwarzschild (sin momento angular ni carga eléctrica), Reissner-Nordström (sin momento angular, pero cargado eléctricamente), Kerr (sin carga eléctrica, pero con momento angular), y Kerr–Newman (general, con momento angular y carga eléctrica). Analizando las simetrías de estas métricas límite, mostramos que muchas de sus propiedades geométricas son similares a espacios de Rindler y de anti-de Sitter.

El capítulo 1 sirve como introducción que permitirá abordar la teoría de la relatividad (especial y general) de Einstein de una forma matemáticamente rigurosa, incluyendo conceptos como variedades topológicas o diferenciales y tensores métricos hasta una breve discusión de cálculo tensorial.

En los capítulos 2 y 3, se examinan los espacios de Rindler y de anti-de Sitter, respectivamente, cuyas propiedades geométricas y simetrías se manifestarán luego al estudiar el límite cerca del horizonte de eventos de los agujeros negros clásicos.

Finalmente, en el capítulo 4, se hace este cálculo del límite de la métrica cerca del horizonte. El respectivo cálculo para un agujero negro de Schwarzschild será útil en aplicaciones como el estudio de la termodinámica de agujeros negros. Una generalización al final del capítulo permitirá resumir los resultados obtenidos para los agujeros negros de Reissner-Nordström, Kerr y Kerr–Newman.

Palabras clave: Agujero negro, Límite cerca del horizonte, Coordenadas de Rindler, Espacio anti-de Sitter.

ABSTRACT

The metric near the event horizon of the four classic black hole types is studied: Schwarzschild (without angular momentum or electric charge), Reissner-Nordström (without angular momentum, but electrically charged), Kerr (without electric charge, but with angular momentum), and Kerr-Newman (general, with angular momentum and electric charge). Analyzing the symmetries of these limit metrics, we show that many of their geometric properties are similar to Rindler and anti-de Sitter spaces.

Chapter 1 serves as an introduction that will allow to approach Einstein's (special and general) theory of relativity in a mathematically rigorous way, including concepts such as topological or differential manifolds and metric tensors until a brief discussion of tensor calculus.

In Chapters 2 and 3, we examine the Rindler and anti-de Sitter spaces, respectively, whose geometric properties and symmetries will later become apparent by studying the limit near the event horizon of classical black holes.

Finally, in Chapter 4, we do this calculation of the limit of the metric near the horizon. The respective calculation for a Schwarzschild black hole will be useful in applications such as the study of black hole thermodynamics. A generalization at the end of the chapter will allow us to summarize the results obtained for the Reissner-Nordström, Kerr and Kerr-Newman black holes.

Keywords: Black hole, Near-horizon metric, Rindler coordinates, Anti-de Sitter space.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia.

Índice

1. Introducción	13
1.1. Variedades diferenciales	13
1.2. Cálculo tensorial en variedades diferenciales	27
1.3. Relatividad especial	41
1.3.1. Transformaciones de Lorentz	41
1.3.2. Diagramas de espacio-tiempo	48
1.3.3. Intervalo invariante	51
1.3.4. Relatividad de la simultaneidad	53
1.3.5. Dilatación del tiempo	54
1.3.6. Contracción de la longitud	55
1.4. Relatividad general	56
1.5. Agujeros negros	57
1.6. Grupos de isometría	58
2. Espacio de Rindler	63
2.1. Paradoja de la contracción de la longitud: introducción a la aceleración en relatividad especial	63
2.2. Coordenadas de Rindler	67
2.3. Una propiedad paradójica	71
2.4. Horizonte de Rindler	71
3. Espacio anti-de Sitter	72

	9
3.1. Espacio-tiempo AdS en física	74
4. Métricas cerca del horizonte	77
4.1. Métrica de Schwarzschild	77
4.1.1. Cerca del horizonte de eventos	79
4.1.2. Termodinámica de agujeros negros de Schwarzschild	81
4.2. Métrica de Reissner–Nordström	84
4.2.1. Cerca del horizonte de eventos de un agujero negro extremo	86
4.3. Métrica de Kerr	86
4.3.1. Cerca del horizonte de eventos de un agujero negro extremo	89
4.4. Métrica de Kerr–Newman	91
4.4.1. Cerca del horizonte de eventos de un agujero negro extremo	92
4.5. Generalización	93
5. Conclusiones	97
6. Trabajo Futuro	97
7. Referencias	98

Índice de figuras

1.	Dos cartas en una variedad A y sus respectivos mapeos de transición.	16
2.	Familia de curvas con puntos terminales comunes.	34
3.	El sistema de coordenadas (x', y', z') está en movimiento con velocidad constante v en relación con el sistema (x, y, z)	42
4.	Sistema de referencia S con los conos de luz en blanco.	49
5.	Sistema de referencia S y S' con la cuadrícula de S	50
6.	Sistema de referencia S y S' con la cuadrícula de S'	51
7.	Relatividad de la simultaneidad evidenciada en un diagrama de espacio-tiempo. Los eventos A y B son simultáneos en S . Sin embargo, en S' , B ocurre antes que A ($t'_B < t'_A$).	54
8.	Dilatación del tiempo evidenciada en un diagrama de espacio-tiempo. Los eventos A y B ocurren en la misma posición en S' . Por la invariancia del intervalo espacio-temporal, $c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$. Recuérdese que la pendiente del segmento $c \Delta t'$ es tal que $\frac{\Delta x}{c \Delta t} = \beta$. De esta manera, $c^2 \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 - \beta^2 c^2 \Delta t^2 = \gamma^{-2} c^2 \Delta t^2 \implies \Delta t = \gamma \Delta t' \implies \Delta t > \Delta t'$, porque $\gamma > 1$	55
9.	Contracción de la longitud evidenciada en un diagrama de espacio-tiempo. Por la invariancia del intervalo espacio-temporal, $\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2$. La pendiente del segmento $\Delta x'$ es $\frac{c \Delta t}{\Delta x} = \beta$. Así, $\Delta x'^2 = \Delta x^2 - \beta^2 \Delta x^2 = \gamma^{-2} \Delta x^2 \implies \Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \implies \Delta x' < \Delta x$	56
10.	Arriba: Secuencia de cuatro observaciones realizadas por A a intervalos iguales de tiempo t . Abajo: Observación realizada por B en un instante particular t'	64

11. Gráfico de Rindler, trazado en un diagrama de Minkowski. (cT, X) son las coordenadas del observador inercial en el espacio de Minkowski; (ct, x) son las coordenadas del observador de Rindler. Las líneas entrecortadas son los horizontes de Rindler. 70
12. Espacio anti-de Sitter (1,1) embebido en el espacio plano (1,2). Los ejes ct_1 y ct_2 se encuentran en el plano de simetría rotacional y el eje x_1 es normal a ese plano. . . 73
13. Diferencia entre la coordenada original r y la nueva coordenada r 80
14. Ubicación de los horizontes de eventos y ergosfera del espacio-tiempo de Kerr. La superficie exterior de la ergosfera se llama superficie estática o límite estático; esto se debe a que las líneas de universo cambian de ser de tipo temporal fuera del límite estático a ser de tipo espacial dentro de él. 88

Índice de cuadros

1. Tipos de agujeros negros.	58
2. Grupos de simetría.	61

1. Introducción

1.1. Variedades diferenciales

Definición 1.1. Sea A un conjunto no vacío y τ un conjunto de subconjuntos de A . Se dice que τ es una **topología** sobre A si

- A y el conjunto vacío \emptyset están en τ .
- La unión de un número arbitrario de conjuntos en τ pertenece a τ .
- La intersección de dos conjuntos cualesquiera en τ pertenece a τ .

La pareja (A, τ) se llama un **espacio topológico**. Los miembros de τ se llaman **conjuntos abiertos**. Un subconjunto C de A se llama **conjunto cerrado** en (A, τ) si su complemento en A , $A \setminus C$, es un conjunto abierto en (A, τ) .

Definición 1.2. Sea (A, τ) un espacio topológico. Una colección \mathfrak{B} de conjuntos abiertos de A se llama una **base** para la topología τ si todo conjunto abierto es la unión de miembros de \mathfrak{B} .

Definición 1.3. Sea A un conjunto no vacío y d una función de valor real definido en $A \times A$ tal que, para $x, y, z \in A$, se cumple que

- $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Entonces se dice que d es una **métrica** en A . (A, d) se llama **espacio métrico** y $d(x, y)$ se conoce como la **distancia** entre x y y .

La **distancia euclidiana** d_e entre dos puntos en el espacio euclidiano de n dimensiones \mathbb{R}^n es la longitud de un segmento de línea entre los dos puntos. d_e es un ejemplo de métrica.

Definición 1.4. Sea (A, d) un espacio métrico y r un número real positivo. La **bola abierta** centrada en $a \in A$ es el conjunto

$$B_r(a) = \{x \in A : d(a, x) < r\}.$$

En cualquier espacio métrico, las bolas abiertas forman una base para una topología en ese espacio. Por ejemplo, el espacio métrico (\mathbb{R}^n, d_e) es también un espacio topológico, la **topología euclidiana**, donde los conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n están dados por uniones (arbitrarias) de las bolas abiertas $B_r(a)$ definidas, en este caso, como $B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : d_e(a, x) < r\}$.

Definición 1.5. Un **homeomorfismo** es una función continua entre espacios topológicos que tiene una función inversa continua. Dos espacios con un homeomorfismo entre ellos se denominan **homeomorfos** y, desde un punto de vista topológico, son iguales.

Definición 1.6. Una **variedad topológica** n -dimensional es un espacio topológico con la propiedad de que cada punto tiene una vecindad que es homeomorfa a un conjunto abierto de \mathbb{R}^n (con la topología euclidiana).

Definición 1.7. Una **carta** para una variedad topológica A (también llamada carta de coordenadas, parche de coordenadas, mapa de coordenadas o marco local) es un homeomorfismo φ de un conjunto abierto U de A a un conjunto abierto de un espacio euclidiano. Esta carta se denota tradicionalmente como el par ordenado (U, φ) .

Definición 1.8. Un **atlas** para una variedad topológica A es una familia indexada $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ de cartas en A que cubre A , es decir,

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = A.$$

Si el codominio de cada carta es un subconjunto del espacio euclidiano de n dimensiones, entonces se dice que A es una variedad de n dimensiones.

Definición 1.9. Supongamos que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son dos cartas para una variedad topológica A tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. El **mapeo de transición**

$$\tau_{\alpha,\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es el mapeo definido por

$$\tau_{\alpha,\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}.$$

Tenga en cuenta que, dado que φ_α y φ_β son ambos homeomorfismos, el mapeo de transición $\tau_{\alpha,\beta}$ también es un homeomorfismo. Un mapeo de transición proporciona una forma de comparar dos cartas de un atlas. Para hacer esta comparación, consideramos la composición de una carta con la inversa de la otra carta. Esta composición no está bien definida a menos que restrinjamos ambas cartas a la intersección de sus dominios de definición. Por ello requerimos $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

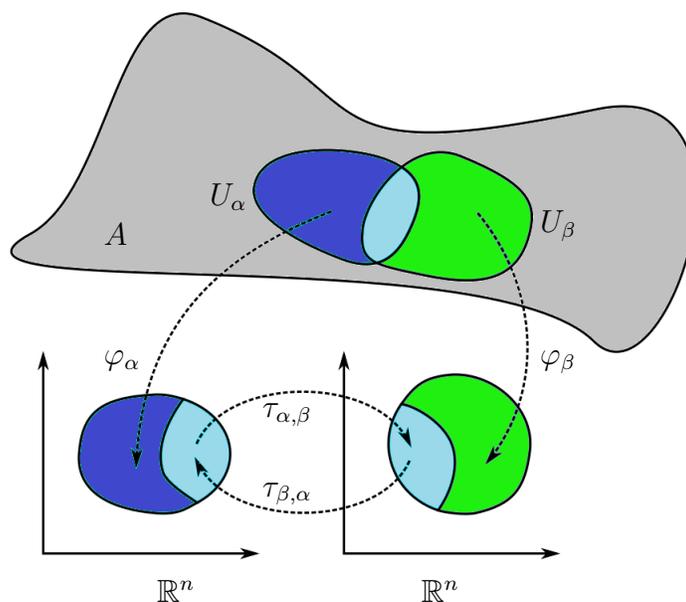


Figura 1: Dos cartas en una variedad A y sus respectivos mapeos de transición.

Definición 1.10. Supongamos que tenemos una variedad topológica n -dimensional A y un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$, con $\varphi_\alpha : A \supseteq U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$. Tomemos dos cartas cualesquiera $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ y $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$ en el atlas. La intersección de los dominios de estas dos funciones es $U_{ij} = U_i \cap U_j$, y la imagen de este conjunto por las dos cartas es $V_{ij} = \varphi_i(U_{ij})$ y $V_{ji} = \varphi_j(U_{ij})$, respectivamente. El mapeo de transición entre las dos cartas es el mapeo entre las dos imágenes de esta intersección: $\tau_{i,j} : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$, $\tau_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Las dos cartas φ_i y φ_j son **C^k -compatibles** si V_{ij} y V_{ji} son conjuntos abiertos, y si los mapeos de transición $\tau_{i,j}$ y $\tau_{j,i}$ tienen derivadas parciales continuas de orden k .

Una familia de cartas C^k -compatibles que cubre toda la variedad es un C^k -atlas. Si $k = 0$, sólo requerimos que los mapeos de transición sean continuos, por tanto, un C^0 -atlas es simplemente otra forma de definir una variedad topológica. Si $k = \infty$, las derivadas de todos los órdenes deben ser continuas. Generalmente, un **atlas diferenciable** se referirá a un C^k -atlas con $k \geq 1$.

Definición 1.11. Dado un atlas diferenciable en un espacio topológico, se dice que una carta es **compatible** en relación con el atlas dado, si la inclusión de la carta en el atlas da como resultado un atlas diferenciable.

Un atlas diferenciable determina un **atlas diferenciable máximo**, que consta de todas las cartas que son compatibles en relación con el atlas dado.

Definición 1.12. Una **variedad diferenciable** es una variedad topológica con un atlas diferenciable máximo.

Definición 1.13. Dos funciones tienen un **contacto de orden k** si, en un punto, tienen el mismo valor y k derivadas iguales.

Definición 1.14. Se dice que una relación binaria \sim en un conjunto X es una **relación de equivalencia** si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva. Es decir, para todo $a, b, c \in X$:

- **Reflexividad.** $a \sim a$.
- **Simetría.** $a \sim b$ si y sólo si $b \sim a$.
- **Transitividad.** Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.

La **clase de equivalencia** de a bajo \sim , denotada $[a]$, es el conjunto $[a] = \{x \in X; x \sim a\}$.

Definición 1.15. Un **vector tangente** en el punto p de una variedad diferenciable M es una clase de equivalencia de curvas diferenciables γ con $\gamma(0) = p$, con la relación de equivalencia del contacto de primer orden entre las curvas. Es decir,

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \left. \frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma_1(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma_2(t) \right|_{t=0}$$

en cada carta de coordenadas φ . Por tanto, las clases de equivalencia son curvas a través de p con un vector de velocidad prescrito en p . La colección de todos los vectores tangentes en p forma un espacio vectorial: el **espacio tangente** a M en p , denominado $T_p M$.

Definición 1.16. El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B , denotado $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde a está en A y b está en B :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

A y B se llaman **factores** del producto cartesiano $A \times B$.

Definición 1.17. La j -ésima **proyección** p_j es un mapeo que toma un elemento $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ del producto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n$ y lo envía a $p_j(\mathbf{x}) = x_j$.

Definición 1.18. Sea I un conjunto de índices no vacío y para cada índice $i \in I$, sea X_i un espacio topológico (con topología τ_i). Sea, además, $X := \prod_{i \in I} X_i$ el producto cartesiano de los conjuntos X_i , y denótense las proyecciones por $p_i : X \rightarrow X_i$. La **topología del producto** (o topología de Tychonoff) en X se define como la topología con la menor cantidad de conjuntos abiertos para la cual todas las proyecciones p_i son continuas. El producto cartesiano X con la topología del producto se llama **espacio producto**.

El producto cartesiano de variedades es también una variedad. La dimensión del producto de variedades es la suma de las dimensiones de sus factores. Su topología es la topología del producto, y un producto cartesiano de cartas es una carta para el producto de variedades. Por tanto, se puede construir un atlas para el producto utilizando atlas para sus factores.

Desde ahora, supongamos que M es una variedad diferenciable de dimensión n . En cada punto $p \in M$ existe un espacio vectorial $T_p M$ de vectores tangentes a M en p .

Definición 1.19. Un **tensor métrico** en el punto p de M es una función $g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p)$ que toma como entradas un par de vectores tangentes \mathbf{X}_p y \mathbf{Y}_p de M en p , y produce como salida un número real (un escalar), de modo que se satisfacen las siguientes condiciones:

- **g_p es bilineal.** Una función de dos argumentos vectoriales es bilineal si es lineal en cada argumento. Por tanto, si $\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p$ y \mathbf{Z}_p son tres vectores tangentes en p , y a y b son números reales, entonces

$$g_p(a\mathbf{X}_p + b\mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p) = ag_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Z}_p) + bg_p(\mathbf{Y}_p, \mathbf{Z}_p),$$

$$g_p(\mathbf{Z}_p, a\mathbf{X}_p + b\mathbf{Y}_p) = ag_p(\mathbf{Z}_p, \mathbf{X}_p) + bg_p(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Y}_p).$$

- **g_p es simétrico.** Una función de dos argumentos vectoriales es simétrica siempre que, para todos los vectores \mathbf{X}_p y \mathbf{Y}_p , $g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p) = g_p(\mathbf{Y}_p, \mathbf{X}_p)$.
- **g_p es no degenerado.** Una función bilineal es no degenerada siempre que, para cada vector tangente $\mathbf{X}_p \neq \mathbf{0}$, la función

$$\mathbf{Y}_p \mapsto g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p),$$

obtenida manteniendo \mathbf{X}_p constante y permitiendo que \mathbf{Y}_p varíe, no es idénticamente cero. Es decir, para cada $\mathbf{X}_p \neq \mathbf{0}$, existe un \mathbf{Y}_p tal que $g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p) \neq 0$.

Definición 1.20. Un **campo de tensor métrico** g en M asigna a cada punto $p \in M$ un tensor métrico g_p en el espacio tangente en p de una manera que varía suavemente con p . Más precisamente, dado cualquier subconjunto abierto U de la variedad M y campos vectoriales diferenciables \mathbf{X} y \mathbf{Y} cualesquiera en U , la función real

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(p) = g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p)$$

es una función diferenciable de p .

La definición del tensor métrico generaliza muchas de las propiedades familiares del **producto escalar** o **producto interno** de vectores en el espacio euclidiano. De la misma manera que un producto escalar, los tensores métricos se pueden utilizar para definir la **longitud** (o magnitud) de un vector tangente \mathbf{X} como

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{|g(\mathbf{X}, \mathbf{X})|}. \quad (1.1)$$

Definición 1.21. Una **variedad pseudo-riemanniana** (M, g) es una variedad diferenciable M equipada con un tensor métrico g (entendido como una función real bilineal, simétrica, no degenerada y diferenciable en todas partes).

Un sistema de n funciones de valor real (x^1, \dots, x^n) , que da una carta local de coordenadas en un conjunto abierto U de M , determina una base \mathfrak{B} de campos vectoriales en U :

$$\mathfrak{B} = \left\{ \mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \mathbf{X}_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}.$$

Definición 1.22. Los **componentes** de la métrica g relativos a la base \mathfrak{B} son funciones de valor real dadas por

$$g_{ij}[\mathfrak{B}] = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Las n^2 funciones $g_{ij}[\mathfrak{B}]$ forman las entradas de una matriz simétrica $n \times n$, $G[\mathfrak{B}]$. Al ser simétrica, G tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ componentes independientes.

En relación con un nuevo sistema de coordenadas locales, dígase

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

el tensor métrico determinará una matriz diferente de coeficientes,

$$g_{ij}[\mathfrak{B}'] = g \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right).$$

Este nuevo sistema de funciones se relaciona con el original $g_{ij}[\mathfrak{B}]$ mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

de manera que

$$g_{ij}[\mathfrak{B}'] = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} g_{kl}[\mathfrak{B}] \frac{\partial x^l}{\partial y^j},$$

o, en términos de matrices,

$$G[\mathfrak{B}'] = ((Dy)^{-1})^T G[\mathfrak{B}] (Dy)^{-1},$$

donde Dy denota la matriz jacobiana del cambio de coordenadas.

Definición 1.23. La **signatura** (p, q) de un tensor métrico g es el número (contado con multiplicidad) de valores propios positivos y negativos, respectivamente, de $G[\mathfrak{B}]$, la matriz del tensor métrico con respecto a la base \mathfrak{B} .

Si, en la definición de tensor métrico, se suprime la propiedad de que es no degenerado, entonces $G[\mathfrak{B}]$ podría tener valores propios nulos. En tal caso, la signatura del tensor métrico se representa como (p, q, r) , donde r es el número (contado con multiplicidad) de valores propios nulos.

Según la ley de inercia de Sylvester, los números en la signatura de un tensor métrico no dependen de la elección de la base [1]. Se dice que la signatura es *indefinida* o *mixta* si tanto p como q son distintos de cero. Una variedad de n dimensiones se llama **riemanniana** si tiene signatura definida positiva $(n, 0)$ y se llama **lorentziana** cuando tiene signatura $(n - 1, 1)$ o $(1, n - 1)$.

Definición 1.24. En una variedad lorentziana con signatura $(n - 1, 1)$, un vector \mathbf{V} en el punto p puede clasificarse en tres clases según el signo de $g_p(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. Específicamente, \mathbf{V} es

(I) **de tipo temporal** si $g_p(\mathbf{V}, \mathbf{V}) < 0$,

(II) **nulo o de tipo luminoso** si $g_p(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0$ y $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$, o

(III) **de tipo espacial** si $g_p(\mathbf{V}, \mathbf{V}) > 0$

(los signos de desigualdad se invierten cuando la signatura es $(1, n - 1)$).

\mathbf{V} se llama **causal** si es temporal o nulo.

Si $\mathbf{U} \in T_pM$ es temporal, entonces se puede demostrar que $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \neq 0$ para todos los vectores causales \mathbf{V} [2]. Este hecho permite definir una relación de equivalencia en el conjunto de vectores temporales de T_pM tomando $\mathbf{U} \sim \mathbf{V}$ si $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) < 0$. Además, si $\mathbf{N} \in T_pM$ es nulo y $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_pM$ son temporales, entonces $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{N})$ y $g_p(\mathbf{V}, \mathbf{N})$ tienen el mismo signo si $\mathbf{U} \sim \mathbf{V}$. En consecuencia, la fijación de una clase de equivalencia de vectores de tipo temporal en T_pM define una **orientación temporal** en el conjunto de vectores causales de T_pM . Específicamente, si $\mathbf{U} \in T_pM$ es un representante de la clase de equivalencia elegida y $\mathbf{V} \in T_pM$ es causal, entonces \mathbf{V} pertenece al **cono causal futuro (cono causal pasado)** si $g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) < 0$ ($g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) > 0$). Entonces hay dos clases de equivalencia, una *dirigida hacia el futuro* y otra *dirigida hacia el pasado*. Físicamente, esta designación de las dos clases de vectores temporales corresponde a la elección de una flecha de tiempo (dirección unidireccional del tiempo) en un punto. Estas designaciones pueden extenderse a vectores nulos en un punto por continuidad.

Definición 1.25. Una variedad lorentziana es **orientable en el tiempo** si se puede hacer una designación continua de vectores dirigidos hacia el futuro y dirigidos hacia el pasado para vectores causales en toda la variedad.

Definición 1.26. Sea (A, τ) un espacio topológico. Entonces se dice que es **conexo** si los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son A y \emptyset .

Un espacio conexo no se puede representar como la unión de dos o más subconjuntos abiertos no vacíos disjuntos.

Definición 1.27. Un **espacio-tiempo** es una variedad lorentziana conexa y orientable en el tiempo.

Definición 1.28. Asociada a cualquier tensor métrico g_p está la **forma cuadrática** q_p definida en cada espacio tangente por

$$q_p(\mathbf{X}_p) = g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{X}_p); \mathbf{X}_p \in T_p M. \quad (1.2)$$

Por la ley de inercia de Sylvester, se puede elegir localmente una base de vectores tangentes \mathbf{X}_i de modo que la forma cuadrática se diagonaliza de la siguiente manera en el punto $m \in M$:

$$q_m \left(\sum_i \xi^i \mathbf{X}_i \right) = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \cdots + (\xi^p)^2 - (\xi^{p+1})^2 - \cdots - (\xi^n)^2, \quad (1.3)$$

para algún p entre 1 y n . Dos expresiones cualesquiera de q (en el mismo punto $m \in M$) tendrán el mismo número p de signos positivos. La signatura de g es el par de números enteros $(p, n - p)$, lo que significa que hay p signos positivos y $n - p$ signos negativos en cualquier expresión de este tipo (ver Definición 1.23).

Ejemplo 1. Sean (x^1, \dots, x^n) las coordenadas estándar de \mathbb{R}^n . Defínase $g_p : T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

En relación con las coordenadas estándar, $g_{ij} = \delta_{ij}$, es decir, 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Entonces \mathbb{R}^n con esta estructura métrica tiene signatura $(n, 0)$ y es una variedad riemanniana.

Ejemplo 2. El espacio de Minkowski es una combinación de tiempo t y el espacio euclidiano tridimensional (x^1, x^2, x^3) en una variedad de cuatro dimensiones $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x^1, x^2, x^3)$, donde c es la rapidez de la luz en el vacío, equipada con el tensor métrico definido por

$$\left(\sum_{i=0}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=0}^3 b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \mapsto -a_0 b_0 + \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

En este caso, los componentes no nulos del tensor métrico son $g_{00} = -1$ y $g_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3$. Así, la signatura del espacio de Minkowski es $(3, 1)$ y es una variedad lorentziana. Nótese que se podría haber definido un tensor métrico equivalente dado por

$$\left(\sum_{i=0}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=0}^3 b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \mapsto a_0 b_0 - \sum_{i=1}^3 a_i b_i,$$

donde el espacio de Minkowski asume la signatura (1,3). Este espacio a menudo se denota con $\mathbb{R}^{3,1}$ o $\mathbb{R}^{1,3}$ para enfatizar la signatura elegida.

En resumen,

- Si g tiene signatura $(n, 0)$, entonces g es una métrica de Riemann y M se llama una variedad de Riemann. De lo contrario, g es una métrica pseudo-riemanniana, y M se llama una variedad pseudo-riemanniana.
- Si M es tetradimensional con signatura $(1, 3)$ o $(3, 1)$, entonces la métrica se llama lorentziana. De manera más general, un tensor métrico en la dimensión n que no sea 4 con signatura $(1, n - 1)$ o $(n - 1, 1)$ también se llama lorentziana. Adicionalmente, si M es conexa y orientable en el tiempo, entonces M es un espacio-tiempo.

1.2. Cálculo tensorial en variedades diferenciales

Considérese un punto p con coordenadas x^r y un punto vecino q con coordenadas $x^r + dx^r$. Estos dos puntos definen un desplazamiento infinitesimal o vector $\vec{p}\vec{q}$; para el sistema de coordenadas dado, este vector está descrito por las cantidades dx^r , las cuales podrían denominarse los *componentes* de ese vector. Pensemos en los mismos puntos, pero utilicemos un sistema de coordenadas diferente x'^r . En este último sistema de coordenadas, los componentes del vector $\vec{p}\vec{q}$ son dx'^r ; estas cantidades están conectadas con los componentes del sistema de coordenadas x^r mediante la ecuación

$$dx'^r = \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} dx^s, \quad (1.4)$$

donde se ha utilizado el **convenio de suma de Einstein**, por el cual, si un índice aparece dos veces en un solo término y no se define de otra manera, se implica la suma de ese término sobre todos los valores del índice. Es decir, con este convenio, $\frac{\partial x'^r}{\partial x^s} dx^s$ es la forma abreviada de escribir $\sum_s \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} dx^s$.

Definición 1.29. Un conjunto de cantidades T^r , asociadas con un punto p de una variedad diferencial, se llaman los componentes de un **vector contravariante** si se transforman por un cambio de coordenadas de acuerdo con la ecuación

$$T'^r = T^s \frac{\partial x'^r}{\partial x^s}, \quad (1.5)$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en p .

Por tanto, un desplazamiento infinitesimal es un ejemplo de un vector contravariante.

Definición 1.30. Un conjunto de cantidades T^{rs} se llaman los componentes de un **tensor contravariante de segundo orden** si se transforman por un cambio de coordenadas de acuerdo con la ecuación

$$T'^{rs} = T^{mn} \frac{\partial x'^r}{\partial x^m} \frac{\partial x'^s}{\partial x^n}. \quad (1.6)$$

Si U^r y V^r son dos vectores contravariantes, entonces el producto $U^r V^s$ es un tensor contravariante de segundo orden.

Si una cantidad se transforma de acuerdo con la relación $T' = T$ bajo un cambio de coordena-

das, entonces esa cantidad se llama **invariante**. Sea ϕ una función invariante de las coordenadas.

Entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^r} = \frac{\partial \phi}{\partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial x'^r}. \quad (1.7)$$

Esta ley de transformación se asemeja a (1.5), pero las derivadas parciales que involucran los dos sistemas de coordenadas están al revés. Así como el desplazamiento infinitesimal fue el prototipo del vector contravariante, la derivada parcial de un invariante es el prototipo del vector *covariante*.

Definición 1.31. Un conjunto de cantidades T_r se llaman los componentes de un **vector covariante** si se transforman de acuerdo con la ecuación

$$T'_r = T_s \frac{\partial x^s}{\partial x'^r}. \quad (1.8)$$

Definición 1.32. Un conjunto de cantidades T_{rs} se llaman los componentes de un **tensor covariante de segundo orden** si se transforman de acuerdo con la ecuación

$$T'_{rs} = T_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial x'^r} \frac{\partial x^n}{\partial x'^s}. \quad (1.9)$$

Habiendo establecido las definiciones de los tensores contravariante y covariante, definir tensores **mixtos** es sencillo. Asumamos que un conjunto de cantidades T^r_{st} se transforman de acuerdo con

$$T'^r_{st} = T^m_{np} \frac{\partial x'^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^t}. \quad (1.10)$$

Diríamos que éstos son los componentes de un tensor mixto de tercer orden, con un índice contravariante y dos índices covariantes.

Supongamos que (y^1, y^2, y^3) son las coordenadas rectangulares cartesianas. El cuadrado de la distancia entre puntos adyacentes es

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2. \quad (1.11)$$

Sea (x^1, x^2, x^3) otro sistema de coordenadas (por ejemplo, coordenadas cilíndricas o esféricas). Entonces las coordenadas y son funciones de las coordenadas x , y los diferenciales dy son funciones lineales de los diferenciales dx . Cuando sustituimos estas funciones lineales en (1.11), obtenemos

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n, \quad (1.12)$$

donde

$$g_{mn} = \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \frac{\partial y^1}{\partial x^n} + \frac{\partial y^2}{\partial x^m} \frac{\partial y^2}{\partial x^n} + \frac{\partial y^3}{\partial x^m} \frac{\partial y^3}{\partial x^n} \quad (1.13)$$

son los componentes de la métrica discutidos en la anterior sección.

En cálculo tensorial, la expresión diferencial $\Phi = g_{mn} dx^m dx^n$ se llama **forma fundamental**, **forma métrica** o simplemente **métrica** del espacio bajo consideración y es invariante a un cambio de coordenadas. Por ejemplo, la métrica del espacio de Minkowski con el sistema de coordenadas (ct, x, y, z) y signatura $(1, 3)$ es $c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Podríamos tratar de definir una *distancia* entre puntos adyacentes mediante la ecuación $ds^2 = \Phi$. No obstante, debemos admitir la posibili-

dad de que Φ no esté definido positivamente. Para ciertos desplazamientos dx^r , la forma Φ podría ser positiva, negativa o incluso nula. Con esta consideración, podríamos definir la **longitud** del desplazamiento dx^r como ds , donde $ds^2 = |\Phi|$.

Consideremos el determinante

$$g = |g_{mn}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

Aquí suponemos que g es diferente de cero. Sea Δ^{mn} el cofactor de g_{mn} en el determinante anterior, de manera que

$$g_{mr}\Delta^{ms} = g_{rm}\Delta^{sm} = \delta_r^s g, \quad (1.15)$$

donde δ_r^s es la delta de Kronecker; es 1 si $r = s$ y 0 en otro caso. Definamos g^{mn} mediante la ecuación

$$g^{mn} = \frac{\Delta^{mn}}{g}. \quad (1.16)$$

Se obtiene entonces que

$$g_{mr}g^{ms} = \delta_r^s, \quad (1.17)$$

y, similarmente,

$$g_{rm}g^{sm} = \delta_r^s. \quad (1.18)$$

Ya que g_{mn} es simétrico, g^{mn} es simétrico también.

Podemos introducir ahora el proceso conocido como *subida y bajada* de índices. Tomemos un tensor $T^m{}_{rs}$ y escribamos

$$S_{nrs} = g_{nm}T^m{}_{rs}. \quad (1.19)$$

El tensor S se ha generado del tensor T al bajar un índice. Podríamos subir un índice por medio de g^{mn} :

$$U^m{}_{rs} = g^{mn}S_{nrs}. \quad (1.20)$$

Es fácil ver que este tensor U es precisamente el tensor original T . Esto sugiere que, en el proceso de bajada o subida de índices, deberíamos retener la misma letra del tensor, es decir, deberíamos escribir (1.19) como

$$T_{nrs} = g_{nm}T^m{}_{rs}. \quad (1.21)$$

Supongamos que tenemos una curva con ecuaciones $x^r = x^r(u)$, donde u es un parámetro. Si escribimos $t^r = \frac{dx^r}{du}$, un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la curva es $dx^r = t^r(u)du$. La longitud de este desplazamiento es $ds = \sqrt{|g_{mn}t^mt^n|}du$. La longitud de la curva desde $u = u_1$ hasta $u = u_2$ es

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{|g_{mn}t^mt^n|}du. \quad (1.22)$$

A menos que estemos tratando con una curva nula, para la cual $s = 0$, podríamos tomar a s como el parámetro a lo largo de la curva. El vector finito $t^r = \frac{dx^r}{ds}$ tiene la misma dirección que el desplazamiento infinitesimal dx^r a lo largo de la curva, es decir, es un vector tangente. Además, su magnitud es la unidad, ya que $|g_{mn}dx^mdx^n| = ds^2$, de forma que $\left|g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right| = 1$. Por tanto,

$\frac{dx^r}{ds}$ es un vector unitario tangente a la curva.

Definición 1.33. Una **geodésica** es una curva cuya longitud tiene un valor estacionario respecto a variaciones arbitrariamente pequeñas de la curva, en las cuales los puntos terminales de la curva se mantienen fijos.

En la notación de cálculo de variaciones, una geodésica que une a los puntos A y B satisface la condición variacional

$$\delta \int_A^B ds = 0, \quad (1.23)$$

donde δX es la notación para representar la variación de la cantidad X .

Nuestro siguiente punto es encontrar las ecuaciones diferenciales de una geodésica. Considérense las ecuaciones

$$x^r = x^r(u, v). \quad (1.24)$$

Si fijamos v y dejamos que u varíe, obtenemos una curva. Entonces (1.24) representa una familia infinita de curvas, donde v es un valor constante a lo largo de cada curva.

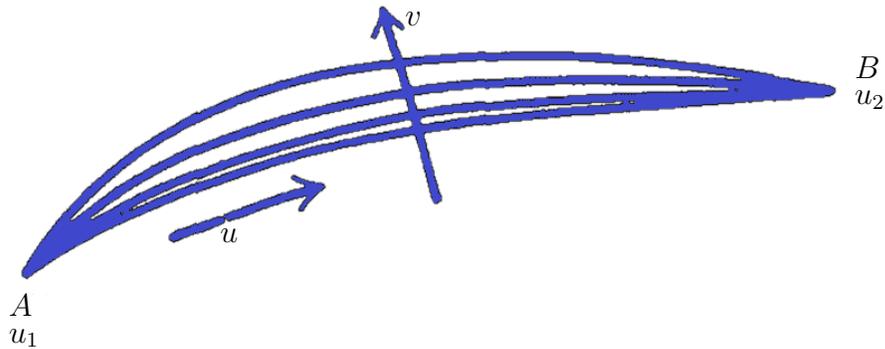


Figura 2: Familia de curvas con puntos terminales comunes.

No hay pérdida de generalidad en suponer que el parámetro u es elegido de manera que u tiene el mismo valor (u_1) para todas las curvas en A , y tiene el mismo valor (u_2) para todas las curvas en B . La longitud de cualquier curva de esta familia es

$$L = \int_A^B ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{|g_{mn}t^m t^n|} du, \quad (1.25)$$

donde $t^r = \frac{\partial x^r}{\partial u}$ es tangente a la curva. Por abreviar, escribamos $w = |g_{mn}t^m t^n|$. Entonces (1.25)

se lee

$$L = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{w} du. \quad (1.26)$$

La longitud es una función de v y su derivada es

$$\frac{dL}{dv} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{w} du. \quad (1.27)$$

Ahora

$$\frac{\partial}{\partial v} \sqrt{w} = \frac{\partial}{\partial x^r} \sqrt{w} \frac{\partial x^r}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial t^r} \sqrt{w} \frac{\partial t^r}{\partial v}. \quad (1.28)$$

Pero

$$\frac{\partial t^r}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial x^r}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial x^r}{\partial v}, \quad (1.29)$$

por tanto, si hacemos esta sustitución e integramos por partes, obtenemos que

$$\frac{dL}{dv} = \left[\frac{\partial}{\partial t^r} \sqrt{w} \frac{\partial x^r}{\partial v} \right]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t^r} \sqrt{w} - \frac{\partial}{\partial x^r} \sqrt{w} \right) \frac{\partial x^r}{\partial v} du. \quad (1.30)$$

También podríamos expresar este resultado en términos de infinitesimales. El cambio δL en la longitud cuando pasamos de una curva v a una curva vecina $v + \delta v$ es

$$\delta L = \frac{dL}{dv} \delta v = \left[\frac{\partial}{\partial t^r} \sqrt{w} \delta x^r \right]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{d}{du} \frac{\partial}{\partial t^r} \sqrt{w} - \frac{\partial}{\partial x^r} \sqrt{w} \right) \delta x^r du, \quad (1.31)$$

donde $\delta x^r = \frac{\partial x^r}{\partial v} \delta v$. Este diferencial es el incremento en x^r al pasar de un punto en la curva v a un punto en la curva $v + \delta v$ con el mismo valor de u . Ya que los puntos A y B son fijos, $\delta x^r = 0$ en ellos, de manera que

$$\delta L = - \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{d}{du} \frac{\partial}{\partial t^r} \sqrt{w} - \frac{\partial}{\partial x^r} \sqrt{w} \right) \delta x^r du. \quad (1.32)$$

Si la curva v es geodésica, la integral en (1.32) es nula para variaciones δx^r que son arbitrarias, excepto en los puntos terminales (donde son cero). Por tanto, las ecuaciones

$$\frac{d}{du} \frac{\partial}{\partial t^r} \sqrt{w} - \frac{\partial}{\partial x^r} \sqrt{w} = 0 \quad (1.33)$$

son satisfechas en todos los puntos de la geodésica. Éstas se llaman las **ecuaciones de Euler** de

este problema variacional. Hasta ahora, el parámetro u ha sido arbitrario. Elijamos que sea igual al parámetro de longitud de arco s a lo largo de la geodésica, de manera que $u = s$, $t^r = \frac{dx^r}{ds}$, $w = 1$, y $\frac{dw}{du} = 0$. Las ecuaciones diferenciales de una geodésica ahora se leen

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial t^r} - \frac{\partial w}{\partial x^r} = 0. \quad (1.34)$$

Para obtener una forma más explícita, sustituimos w . Esto da

$$\frac{d}{ds} (2g_{rm} t^m) - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} t^m t^n = 0, \quad (1.35)$$

o

$$g_{rm} \frac{dt^m}{ds} + \frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n} t^m t^n - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} t^m t^n = 0. \quad (1.36)$$

Mediante un arreglo simple de los índices repetidos, obtenemos idénticamente

$$g_{rm} \frac{dt^m}{ds} + \Gamma_{rmn} t^m t^n = 0, \quad (1.37)$$

donde se ha definido

$$\Gamma_{rmn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{rm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{rn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^r} \right). \quad (1.38)$$

Γ_{rmn} es llamado el **símbolo de Christoffel** de primera especie. El símbolo de Christoffel de segunda especie se define como

$$\Gamma_{mn}^r = g^{rs} \Gamma_{smn}. \quad (1.39)$$

Si multiplicamos a la ecuación (1.37) por g^{rs} , obtenemos otra forma para las ecuaciones de una

geodésica:

$$\frac{dt^r}{ds} + \Gamma_{mn}^r t^m t^n = 0. \quad (1.40)$$

En términos más explícitos, lo anterior se lee

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \Gamma_{mn}^r \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 0. \quad (1.41)$$

Hemos encontrado ahora las ecuaciones diferenciales de una geodésica. Podemos repetir el proceso para un parámetro arbitrario u y encontrar que

$$f^r \equiv \frac{d^2 x^r}{du^2} + \Gamma_{mn}^r \frac{dx^m}{du} \frac{dx^n}{du} \quad (1.42)$$

es un tensor contravariante.

Uno podría esperar que la derivada parcial de un tensor cualquiera es también un tensor. Sin embargo, ése no es el caso general. Añadir ciertos términos a la derivada permiten que la derivada en sí mismo sea un tensor.

Definición 1.34. La **derivada absoluta** $\frac{\delta T^r}{\delta u}$ de los componentes T^r de un vector contravariante se define como

$$\frac{\delta T^r}{\delta u} = \frac{dT^r}{du} + \Gamma_{mn}^r T^m \frac{dx^n}{du}. \quad (1.43)$$

La derivada absoluta de un vector contravariante es también un vector contravariante. A su vez,

la derivada absoluta de un vector covariante T_r se determina que es

$$\frac{\delta T_r}{\delta u} = \frac{dT_r}{du} - \Gamma_{rn}^m T_m \frac{dx^n}{du}, \quad (1.44)$$

la cual también es un vector covariante. Podemos construir las derivadas absolutas para toda clase de tensores. Por ejemplo, la derivada absoluta de T_s^r es

$$\frac{\delta T_s^r}{\delta u} = \frac{dT_s^r}{du} + \Gamma_{mn}^r T_s^m \frac{dx^n}{du} - \Gamma_{sn}^m T_m^r \frac{dx^n}{du}. \quad (1.45)$$

Para que la derivada absoluta de un tensor tenga significado, el tensor debe estar dado a lo largo de una curva. Si está dado para una región del espacio, podríamos definir la *derivada covariante* de un tensor de la siguiente manera. Para cualquier curva atravesando esa región en la que el vector está dado, tenemos que

$$\frac{\delta T^r}{\delta u} = \left(\frac{\partial T^r}{\partial x^n} + \Gamma_{mn}^r T^m \right) \frac{dx^n}{du}. \quad (1.46)$$

Definición 1.35. La **derivada covariante** de T^r se define como

$$\nabla_n T^r = T^r{}_{;n} = \frac{\partial T^r}{\partial x^n} + \Gamma_{mn}^r T^m. \quad (1.47)$$

Lo mismo puede aplicarse a otros tensores para obtener su derivada covariante.

Definición 1.36. Un espacio se llama **plano** si es posible encontrar un sistema de coordenadas para el cual la forma métrica es

$$\Phi = \epsilon_1(dx^1)^2 + \epsilon_2(dx^2)^2 + \cdots + \epsilon_n(dx^n)^2, \quad (1.48)$$

donde ϵ_i , $1 \leq i \leq n$, es $+1$ o -1 .

Un espacio que no es plano se llama **curvo**.

Nuestra siguiente tarea es desarrollar un test para decidir cuando un espacio es plano o curvo.

Atacamos este problema mediante las fórmulas obtenidas para las derivadas covariantes.

$$T_{r;m} = \frac{\partial T_r}{\partial x^m} - \Gamma_{rm}^p T_p \quad (1.49)$$

es un tensor covariante de segundo orden y podemos obtener su derivada covariante como

$$T_{r;mn} = \frac{\partial T_{r;m}}{\partial x^n} - \Gamma_{rn}^q T_{q;m} - \Gamma_{mn}^q T_{r;q}. \quad (1.50)$$

Obtenemos que

$$T_{r;mn} - T_{r;nm} = R^s{}_{rmn} T_s, \quad (1.51)$$

donde se ha definido

$$R^s{}_{rmn} = \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{rn}^s - \frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma_{rm}^s + \Gamma_{rn}^p \Gamma_{pm}^s - \Gamma_{rm}^p \Gamma_{pn}^s. \quad (1.52)$$

$R^s_{r mn}$ es llamado el **tensor de curvatura mixto**.

Si estamos lidiando con los operadores de diferenciación parcial usuales $\partial/\partial u$ y $\partial/\partial v$, el orden en el cual los operadores se aplican no es importante, es decir,

$$\frac{\partial^2 T^r}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 T^r}{\partial v \partial u} \quad (1.53)$$

(decimos que los operadores conmutan). Sin embargo, (1.52) nos hace sospechar que los operadores $\delta/\delta u$ y $\delta/\delta v$ no conmutan en general. De hecho,

$$\frac{\delta^2 T^r}{\delta u \delta v} - \frac{\delta^2 T^r}{\delta v \delta u} = R^r_{p mn} T^p \frac{\partial x^m}{\partial u} \frac{\partial x^n}{\partial v}. \quad (1.54)$$

La respuesta al problema planteado antes es que las condiciones $R^s_{r mn} = 0$ son necesarias y suficientes para que un espacio sea plano [3].

Podríamos bajar el supraíndice del tensor de curvatura mixto de la manera usual para obtener $R_{prmn} = g_{ps} R^s_{r mn}$, el **tensor de curvatura covariante** o **tensor de Riemann**. Podríamos también contraer el tensor de curvatura mixto para obtener un tensor covariante simétrico de segundo orden $R_{rm} = R^n_{r mn}$, el **tensor de Ricci**. El **invariante de curvatura** (o curvatura escalar) está definido como $R = g^{mn} R_{mn}$.

1.3. Relatividad especial

La relatividad especial fue propuesta por el físico Albert Einstein en 1905 [4]. La incompatibilidad existente entre la mecánica newtoniana y las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell y, además, el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley (donde la existencia del éter luminífero fue cuestionada) condujo a Einstein a corregir la mecánica clásica para estudiar todos los movimientos y especialmente aquéllos que son relativistas (donde la velocidad es cercana a la de la luz).

La teoría de Einstein se construyó en base a dos postulados:

- 1 Las leyes de la física son invariantes (idénticas) en todos los marcos de referencia inerciales (es decir, sin aceleración).
- 2 La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, independientemente del observador o del movimiento de la fuente de luz.

1.3.1. Transformaciones de Lorentz

Definición 1.37. Un **sistema de referencia** es una perspectiva de observación en el espacio-tiempo, desde la cual un observador puede usar un sistema local de coordenadas (generalmente coordenadas cartesianas) para medir longitudes y un reloj para medir intervalos de tiempo.

Definición 1.38. Los sistemas de referencia se dividen en dos grupos:

- **Inerciales.** Son sistemas de referencia que no tienen aceleración. En un sistema de referencia inercial, un objeto físico experimenta una fuerza neta igual a cero y se mueve con velocidad constante o permanece en reposo.
- **No inerciales.** Son sistemas de referencia que experimentan una aceleración con respecto a un sistema de referencia inercial.

Las **transformaciones de Lorentz** son una familia de transformaciones lineales desde un sistema de referencia inercial en el espacio-tiempo a otro sistema inercial que se mueve con velocidad constante en relación con el primero.

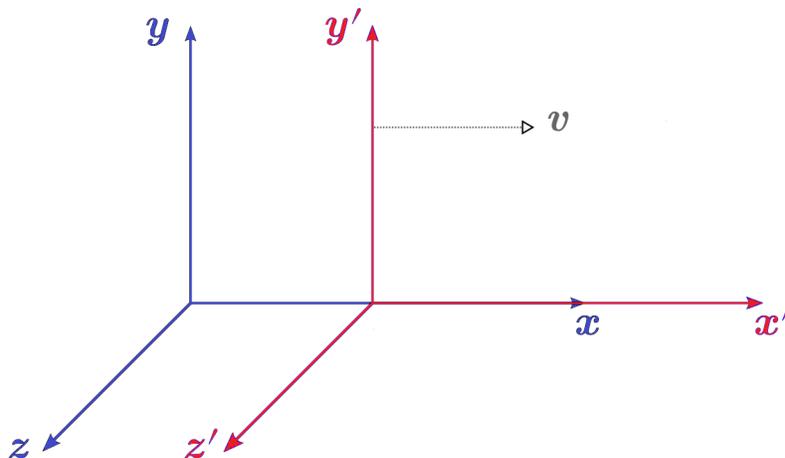


Figura 3: El sistema de coordenadas (x', y', z') está en movimiento con velocidad constante v en relación con el sistema (x, y, z) .

Definición 1.39. Un **evento** es algo que ocurre en un punto del espacio en un instante de tiempo, o más formalmente en un punto del espacio-tiempo.

Se necesitan cuatro coordenadas para definir un evento arbitrario; tres coordenadas para la posición y una coordenada para el tiempo. Se pueden utilizar las coordenadas (t, x, y, z) , donde t mide el tiempo y x, y, z son las coordenadas cartesianas para la posición.

Definición 1.40. Las **transformaciones galileanas** relacionan los eventos (t, x, y, z) en el sistema de referencia S y (t', x', y', z') en el sistema de referencia S' , donde los ejes espaciales de S y S' coinciden en el tiempo $t = t' = 0$ y donde S' se mueve con velocidad constante v con respecto a S a lo largo de la dirección x , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}t' &= t, \\x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1.55}$$

Tómese en cuenta que las transformaciones galileanas expresan el supuesto de un tiempo universal independiente del movimiento relativo de diferentes observadores. Estas transformaciones fueron utilizadas por Isaac Newton para construir la física clásica (newtoniana). Como veremos, las transformaciones galileanas son una buena aproximación solamente a velocidades relativas mucho menores que la velocidad de la luz.

Del segundo postulado de la relatividad de Einstein (sobre la invariancia de c , la rapidez de la

luz en el vacío) se sigue que:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (1.56)$$

en cualquier sistema de referencia inercial S , donde los eventos $E_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ y $E_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ están conectados por señales luminosas. La cantidad a la izquierda de la ec. (1.56) se llama **intervalo de espacio-tiempo** entre los eventos E_1 y E_2 . El intervalo de espacio-tiempo entre dos eventos cualesquiera, no necesariamente separados por señales de luz, es de hecho invariante, es decir, independiente del estado de movimiento relativo de los observadores en diferentes sistemas inerciales. Esto quiere decir que si los eventos E_1 y E_2 en S tienen coordenadas (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) y (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) , respectivamente, en otro sistema inercial S' , entonces

$$\begin{aligned} c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2. \end{aligned} \quad (1.57)$$

En lugar de (t, x, y, z) , es usual utilizar (ct, x, y, z) como coordenadas del espacio-tiempo. Nótese que, en (ct, x, y, z) , las cuatro coordenadas tienen dimensiones de longitud. Para resolver el problema general de determinar las transformaciones de Lorentz que relacionan (ct, x, y, z) en S y (ct', x', y', z') en S' , se puede utilizar el conocimiento de que el intervalo de espacio-tiempo es invariante a traslaciones y rotaciones ordinarias para suponer, sin pérdida de generalidad, que los sistemas S y S' están alineados de tal manera que sus ejes de coordenadas se encuentran alineados en $t = t' = 0$, que los ejes x y x' están alineados permanentemente, y que el sistema S' tiene velocidad constante v a lo largo del eje x positivo. Esta configuración se llama **configuración estándar**. En la configuración estándar, $y = y'$ y $z = z'$, de manera que el problema se reduce a

encontrar transformaciones tales que

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2. \quad (1.58)$$

Estamos buscando transformaciones lineales, entonces

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \quad (1.59)$$

resuelve el problema más general, ya que las diferencias de coordenadas se transforman de la misma manera. La solución más general a la ec. (1.59) es

$$x = x' \cosh \Phi + ct' \sinh \Phi, \quad (1.60)$$

$$ct = x' \sinh \Phi + ct' \cosh \Phi.$$

Para encontrar el papel de Φ en el entorno físico, considérese la progresión del origen de S' , es decir, $x' = 0$, $x = vt$. Las ecuaciones (1.60) se convierten en

$$\begin{aligned} x &= ct' \sinh \Phi, \quad ct = ct' \cosh \Phi \\ \implies \frac{x}{ct} &= \tanh \Phi = \frac{v}{c} \\ \implies \sinh \Phi &= \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \cosh \Phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

de manera que

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad ct = \frac{ct' + \frac{vx'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad ct' = \frac{ct - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Definición 1.41. Las **transformaciones de Lorentz** relacionan las coordenadas (ct, x, y, z) de un evento en el sistema de referencia S con las coordenadas (ct', x', y', z') del mismo evento en el sistema de referencia S' , en la configuración estándar donde S' se mueve con velocidad constante v respecto a S , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \\ x' &= \gamma (x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{1.61}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

se llama el factor de Lorentz.

En el sistema de referencia S , un objeto físico tiene velocidad $\mathbf{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$. La velocidad que ese mismo objeto tiene en el sistema S' es $\mathbf{u}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right)$. Para encontrar la

relación entre estas dos velocidades, utilizamos las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\
 u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \\
 u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}.
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

De manera similar, podemos encontrar una relación entre las aceleraciones $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ y $\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt'}$

medidas en los sistemas S y S' , respectivamente:

$$\begin{aligned}
 a'_x &= \frac{du'_x}{dt'} = \frac{\frac{du_x}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}, \\
 a'_y &= \frac{du'_y}{dt'} = \frac{\frac{\frac{vu_y}{c^2} du_x}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} + \frac{du_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{a_x \frac{vu_y}{c^2}}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3} + \frac{a_y}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}, \\
 a'_z &= \frac{du'_z}{dt'} = \frac{\frac{\frac{vu_z}{c^2} du_x}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2} + \frac{du_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{a_x \frac{vu_z}{c^2}}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3} + \frac{a_z}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^2}.
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

1.3.2. Diagramas de espacio-tiempo

Los **diagramas de espacio-tiempo** (o **diagramas de Minkowski**) son útiles para visualizar cómo se transforman las coordenadas entre diferentes sistemas de referencia inerciales. Su principal poder es su capacidad para proporcionar una comprensión intuitiva de los resultados de un escenario relativista cuando los efectos gravitacionales y cuánticos son insignificantes.

Para dibujar un diagrama de espacio-tiempo, comencemos por considerar dos sistemas de referencia inerciales, S y S' , en configuración estándar. Se dibujan los ejes horizontal x y vertical ct de S . En el diagrama de la Fig. 4, las líneas de cuadrícula están separadas por una unidad de distancia. Las líneas diagonales de 45° representan las trayectorias en el espacio-tiempo (llamadas **líneas de universo**) de dos fotones que pasan por el origen en el tiempo $t = 0$. La pendiente de estas líneas de universo es 1 porque los fotones avanzan una unidad en el espacio por cada unidad de tiempo. Dos eventos, A y B se han trazado en este gráfico para que sus coordenadas se puedan comparar en los sistemas S y S' .

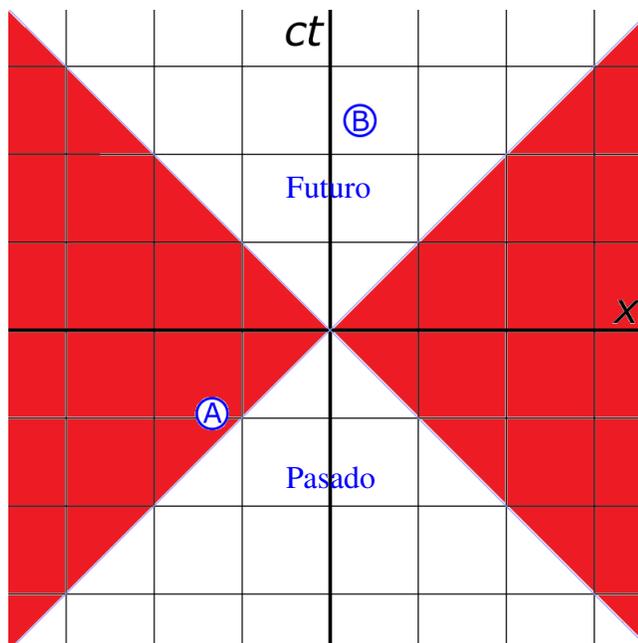


Figura 4: Sistema de referencia S con los conos de luz en blanco.

Dibújense los ejes x' y ct' del sistema S' . El eje ct' representa la línea de universo del origen del sistema de referencia S' según se mide en el sistema S . En esta figura, $v = c/2$. Los ejes ct' y x' están inclinados desde los ejes del sistema S un ángulo $\alpha = \tan^{-1} \beta$, $\beta \equiv v/c$. Los ejes de S y S' comparten un origen común porque se establecieron en la configuración estándar.

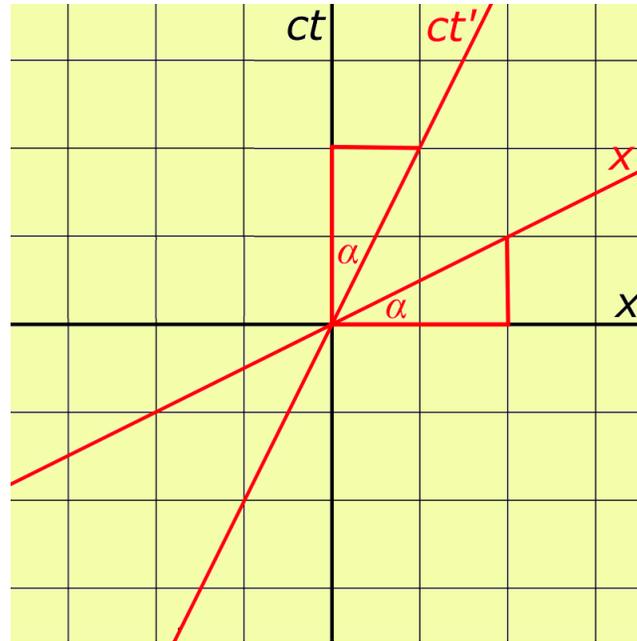


Figura 5: Sistema de referencia S y S' con la cuadrícula de S .

Las unidades en los ejes de S tienen una escala diferente a las unidades en los ejes de S' . De las transformaciones de Lorentz, observamos que las coordenadas (x', ct') de $(0, 1)$ en S' se transforman a $(\beta\gamma, \gamma)$ en el sistema de coordenadas S . Del mismo modo, las coordenadas (x', ct') de $(1, 0)$ en S' se transforman a $(\gamma, \beta\gamma)$ en S . Dibújense líneas de cuadrícula paralelas al eje ct' a través de los puntos $n(\gamma, \beta\gamma)$ medidos en S , donde n es un número entero. Del mismo modo, dibújense líneas de cuadrícula paralelas al x' a través de $n(\beta\gamma, \gamma)$ como se mide en S . Observamos que el espacio entre ct' unidades es igual a $\sqrt{(1 + \beta^2)/(1 - \beta^2)}$ veces el espacio entre ct unidades, como medido en S . Esta proporción es siempre mayor que 1 y, en última instancia, se acerca al infinito conforme $\beta \rightarrow 1$.

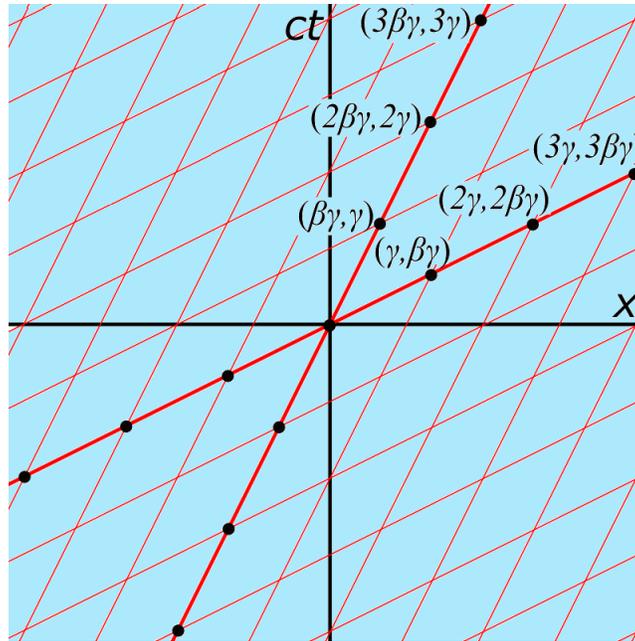


Figura 6: Sistema de referencia S y S' con la cuadrícula de S' .

1.3.3. Intervalo invariante

Con las transformaciones galileanas (1.55), el intervalo espacial $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ y el intervalo temporal Δt entre dos eventos son invariantes independientes, es decir, sus valores no cambian cuando se miden en diferentes sistemas de referencia inerciales. En relatividad especial, sin embargo, el entrelazamiento de las coordenadas espaciales y temporal genera el concepto de un intervalo espacio-temporal invariante, denotado con Δs^2 , que satisface

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$$

(comparar este resultado con la forma métrica del espacio de Minkowski con signatura $(1, 3)$).

La invariancia del intervalo espacio-temporal es una propiedad heredada de las transformacio-

nes de Lorentz (1.61), lo que las convierte en una **isometría** (función que preserva la *distancia*) del espacio-tiempo. Al considerar el significado físico de Δs , hay tres casos a tener en cuenta:

- $\Delta s^2 > 0$: Los dos eventos están separados por más tiempo que espacio y, por tanto, se dice que están separados de forma **temporal**. Dados dos eventos que están separados en el tiempo, es posible encontrar un sistema de referencia en el que los dos eventos ocurren en el mismo lugar.
- $\Delta s^2 < 0$: Los dos eventos están separados por más espacio que tiempo y, por tanto, se dice que están separados de forma **espacial**. Dados dos eventos que están separados espacialmente, es posible encontrar un sistema de referencia en el que los dos eventos suceden al mismo tiempo.
- $\Delta s^2 = 0$: Los dos eventos están separados de forma **luminosa**, es decir, están conectados por señales de luz.

Debido a que en relatividad especial se utiliza Δs^2 para medir la *distancia* entre eventos, esta teoría está restringida al espacio-tiempo plano conocido como **espacio de Minkowski**, donde el universo se modela como una variedad lorentziana.

En general, se asume que el intervalo espacio-temporal infinitesimal es de tipo temporal (es decir, $ds^2 > 0$), de manera que ds representa la longitud del desplazamiento infinitesimal entre eventos (coincidiendo con la notación utilizada en la definición de longitud de la sección 1.2). El mismo intervalo se puede expresar en coordenadas tales que, en cada momento, la partícula está en reposo. Este sistema de referencia se denomina **sistema de reposo instantáneo**, denotado aquí por las coordenadas $(c\tau, x_\tau, y_\tau, z_\tau)$. Debido a la invariancia del intervalo espacio-temporal y a que

las coordenadas espaciales en el sistema de reposo instantáneo son constantes, se puede escribir $ds = cd\tau$. Dada esta expresión diferencial para τ , el intervalo de **tiempo propio** se define como

$$\begin{aligned}
 \Delta\tau &= \int \frac{ds}{c} \\
 &= \int_C \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} \\
 &= \int \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]} dt \\
 &= \int \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \\
 &= \int \frac{dt}{\gamma(t)},
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

donde C es la línea de universo desde algún evento inicial hasta algún evento final con el orden de los eventos fijado por el requisito de que el evento final ocurra más tarde según el reloj que el evento inicial, $v(t)$ es la velocidad en el tiempo de coordenadas t , y $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son coordenadas espaciales.

1.3.4. Relatividad de la simultaneidad

Considérense dos eventos que ocurren simultáneamente en dos ubicaciones diferentes en un sistema de referencia inercial S . Estos eventos pueden ocurrir de manera no simultánea en otro sistema de referencia S' . Por las transformaciones de Lorentz (1.61), está claro que dos eventos que son simultáneos en S (es decir, que satisfacen $\Delta t = 0$), no son necesariamente simultáneos en S' (es decir, no satisfacen $\Delta t' = 0$; de hecho, $\Delta t' = -\gamma \frac{v\Delta x}{c^2}$).

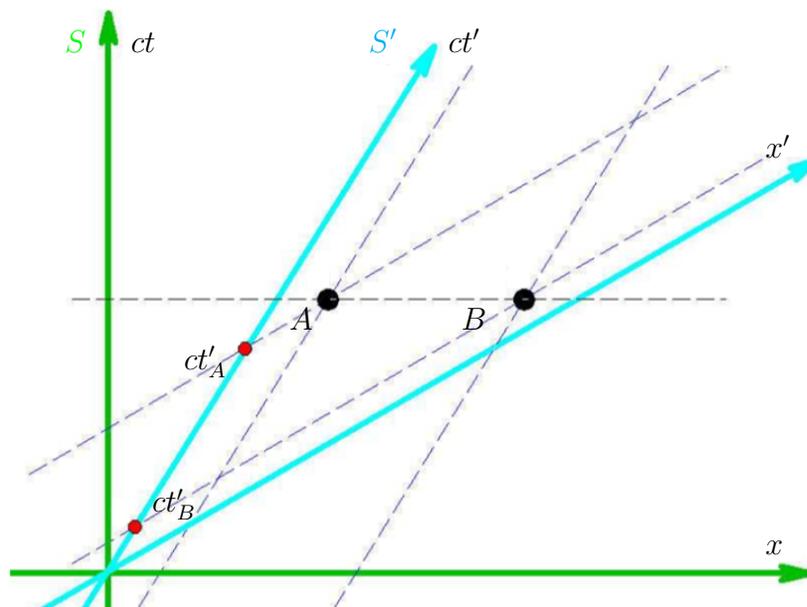


Figura 7: Relatividad de la simultaneidad evidenciada en un diagrama de espacio-tiempo. Los eventos A y B son simultáneos en S . Sin embargo, en S' , B ocurre antes que A ($t'_B < t'_A$).

1.3.5. Dilatación del tiempo

El lapso de tiempo entre dos eventos no es invariante de un observador a otro. Supongamos que un reloj está en reposo en S . La ubicación del reloj en dos tiempos diferentes se caracteriza por $\Delta x = 0$. Por tanto, $\Delta t' = \gamma \Delta t$ en un sistema de referencia S' que se mueve respecto a S . Esto muestra que el tiempo $\Delta t'$, como se mide en el sistema de referencia S' en el que se mueve el reloj, es más largo que el tiempo Δt medido en S , el sistema de referencia donde el reloj está en reposo.

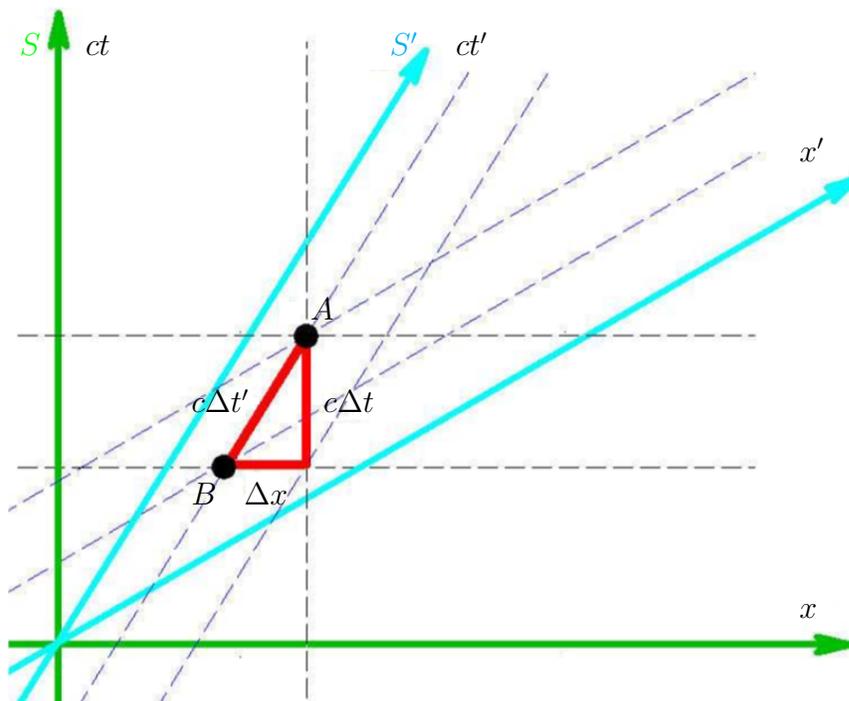


Figura 8: Dilatación del tiempo evidenciada en un diagrama de espacio-tiempo. Los eventos A y B ocurren en la misma posición en S' . Por la invariancia del intervalo espacio-temporal, $c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$. Recuerdese que la pendiente del segmento $c\Delta t'$ es tal que $\frac{\Delta x}{c\Delta t} = \beta$. De esta manera, $c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - \beta^2 c^2\Delta t^2 = \gamma^{-2}c^2\Delta t^2 \implies \Delta t = \gamma\Delta t' \implies \Delta t > \Delta t'$, porque $\gamma > 1$.

1.3.6. Contracción de la longitud

Las dimensiones (por ejemplo, la longitud) de un objeto medidas por un observador pueden ser más pequeñas que los resultados de las mediciones del mismo objeto realizadas por otro observador. Supongamos que una varilla está en reposo y alineada a lo largo del eje x en el sistema S . En este sistema, la longitud de la varilla se escribe como Δx . Para medir la longitud de esta varilla en el sistema S' , en el que la varilla se mueve, las distancias x' a los puntos extremos de la varilla deben medirse simultáneamente en ese sistema S' . En otras palabras, la medida se caracteriza por $\Delta t' = 0$. Así, $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$.

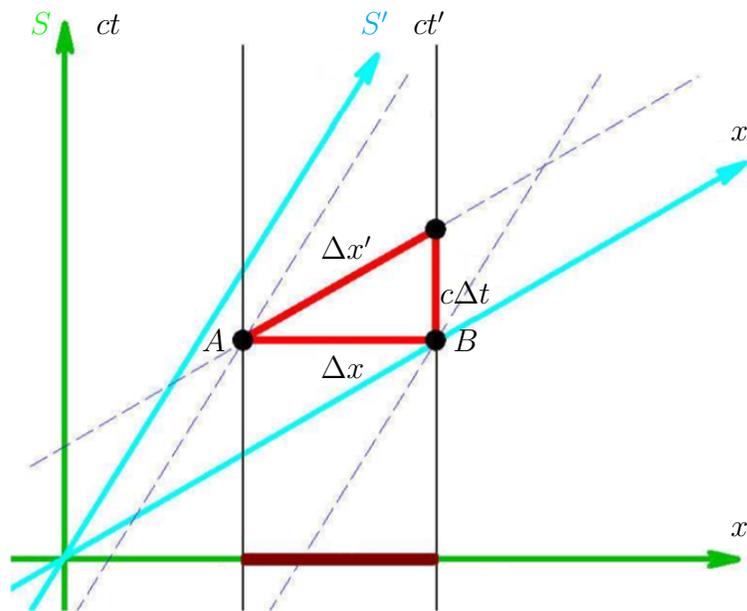


Figura 9: Contracción de la longitud evidenciada en un diagrama de espacio-tiempo. Por la invariancia del intervalo espacio-temporal, $\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2$. La pendiente del segmento $\Delta x'$ es $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \beta$. Así, $\Delta x'^2 = \Delta x^2 - \beta^2 \Delta x^2 = \gamma^{-2} \Delta x^2 \implies \Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} \implies \Delta x' < \Delta x$.

1.4. Relatividad general

La relatividad general es una teoría geométrica de la gravitación que fue publicada por el físico Albert Einstein en 1915 [5]. Esta teoría refina la ley de Newton de la gravitación universal, describiendo la gravedad como una propiedad geométrica del espacio-tiempo. De manera análoga a como los campos electromagnéticos se relacionan con la distribución de cargas y corrientes mediante las ecuaciones de Maxwell, Einstein escribió ecuaciones para relacionar la geometría del espacio-tiempo con la distribución de masa-energía. Las ecuaciones de Einstein (conocidas como **ecuaciones de campo de Einstein**) son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no

lineales acopladas, cuyas soluciones son los componentes del tensor métrico:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.65)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R es la curvatura escalar, Λ es la constante cosmológica, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, y G es la constante de gravitación universal. La expresión a la izquierda de (1.65) representa la curvatura del espacio-tiempo determinada por la métrica; la expresión a la derecha representa el contenido de materia-energía del espacio-tiempo. Cuando $T_{\mu\nu}$ es cero, las ecuaciones de campo de Einstein describen el espacio vacío. El término asociado con la constante cosmológica Λ se introduce para reflejar el hecho de que el universo se está expandiendo aceleradamente.

1.5. Agujeros negros

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo donde la gravedad es tan fuerte que nada (ninguna partícula ni radiación electromagnética) puede escapar de ella.

El **teorema de no pelo** establece que todas las soluciones de agujero negro de las ecuaciones de gravitación y electromagnetismo de Einstein-Maxwell en relatividad general pueden caracterizarse completamente por sólo tres parámetros clásicos (observables externamente): masa, carga eléctrica y momento angular [6].

Agujero negro	Sin rotación	Con rotación
Sin carga eléctrica	Schwarzschild	Kerr
Con carga eléctrica	Reissner–Nordström	Kerr–Newman

Cuadro 1: Tipos de agujeros negros.

Definición 1.42. Un **horizonte de eventos** (u horizonte de sucesos) de un agujero negro es el límite más allá del cual los eventos no pueden afectar a un observador fuera del agujero (la gravedad es lo suficientemente fuerte como para que ni siquiera la luz pueda escapar).

1.6. Grupos de isometría

Definición 1.43. Un **grupo** (G, \circ) es un conjunto G junto con una ley de composición $(a, b) \mapsto a \circ b$ que satisface los siguientes axiomas:

- La ley de composición es **asociativa**. Eso es, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ para $a, b, c \in G$.
- Existe un elemento $e \in G$, llamado **elemento de identidad**, tal que para cualquier elemento $a \in G$ se cumple que $e \circ a = a \circ e = a$.
- Para cada elemento $a \in G$, existe un **elemento inverso** en G , denotado por a^{-1} , tal que $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Un grupo G con la propiedad de que $a \circ b = b \circ a$ para todo $a, b \in G$ se llama **abeliano**

o **conmutativo**. Se dice que los grupos que no satisfacen esta propiedad son no abelianos o no conmutativos.

Si (G, \cdot) y (H, \circ) son grupos, entonces podemos convertir el producto cartesiano de G y H en un nuevo grupo. Como conjunto, nuestro nuevo grupo es solamente los pares ordenados $(g, h) \in G \times H$, donde $g \in G$ y $h \in H$. Podemos definir una operación binaria en $G \times H$ por $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2)$; es decir, simplemente multiplicamos elementos en la primera coordenada como lo hacemos en G y elementos en la segunda coordenada como lo hacemos en H .

Definición 1.44. El **grupo de isometría** de un espacio métrico es el conjunto de todas las isometrías biyectivas (es decir, funciones biyectivas que preservan la distancia) desde el espacio métrico sobre sí mismo, con la composición de funciones como operación de grupo. Su elemento de identidad es la función de identidad. Los elementos del grupo de isometría a veces se denominan movimientos del espacio.

El **grupo de Poincaré** es el grupo de isometrías del espacio-tiempo de Minkowski [7]. La simetría completa de la relatividad especial incluye (i) traslaciones (desplazamientos) en tiempo y espacio (las cuales forman un grupo abeliano), (ii) rotaciones en el espacio (que forman un grupo no abeliano de rotaciones tridimensionales), y (iii) transformaciones de Lorentz (las transformaciones que conectan dos cuerpos en movimiento uniforme). Las dos últimas simetrías juntas forman el **grupo de Lorentz**; el producto del grupo de traslaciones y el grupo de Lorentz producen luego el grupo de Poincaré.

Definición 1.45. Dos grupos (G, \cdot) y (H, \circ) son **isomorfos** si existe un mapeo biyectivo $\phi : G \mapsto H$ de manera que se conserve la operación de grupo; eso es, $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$ para todo $a, b \in G$. Si G es isomorfo a H , escribimos $G \simeq H$. El mapeo ϕ se llama **isomorfismo**.

Se proporciona una lista de grupos de interés para este trabajo:

- **Grupo lineal general**, $GL(n, \mathbb{R})$: Conjunto de matrices invertibles $n \times n$.
- **Grupo lineal especial**, $SL(n, \mathbb{R})$: Conjunto de matrices $n \times n$ con determinante igual a 1.
- **Grupo ortogonal**, $O(n)$: $O(n) = \{Q \in GL(n, \mathbb{R}) : Q^T Q = Q Q^T = I\}$, donde Q^T denota la matriz transpuesta de Q . $O(n)$ es el grupo de transformaciones que preservan la distancia en un espacio euclidiano de dimensión n .
- **Grupo ortogonal especial**, $SO(n)$: Matrices ortogonales con determinante igual a 1. Este grupo también se denomina grupo de rotación, generalizando el hecho de que, en las dimensiones 2 y 3, sus elementos son las rotaciones habituales alrededor de un punto (en 2 dimensiones) o una línea (en 3 dimensiones).
- **Grupo ortogonal indefinido**, $O(p, q)$: Es el grupo de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial real n -dimensional que deja invariante el tensor métrico de signatura (p, q) , donde $n = p + q$. La signatura determina el grupo bajo isomorfismos; intercambiar p con q equivale a reemplazar la métrica por su negativo, por lo que se obtiene el mismo grupo. Si p o q es igual a cero, entonces el grupo es isomorfo al grupo ortogonal ordinario $O(n)$.

- **Grupo ortogonal indefinido especial**, $SO(p, q)$: Es el subgrupo de $O(p, q)$ que consta de todos los elementos con determinante igual a 1.
- **Grupo unitario**, $U(n)$: $U(n) = \{Q \in GL(n, \mathbb{R}) : Q^*Q = QQ^* = I\}$, donde Q^* denota la matriz transpuesta conjugada de Q . $U(n)$ es el grupo de matrices unitarias, las cuales conservan el producto interno estándar en \mathbb{R}^n .
- **Grupo unitario especial**, $SU(n)$: Matrices unitarias con determinante igual a 1. $SU(n)$ es el grupo de isometrías que preservan la forma del volumen.

Grupo	Notación
Grupo lineal general	$GL(n, \mathbb{R})$
Grupo lineal especial	$SL(n, \mathbb{R})$
Grupo ortogonal	$O(n)$
Grupo ortogonal especial	$SO(n)$
Grupo ortogonal indefinido	$O(p, q)$
Grupo ortogonal indefinido especial	$SO(p, q)$
Grupo unitario	$U(n)$
Grupo unitario especial	$SU(n)$

Cuadro 2: Grupos de simetría.

Definición 1.46. La n -esfera S^n es un espacio topológico que es homeomorfo al conjunto de puntos en el espacio euclidiano $(n + 1)$ -dimensional (con la topología euclidiana) que están situados a una distancia constante de un punto fijo, llamado centro.

Casos especiales:

- $SL(2, \mathbb{R})$ es el grupo de todas las transformaciones lineales de \mathbb{R}^2 que conservan el área orientada.
- $U(1)$ corresponde al grupo circular, que consta de todos los números complejos con valor absoluto 1.
- $O(3)$ es el grupo de simetría de S^2 , la esfera bidimensional en el espacio euclidiano tridimensional; $SO(3)$ es el grupo de rotación correspondiente.

Las transformaciones de simetría continua de un conjunto de variables se pueden describir como transformaciones que dependen de un parámetro ε , posiblemente infinitesimal. Sea t una variable, entonces t se transforma bajo una transformación de simetría continua de la siguiente manera:

$$\exp(\varepsilon\zeta)t = \left(1 + \varepsilon\zeta + \frac{\varepsilon^2}{2!}\zeta^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!}\zeta^3 + \dots\right)t, \quad (1.66)$$

donde ζ es el **generador** de la transformación de simetría. Por ejemplo, si $\zeta = \frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$, entonces $\exp(\varepsilon\zeta)t = t + \varepsilon$, lo que corresponde a una traslación en t . Si, por otro lado, $\zeta = t\partial_t$, entonces $\exp(\varepsilon\zeta)t = \exp(\varepsilon)t = ct$, donde c es una constante. Entonces $\zeta = t\partial_t$ genera una contracción ($c < 1$) o dilatación ($c > 1$) de la variable t . La transformación infinitesimal correspondiente a $\exp(\varepsilon\zeta)$ es $1 + \varepsilon\zeta$, donde ε es infinitesimal ($\varepsilon \ll 1$).

Si ζ genera transformaciones que preservan la forma métrica de una variedad pseudo-riemanniana, entonces se dice que ζ es un **vector de Killing**. Un espacio n -dimensional que tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ vectores de Killing linealmente independientes para su métrica se conoce como **espacio maximalmente simétrico**.

2. Espacio de Rindler

2.1. Paradoja de la contracción de la longitud: introducción a la aceleración en relatividad especial

Una barra *rígida* de 10 m de largo (medición hecha por un observador para el cual la barra está en reposo) se mueve longitudinalmente sobre una mesa plana. En su camino hay un hoyo de 10 m de ancho. Suponga que la varilla se mueve tan rápido que su factor de contracción de Lorentz es 10. Para un observador B que se mueve con la varilla, el agujero tiene sólo 1 m de ancho y, al ser *rígida*, podría esperarse que la varilla pase sin obstáculos sobre el agujero. Sin embargo, para un observador A en reposo con respecto a la mesa, es la barra la que tiene solamente 1 m de largo; al pasar sobre el agujero de 10 m, estará obligada a caer por gravedad y, en consecuencia, golpeará el borde más alejado del agujero y, por tanto, se detendrá. ¿Cuál de las dos descripciones es correcta? ¿La de A o la de B ?

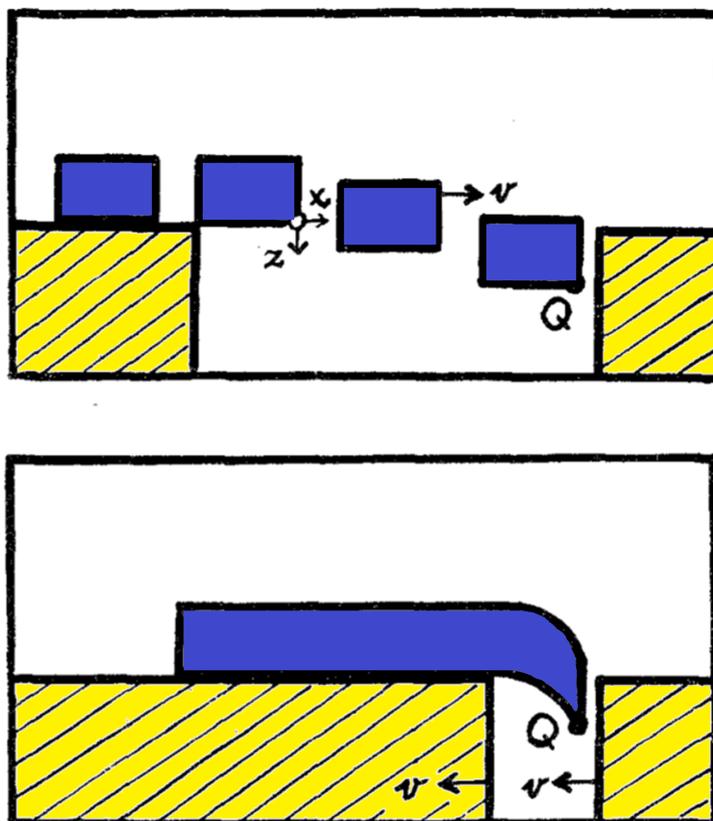


Figura 10: Arriba: Secuencia de cuatro observaciones realizadas por A a intervalos iguales de tiempo t . Abajo: Observación realizada por B en un instante particular t' .

La resolución de esta paradoja ya ha sido insinuada por la palabra *rígida*. Resulta que la descripción de los eventos de A es correcta. La barra simplemente no puede permanecer rígida en el marco inercial de B . Esto ilustra bien las dificultades encontradas en la búsqueda de una definición satisfactoria de rigidez en relatividad [8].

Hagamos el experimento más concreto. El agujero tendrá una trampilla en su boca que será retirada (hacia abajo y con suficiente aceleración para permitir que la barra caiga libremente) por el observador A en el instante en que el extremo trasero de la barra pase por el agujero. Esta

precaución elimina la tendencia de la varilla a volcarse por el borde. Todos los puntos de la varilla caerán entonces igualmente rápido, y la varilla permanecerá horizontal, en el marco de A . El campo gravitacional puede ser reemplazado por un campo magnético que actúa sobre una varilla de hierro, o incluso puede introducirse un chorro de arena vertical uniforme desde arriba, esto si se sostiene que la relatividad especial no es aplicable a la gravitación. Sin embargo, conviene destacar que la relatividad especial es perfectamente aplicable a los cuerpos acelerados. Lo que no se puede hacer es usarla para estudiar un espacio-tiempo no plano.

Ahora, debe considerarse que la varilla es un paralelepípedo rectangular y que el observador B utiliza un marco interno fijado al extremo de la varilla. Como en las secciones pasadas, nombremos a este marco S' . Denominemos también como S al marco de A , y sea v su velocidad relativa. Tomemos como origen común una esquina frontal inferior Q de la varilla en el instante en que la trampilla se separa de Q , midamos z, z' hacia abajo desde la parte superior de la mesa, y x, x' a lo largo de la ruta inicial de Q . Entonces las ecuaciones de transformación de Lorentz son

$$\begin{aligned} z &= z', \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

se aplican a S y S' . Las ecuaciones del borde inferior de la varilla en S son

$$\begin{aligned} z &= 0 \text{ cuando } t < 0, \\ z &= \frac{1}{2}at^2 \text{ cuando } t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde a es la aceleración producida por el campo magnético o el golpe de arena. Mediante el

uso de la ecuación (2.1), podemos transformar inmediatamente (2.2) en

$$\begin{aligned} z' &= 0 \text{ cuando } x' < -\frac{c^2 t'}{v}, \\ z' &= \frac{1}{2} a \gamma^2 \left(t' + \frac{v x'}{c^2} \right)^2 \text{ cuando } x' \geq -\frac{c^2 t'}{v}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La interpretación de la ecuación (2.3) es la siguiente. En S' , imaginemos una parábola con vértice en Q y eje verticalmente hacia abajo. El vértice de esta parábola se mueve a lo largo de la barra con velocidad c^2/v comenzando en $t' = 0$; y la varilla, al pasar sobre ese vértice, *fluye* por la parábola. Su extensión horizontal claramente permanece constante hasta que llega al borde más alejado del agujero. El borde cercano del agujero en el tiempo t' está en $x' = -L/\gamma^2 - vt'$, donde L es la longitud en reposo de la barra. En consecuencia, este borde, moviéndose con velocidad v a lo largo de la barra, llega al vértice de la parábola y es superado por este último exactamente en $x' = -L$, es decir, en el extremo trasero de la barra. Una compresión considerable de la varilla debe ocurrir eventualmente en S' porque, como puede verse en la descripción en S , el extremo trasero de la varilla pasa bien dentro del agujero.

Este ejemplo ilustra el aspecto dinámico de la contracción de longitud en el marco de la relatividad especial y la dependencia de la geometría a esa dinámica introducida mediante un objeto en aceleración.

2.2. Coordenadas de Rindler

Definición 2.1. La **aceleración propia** es la aceleración física que experimenta un objeto, es decir, la aceleración relativa a un observador inercial, que está momentáneamente en reposo en relación con el objeto.

Consideremos una partícula que se mueve con aceleración constante. Sea α su aceleración propia. α es la aceleración que la partícula *siente* cuando acelera de un sistema de referencia inercial a otro.

Definición 2.2. Un **sistema de referencia propio** es un sistema de referencia que se adjunta a un objeto, de manera que ese objeto está en reposo en ese sistema de referencia particular.

Por ejemplo, un ascensor en caída libre es un sistema de referencia propio para un objeto en caída libre dentro del ascensor, mientras que la superficie de la Tierra no lo es. Los sistemas de referencia propios pueden ser inerciales o no inerciales.

Sean (ct, x, y, z) las coordenadas del sistema de referencia propio de la partícula. Consideremos, en particular, el sistema de referencia propio donde $x = \frac{c^2}{\alpha}$. Consideremos un sistema de referencia inercial, con coordenadas (cT, X, Y, Z) , donde la partícula se está moviendo paralelamente al eje X positivo (configuración estándar). La aceleración ordinaria de la partícula a , es decir, la aceleración medida por el observador inercial, está relacionada con α mediante las trans-

formaciones (1.63):

$$\alpha = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dT}, \quad (2.4)$$

donde $a = \frac{du}{dT}$ y $u = \frac{dX}{dT}$ es la velocidad instantánea de la partícula medida por el observador inercial.

Resolviendo la ecuación de movimiento (2.4), se pueden obtener las fórmulas de la trayectoria de la partícula en el sistema de referencia inercial. Para simplificar, los valores iniciales ($T = 0$) de tiempo t , posición X y velocidad u se fijan a 0, x y 0, respectivamente:

$$\begin{aligned} u(T) &= \frac{\alpha T}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha T}{c}\right)^2}} = c \tanh\left(\operatorname{arsinh}\frac{\alpha T}{c}\right), \\ X(T) &= \frac{c^2}{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha T}{c}\right)^2} = \frac{c^2}{\alpha} \cosh\left(\operatorname{arsinh}\frac{\alpha T}{c}\right), \\ ct(T) &= \frac{c^2}{\alpha} \operatorname{arsinh}\frac{\alpha T}{c}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esto da $X^2 - c^2T^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}$, lo que es una hipérbola en el tiempo T y la variable de ubicación espacial X .

Utilizando las coordenadas del sistema de referencia propio de la partícula,

$$\begin{aligned}
 cT &= x \sinh\left(\frac{\alpha t}{c}\right), \\
 X &= x \cosh\left(\frac{\alpha t}{c}\right), \\
 Y &= y, \\
 Z &= z.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Diferenciando,

$$\begin{aligned}
 cdT &= dx \left[\sinh\left(\frac{\alpha t}{c}\right) \right] + dt \left[\frac{x\alpha}{c} \cosh\left(\frac{\alpha t}{c}\right) \right], \\
 dX &= dx \left[\cosh\left(\frac{\alpha t}{c}\right) \right] + dt \left[\frac{x\alpha}{c} \sinh\left(\frac{\alpha t}{c}\right) \right], \\
 dY &= dy, \\
 dZ &= dz,
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

e insertando en la métrica de Minkowski (con signatura (3,1)) $ds^2 = -c^2 dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$,

se determina la métrica en el marco hiperbólicamente acelerado:

$$ds^2 = -\left(\frac{x\alpha}{c}\right)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.
 \tag{2.8}$$

Estas transformaciones definen al observador de Rindler como un observador que está en reposo en las coordenadas de Rindler, es decir, que mantiene constante x, y, z , y sólo varía t a medida que pasa el tiempo. Las coordenadas son válidas en la región $0 < X < \infty$, $-X < cT < X$, que a menudo se llama la **cuña de Rindler**. Para mantener esta línea del universo, el observador debe

acelerar con una aceleración propia constante, y los observadores de Rindler más cercanos a $x = 0$ (el **horizonte de Rindler**) tienen una mayor aceleración propia.

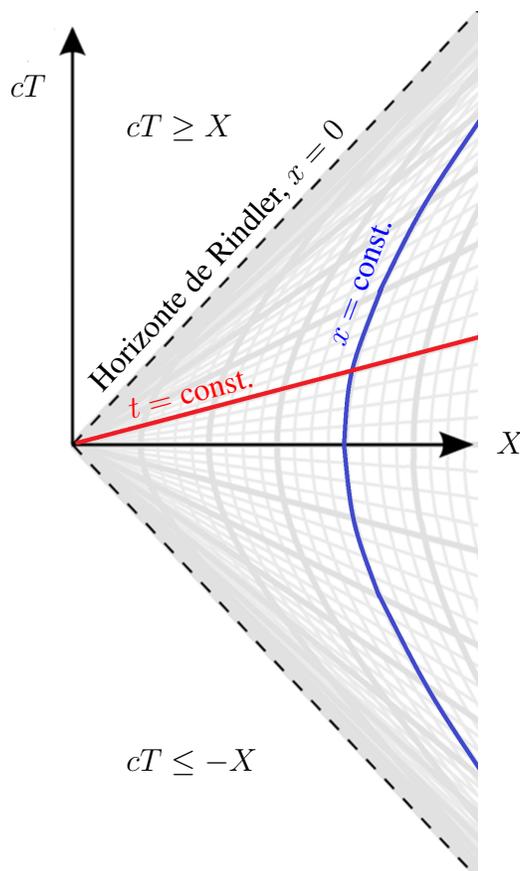


Figura 11: Gráfico de Rindler, trazado en un diagrama de Minkowski. (cT, X) son las coordenadas del observador inercial en el espacio de Minkowski; (ct, x) son las coordenadas del observador de Rindler. Las líneas entrecortadas son los horizontes de Rindler.

Todos los observadores de Rindler están instantáneamente en reposo en el momento $T = 0$ en el marco inercial, y en este momento un observador de Rindler con la aceleración propia α estará en la posición $X = c^2/\alpha$, que es también la distancia constante del observador al horizonte de Rindler en coordenadas de Rindler. Si todos los observadores de Rindler ponen sus relojes a cero en $T = 0$, entonces, al definir un sistema de coordenadas de Rindler, tenemos la opción de qué

tiempo propio del observador de Rindler será igual al tiempo t en coordenadas de Rindler, y la aceleración propia de este observador también es el α de las transformaciones (2.6) arriba. Es una convención común definir el sistema de coordenadas de Rindler para que el observador de Rindler cuyo tiempo propio coincida con el tiempo de coordenadas sea el que tenga la aceleración $\alpha = 1$ (con las respectivas unidades), de manera que α se pueda eliminar de las ecuaciones.

2.3. Una propiedad paradójica

Téngase en cuenta que los observadores de Rindler con una coordenada x más pequeña tienen mayor aceleración. Esto puede ser poco intuitivo porque, en la física clásica newtoniana, los observadores que tienen una distancia relativa constante deben poseer la misma aceleración. No obstante, en la física relativista, vemos que el extremo posterior de una barra que es acelerada por acción de una fuerza externa (paralela a su eje de simetría) debe acelerar un poco más que el extremo anterior, o de lo contrario finalmente debe romperse. Ésta es una manifestación de la contracción de Lorentz. A medida que la varilla acelera, su velocidad aumenta y su longitud disminuye. Dado que se está acortando, la parte trasera debe acelerar más que la delantera. Otra forma de verlo es que el extremo posterior debe lograr el mismo cambio de velocidad en un período de tiempo más corto.

2.4. Horizonte de Rindler

El gráfico de coordenadas de Rindler tiene una singularidad de coordenadas en $x = 0$. Esto sucede porque cuando $x \rightarrow 0$, la aceleración de los observadores de Rindler diverge.

Si consideramos el conjunto de observadores en aceleración que tienen una posición constante en las coordenadas de Rindler, ninguno de ellos puede recibir señales de luz de eventos con $cT \geq X$ (en Fig. 11, éstos serían eventos a la izquierda de la línea $cT = X$ a lo largo del horizonte superior) ni podrían haber enviado señales a eventos con $cT \leq -X$ (eventos a la izquierda de la línea $cT = -X$ a lo largo de la cual se encuentra el horizonte inferior). Además, si consideramos a los miembros de este conjunto de observadores en aceleración cada vez más cerca del horizonte, en el límite a medida que la distancia al horizonte se acerca a cero, la aceleración constante propia experimentada por un observador a esta distancia (que también tendría que ver con la fuerza experimentada por tal observador) se acercaría al infinito. Ambos hechos también serían ciertos si estuviéramos considerando un conjunto de observadores fuera del horizonte de eventos de un agujero negro, cada observador ubicado en un radio constante en las coordenadas de Schwarzschild (que se estudiarán en la sección 4.1). De hecho, en la vecindad cercana de un agujero negro de Schwarzschild, la geometría cercana al horizonte de eventos se puede describir en coordenadas de Rindler.

3. Espacio anti-de Sitter

El espacio anti-de Sitter con signatura (p, q) es un espacio que se puede embeber isométricamente en el espacio $\mathbb{R}^{p, q+1}$ con coordenadas $(ct_1, \dots, ct_{q+1}, x_1, \dots, x_p)$ y la métrica

$$ds^2 = \sum_{i=1}^p dx_i^2 - c^2 \sum_{j=1}^{q+1} dt_j^2 \quad (3.1)$$

como la cuasiesfera

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 - c^2 \sum_{j=1}^{q+1} t_j^2 = -\alpha^2, \quad (3.2)$$

donde α es una constante distinta de cero con dimensiones de longitud (el radio de curvatura). Ésta es una esfera (generalizada) en el sentido de que es una colección de puntos para los cuales la *distancia* determinada por la forma cuadrática desde el origen es constante, pero es un hiperboloide en el sentido clásico.

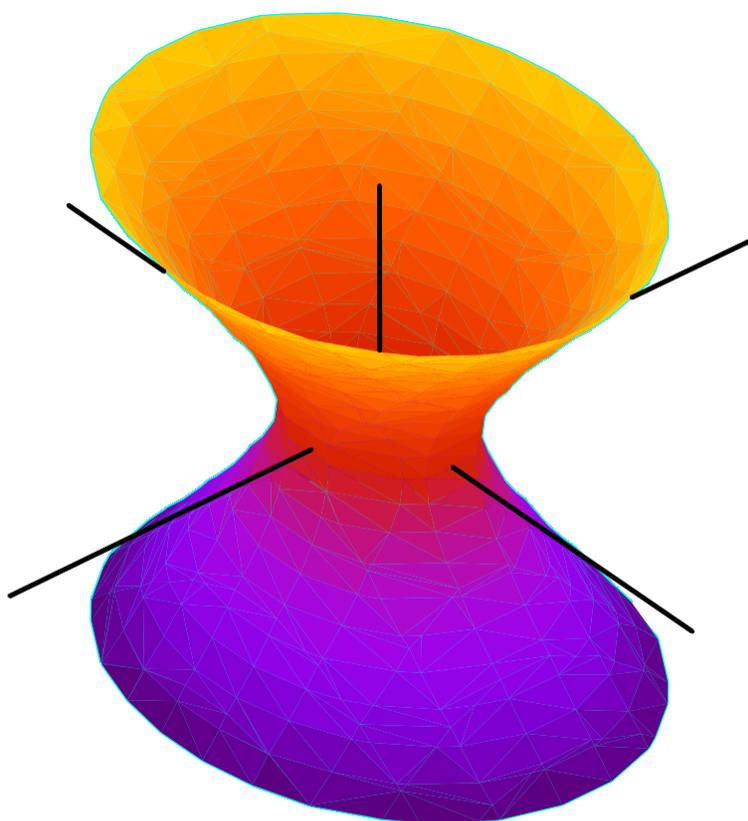


Figura 12: Espacio anti-de Sitter (1,1) embebido en el espacio plano (1,2). Los ejes ct_1 y ct_2 se encuentran en el plano de simetría rotacional y el eje x_1 es normal a ese plano.

El espacio anti-de Sitter tiene $O(p, q + 1)$ como grupo de isometría. Esto es análogo a cómo el grupo de Poincaré es el grupo de isometría del espacio-tiempo de Minkowski.

3.1. Espacio-tiempo AdS en física

AdS_{*n*} es una solución *n*-dimensional a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica Λ negativa. Introduciendo el radio α como $\Lambda = -\frac{(n-1)(n-2)}{2\alpha^2}$, esta solución se puede embeber en un espacio-tiempo plano de $n+1$ dimensiones con componentes de la métrica $\text{diag}(-1, -1, +1, \dots, +1)$ en coordenadas $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n+1})$ mediante la siguiente restricción:

$$-X_1^2 - X_2^2 + \sum_{i=3}^{n+1} X_i^2 = -\alpha^2. \quad (3.3)$$

AdS_{*n*} está parametrizado en **coordenadas globales** con los parámetros $(\tau, \rho, \theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-3})$ por [9]

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha \cosh \rho \cos \tau, \\ X_2 &= \alpha \cosh \rho \sin \tau, \\ X_i &= \alpha \sinh \rho \hat{x}_i, \quad i \in \{3, \dots, n+1\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\sum_{i=3}^{n+1} \hat{x}_i^2 = 1$ y los \hat{x}_i parametrizan una esfera S^{n-2} de radio unitario. En términos de las coordenadas φ_i ,

$$\begin{aligned} \hat{x}_3 &= \sin \theta \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-4} \sin \varphi_{n-3}, \\ \hat{x}_4 &= \sin \theta \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-4} \cos \varphi_{n-3}, \\ \hat{x}_5 &= \sin \theta \sin \varphi_1 \cdots \cos \varphi_{n-4}, \\ &\vdots \\ \hat{x}_{n+1} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La métrica AdS_n en estas coordenadas es:

$$ds^2 = \alpha^2 \left(-\cosh^2 \rho \, d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\Omega_{n-2}^2 \right), \quad (3.6)$$

donde $\tau \in [0, 2\pi]$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, y $d\Omega_{n-2}^2$ es la forma métrica de S^{n-2} de radio unitario. Teniendo en cuenta la periodicidad de τ , también se puede tomar la cobertura universal $\tau \in \mathbb{R}$. En el límite $\rho \rightarrow \infty$, uno se acerca a la frontera de este espacio-tiempo, normalmente llamada **frontera conforme**.

Con las transformaciones $r = \alpha \sinh \rho$ y $ct = \alpha\tau$, podemos tener la métrica AdS_n habitual en coordenadas globales:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right)^{-1} dr^2 + dr^2 d\Omega_{n-2}^2. \quad (3.7)$$

Utilizando la parametrización

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\alpha^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^4} (\alpha^2 + \mathbf{x}^2 - c^2 t^2) \right), \\ X_2 &= \frac{r}{\alpha} ct, \\ X_i &= \frac{r}{\alpha} x_i, \quad i \in \{3, \dots, n\}, \\ X_{n+1} &= \frac{\alpha^2}{2r} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^4} (\alpha^2 - \mathbf{x}^2 + c^2 t^2) \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{x} = (x_3, \dots, x_n)$, la métrica AdS_n en las coordenadas de Poincaré es: [9]

$$ds^2 = -\frac{r^2}{\alpha^2}c^2 dt^2 + \frac{\alpha^2}{r^2}dr^2 + \frac{r^2}{\alpha^2}d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.9)$$

donde $0 \leq r$.

AdS_n tiene las siguientes propiedades geométricas:

$$\begin{aligned} \text{Tensor de Riemann: } R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}}{\alpha^2}, \\ \text{Tensor de Ricci: } R_{\mu\nu} &= -\frac{n-1}{\alpha^2}g_{\mu\nu}, \\ \text{Curvatura escalar: } R &= -\frac{n(n-1)}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

de manera que el espacio anti-de Sitter es una variedad lorentziana con curvatura escalar negativa constante. Las variedades de curvatura escalar constante son más conocidas en el caso de variedades riemannianas de dos dimensiones, donde la superficie de una esfera es una variedad de curvatura escalar positiva constante, un plano (euclidiano) es una variedad de curvatura nula constante y una superficie hiperbólica tiene curvatura negativa constante. Podemos concluir que un espacio-tiempo de curvatura constante debe ser el espacio de Sitter (con curvatura positiva; análogo al espacio anti-de Sitter, pero con constante cosmológica positiva), el espacio de Minkowski (con curvatura nula) o el espacio anti-de Sitter (con curvatura negativa). Como tales, estos tres casos son soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein para un universo vacío con una constante cosmológica positiva, nula o negativa, respectivamente [10].

En particular, AdS_2 admite los siguientes vectores de Killing:

$$\begin{aligned}\zeta_{-1} &= \partial_t, \\ \zeta_0 &= t\partial_t - r\partial_r, \\ \zeta_1 &= \frac{\alpha^2}{2c} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{c^2 t^2}{\alpha^4} \right) \partial_t - \frac{ctr}{\alpha^2} \partial_r,\end{aligned}\tag{3.11}$$

que generan al grupo de isometrías $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ y convierten a AdS_2 en un espacio maximalmente simétrico [11].

4. Métricas cerca del horizonte

Una métrica cerca del horizonte (NHM por sus siglas en inglés) se refiere al límite cerca del horizonte de eventos de la métrica global de un agujero negro. Debido a la dilatación del tiempo, se necesita una cantidad infinita de tiempo externo (es decir, tiempo medido por un observador externo al agujero negro) para que una partícula de prueba en caída libre (moviéndose únicamente por efectos de la gravedad) alcance el horizonte de sucesos de un agujero negro clásico [12].

4.1. Métrica de Schwarzschild

Esta métrica lleva el nombre del físico Karl Schwarzschild, quien la encontró en 1915 y la publicó en 1916. La solución describe el campo gravitacional fuera de una masa esférica, asumiendo que la carga eléctrica, el momento angular y la constante cosmológica universal son todos cero.

En las coordenadas de Schwarzschild, la métrica toma la forma [13]

$$\Phi = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, c es la velocidad de la luz, $r_s = 2GM/c^2$ es el radio de Schwarzschild del cuerpo masivo, con G la constante gravitacional y M la masa del cuerpo. Cuando $r \rightarrow \infty$, la métrica de Schwarzschild se aproxima a la métrica de Minkowski. En tal caso, se dice que el espacio-tiempo es **asintóticamente plano**.

La superficie $r = r_s$ demarca lo que se llama el horizonte de sucesos del agujero negro. Representa el punto más allá del cual la luz ya no puede escapar del campo gravitacional. Cualquier objeto físico cuyo radio sea menor o igual que el radio de Schwarzschild ha sufrido un colapso gravitacional y se ha convertido en un agujero negro.

La singularidad en $r = r_s$ divide las coordenadas de Schwarzschild en dos regiones desconectadas. La solución exterior de Schwarzschild con $r > r_s$ es la que está relacionada con los campos gravitacionales de estrellas y planetas. La solución interior con $0 \leq r < r_s$, que contiene la singularidad en $r = 0$, está completamente separada de la región exterior por la singularidad en $r = r_s$. Por tanto, las coordenadas de Schwarzschild no proporcionan una conexión física entre las dos regiones, que pueden verse como soluciones separadas. Sin embargo, la singularidad en $r = r_s$ es una ilusión; es un ejemplo de lo que se llama *singularidad de coordenadas*. Como su nombre lo indica, la singularidad surge de una mala elección de coordenadas o condiciones sobre las coordenadas. Cuando se cambia a un sistema de coordenadas diferente (como las coordenadas

de Eddington-Finkelstein [14]), la métrica se vuelve regular en $r = r_s$ y puede extender la región exterior a valores de r más pequeños que r_s .

Sin embargo, el caso $r = 0$ es diferente. Si se pide que la solución sea válida para todo r , se encuentra una singularidad física verdadera, o singularidad gravitacional, en el origen. En $r = 0$, el invariante de Kretschmann (una cantidad independiente de la elección de coordenadas, definida por $R_{\alpha\beta\gamma\mu}R^{\alpha\beta\gamma\mu}$, donde $R_{\alpha\beta\gamma\mu}$ es el tensor de curvatura de Riemann) diverge, lo que indica la presencia de una singularidad. En este punto, la métrica, y el propio espacio-tiempo, ya no están bien definidos.

4.1.1. Cerca del horizonte de eventos

Estamos interesados en determinar la geometría cerca del horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild. Para ello, reemplazamos la coordenada r por $r_s + r$, donde $r \ll r_s$. De esta manera, la nueva variable r indica qué tan lejos nos encontramos del horizonte. Con estas consideraciones,

$$1 - \frac{r_s}{r} \rightarrow 1 - \frac{r_s}{r_s + r} \approx \frac{r}{r_s}$$

y la métrica de Schwarzschild cambia a

$$\Phi_{\text{NH}} = -\frac{r}{r_s}c^2dt^2 + \frac{r_s}{r}dr^2 + r_s^2d\Omega^2. \quad (4.2)$$

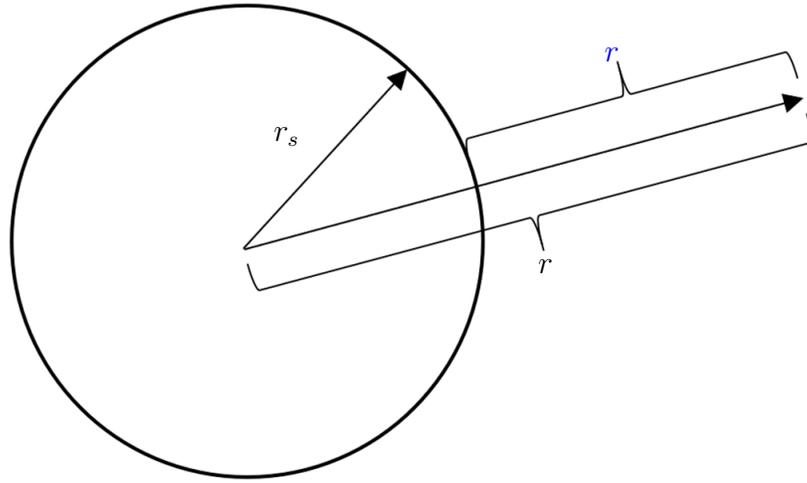


Figura 13: Diferencia entre la coordenada original r y la nueva coordenada r .

Introduzcamos una nueva variable ρ tal que $\rho^2 = 4r_s r$ y $2\rho d\rho = 4r_s dr$. Con esta variable, la métrica (4.2) cambia a

$$\Phi_{\text{NH}} = - \left(\frac{\rho}{c} \frac{c^2}{2r_s} \right)^2 dt^2 + d\rho^2 + r_s^2 d\Omega^2, \quad (4.3)$$

De la forma de esta métrica, está claro que ρ mide la distancia radial geodésica. Tómese en cuenta que la geometría (4.3) se factoriza. Un factor es la 2-esfera S^2 de radio r_s : $r_s^2 d\Omega^2$. Otro factor es el espacio (t, ρ) : $- \left(\frac{\rho}{c} \frac{c^2}{2r_s} \right)^2 dt^2 + d\rho^2$. Este último espacio-tiempo corresponde precisamente al espacio de Minkowski (1, 1) escrito en coordenadas de Rindler, donde se hace la distinción

$$\alpha = \frac{c^2}{2r_s} = \frac{c^4}{4GM}, \quad (4.4)$$

con α la aceleración propia del observador de Rindler. Aquí podríamos pensar que α es la gravedad superficial del agujero negro [15].

4.1.2. Termodinámica de agujeros negros de Schwarzschild

El **efecto Unruh** es la predicción de que un observador acelerado experimenta un baño térmico (una piscina efectivamente infinita de energía térmica a una temperatura constante dada) mientras que un observador inercial no observa ninguno. La **temperatura de Unruh** vendría a ser la temperatura efectiva experimentada por ese observador acelerado en el vacío. Está dada por [16]

$$T = \frac{\hbar\alpha}{2\pi ck_B}, \quad (4.5)$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida, α es la aceleración propia del observador, c es la rapidez de la luz en el vacío, y k_B es la constante de Boltzmann.

Definición 4.1. Un **cuerpo negro** es un objeto físico ideal que absorbe toda la radiación electromagnética incidente, sin importar la frecuencia o el ángulo de incidencia de esa radiación.

Los agujeros negros son cuerpos negros casi ideales, pues absorben toda la radiación que cae sobre ellos.

Definición 4.2. La **radiación de cuerpo negro** es la radiación alrededor o dentro de un cuerpo negro en equilibrio termodinámico con su entorno.

Definición 4.3. La **radiación de Hawking** es la radiación de cuerpo negro que se predice que será liberada por los agujeros negros, debido a efectos cuánticos cerca del horizonte de eventos.

Definición 4.4. La **temperatura de Hawking** es la temperatura característica con la que los agujeros negros emiten radiación térmica.

El efecto Unruh implica que, cerca del horizonte de sucesos de un agujero negro, un observador local que acelera ve un baño térmico. Este baño térmico se atribuye a la presencia de partículas que emergen del horizonte. Algunas de estas partículas emitidas no se reabsorben y se convierten en radiación saliente (radiación de Hawking).

En la ecuación (4.5), al hacer el reemplazo $\alpha = \frac{c^4}{4GM}$, obtenemos la temperatura de Hawking de un agujero negro de Schwarzschild :

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_B}. \quad (4.6)$$

A partir de la temperatura del agujero negro, es sencillo calcular su entropía. El cambio en la entropía cuando se agrega una cantidad de calor dQ es:

$$dS = \frac{dQ}{T_H} = \frac{8\pi GM k_B dQ}{\hbar c^3}. \quad (4.7)$$

La energía térmica que entra sirve para aumentar la masa total, por lo que

$$dS = \frac{8\pi GMk_B dM}{\hbar c} = d\left(\frac{4\pi Gk_B M^2}{\hbar c}\right) = d\left(\frac{4\pi r_s^2 k_B c^3}{4G\hbar}\right) = d\left(\frac{Ak_B c^3}{4G\hbar}\right), \quad (4.8)$$

donde A es el área del horizonte de eventos. Así, la entropía del agujero negro es

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A. \quad (4.9)$$

Las fórmulas para la temperatura y la entropía de un agujero negro pueden usarse como puntos de partida para algunas aproximaciones interesantes sobre la termodinámica de un agujero negro de Schwarzschild. Un agujero negro pierde masa lentamente o se evapora a medida que las partículas se irradian.

Integramos la relación $TdS = c^2 dM$ desde la masa inicial mayor M hasta una masa final menor M' , lo que da como resultado la liberación de la energía $Q = (M - M')c^2 = \Delta M c^2$, que es la energía térmica perdida cuando el agujero negro irradia una masa $\Delta M = M - M'$.

El calor infinitesimal dQ perdido durante un cambio infinitesimal de temperatura dT también se puede escribir como $dQ = MCdT$, lo que permite determinar el calor específico C (a presión constante) de un agujero negro. Por $dQ = c^2 dM$ y $dT = -\frac{\hbar c^3}{8\pi GM^2 k_B} dM$, se determina

$$C = -\frac{8\pi Gk_B}{\hbar c} M. \quad (4.10)$$

El signo negativo no es una sorpresa, ya que se puede ver que a medida que un agujero negro

pierde masa y, por lo tanto, energía, su temperatura aumenta. El aumento de temperatura con la pérdida de masa que se muestra en la ecuación (4.6) sugiere que, con el tiempo, la rapidez a la que se irradia la energía del agujero negro también debería aumentar.

La tasa de pérdida de energía se puede aproximar con la ley de radiación de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^4} T_H^4. \quad (4.11)$$

Utilizando las anteriores expresiones de A y T_H , encontramos

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\hbar c^4}{15360 \pi G^2} \frac{1}{M^2}, \quad (4.12)$$

que de hecho aumentará a medida que se pierdan masa y energía. Resolviendo para dt e integrando, encontramos el tiempo de vida de un agujero negro una vez que comienza a evaporarse:

$$t = \frac{5120 \pi G^2}{\hbar c^4} M^3. \quad (4.13)$$

4.2. Métrica de Reissner–Nordström

Es una solución estática que corresponde al campo gravitacional de un cuerpo de masa M esféricamente simétrico, cargado eléctricamente y sin momento angular.

En coordenadas esféricas, la métrica de Reissner-Nordström es [17]

$$\Phi = - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.14)$$

donde $r_Q^2 = \frac{Q^2 G}{16\pi^2 \epsilon_0 c^4}$. En el límite donde la carga Q (o de manera equivalente, la escala de longitud r_Q es cero), se recupera la métrica de Schwarzschild.

Al igual que con la métrica de Schwarzschild, los horizontes de eventos para el espacio-tiempo se ubican donde el componente métrico g_{rr} diverge [18].

$$\frac{1}{g_{rr}} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} = 0$$

tiene dos soluciones:

$$r_{\pm} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2}}{2}.$$

Estos horizontes de eventos concéntricos se degeneran para $2r_Q = r_s$, que corresponde a un **agujero negro extremo**. Los agujeros negros con $2r_Q > r_s$ no pueden existir en la naturaleza porque si la carga es mayor que la masa, no puede haber horizonte de eventos físico (el término dentro de la raíz cuadrada se vuelve negativo). Los objetos con una carga mayor que su masa pueden existir en la naturaleza, pero no pueden colapsar en un agujero negro, y si pudieran, mostrarían una **singularidad desnuda** (una singularidad gravitacional sin un horizonte de eventos) [19].

4.2.1. Cerca del horizonte de eventos de un agujero negro extremo

Tomando el límite cerca del horizonte de un agujero negro extremo de Reissner–Nordström

$$t \rightarrow \frac{t}{\varepsilon}, r \rightarrow \frac{r_s}{2} + \varepsilon r, \varepsilon \rightarrow 0, \text{ se tiene que } dt \rightarrow \frac{dt}{\varepsilon}, dr \rightarrow \varepsilon dr,$$

$$1 - \frac{r_s}{2r} \rightarrow 1 - \frac{r_s}{r_s + 2\varepsilon r} = 1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon \frac{r}{r_s}} \approx 1 - \left(1 - 2\varepsilon \frac{r}{r_s}\right) = 2\varepsilon \frac{r}{r_s},$$

y la métrica aquí toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{NH}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \left(1 - \frac{r_s}{r_s + 2\varepsilon r}\right)^2 \frac{c^2 dt^2}{\varepsilon^2} + \left(1 - \frac{r_s}{r_s + 2\varepsilon r}\right)^{-2} \varepsilon^2 dr^2 + \left(\frac{r_s}{2} + \varepsilon r\right)^2 d\Omega^2 \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \left(2\varepsilon \frac{r}{r_s}\right)^2 \frac{c^2 dt^2}{\varepsilon^2} + \left(2\varepsilon \frac{r}{r_s}\right)^{-2} \varepsilon^2 dr^2 \right\} + \left(\frac{r_s}{2}\right)^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{4r^2}{r_s^2} c^2 dt^2 + \frac{r_s^2}{4r^2} dr^2 + \frac{r_s^2}{4} d\Omega^2. \end{aligned}$$

Al comparar este resultado con la ecuación (3.9), nos damos cuenta de que la geometría cerca del horizonte de un agujero negro de Reissner–Nordström consiste en el producto de variedades $\text{AdS}_2 \times S^2$. De esto, concluimos que esta solución es compatible con una simetría $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SO}(3)$.

4.3. Métrica de Kerr

Esta métrica describe la geometría del espacio-tiempo vacío alrededor de un agujero negro simétrico axialmente sin carga eléctrica, con momento angular J y con un horizonte de eventos cuasiesférico.

La métrica, usando las coordenadas de Boyer-Lindquist, es [20]

$$\begin{aligned} \Phi = & - \left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma} \right) c^2 dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2 r}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \\ & - \frac{2r_s r a \sin^2 \theta}{\Sigma} c dt d\phi \end{aligned} \quad (4.15)$$

con $a = \frac{J}{Mc}$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, y $\Delta = r^2 - r_s r + a^2$.

Una característica clave a tener en cuenta en la métrica anterior es el término de producto cruzado $dt d\phi$. Esto implica que hay un acoplamiento entre el tiempo y el movimiento en el plano de rotación que desaparece cuando el momento angular del agujero negro se aproxima a cero.

La métrica de Kerr tiene dos superficies físicamente relevantes en las que parece ser singular. La superficie interna corresponde a un horizonte de eventos similar al observado en la métrica de Schwarzschild; esto ocurre cuando el componente puramente radial g_{rr} de la métrica diverge. Al resolver la ecuación cuadrática $\frac{1}{g_{rr}} = 0$ se obtiene la solución

$$r_{\pm}^H = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2}}{2}.$$

Otra aparente singularidad ocurre cuando el componente g_{tt} de la métrica cambia de signo de negativo a positivo. Nuevamente, al resolver la ecuación cuadrática $g_{tt} = 0$ se obtiene la solución

$$r_{\pm}^E = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}}{2}.$$

Debido al término $\cos^2 \theta$ en la raíz cuadrada, la superficie exterior se asemeja a una esfera aplanada que toca a la superficie interior en los polos del eje de rotación, donde la colatitud θ es igual a 0 o π ; el espacio entre estas dos superficies se llama **ergosfera**. Dentro de este volumen, el componente g_{tt} es positivo, es decir, actúa como otro componente métrico de tipo espacial.

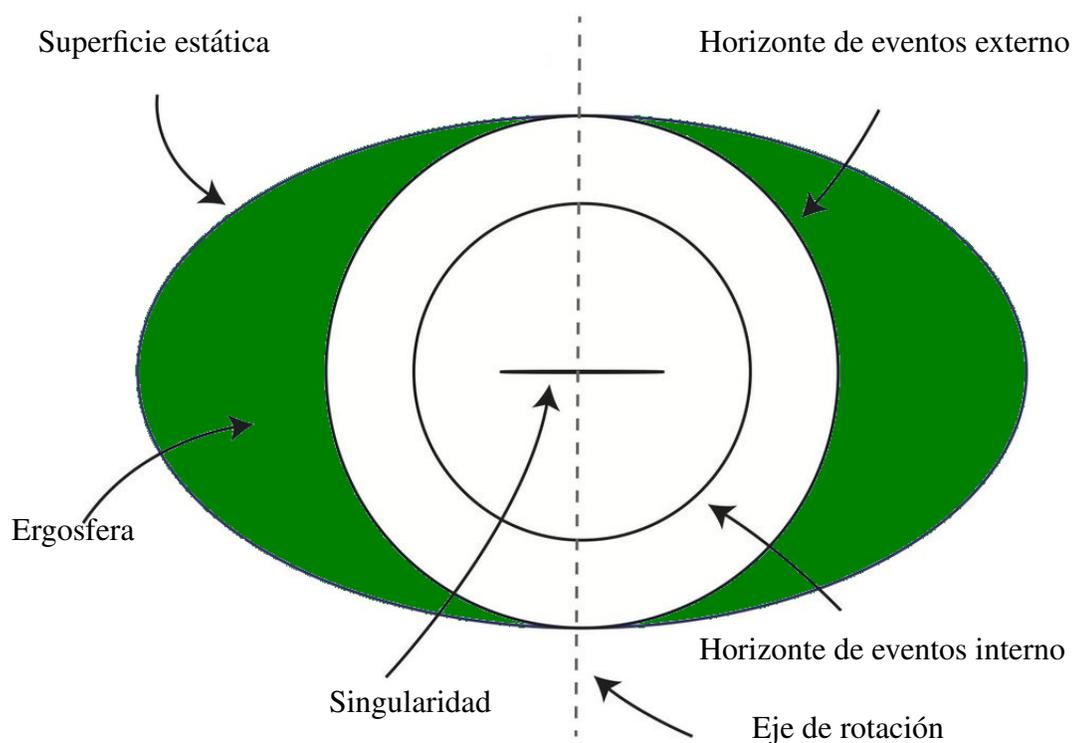


Figura 14: Ubicación de los horizontes de eventos y ergosfera del espacio-tiempo de Kerr. La superficie exterior de la ergosfera se llama superficie estática o límite estático; esto se debe a que las líneas de universo cambian de ser de tipo temporal fuera del límite estático a ser de tipo espacial dentro de él.

4.3.1. Cerca del horizonte de eventos de un agujero negro extremo

Tomando el límite $t \rightarrow \frac{t}{\varepsilon}$, $r \rightarrow \frac{r_s}{2} + \varepsilon r$, $\phi \rightarrow \phi + \frac{ct}{r_s \varepsilon}$ (este cambio se introduce para garantizar que $\partial/\partial t$ sea tangente al horizonte) y $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos que $dt \rightarrow \frac{dt}{\varepsilon}$, $dr \rightarrow \varepsilon dr$, $d\phi \rightarrow d\phi + \frac{c}{r_s \varepsilon} dt$,

$$\Sigma \rightarrow \left(\frac{r_s}{2} + \varepsilon r\right)^2 + r_s^2 \frac{\cos^2 \theta}{4} \approx \frac{r_s^2}{4} (1 + \cos^2 \theta),$$

$$\Delta \rightarrow \left(\frac{r_s}{2} + \varepsilon r\right)^2 - r_s \left(\frac{r_s}{2} + \varepsilon r\right) + a^2 = \varepsilon^2 r^2.$$

Por tanto, la métrica toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{NH}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{4\varepsilon^2 r^2}{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)} \left(\frac{cdt}{\varepsilon} - \frac{r_s}{2} \sin^2 \theta \left(d\phi + \frac{cdt}{r_s \varepsilon} \right) \right)^2 + \frac{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)}{4r^2} dr^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_s^2}{4} (1 + \cos^2 \theta) d\theta^2 + \frac{4 \sin^2 \theta}{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)} \left(\frac{r_s}{2} \frac{cdt}{\varepsilon} - \left(\frac{r_s}{2} + \varepsilon r_s r \right) \left(d\phi + \frac{cdt}{r_s \varepsilon} \right) \right)^2 \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{4\varepsilon^2 r^2}{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)} \left(\frac{cdt}{\varepsilon} - \frac{r_s}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{cdt}{r_s \varepsilon} \right) \right)^2 \right\} + \frac{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)}{4r^2} dr^2 + \\ &\quad + \frac{r_s^2}{4} (1 + \cos^2 \theta) d\theta^2 + \frac{4 \sin^2 \theta}{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)} \left(\frac{r_s^2}{2} d\phi + r cdt \right)^2 \\ &= -\frac{4r^2}{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)^2 c^2 dt^2 + \frac{r_s^2}{4} (1 + \cos^2 \theta) \left(\frac{1}{r^2} dr^2 + d\theta^2 \right) \\ &\quad + \frac{4 \sin^2 \theta}{r_s^2 (1 + \cos^2 \theta)} \left(\frac{r_s^2}{2} d\phi + r cdt \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) \left[\frac{r_s^2}{r^2} dr^2 + r_s^2 d\theta^2 - \frac{4r^2}{r_s^2} c^2 dt^2 \right] + \frac{r_s^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \left(d\phi + \frac{2r}{r_s^2} cdt \right)^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Este espacio-tiempo ya no es asintóticamente plano. De hecho, es similar a $\text{AdS}_2 \times S^2$ en muchos aspectos. Por ejemplo, si se establece $\theta = 0$ (o π), se ve que el espacio-tiempo es precisamente AdS_2 . Además de las simetrías $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial \phi$ presentes en el espacio-tiempo de Kerr, la ecuación

(4.16) es claramente invariante bajo $r \rightarrow cr$, $t \rightarrow t/c$ para cualquier constante c . Entonces la métrica cerca del horizonte de un agujero negro de Kerr tiene la simetría de dilatación de AdS_2 .

La ecuación (4.16) también es invariante bajo una traslación temporal global en AdS_2 . Tómese en cuenta que las coordenadas r, t son análogas a las coordenadas de Poincaré en AdS_2 . Para encontrar la simetría de traslación temporal global adicional, introducimos nuevas coordenadas que están relacionadas con r, t de la misma forma que las coordenadas globales de AdS_2 están relacionadas con las coordenadas de Poincaré:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_s}{2} \left[(1 + y^2)^{1/2} \cos \tau + y \right], \\ ct &= \frac{r_s^2 (1 + y^2)^{1/2} \sin \tau}{2r}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La nueva coordenada del ángulo axial φ se elige de modo que $g_{\varphi y} = 0$:

$$\phi = \varphi + \log \left| \frac{\cos \tau + y \sin \tau}{1 + (1 + y^2)^{1/2} \sin \tau} \right|. \quad (4.18)$$

De esta manera, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2dr}{r_s} &= dy \left[\frac{y}{(1 + y^2)^{1/2}} \cos \tau + 1 \right] + d\tau \left[- (1 + y^2)^{1/2} \sin \tau \right], \\ \frac{4r^2}{r_s^3} cdt &= dy \left[- \frac{\sin \tau}{(1 + y^2)^{1/2}} \right] + d\tau \left[y \left(y + (1 + y^2)^{1/2} \cos \tau \right) + 1 \right], \\ d\phi &= d\varphi + dy \left[\frac{\sin \tau}{y \sin \tau + \cos \tau} \frac{(1 + y^2)^{1/2} - y \cos \tau + \sin \tau}{(1 + y^2)^{1/2} \left((1 + y^2)^{1/2} \sin \tau + 1 \right)} \right] \\ &\quad + d\tau \left[- \frac{\sin \tau}{y \sin \tau + \cos \tau} - \frac{\cos \tau}{y \sin \tau + \cos \tau} \frac{(1 + y^2)^{1/2} \cos \tau - y}{(1 + y^2)^{1/2} \sin \tau + 1} \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

y la métrica toma la forma

$$\Phi_{\text{NH}} = \frac{r_s^2}{4} (1 + \cos^2 \theta) \left[\frac{1}{1 + y^2} dy^2 - (1 + y^2) d\tau^2 + d\theta^2 \right] + \frac{r_s^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} (d\varphi + y d\tau)^2. \quad (4.20)$$

Tómese en cuenta que la hipersuperficie $\tau = 0$ coincide con una hipersuperficie $t = 0$ y que $\varphi = \phi$ en esta hipersuperficie (y también en el infinito, para cualquier tiempo). La solución (4.20) entonces tiene todas las simetrías de AdS_2 más las traslaciones en φ : su grupo de isometría es $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{U}(1)$ [21].

4.4. Métrica de Kerr–Newman

Esta métrica es la solución estacionaria asintóticamente plana más general de las ecuaciones de Einstein en relatividad general que describe la geometría del espacio-tiempo en la región que rodea a una masa giratoria cargada eléctricamente. Generaliza la métrica de Kerr teniendo en cuenta la energía de un campo electromagnético, además de describir la rotación.

Usando las coordenadas de Boyer-Lindquist, [22]

$$\Phi = \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \Sigma - (cdt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 \frac{\Delta}{\Sigma} + ((r^2 + a^2)d\phi - acdt)^2 \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \quad (4.21)$$

donde $\Delta = r^2 - r_s r + a^2 + r_Q^2$.

Estableciendo $\frac{1}{g_{rr}} = 0$ y resolviendo para r , se obtiene el horizonte de eventos interno y

externo, que se encuentra en la coordenada de Boyer-Lindquist

$$r_{\pm}^{\text{H}} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2 - 4r_Q^2}}{2}.$$

Repitiendo este paso con g_{tt} , se obtiene la ergosfera interior y exterior:

$$r_{\pm}^{\text{E}} = \frac{r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2 \cos^2 \theta - 4r_Q^2}}{2}.$$

4.4.1. Cerca del horizonte de eventos de un agujero negro extremo

En este caso, el límite es $t \rightarrow \frac{t}{\varepsilon}$, $r \rightarrow \frac{r_s}{2} + \varepsilon r$, $\phi \rightarrow \phi + \frac{act}{r_0^2 \varepsilon}$, con $r_0^2 = \frac{r_s^2}{4} + a^2$. Esto implica $dt \rightarrow \frac{dt}{\varepsilon}$, $dr \rightarrow \varepsilon dr$, $d\phi \rightarrow d\phi + \frac{ac}{r_0^2 \varepsilon} dt$,

$$\Sigma \rightarrow \left(\frac{r_s}{2} + \varepsilon r \right)^2 + a^2 \cos^2 \theta \approx r_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \sin^2 \theta \right),$$

$$\Delta \rightarrow \varepsilon^2 r^2.$$

Así, la métrica asume la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{NH}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ r_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \sin^2 \theta \right) \left(\frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2 \right) \right. \\
&\quad - \frac{r^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \sin^2 \theta \right)^{-1} \left(cdt - a \sin^2 \theta \left(\varepsilon d\phi + \frac{ac}{r_0^2} dt \right) \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \sin^2 \theta \right)^{-1} \sin^2 \theta \left(\left[\left(\frac{r_s}{2} + \varepsilon r \right)^2 + a^2 \right] \left(d\phi + \frac{ac}{r_0^2 \varepsilon} dt \right) - \frac{acdt}{\varepsilon} \right)^2 \right\} \\
&= \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \sin^2 \theta \right) \left[\frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\theta^2 - \frac{r^2}{r_0^2} c^2 dt^2 \right] \\
&\quad + r_0^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^2}{r_0^2} \sin^2 \theta \right)^{-1} \left(d\phi + \frac{ar_s r}{r_0^4} cdt \right).
\end{aligned}$$

Tómese en cuenta que, cuando $a = 0$, la métrica anterior se reduce a $\text{AdS}_2 \times S^2$.

4.5. Generalización

Supongamos que estamos trabajando con un espacio cuya forma métrica es

$$\Phi = \Gamma(\theta) \left[-\frac{r^2}{k_1^2} c^2 dt^2 + \frac{k_1^2}{r^2} dr^2 + \alpha(\theta)^2 d\theta^2 + \gamma(\theta)^2 (d\phi + k_2 r cdt)^2 \right], \quad (4.22)$$

donde k_1, k_2 son constantes, y $\Gamma > 0$.

La simetría del espacio anterior tiene los siguientes generadores:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{-1} &= \partial_t, \\
 \zeta_0 &= t\partial_t - r\partial_r, \\
 \zeta_1 &= \frac{k_1^2}{2c} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{c^2 t^2}{k_1^4} \right) \partial_t - \frac{ctr}{k_1^2} \partial_r - \frac{k_1^2 k_2}{r} \partial_\phi, \\
 \chi &= \partial_\phi.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Está claro que ζ_{-1} y χ preservan la forma métrica.

El generador ζ_0 induce las transformaciones infinitesimales

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow (1 + \varepsilon)t \\
 r &\rightarrow (1 - \varepsilon)r
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

con $\varepsilon \ll 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 dt &\rightarrow (1 + \varepsilon)dt \\
 dr &\rightarrow (1 - \varepsilon)dr
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 r^2 dt^2 &\rightarrow (1 - \varepsilon)^2 r^2 (1 + \varepsilon)^2 dt^2 = r^2 dt^2 + O(\varepsilon^2), \\
 \frac{1}{r^2} dr^2 &\rightarrow \frac{1}{r^2} dr^2 \\
 r dt &\rightarrow (1 - \varepsilon)r(1 + \varepsilon)dt = r dt + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Entonces la forma métrica también se preserva hasta primer orden en ε .

El generador ζ_1 induce las transformaciones infinitesimales

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t + \varepsilon \frac{k_1^2}{2c} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{c^2 t^2}{k_1^4} \right) \\ r &\rightarrow r \left(1 - \varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) \\ \phi &\rightarrow \phi - \varepsilon \frac{k_1^2 k_2}{r}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

con $\varepsilon \ll 1$. De esto, tenemos que

$$\begin{aligned} dt &\rightarrow \left(1 + \varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) dt - \varepsilon \frac{k_1^2}{cr^3} dr, \\ dr &\rightarrow \left(1 - \varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) dr - \varepsilon \frac{c}{k_1^2} r dt, \\ d\phi &\rightarrow d\phi + \varepsilon \frac{k_1^2 k_2}{r^2} dr. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Entonces

$$\begin{aligned} r^2 dt^2 &\rightarrow r^2 \left(1 - 2\varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) \left[\left(1 + 2\varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) dt^2 - 2\varepsilon \frac{k_1^2}{cr^3} dt dr \right] + O(\varepsilon^2) \\ &= r^2 dt^2 - 2\varepsilon \frac{k_1^2}{cr} dt dr + O(\varepsilon^2), \\ \frac{1}{r^2} dr^2 &\rightarrow \frac{1}{r^2} \left(1 + 2\varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) \left[\left(1 - 2\varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) dr^2 - 2\varepsilon \frac{c}{k_1^2} r dr dt \right] + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{r^2} dr^2 - 2\varepsilon \frac{c}{k_1^2 r} dr dt + O(\varepsilon^2), \\ r dt &\rightarrow r \left(1 - \varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) \left[\left(1 + \varepsilon \frac{ct}{k_1^2} \right) dt - \varepsilon \frac{k_1^2}{cr^3} dr \right] \\ &= r dt - \varepsilon \frac{k_1^2}{cr^2} dr. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
-\frac{r^2}{k_1^2}c^2 dt^2 + \frac{k_1^2}{r^2} dr^2 &\rightarrow -\frac{r^2}{k_1^2}c^2 dt^2 + 2\varepsilon\frac{c}{r} dt dr + \frac{k_1^2}{r^2} dr^2 - 2\varepsilon\frac{c}{r} dr dt + O(\varepsilon^2) \\
&= -\frac{r^2}{k_1^2}c^2 dt^2 + \frac{k_1^2}{r^2} dr^2 + O(\varepsilon^2), \\
d\phi + k_2 r c dt &\rightarrow d\phi + \varepsilon\frac{k_1^2 k_2}{r^2} dr + k_2 r c dt - \varepsilon\frac{k_1^2 k_2}{r^2} dr \\
&= d\phi + k_2 r c dt.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Con lo que la forma métrica también se preserva hasta primer orden en ε .

Las transformaciones finitas que se obtienen a partir de ζ_{-1} y χ son las traslaciones temporal y azimutal, respectivamente. Por su parte, las transformaciones finitas que se obtienen a partir de ζ_0 son

$$\begin{aligned}
\exp(\varepsilon\zeta_0) t &= \exp(\varepsilon) t = ct, \\
\exp(\varepsilon\zeta_0) r &= \exp(-\varepsilon) r = \frac{r}{c},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

para cierta constante c . Estas transformaciones corresponden a la simetría de dilatación.

La métrica también es invariante bajo simetría discreta, que mapea $(t, \phi) \rightarrow (-t, -\phi)$. Esto se llama simetría de reflexión $t - \phi$.

La geometría (4.22) entonces es un producto deformado y retorcido de $\text{AdS}_2 \times S^2$ con simetría $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{U}(1)$ [23].

5. Conclusiones

Hemos utilizado las coordenadas de Rindler para estudiar sistemas de referencia acelerados uniformemente y su relación con la geometría cercana al horizonte de un agujero negro de Schwarchild. A partir de esto, descubrimos que los agujeros negros se comportan como objetos termodinámicos que emiten radiación desde el horizonte de eventos por medio del proceso conocido como radiación de Hawking, y que tienen una temperatura característica proporcional a su gravedad superficial y una entropía proporcional a un cuarto del área del horizonte de eventos.

La geometría cerca del horizonte de una amplia clase de agujeros negros extremos (Reissner-Nordström, Kerr, Kerr-Newman) tiene un factor AdS_2 , es decir, las isometrías de la geometría cercana al horizonte contienen al menos un factor $SL(2, \mathbb{R})$.

6. Trabajo Futuro

El espacio anti-de Sitter puede ser generalizado a cualquier número de dimensiones. Para dimensiones superiores, juega un papel preponderante en la correspondencia AdS/CFT, la cual sugiere que es posible explicar una fuerza en física cuántica (como la interacción débil o fuerte, o el electromagnetismo) en un determinado número de dimensiones a partir de una teoría de cuerdas, donde las cuerdas son objetos existentes en un espacio anti-de Sitter, con una dimensión adicional (no compacta). Se espera explorar esta correspondencia en trabajos más avanzados.

Referencias

- [1] Sylvester, J. J. (1852). XIX. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 4(23), 138-142.
- [2] David N. Pham. (2012). Generalized de Sitter Space in n -dimensional Minkowski Space.
- [3] Synge, J., & Schild, A. (1949). Tensor Calculus. Toronto: University of Toronto Press. pp. 81-110
- [4] Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen Der Physik, 322(10), 891–921.
- [5] Einstein, A. (2006). Die Feldgleichungen der Gravitation. Albert Einstein: Akademie-Vorträge, 88–92.
- [6] Misner, C., Thorne, K., & Wheeler, J. (1973). Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman. pp. 875–876.
- [7] Damour, T. (2017). Poincaré, the dynamics of the electron, and relativity. Comptes Rendus Physique, 18(9-10), 551–562.
- [8] Rindler, W. (1961). Length Contraction Paradox. American Journal of Physics, 29(6), 365–366.
- [9] Bayona, C., & Braga, N. (2007). Anti-de Sitter boundary in Poincaré coordinates. General Relativity and Gravitation, 39(9), 1367–1379.

- [10] Boucher, W., Gibbons, G. W., & Horowitz, G. T. (1984). Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime. *Physical Review D*, 30(12), 2447–2451.
- [11] Cadoni, M., & Mignemi, S. (1999). Asymptotic symmetries of AdS_2 and conformal group in $d = 1$. *Nuclear Physics B*, 557(1-2), 165–180.
- [12] A. Y. Shiekh. (2012). Approaching the event horizon of a black hole.
- [13] Cohn, J. (1969). On a physical interpretation of the Schwarzschild metric. *International Journal of Theoretical Physics*, 2(3), 267–279.
- [14] Eddington, A. S. (1924). A Comparison of Whitehead's and Einstein's Formulæ. *Nature*, 113(2832), 192–192.
- [15] Hawking, S. W. (1975). Particle creation by black holes. *Communications In Mathematical Physics*, 43(3), 199–220.
- [16] Unruh, W. G. (2001). Black Holes, Dumb Holes, and Entropy. In Callender, C. (ed.). *Physics meets Philosophy at the Planck Scale*. Cambridge University Press. pp. 152–173, Eq. 7.6.
- [17] Reissner, H. (1916). Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen Der Physik*, 355(9), 106–120.
- [18] Toshmatov, B., Ahmedov, B., Abdujabbarov, A., & Stuchlík, Z. (2014). Rotating regular black hole solution. *Physical Review D*, 89(10).
- [19] Carter, B. (1968). Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Physical Review*, 174(5), 1559–1571.

- [20] Kerr, R. P. (1963). Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Review Letters*, 11(5), 237–238.
- [21] Bardeen, J., & Horowitz, G. T. (1999). Extreme Kerr throat geometry: A vacuum analog of $\text{AdS}_2 \times S^2$. *Physical Review D*, 60(10).
- [22] Newman, E. T., & Janis, A. I. (1965). Note on the Kerr Spinning-Particle Metric. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6), 915–917.
- [23] Compère, G. (2012). The Kerr/CFT Correspondence and its Extensions. *Living Reviews in Relativity*, 15(1).