

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Ciencias e Ingeniería**

**Estrellas Ultracompactas como  
Mimetizadoras de Agujeros Negros**

**Marcelo Antonio Anda Chavarría**

**Física**

Trabajo de fin de carrera presentado como requisito  
para la obtención del título de  
Licenciado en Física

Quito, 15 de Diciembre de 2021

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Ciencias e Ingeniería**

**HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE FIN DE  
CARRERA**

**Estrellas Ultracompactas como Mimetizadoras de Agujeros  
Negros**

**Marcelo Antonio Anda Chavarría**

Nombre del profesor, Título académico: Ernesto Contreras, Ph.D.

Quito, 15 de Diciembre de 2021

## © DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombres y apellidos: Marcelo Antonio Anda Chavarría

Código: 00209866

Cédula de Identidad: 0956887939

Lugar y fecha: Quito, 15 de Diciembre de 2021

## ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN

**Nota:** El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETHeses>.

## UNPUBLISHED DOCUMENT

**Note:** The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETHeses>.

*“Eppur si muove”*

- Galileo Galilei

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente a mis padres por su compañía y apoyo incondicional en mi sueño de estudiar Física, a mis hermanos por siempre estar pendientes de mí y a mis amigos por alentarme para lograr mis objetivos. Agradezco a la USFQ por todos los buenos momentos, experiencias y oportunidades que me ha brindado a lo largo de estos años. Agradezco a todas las personas que conforman el departamento de Física, profesores y estudiantes, especialmente a Edgar Carrera, quien fue mi supervisor y mentor durante las pasantías, y a Ernesto Contreras, mi tutor en este trabajo de titulación. Finalmente, agradezco al Lic. Eduardo Franco, quien fue mi maestro durante el bachillerato y fue la primera persona que me alentó a seguir una camino relacionado con la ciencia.

## RESUMEN

En este proyecto estudiaremos el modelo de gravastar desarrollado por P. Mazur y E. Mottola. Este modelo fue propuesto como una alternativa a los agujeros negros y consta de tres regiones: su exterior está descrito por el vacío de Schwarzschild, su interior está descrito por el espacio-tiempo de Sitter y una región intermedia que consta de una fina capa de materia. Estudiaremos los temas más esenciales de la teoría de la relatividad general y terminaremos demostrando cómo el modelo de Gravastar surge como un límite de la solución interior de Schwarzschild.

**Palabras clave:** gravastar, estrellas ultracompactas, estrellas gravitacionales de vacío, agujeros negros, relatividad general, métrica de Schwarzschild, métrica de Sitter.

## ABSTRACT

In this project we will study the gravastar model developed by P. Mazur and E. Mottola. This model was proposed as an alternative to black holes and consists of three regions: its exterior is described by the Schwarzschild vacuum, its interior is described by de Sitter spacetime, and an intermediate region consisting of a thin layer of matter. We will study the most essential topics of the theory of general relativity and we will end by demonstrating how the Gravastar model emerges as a limit of the Schwarzschild interior solution.

**Keywords:** gravastar, ultracompact stars, gravitational vacuum stars, black holes, general relativity, Schwarzschild metric, de Sitter metric.

# Índice general

<b>Lista de Figuras</b>	<b>11</b>
<b>1. Introduccion</b>	<b>13</b>
<b>2. Ecuaciones de Campo de Einstein</b>	<b>15</b>
<b>3. Ecuaciones de Campo Para un Espacio-Tiempo Estático de Simetría Esférica</b>	<b>21</b>
<b>4. Solución Exterior de Schwarzschild</b>	<b>28</b>
<b>5. Solución Interior de Schwarzschild</b>	<b>35</b>
5.1. Consideraciones . . . . .	35
5.2. Métrica Interior de Schwarzschild . . . . .	38
<b>6. Modelo de Gravastar como un límite de la solución interior de Schwarzschild</b>	<b>46</b>
6.1. Modelo de Mazur y Mottola . . . . .	46
6.2. Gravastars con Presión Anisótropa . . . . .	50

	10
<b>Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>
<b>A. Aproximación de Campo Débil</b>	<b>57</b>
<b>B. Variación de la Raíz del Determinante del Tensor Métrico</b>	<b>60</b>
<b>C. Símbolos de Christoffel en Función del Determinante del Tensor Métrico</b>	<b>63</b>
<b>D. Variación del Tensor de Curvatura de Ricci</b>	<b>65</b>
<b>E. Variación del Escalar de Ricci</b>	<b>67</b>
<b>F. Ecuación TOV</b>	<b>70</b>
<b>G. Espacio - Tiempo de Sitter</b>	<b>75</b>
G.1. Espacios Maximalmente Simétricos . . . . .	75
G.2. Espacio - tiempo de Sitter . . . . .	77
G.3. Espacio Tiempo de Sitter en Coordenadas Estáticas . . . . .	79

# Índice de figuras

4.1.	Envío de señales de luz. . . . .	31
4.2.	Diagramas espacio-temporales. (Cortesía de L. Ryder [4].) . . . . .	33
5.1.	$p(r)$ para $R > \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores $R/R_s = 1,250, 1,136, 1,126$ (rojo, verde, azul) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].) . . . . .	43
5.2.	$f^{\frac{1}{2}}(r)$ para $R > \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores $R/R_s = 2,50, 1,67, 1,25, 1,136, 1,126$ (café, naranja, rojo, verde, azul) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].) . . . . .	43
5.3.	$p(r)$ para $R < \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores $R/R_s = 1,124, 1,087, 1,053$ (café, naranja, rojo) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].) . . . . .	44
5.4.	$f^{\frac{1}{2}}(r)$ para $R < \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores $R/R_s = 1,124, 1,087, 1,053, 1,010, 1,001$ (café, naranja, rojo, verde, azul) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].) . . . . .	44
6.1.	Presión negativa para límite de la solución interior de Schwarzschild $R = 1,000001R_s$ . (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].) . . . . .	48
6.2.	$f^{\frac{1}{2}}(r)$ para límite de la solución interior de Schwarzschild $R = R_s$ . Note que $f^{\frac{1}{2}}(0) = 0,5$ en el centro de la estrella. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].) . . . . .	48

6.3. Gráfico cualitativo de $p(r)$ para una gravastar. (Cortesía de Cattoen et al. [1]) . . . . .	50
---	----

# Capítulo 1

## Introduccion

Una estrella ultracompacta, estrella gravitacional de vacío o gravastar es un modelo teórico originalmente propuesto por Pawel Mazur y Emil Mottola [11] en el año 2002. Este modelo surge como una propuesta alternativa a los agujeros negros. Una gravastar y un agujero negro lucirían similares en el exterior debido a que en esa región ambos se describen mediante la métrica de Schwarzschild en el vacío.

En el modelo original [11, 12] una gravastar posee tres regiones: una externa que está descrita por la métrica Schwarzschild en el vacío, una interna descrita por la métrica de Sitter y una capa fina de materia ubicada justo en el radio de Schwarzschild  $R_s$  que acopla el vacío de Schwarzschild con el espacio-tiempo de Sitter. En la zona interna la ecuación de estado es  $p = -\rho_0$ , donde la presión negativa constante puede interpretarse como “energía oscura” que causa una expansión frenando el colapso gravitacional y evitando así la formación de una singularidad.

Para estudiar el modelo de gravastar es necesario hacer una revisión de los tópicos más esenciales de la teoría de la relatividad general, tales como la derivación de las ecuaciones de campo de Einstein y sus soluciones en simetría esférica: la métrica interior y exterior de Schwarzschild. A lo largo de este proyecto se estudiarán los temas mencionados para luego construir el modelo de gravastar propuesto por Mazur y Mottola.

## Capítulo 2

# Ecuaciones de Campo de Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein nos dicen cómo el espacio-tiempo se curva por la presencia de materia y dicha curvatura es la responsable del efecto gravitacional. Existen dos formas de derivar las ecuaciones de campo, la primera originalmente propuesta por Albert Einstein en 1915, la cual consiste en construir un tensor que contenga información de la geometría del espacio-tiempo y su derivada covariante sea cero. La segunda forma de obtener estas ecuaciones, propuesta originalmente por David Hilbert, es mediante el principio de mínima acción. A lo largo de este capítulo se construirán las ecuaciones de campo y veremos cómo en la aproximación de campo débil estas ecuaciones concuerdan con la teoría de la gravitación de Newton.

De la aproximación de campo débil (apéndice A) sabemos que el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  contiene información de la geometría del espacio-tiempo y el campo gravitacional, por lo que queremos construir una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  que dependa del tensor métrico y sus derivadas. Considere que:

1. El sector gravitacional de la acción solo debe depender de la geometría (No debe existir ningún marco de referencia o sistema de coordenadas preferencial).
2. La geometría debe ser Pseudo-Riemanniana, es decir, la signatura del tensor métrico es  $(- + + +)$ .
3. La densidad lagrangiana debe contener términos lineales de hasta la segunda derivada del tensor métrico.

Por la condición (1) la acción es:

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (2.1)$$

Como se mencionó anteriormente,  $\mathcal{L}$  es una función escalar que depende del tensor métrico y sus derivadas. Por la condición (3)  $\mathcal{L}$  no puede contener términos más allá de la segunda derivada del tensor métrico. Un escalar que contiene información sobre la geometría del espacio-tiempo y posee términos lineales que dependen hasta la segunda derivada del tensor métrico es el escalar de curvatura  $R$ . Si tomamos  $\mathcal{L} = R$ , entonces la ecuación (2.1) se convierte en la acción de Hilbert-Einstein:

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R. \quad (2.2)$$

Note que  $S_{EH}$  es invariante frente a transformaciones generales de coordenadas, ya que  $d^4x \sqrt{-g}$  forma el elemento de volumen. Utilizamos el principio de mínima

acción  $\delta S_{EH} = 0$ :

$$\delta S_{EH} = \delta \left[ \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R \right] = \int_{\mathcal{M}} d^4x (\sqrt{-g} \delta R + R \delta \sqrt{-g}) = 0. \quad (2.3)$$

Utilizando las expresiones calculadas para  $\delta \sqrt{-g}$  y  $\delta R$  en los apéndices B y E respectivamente, se tiene que:

$$\delta S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_a (\sqrt{-g} J^a) = 0. \quad (2.4)$$

Suponiendo una variedad espacio-temporal  $\mathcal{M}$  sin frontera que se extiende hasta el infinito y que la variación de la métrica  $\delta g^{\mu\nu}$  se anula en el límite, entonces la segunda integral no contribuye con la variación de la acción y podemos escribir:

$$\delta S_{HE} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Luego, esto conduce a:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.6)$$

que corresponden a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. La acción completa de la teoría está dada por la suma de la acción de Einstein-Hilbert y el término de materia.

$$S = S_{HE} + S_m = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (2.7)$$

Nuevamente, utilizamos el principio de mínima acción:

$$\delta S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.8)$$

y obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de materia:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

donde:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \quad (2.11)$$

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\mu}, \quad (2.12)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda m} (\partial_\nu g_{m\mu} + \partial_\mu g_{m\nu} - \partial_m g_{\mu\nu}), \quad (2.13)$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.14)$$

$R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}$  es el tensor de Riemann,  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  son los símbolos de Christoffel y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento. La constante  $\kappa$  es elegida de tal forma que en el límite Newtoniano recuperemos la Ley de la Gravitación Universal. Multiplicando por  $g^{\mu\nu}$  a ambos lados de la ecuación (2.9), se tiene que:

$$R - \frac{1}{2} R \delta^\mu{}_\mu = R - \frac{1}{2} 4R = \frac{\kappa}{2} T \quad \Rightarrow \quad R = -\frac{\kappa}{2} T, \quad \text{donde } T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}.$$

Al reemplazar este resultado en las ecuaciones de campo de Einstein (2.9), podemos escribir:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right]. \quad (2.15)$$

Considere la aproximación de campo débil discutida en el apéndice A:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad y \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad \text{donde } |h| \ll 1. \quad (2.16)$$

Recuerde que la componente  $g_{00}$  del tensor métrico contiene información del campo gravitacional. Tomamos la componente 00 de las ecuaciones de campo:

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{00} - \frac{1}{2} T^0_{\phantom{0}0} g_{00} \right] = \frac{\kappa}{4} T_{00}, \quad \text{donde } T_{00} = T^0_{\phantom{0}0} g_{00}. \quad (2.17)$$

Note que:

$$R_{00} = R^\mu_{\phantom{\mu}0\mu 0} = -\partial_\mu \Gamma^\mu_{00}. \quad (2.18)$$

Como  $g_{\mu\nu}$  no depende del tiempo, unicamente queda la parte espacial de la contracción anterior:

$$R_{00} = -\partial_i \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \partial_i (g^{i\alpha} \partial_\alpha g_{00}) = \frac{1}{2} \partial_i (g^{ij} \partial_j g_{00}) \approx \frac{1}{2} \partial_i (\eta^{ij} \partial_j h_{00}) = \frac{1}{2} \partial^i \partial_i h_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00},$$

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi = \frac{4\pi G}{c^2} \rho_m, \quad (2.19)$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitatorio Newtoniano. Considere el tensor energía momento como:

$$T_{\mu\nu} = - \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

donde  $U^\mu = \gamma(c, \vec{v})$  es el vector cuadrivelocidad,  $\gamma$  es el factor de Lorentz,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $\rho_m$  es la densidad de masa y  $p$  es la presión. Calculamos la componente  $T_{00}$ :

$$T_{00} = \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) c^2 - (1 - h_{00})p \approx c^2 \rho_m. \quad (2.21)$$

Al reemplazar (2.19) y (2.21) en (2.17), se tiene que:

$$\kappa = \frac{16\pi G}{c^4}. \quad (2.22)$$

Finalmente, al reemplazar (2.22) en (2.9) obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein de tal forma que en la aproximación de campo débil coincidan con la ley de la gravitación universal de Newton:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

En el siguiente capítulo calcularemos las ecuaciones de campo de Einstein para un espacio-tiempo estático con simetría esférica, las cuales serán utilizadas en posteriores capítulos para obtener la métrica dentro y fuera de un cuerpo esférico en reposo con masa  $M$ .

## Capítulo 3

# Ecuaciones de Campo Para un Espacio-Tiempo Estático de Simetría Esférica

Trabajaremos con el siguiente sistema de coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ , donde  $ct$  representa la componente temporal,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^3$  que representan las componentes espaciales. Considere que:

- El espacio-tiempo tiene simetría esférica, es decir, es invariante bajo rotaciones y reflexiones.
- El espacio-tiempo es estático, es decir, la geometría del mismo no cambia a medida que el tiempo transcurre  $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0$ .
- La signatura del tensor métrico es  $(-+++)$ .

La forma más general del elemento de línea está dada por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico de  $4 \times 4$  componentes, el cual es simétrico por definición (esto implica que tiene únicamente 10 elementos independientes). Considere las siguientes transformaciones (reflexiones sobre una coordenada, por lo que se espera que las componentes de la métrica mantengan su forma):

- $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (-x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$g'_{0\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta} = -\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} = -g_{0\nu}, \quad \text{para } \nu \neq 0.$$

Sin embargo, sabemos que las componentes del tensor métrico no deben de cambiar sobre reflexiones, por lo que podemos escribir  $g'_{0\nu} = g_{0\nu}$ . Al combinar estos resultados, se tiene que:

$$g_{0\nu} = -g_{0\nu} \quad \Rightarrow \quad g_{0\nu} = g_{\nu 0} = 0, \quad \text{para } \nu \neq 0.$$

De manera similar se obtienen las expresiones para las otras componentes.

- $g_{1\nu} = -g_{1\nu} \quad \Rightarrow \quad g_{1\nu} = g_{\nu 1} = 0, \quad \text{para } \nu \neq 1,$
- $g_{2\nu} = -g_{2\nu} \quad \Rightarrow \quad g_{2\nu} = g_{\nu 2} = 0, \quad \text{para } \nu \neq 2,$
- $g_{3\nu} = -g_{3\nu} \quad \Rightarrow \quad g_{3\nu} = g_{\nu 3} = 0, \quad \text{para } \nu \neq 3.$

De los resultados anteriores se puede inferir que el tensor métrico es diagonal, por lo que el elemento de línea se reduce a la siguiente expresión:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2. \quad (3.2)$$

Considere una hipersuperficie espacio-temporal con  $t$  fijo. Si variamos  $(\theta, \phi)$  y las componentes de la métrica cambian, entonces se estaría violando la invariancia sobre rotaciones. Por lo tanto, la componente  $g_{11}$  del tensor métrico debe depender únicamente del radio  $r$ ,  $g_{11} = A(r)$ . Mediante un argumento similar, se tiene que  $g_{22} = B(r)$ . Para una Hipersuperficie Espacio-Temporal con  $t$  y  $r$  fijos, el elemento del línea debe de ser igual al de una esfera en un espacio Euclideo tridimensional:

$$dl^2 = r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (3.3)$$

Al comparar con la parte angular de la métrica obtenida en la ecuación (3.2), se tiene que:

$$g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 = r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow g_{22} = r^2 \quad \wedge \quad g_{33} = r^2\sin^2(\theta). \quad (3.5)$$

Al combinar los resultados anteriores, podemos escribir:

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2. \quad (3.6)$$

Definimos  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ . Para mantener la signatura de la métrica tomamos  $A(r) = -e^{2\alpha(r)}$  y  $B(r) = e^{2\beta(r)}$ , por lo tanto:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}c^2dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.7)$$

El tensor métrico está dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Utilizando la métrica (3.8) y la ecuación (2.13) podemos calcular los símbolos de Christoffel para un espacio-tiempo estático con simetría esférica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^t = \begin{bmatrix} 0 & \partial_r\alpha & 0 & 0 \\ \partial_r\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \begin{bmatrix} e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_r\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -re^{-2\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -re^{-2\beta}\sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot(\theta) \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot(\theta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Utilizando los símbolos de Christoffel (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) y la ecuación (2.12) obtenemos las componentes no nulas del tensor de Riemman:

$$R_{rtr}^t = \partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2, \quad (3.13)$$

$$R_{\theta t\theta}^t = -re^{-2\beta}\partial_r\alpha, \quad (3.14)$$

$$R_{\phi t\phi}^t = -re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\alpha, \quad (3.15)$$

$$R_{\theta r\theta}^r = re^{-2\beta}\partial_r\beta, \quad (3.16)$$

$$R_{\phi r\phi}^r = re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\beta, \quad (3.17)$$

$$R_{\phi\theta\phi}^{\theta} = (1 - e^{-2\beta})\sin^2\theta. \quad (3.18)$$

Utilizando el tensor de Riemman y la ecuación  $R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^{\rho}$  obtenemos las componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right], \quad (3.19)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta, \quad (3.20)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1, \quad (3.21)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (3.22)$$

El escalar de curvatura se calcula mediante la contracción  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Debido a que la métrica  $g_{\mu\nu}$  es diagonal, entonces su inversa  $g^{\mu\nu}$  también es diagonal y se relacionan de la siguiente forma  $g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}$ . Por lo que podemos escribir:

$$R = \frac{1}{g^{tt}} R_{tt} + \frac{1}{g^{rr}} R_{rr} + \frac{1}{g^{\theta\theta}} R_{\theta\theta} + \frac{1}{g^{\phi\phi}} R_{\phi\phi}, \quad (3.23)$$

$$R = -2e^{-2\beta} \left[ \partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right]. \quad (3.24)$$

Definimos el tensor de Einstein como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

Calculamos sus componentes:

$$G_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \frac{2}{r} \partial_r \beta - \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right] = \frac{8\pi G}{c^4} T_{tt}, \quad (3.26)$$

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \partial_r \alpha + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{rr}, \quad (3.27)$$

$$G_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r^2 \partial_r^2 \alpha + r^2 (\partial_r \alpha)^2 - r^2 \partial_r \alpha \partial_r \beta + r (\partial_r \alpha - \partial_r \beta)] = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\theta\theta}, \quad (3.28)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2(\theta) G_{\theta\theta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\phi\phi}. \quad (3.29)$$

Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein para un espacio-tiempo estático con simetría esférica obtendremos una solución de vacío (donde  $T_{\mu\nu} = 0$ ) en el exterior de un cuerpo esférico de masa  $M$ . La métrica que satisface estas condiciones es conocida como métrica exterior de Schwarzschild y puede describir aproximadamente como se comporta el espacio-tiempo en el exterior de un planeta, una estrella o cualquier otro cuerpo con simetría esférica. Además, esta métrica puede describir el modelo más simple de un agujero negro.

## Capítulo 4

# Solución Exterior de Schwarzschild

Sea un objeto esférico de masa  $M$ , estático, aislado y de radio  $R$ . Queremos encontrar la métrica del espacio-tiempo para  $r > R$ . Note que en dicha región del espacio-tiempo no hay materia ni energía, por lo que el tensor de energía-momento es nulo  $T_{\mu\nu} = 0$ , entonces por (2.15) las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío también se pueden escribir como:

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{4.1}$$

Utilizando las componentes no nulas del tensor de Ricci (??) para un espacio-tiempo estático con simetría esférica, obtenemos tres ecuaciones independientes (debido a que  $R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$ ). Note que:

$$e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{2}{r}(\partial_r \alpha + \partial_r \beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\beta + k, \quad (4.3)$$

donde  $k$  es una constante de integración. Al reemplazar el resultado anterior en la ecuación  $R_{\theta\theta} = 0$  se tiene:

$$e^{-2k} e^{2\alpha} [r(-2\partial_r \alpha) - 1] + 1 = 0, \quad (4.4)$$

$$e^{2\alpha} = e^{2k} - \frac{R_s}{r} \quad y \quad e^{2\beta} = e^{2k} \left( e^{2k} - \frac{R_s}{r} \right)^{-1}, \quad (4.5)$$

donde  $R_s$  es una constante de integración. Al reemplazar estos resultados en la ecuación (3.7), se tiene que:

$$ds^2 = - \left( e^{2k} - \frac{R_s}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{e^{2k}}{\left( e^{2k} - \frac{R_s}{r} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.6)$$

Tomando el límite cuando  $r \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ds^2 = -e^{2k} c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.7)$$

Como condición se impone que si  $r \rightarrow \infty$  recuperemos la métrica de Minkowski, es decir, el espacio-tiempo debe ser asintóticamente plano. La única forma de que esto suceda es cuando  $k = 0$ . Por lo tanto, la métrica exterior de Schwarzschild está dada por:

$$ds_{ext}^2 = - \left( 1 - \frac{R_s}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{R_s}{r} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.8)$$

Para valores de  $r$  muy grandes, pero aún bajo la influencia de un campo gravitacional, la métrica de Schwarzschild debe ser compatible con la aproximación de campo débil (apéndice A). Al igualar las componentes  $g_{tt}$  de ambas métricas, se tiene que:

$$1 - \frac{R_s}{r} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad \Rightarrow \quad R_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (4.9)$$

donde  $\phi = -\frac{GM}{r}$  es el potencial gravitatorio Newtoniano y  $R_s$  es el radio de Schwarzschild. Note que la métrica de Schwarzschild (4.8) aparentemente tiene dos puntos problemáticos  $\{0, R_s\}$ . Supongamos que tenemos un objeto con  $R < R_s$ . Si existe algún problema con la geometría, entonces algún escalar debe ser divergente en dichos puntos. Note que:

- El escalar de curvatura  $R = 0$ , debido a que para soluciones de vacío  $R_{\mu\nu} = 0$ .
- El escalar Ricci cuadrado  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0$ .
- El escalar de Kretschmann  $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}$ .

El punto  $r = R_s$  es un punto regular para el escalar de Kretschmann, mientras que  $r = 0$  es un punto singular. Ahora considere el siguiente escenario, un emisor ubicado en  $r_1 > R_s$  envía señales de luz a un receptor ubicado en  $r_2 > r_1$ , tal como se muestra en la siguiente figura:

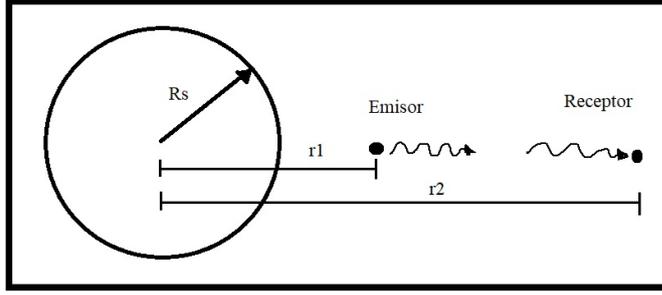


Figura 4.1: Envío de señales de luz.

El cociente entre la variación del tiempo propio del emisor y el receptor está dado por:

$$\frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \frac{\nu_E}{\nu_R} = \frac{\lambda_R}{\lambda_E} = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.10)$$

Suponga que el emisor se acerca al radio de Schwarzschild  $r_1 \rightarrow R_s$  y el receptor es un observador muy lejano  $r_2 \rightarrow \infty$ , entonces se tiene que:

$$\Delta\tau_R = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \Delta\tau_E \rightarrow \infty \quad y \quad \frac{\lambda_R}{\lambda_E} \rightarrow \infty, \quad (4.11)$$

el intervalo de tiempo en que el receptor recibe una señal de luz tiende a infinito, es decir, a medida que el emisor se acerca al radio de Schwarzschild, el receptor tarda más tiempo en recibir sus señales y este nunca lo ve ingresar más allá de  $R_s$ . Al calcular las geodésicas radiales de tipo tiempo, se tiene que:

$$\tau - \tau_1 = -\frac{2}{3} \left(\frac{c^2}{2GM}\right)^{\frac{1}{2}} (r^{\frac{3}{2}} - r_1^{\frac{3}{2}}), \quad (4.12)$$

donde  $r < R_s$ . Por lo tanto, el tiempo propio del emisor para atravesar  $R_s$  es finito, es decir, el emisor sí puede ir más allá de  $R_s$  aunque para el receptor este nunca logre pasar dicha zona. Calculamos las geodésicas nulas con  $\theta$  y  $\phi$  constantes:

$$ct = r + \frac{2GM}{c^2} \ln |c^2 r - 2GM| + cte, \quad (4.13)$$

$$ct = -r - \frac{2GM}{c^2} \ln |c^2 r - 2GM| + cte. \quad (4.14)$$

Utilizando el siguiente cambio de coordenadas (Eddington - Finkelstein):

$$\bar{ct} = ct + \frac{2GM}{c^2} \ln |c^2 r - 2GM|, \quad (4.15)$$

entonces las geodésicas nulas adoptan la siguiente forma:

$$\bar{c}t = r + \frac{4GM}{c^2} \ln |c^2 r - 2GM| + cte, \quad (4.16)$$

$$\bar{c}t = -r + cte. \quad (4.17)$$

Los diagramas espacio-temporales para la métrica de Schwarzschild se muestran en la siguiente figura:

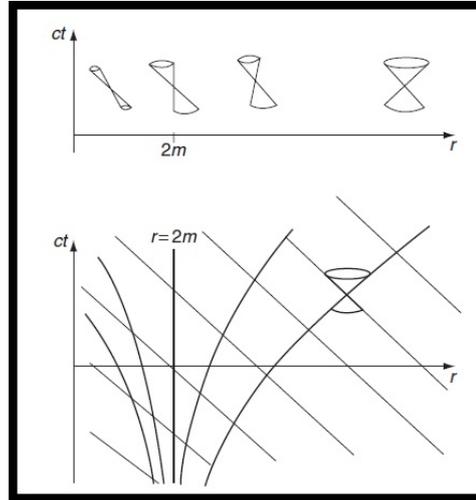


Figura 4.2: Diagramas espacio-temporales. (Cortesía de L. Ryder [4].)

Note que los conos de luz se doblan y apuntan hacia  $r = 0$  a medida que alguna partícula de prueba se acerca a  $R_s$ . Si  $r < R_s$ , el elemento de línea se puede escribir como:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (4.18)$$

Esto demuestra que los roles del espacio y el tiempo se intercambian en la región  $r < R_s$ , debido a que las coordenadas  $r$  y  $t$  cambian de signo. El objeto que acabamos de describir se denomina agujero negro y el borde  $r = R_s$  es el horizonte de sucesos. Estos objetos pueden producirse en la naturaleza debido al colapso gravitacional en la “muerte” de una estrella con  $M = 4 - 5M_\odot$ .

En el siguiente capítulo calcularemos la métrica interior de Schwarzschild para un objeto esférico de radio  $R$  y masa  $M$  en reposo. Como condiciones de borde se tienen: presión nula en la superficie  $p(R) = 0$ , la función de masa en la superficie es la masa total  $m(R) = M$  y el acomple entre las métricas externa e interna  $g_{\mu\nu}^{(int)}(R) = g_{\mu\nu}^{(ext)}(R)$ .

## Capítulo 5

# Solución Interior de Schwarzschild

### 5.1. Consideraciones

Considere una esfera de materia de radio  $R$  (estática) aislada en el espacio profundo. La materia contenida en el interior se puede describir como un fluido perfecto, cuyo  $T_{\mu\nu}$  está dado por:

$$T_{\mu\nu} = - \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

donde  $U_\mu$  es el vector cuadrivelocidad de la esfera de materia y  $g_{\mu\nu}$  es la métrica que describe el espacio en su interior. Debemos resolver las ecuaciones de campo de Einstein con simetría esférica utilizando el tensor de energía-momento en (5.1) para  $r < R$ . Por conservación del tensor de energía-momento se tiene que:

$$\nabla_\mu \left[ \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (5.2)$$

$$U^\mu U^\nu \nabla_\mu \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) [U^\mu \nabla_\mu U^\nu + U^\nu \nabla_\mu U^\mu] - p \nabla_\mu g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\mu p = 0. \quad (5.3)$$

Multiplicamos la expresión anterior por  $U_\nu$ . Al reducir términos:

$$U^\mu \nabla_\mu \rho_m + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) \nabla_\mu U^\mu = 0. \quad (5.4)$$

Reemplazando la ecuación (5.4) en la ecuación (5.3):

$$- \left( g^{\mu\nu} - \frac{U^\mu U^\nu}{c^2} \right) \nabla_\mu p + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0. \quad (5.5)$$

Resolviendo la ecuación (5.5), vea el apéndice F, obtenemos:

$$\partial_r \alpha = - \frac{1}{c^2 \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right)} \frac{dp}{dr}, \quad (5.6)$$

la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Considere la componente  $G_{tt}$  del tensor de Einstein para simetría esférica:

$$G_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \frac{2}{r} \partial_r \beta - \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right] = - \frac{1}{r^2} e^{2\alpha} \partial_r [r(e^{-2\beta} - 1)]. \quad (5.7)$$

El cuadrivector velocidad para un fluido estático está dado por  $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$ .

Calculamos la componente  $T_{tt}$  del tensor energía - momento:

$$T_{tt} = \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) c^2 e^{2\alpha} - p e^{2\alpha} = c^2 \rho_m e^{2\alpha}. \quad (5.8)$$

Al reemplazar (5.7) y (5.8) en las ecuaciones de campo:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r [r(e^{-2\beta} - 1)] = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho_m. \quad (5.9)$$

Integrando la ecuación anterior hasta cierto radio  $r \leq R$ :

$$r(e^{-2\beta} - 1) = -\frac{8\pi G}{c^2} \int_0^r \rho_m(r') r'^2 dr'. \quad (5.10)$$

Se define la función de masa como:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_m(r') r'^2 dr'. \quad (5.11)$$

Al reemplazar (5.11) en (5.10) obtenemos la componente  $g_{rr}$  del tensor métrico:

$$\frac{1}{g_{rr}} = e^{-2\beta} = 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}. \quad (5.12)$$

Considere la componente  $G_{rr}$  del tensor de Einstein para simetría esférica:

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \partial_r \alpha + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) = \frac{2}{r} \partial_r \alpha - \frac{2Gm}{r^2(rc^2 - 2Gm)}. \quad (5.13)$$

Sabemos que  $U_r = 0$  y  $g_{rr} = e^{2\beta}$ . Al calcular la componente  $rr$  del tensor

energía-momento:

$$T_{rr} = - \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) (U_r)^2 + pg_{rr} = pe^{2\beta}. \quad (5.14)$$

Utilizando este el resultado en (5.12), tenemos:

$$T_{rr} = p \left( \frac{1}{1 - \frac{2Gm}{rc^2}} \right) = \frac{rc^2 p}{rc^2 - 2Gm}. \quad (5.15)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.13) y (5.15) en las ecuaciones de campo:

$$\partial_r \alpha = \frac{G(mc^2 + 4\pi r^3 p)}{rc^2(rc^2 - 2Gm)} = \frac{Gmc^2(1 + \frac{4\pi r^3 p}{mc^2})}{r^2 c^4(1 - \frac{2Gm}{rc^2})}. \quad (5.16)$$

Tomando el resultado anterior podemos reescribir la ecuación TOV:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{Gm}{r^2} \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) \left( 1 + \frac{4\pi r^3 p}{mc^2} \right) \left( 1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1}. \quad (5.17)$$

## 5.2. Métrica Interior de Schwarzschild

Note que para este caso las ecuaciones de campo de Einstein corresponden a un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas ( $p(r), \rho(r), \alpha(r), \beta(r)$ ), para resolver estas ecuaciones es necesario proveer de una ecuación de estado. Supongamos que:

$$\rho_m(r) = \rho_o = cte, \quad (5.18)$$

entonces la ecuación (5.11) se puede escribir como:

$$m(r) = 4\pi\rho_o \int_0^r r'^2 dr' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o. \quad (5.19)$$

Utilizando la condición de borde  $m(R) = M$  en la ecuación (5.12), se tiene:

$$g_{rr} = h(r) = e^{2\beta(r)} = \left(1 - \frac{R_s r^2}{R^3}\right)^{-1}. \quad (5.20)$$

Ahora, considere la ecuación (5.6):

$$\partial_r \alpha = -\frac{1}{c^2 \left(\rho_o + \frac{p}{c^2}\right)} \frac{dp}{dr} = -\frac{1}{\left(\rho_o + \frac{p}{c^2}\right)} \frac{d}{dr} \left(\rho_o + \frac{p}{c^2}\right) = -\frac{d}{dr} \ln \left(\rho_o + \frac{p}{c^2}\right). \quad (5.21)$$

Integrando la expresión anterior:

$$p(r) = c^2 \left(\frac{a}{e^{\alpha(r)}} - \rho_o\right). \quad (5.22)$$

La presión en la superficie de la esfera de materia debe de ser nula:

$$p(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 \left(\frac{a}{e^{\alpha(R)}} - \rho_o\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \rho_o e^{\alpha(R)}. \quad (5.23)$$

Por las condiciones de Juntura de Darmois-Israel que aseguran la continuidad de la primera forma fundamental, la componente  $g_{tt} = -e^{2\alpha(r)}$  de la métrica interior debe de acoplarse con la métrica exterior para  $r = R$ . Por lo tanto, se tiene que:

$$e^{2\alpha(R)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R} = 1 - \frac{R_s}{R}. \quad (5.24)$$

Así,  $a$  está dada por:

$$a = \rho_o \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)^{1/2}. \quad (5.25)$$

Ahora, reemplazamos las ecuaciones (5.19) y (5.22) en (5.16)

$$\partial_r \alpha = \frac{G(mc^2 + 4\pi r^3 p)}{rc^2(rc^2 - 2Gm)} = \frac{G}{rc^2(rc^2 - \frac{8}{3}\pi r^3 \rho_o G)} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o c^2 + \frac{4\pi r^3 a c^2}{e^{\alpha(r)}} - 4\pi r^3 \rho_o c^2 \right). \quad (5.26)$$

Al integrar, organizar terminos y utilizar la ecuación (5.25), se tiene:

$$e^{\alpha(r)} = \frac{1}{2\rho_o} \left[ 3\rho_o \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)^{1/2} - \sqrt{3}cK \left(1 - \frac{R_s r^2}{R^3}\right)^{1/2} \right], \quad (5.27)$$

donde  $K$  es una constante de integración. Utilizando nuevamente las condiciones de Juntura de Darmois-Israel, tal que la métrica interior y exterior se acoplen en  $r = R$  obtenemos:

$$\frac{1}{2\rho_o} \left[ 3\rho_o \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)^{1/2} - \sqrt{3}cK \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)^{1/2} \right] = \left(1 - \frac{R_s}{R}\right)^{1/2}, \quad (5.28)$$

$$\Rightarrow K = \frac{\rho_o}{\sqrt{3}c}. \quad (5.29)$$

Al reemplazar el valor de  $K$  en (5.27), se obtiene la componente  $g_{tt}$  de la métrica interior de Schwarzschild:

$$-g_{tt} = f(r) = e^{2\alpha(r)} = \frac{1}{4} \left[ 3 \left( 1 - \frac{R_s}{R} \right)^{1/2} - \left( 1 - \frac{R_s r^2}{R^3} \right)^{1/2} \right]^2 \geq 0. \quad (5.30)$$

El elemento de línea en el interior ( $r < R$ ) de la esfera de materia está dado por:

$$ds_{int}^2 = -\frac{1}{4} \left[ 3 \left( 1 - \frac{R_s}{R} \right)^{1/2} - \left( 1 - \frac{R_s r^2}{R^3} \right)^{1/2} \right]^2 c^2 dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{R_s r^2}{R^3} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (5.31)$$

Definimos:

$$H = \frac{2GM}{c^2 R^3} = \frac{R_s}{R^3}. \quad (5.32)$$

Al reemplazar las ecuaciones (5.25), (5.30) y (5.32) en la ecuación para la presión (5.22), se tiene que:

$$p(r) = \rho_o c^2 \left[ \frac{\sqrt{1 - H^2 r^2} - \sqrt{1 - H^2 R^2}}{3\sqrt{1 - H^2 R^2} - \sqrt{1 - H^2 r^2}} \right]. \quad (5.33)$$

Note que las ecuaciones (5.20), (5.30) y (5.33) son soluciones de primer orden sujetas a las siguientes condiciones de borde:

$$p(R) = 0, \quad m(R) = M, \quad f(R) = h^{-1}(R) = 1 - \frac{R_s}{R} \quad (5.34)$$

Por lo tanto, no hay libertad para ajustar la primera derivada  $f'(R)$ . Sin embargo, esta primera derivada es también continua con la solución exterior de Schwarzschild, siempre y cuando la solución interior (5.30) - (5.33) se mantenga regular en todas partes. Esta solución es regular en todas partes excepto por al menos un  $r$  en el interior cuando el denominador en la ecuación (5.33):

$$D = 3\sqrt{1 - H^2 R^2} - \sqrt{1 - H^2 r^2} \quad (5.35)$$

se anula en el intervalo  $r \in [0, R]$ . Debido a que  $f = \frac{1}{4}D^2$ , si  $D = 0$  la presión  $p(r)$  diverge en el mismo valor en el cual  $f(r)$  se anula. De otra forma  $f(r) > 0$  y la solución interior es regular en todas partes. La solución para  $D = 0$  está dada por  $r = R_o$  donde:

$$3\sqrt{1 - H^2 R^2} = \sqrt{1 - H^2 R_o^2} \quad \Rightarrow \quad R_o = 3R\sqrt{1 - \frac{8}{9}\frac{R}{R_s}} \quad (5.36)$$

La cual es puramente imaginaria si  $R > \frac{9}{8}R_s$ . Por lo tanto, en este caso se tiene que  $D > 0$  y la presión  $p(r)$  permanece finita en el eje real  $[0, R]$ . La presión  $p(r)$  es positiva y monótona decreciente hacia afuera de su máximo en  $r = 0$  y  $f(r)$  permanece estrictamente positiva.

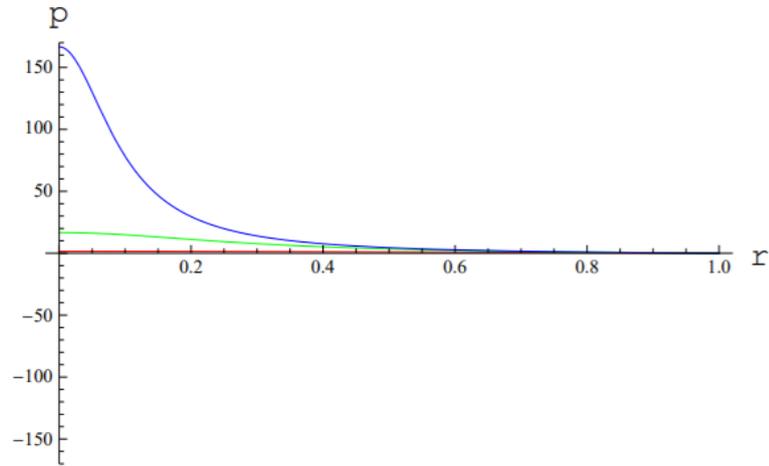


Figura 5.1:  $p(r)$  para  $R > \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores  $R/R_s = 1,250, 1,136, 1,126$  (rojo, verde, azul) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].)

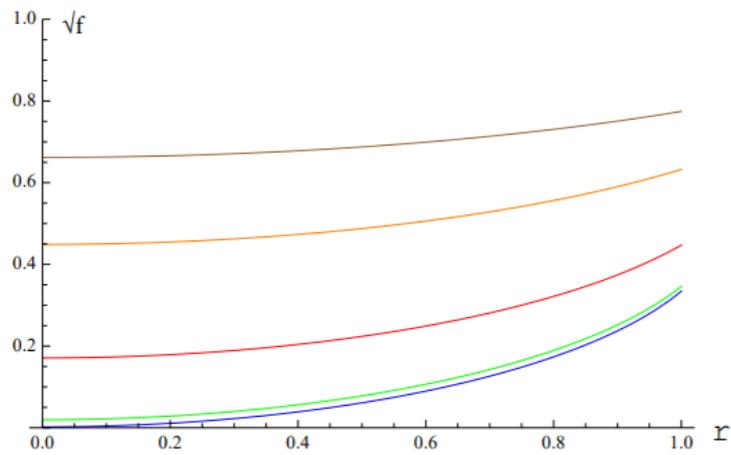


Figura 5.2:  $f^{\frac{1}{2}}(r)$  para  $R > \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores  $R/R_s = 2,50, 1,67, 1,25, 1,136, 1,126$  (café, naranja, rojo, verde, azul) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].)

A medida que  $R \rightarrow \frac{9}{8}R_s$  (Límite de Buchdahl) desde arriba, el cero del denominador  $D$  se aproxima al eje real en  $R_0 = 0$  y la divergencia de la presión central  $p(0) \rightarrow \infty$  aparece con  $f(0) \rightarrow 0$  en el mismo punto. Por lo tanto, en el valor crítico  $R = \frac{9}{8}R_s$ , la solución con densidad constante para  $p(r)$  finita en todos lados deja de existir.

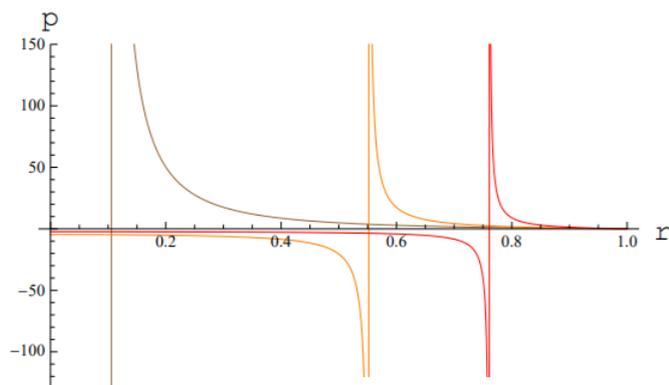


Figura 5.3:  $p(r)$  para  $R < \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores  $R/R_s = 1,124, 1,087, 1,053$  (café, naranja, rojo) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].)

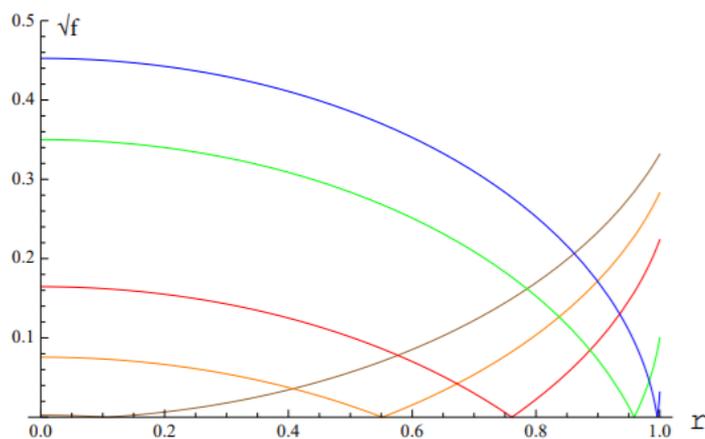


Figura 5.4:  $f^{\frac{1}{2}}(r)$  para  $R < \frac{9}{8}R_s$ , se muestran los valores  $R/R_s = 1,124, 1,087, 1,053, 1,010, 1,001$  (café, naranja, rojo, verde, azul) respectivamente. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].)

Ahora que hemos calculado la solución interior de Schwarzschild y analizamos su comportamiento en el límite de Buchdahl, en el siguiente capítulo, demostraremos cómo el modelo de gravastar propuesto por Mazur y Mottola surge como un límite de esta solución y estudiaremos sus propiedades.

## Capítulo 6

# Modelo de Gravastar como un límite de la solución interior de Schwarzschild

### 6.1. Modelo de Mazur y Mottola

En esta sección estudiaremos el modelo de gravastar de Mazur y Mottola propuesto en [11, 12]. Considere las soluciones (5.30) y (5.33) para  $R_s < R < \frac{9}{8}R_s$  donde el cero del denominador  $D$  en  $R_0$  se desplaza fuera del origen a valores finitos en el intervalo  $0 < R_0 < R$ . Luego, (5.33) muestra una nueva solución interior regular para  $0 \leq r < R_0$  donde  $D < 0$  y  $p(r) < 0$ , mientras que  $f(r)$  se mantiene positiva.

A medida que la estrella se comprime y su radio se acerca al radio de Schwarzschild  $R \rightarrow R_s^+$  desde afuera, la ecuación (5.36) muestra que  $R_o$  se desplaza desde el origen hasta el borde exterior de la estrella, i.e.  $R_o \rightarrow R_s^-$ , y en ese límite la solución con presión negativa llega a abarcar toda la región interior  $0 \leq r < R$ , excluyendo solo el límite exterior en  $R = R_s$ . Finalmente, debido a que en este límite  $H^2 R^2 = \frac{R_s}{R} \rightarrow 1$ , la ecuación (5.33) muestra que dicha presión negativa es constante:

$$p(r) = -\rho_o c^2, \quad \text{para } r < R = R_o = R_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (6.1)$$

y las componentes de la métrica adquieren la siguiente forma:

$$f(r) = \frac{1}{4} (1 - H^2 r^2) = \frac{1}{4} h^{-1}(r) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{r^2}{R_s^2} \right), \quad H = \frac{1}{R_s}. \quad (6.2)$$

Así, el elemento de línea en el interior de una gravastar está dado por:

$$ds^2 = -\frac{1}{4} (1 - H^2 r^2) c^2 dt^2 + \frac{1}{(1 - H^2 r^2)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.3)$$

que corresponde a un parche del espacio-tiempo de Sitter en coordenadas estáticas (vea el apéndice G), aunque  $g_{tt}$  es  $\frac{1}{4}$  de su valor usual. Por lo tanto, el paso del tiempo en el interior se modifica de lo que se esperaría en las coordenadas estáticas habituales del espacio - tiempo de Sitter. Las gráficas para  $p(r) = -\rho_o c^2$  y  $f^{\frac{1}{2}}(r)$  se muestran en las siguientes figuras:

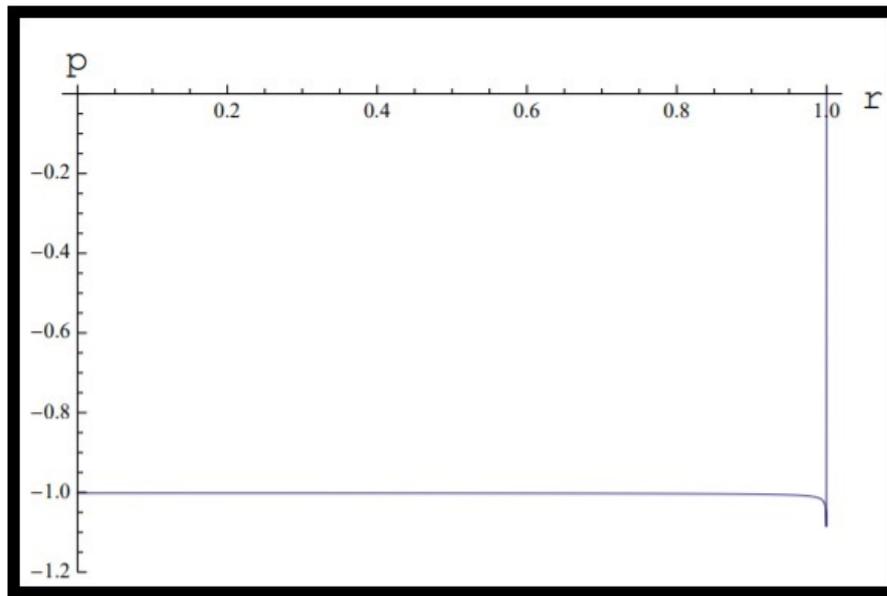


Figura 6.1: Presión negativa para límite de la solución interior de Schwarzschild  $R = 1,000001R_s$ . (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].)

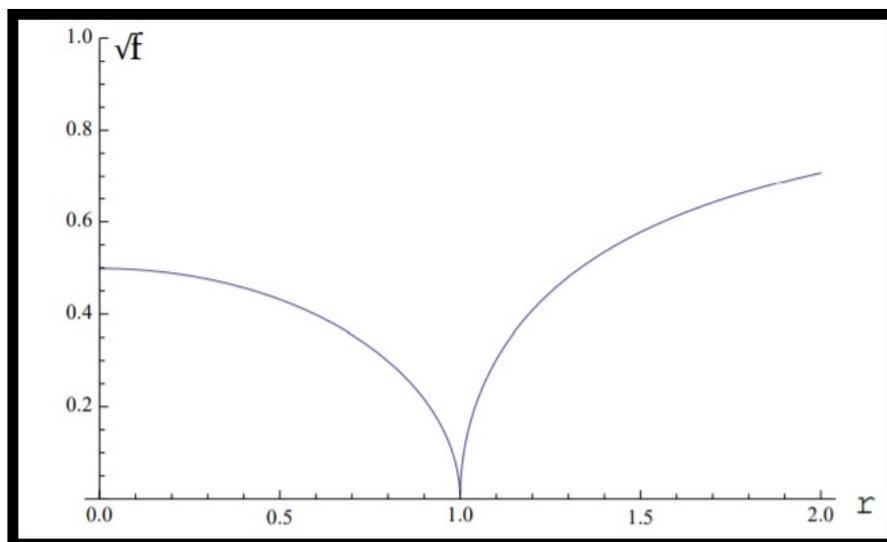


Figura 6.2:  $f^{\frac{1}{2}}(r)$  para límite de la solución interior de Schwarzschild  $R = R_s$ . Note que  $f^{\frac{1}{2}}(0) = 0,5$  en el centro de la estrella. (Cortesía de P. Mazur y E. Mottola [12].)

La solución (6.3) corresponde a una solución interior de radio  $R = R_0 = R_s = \frac{2GM}{c^2}$ , la cuál contiene un fluido cosmológico. El exterior de esta estrella luce como un agujero negro de Schwarzschild, pero sin singularidad ni horizonte de eventos. El precio que se debe pagar es que la solución viola la continuidad de la presión.

Debido a la aparente dificultad de unir el espacio de Sitter interior con el vacío de Schwarzschild exterior en los bordes comunes nulos  $H = \frac{1}{R_s}$ , entonces una capa fina superficial máximamente rígida con  $p = \rho_0 c^2$  debe de ser colocada entre la solución interior de Sitter y la solución exterior de Schwarzschild. En ese caso hay dos bordes separados tipo - tiempo en  $r = r_1$  y  $r = r_2$  con  $r_1 < r_2$ , tal que ambos están muy cerca del horizonte. Por lo tanto, se podría tomar el límite  $r_1 \rightarrow R_s^-$  y  $r_2 \rightarrow R_s^+$ . Note que la tensión superficial habitual de la membrana de una burbuja proporciona una fuerza hacia adentro (correspondiente a  $p_t < 0$ ) resistiendo la expansión del volumen encerrado con presión positiva y en este caso el gradiente de presión  $\frac{dp}{dr}$  es negativo en el borde, mientras que la presión transversal  $p_t > 0$  de una gravastar produce una fuerza hacia afuera, tendiendo a expandir el área superficial y el gradiente de presión  $\frac{dp}{dr}$  es positivo en el borde.

Para tratar de recuperar la continuidad de la presión, en el siguiente capítulo exploraremos la idea de que la presión de una gravastar debe de ser anisótropa. Para ello debemos de reemplazar la función delta de presión positiva en  $R_s$  debida a la capa fina de materia, por una función continua.

## 6.2. Gravastars con Presión Anisótropa

A lo largo de esta sección demostraremos que la presión dentro de una gravastar debe ser anisótropa, tal como propone Cattoen et al. en [1]. Se quiere eliminar la capa fina de materia del modelo anterior. Para ello, la presión radial  $p_r$  ya no debe de ser descrita mediante una delta de Dirac en  $R = R_s = R_0$  sino que debe ser continua (aunque no es necesario que la densidad sea continua y, por lo general, no es continua en la superficie de la gravastar). Cualitativamente la presión radial debe tener la siguiente forma:

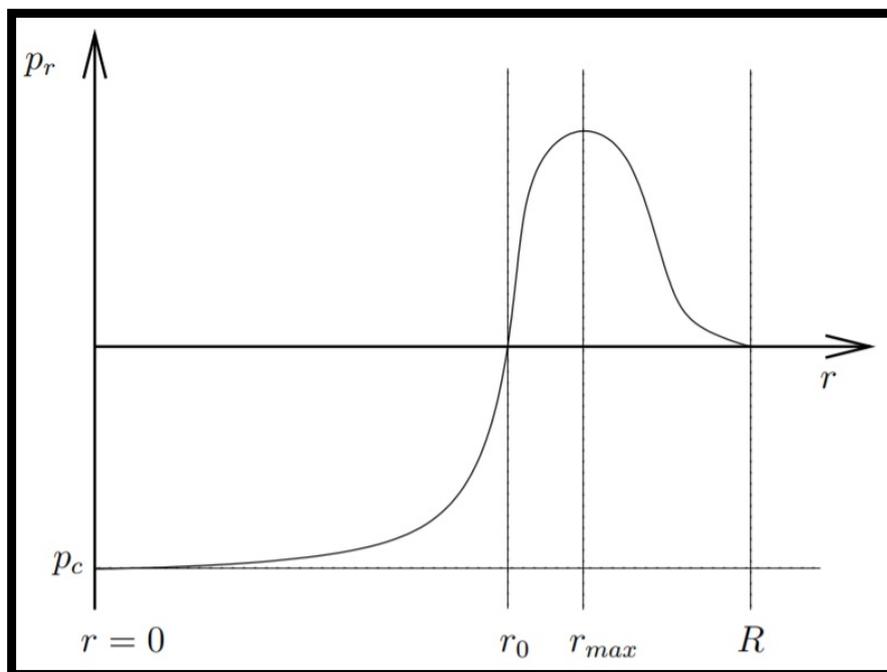


Figura 6.3: Gráfico cualitativo de  $p(r)$  para una gravastar. (Cortesía de Cattoen et al. [1])

Para “suavizar” la capa infinitesimalmente delgada del modelo de gravastar propuesto por Mazur y Mottola, consideraremos geometrías esféricas simétricas estáticas, tales que:

- Dentro de la gravastar,  $r < R$ , la densidad es positiva y finita.
- La presión central es negativa,  $p_c < 0$ , tal que  $p_c = -\rho_c$ . (No demandamos que  $\rho = -p_r = -p_t$  excepto en el centro.)
- El espacio tiempo no tiene un horizonte de sucesos.

La densidad positiva, la presión central negativa y la ausencia de horizonte de sucesos son las 3 principales características que describen a una gravastar. Adicionalmente se tiene que:

- Para mantener el espacio-tiempo regular,  $p'_r(0) = 0$  y  $p_c = p_r(0) = p_t(0)$ .
- Debe haber un máximo de presión cerca del radio de Schwarzschild,  $r_{max} = R_s$ , que satisface  $p_r(r_{max}) > 0$  y  $p'_r(r_{max}) = 0$ .
- Debe haber exactamente dos radios en donde la presión radial sea nula.
  - El primer punto,  $r_0$ , donde  $p_r(r_0) = 0$  y  $p'_r(r_0) > 0$ .
  - El segundo punto,  $R$ , donde  $p_r(R) = 0$  y  $p'_r(R) \leq 0$ . El punto  $r = R$ , el cual por construcción debe de satisfacer  $R > r_{max} > r_0$ , es denominado como la superficie de la gravastar.
- La presión  $p_r(r)$  debe de ser continua.

Ahora demostraremos porque una gravastar debe de tener una presión anisótropa. Considere un fluido perfecto, tal que la presión es isotrópica  $p = p_r = p_t$ . Note que la ecuación TOV evaluada en  $r = r_0$ , el primer punto donde la presión es nula, da como resultado:

$$\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=r_0} = -\frac{4\pi r_0}{3} \frac{\rho \bar{\rho}}{1 - 2m/r_0}, \quad (6.4)$$

donde  $\bar{\rho}(r) \equiv m(r)/(\frac{4}{3}\pi r^3)$ . Note que  $\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=r_0}$  es por suposición positivo, mientras que en la ecuación (6.4) muestra que el gradiente de presión es negativo. Por lo tanto, la ecuación TOV no se cumple en el punto  $r = r_0$ . Ahora considere el punto de presión máxima positiva,  $r = r_{max}$ . La ecuación TOV en este punto da como resultado:

$$\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=r_{m\acute{a}x}} = -\frac{4\pi r_{m\acute{a}x}}{3} \frac{(\rho + p)(\bar{\rho} + 3p)}{1 - 2m/r_{m\acute{a}x}}. \quad (6.5)$$

Pero  $\rho > 0$  en todas partes dentro de la gravastar, y por suposición  $p_r(r_{max}) > 0$  en el modelo que estamos considerando. Así que  $\left. \frac{dp}{dr} \right|_{r=r_{m\acute{a}x}}$  debe de ser cero, pero la ecuación (6.5) muestra que el gradiente de presión es negativo. Por lo tanto, la ecuación TOV no se cumple en el punto  $r = r_{max}$ .

De hecho la presión radial es creciente en el intervalo  $r_0 \leq r < r_{max}$ , mientras que la presión radial en el mismo intervalo es positiva. Es decir, que el gradiente de presión  $\frac{dp}{dr}$  es positivo en dicha región, pero la ecuación TOV arroja un valor negativo. Por lo tanto, por contradicción se deduce que una presión isotrópica en dicho intervalo no permite satisfacer la ecuación TOV y una geometría espacio-temporal estática puede ser solamente obtenida con presiones anisótropas.

## Conclusiones

La solución interior de Schwarzschild posee algunas propiedades notables, entre ellas el hecho de que puede describir un modelo en que la materia ordinaria puede ser incompresible y la posibilidad de una densidad constante bajo las presiones extremas de un colapso gravitacional, lo cual conduce al modelo de gravastar como alternativa al modelo de agujero negro.

En la capa fina de materia con ecuación de estado  $p = \rho c^2$ , se podría esperar producir frentes de choque salientes cuando esta sea golpeada. Esto puede servir para distinguir gravastars de agujeros negros mediante la observación. Los espectros de radiación gravitacional de una gravastar golpeada deberían llevar la huella de sus frecuencias fundamentales de vibración.

Note que el espacio-tiempo de Sitter en el interior de la gravastar con ecuación de estado  $p = -\rho c^2$  puede ser interpretado como un fluido cosmológico, tal que el horizonte del universo en expansión es reemplazado por una interfase cuántica (capa delgada de materia).

Observaciones recientes de ondas gravitacionales como la señal GW190521 son indicadores de que la teoría de formación de agujeros negros no es consistente, debido a que hay un gap de masa en su formación. Una forma teórica de solucionar el problema del gap de masa es que los objetos ultracompactos generadores de la señal GW190521 posiblemente son gravastars, debido a que estas no tienen restricciones de masa. Por lo tanto, GW190521 podría ser evidencia experimental a favor de la existencia de gravastars, tal como se propone en [2].

(Para trabajos recientes ver referencias [6, 7, 8, 9, 10]).

# Bibliografía

- [1] C. Cattoen, T. Faber and M. Visser, *Gravastars must have anisotropic pressures*, e-print arXiv:gr-qc/0505137, 2005.
- [2] I. Antoniou, “Black hole or Gravastar? The GW190521 case,” [arXiv:2010.05354 [gr-qc]].
- [3] K. Schwarzschild. *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory* (translation and foreword by S.Antoci and A.Loinger), e-print arXiv:physics/9905030, 1999.
- [4] L. Ryder. *Introduction to general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] M. Emam. *Covariant Physics: From Classical Mechanics to General Relativity and Beyond*. Oxford University Press, 2021.
- [6] M. Sharif and F. Javed, “Dynamical Stability of Gravastars Covered with ABG Black Holes,” *J. Exp. Theor. Phys.* **133**, no.4, 439-448 (2021) doi:10.1134/S1063776121090119
- [7] M. Sharif and F. Javed, “Stability of  $d$ -dimensional Gravastars with Variable Equation of State,” [arXiv:2110.02745 [gr-qc]].

- [8] M. Sharif and F. Javed, “Stability and Dynamics of Regular Thin-Shell Gravastars,” *J. Exp. Theor. Phys.* **132**, no.3, 381-393 (2021)  
doi:10.1134/S1063776121030109
- [9] M. Z. Bhatti, Z. Yousaf and T. Ashraf, “Charged gravastars in modified Gauss–Bonnet gravity,” *Mod. Phys. Lett. A* **36**, no.32, 2150233 (2021)  
doi:10.1142/S0217732321502333
- [10] P. Beltracchi, P. Gondolo and E. Mottola, “Slowly rotating gravastars,” [arXiv:2107.00762 [gr-qc]].
- [11] P. O. Mazur and E. Mottola, *Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes*, e-print arXiv:gr-qc/0109035, 2002.
- [12] P. O. Mazur and E. Mottola, *Surface Tension and Negative Pressure Interior of a Non-Singular ‘Black Hole’*, e-print arXiv:1501.03806, 2004.
- [13] S. Carlip. *General relativity: a concise introduction*. Oxford University Press, 2019.
- [14] S. Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [15] Y. Kim, C. Young Oh and N. Park, *Classical Geometry of De Sitter Spacetime: An Introductory Review*, e-print arXiv:hep-th/0212326, 2002.

## Apéndice A

### Aproximación de Campo Débil

La acción de una partícula relativista viene dada por:

$$S = \int L dt = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds. \quad (\text{A.1})$$

El lagrangiano de una partícula relativista en ausencia de gravedad es:

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\text{A.2})$$

Tomando el límite  $\frac{v}{c} \ll 1$ , se tiene que:

$$L_0 = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula y  $c$  es la velocidad de la luz. Note que el primer término en el lagrangiano es la energía en reposo de la partícula,

mientras que el segundo termino es su energía cinética. En presencia de gravedad el lagrangiano toma la forma:

$$L_g = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitatorio Newtoniano. Note que:

$$\begin{aligned} S &= \int L_g dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi_g \right) dt = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds, \\ &\Rightarrow ds = \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi_g}{c} \right) dt. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y despreciando los términos que se anulan en el límite para velocidades muy pequeñas  $\frac{v}{c} \ll 1$ , se tiene que:

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{A.5})$$

Hemos obtenido el elemento de línea para la aproximación de campo débil. El tensor métrico para esta aproximación está dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

De forma alternativa es posible escribir:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski y  $h_{\mu\nu}$  es una pequeña perturbación debida al campo gravitacional débil. Note que elemento  $g_{tt}$  de la métrica es dependiente del potencial gravitatorio  $\phi$ , por lo que la métrica contiene no solamente información acerca de la geometría del espacio, también posee información referente al campo gravitacional.

## Apéndice B

# Variación de la Raíz del Determinante del Tensor Métrico

Considere la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Obtenemos su expansión en series de Taylor aproximada a primer orden en el punto  $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p (x_1 - \lambda_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_p (x_2 - \lambda_2) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p (x_n - \lambda_n).$$

Se define la variación de  $f$  como  $\delta f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , entonces se puede escribir:

$$\delta f = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p (x_1 - \lambda_1) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_p (x_2 - \lambda_2) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p (x_n - \lambda_n).$$

Sea  $i = 1, 2, \dots, n$  el índice que indica la  $i$ -ésima variable, note que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \frac{1}{2\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdots x_i \cdots x_n}} \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdots x_n),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \frac{1}{2x_i\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdots x_i \cdots x_n}} \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdots x_{i-1} \cdot x_i \cdot x_{i+1} \cdots x_n),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \frac{1}{2x_i} \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdots x_i \cdots x_n},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_i \cdots \lambda_n}.$$

Definimos  $\delta\lambda_i = x_i - \lambda_i$  y al utilizar el resultado anterior en la expresión para  $\delta f$  podemos escribir:

$$\delta f = \delta(\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n} \left( \frac{1}{\lambda_1} \delta\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} \delta\lambda_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \delta\lambda_n \right).$$

Construimos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Claramente  $A$  es una matriz diagonal. Sabemos que  $\det(A) = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n}$

y su inversa está dada por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Sean  $A_{\alpha\beta}$  los elementos de  $A$  y  $A^{\alpha\beta}$  los elementos de  $A^{-1}$  podemos escribir:

$$\delta(\sqrt{\det(A)}) = \frac{1}{2} \sqrt{\det(A)} (A^{11} \delta A_{11} + A^{22} \delta A_{22} + \dots + A^{nn} \delta A_{nn}).$$

Utilizando el convenio de suma de Einstein tenemos que:

$$\delta(\sqrt{\det(A)}) = \frac{1}{2} \sqrt{\det(A)} A^{\alpha\beta} \delta A_{\alpha\beta}.$$

Sea  $g_{\mu\nu}$  el tensor métrico escrito en una base tal que este sea diagonal con signatura  $(- + + +)$ . Definimos  $g = \det(g_{\mu\nu})$  y escribimos:

$$\therefore \delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad \blacksquare$$

Note que a pesar de que esta expresión ha sido construida con una base tal que la métrica sea diagonal, el resultado es independiente de la base escogida. Esto es debido a que  $g^{\mu\nu}$ ,  $\delta g_{\mu\nu}$  son tensores y su contracción es un escalar. Por lo tanto, la expresión anterior es la misma sin importar la base con la que trabajemos.

## Apéndice C

# Símbolos de Christoffel en Función del Determinante del Tensor Métrico

Partimos de la conexión métrica:

$$\Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\gamma}g_{\beta\delta} + \partial_{\delta}g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta}g_{\gamma\delta}).$$

Hacemos el siguiente cambio de índices  $\alpha \rightarrow \mu$ ,  $\gamma \rightarrow \mu$  y  $\delta \rightarrow \nu$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}),$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}(g^{\mu\beta}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + g^{\mu\beta}\partial_{\nu}g_{\beta\mu} - g^{\mu\beta}\partial_{\beta}g_{\mu\nu}).$$

Utilizando la simetría del tensor métrico en el tercer término:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}(g^{\mu\beta}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + g^{\mu\beta}\partial_{\nu}g_{\beta\mu} - g^{\beta\mu}\partial_{\beta}g_{\mu\nu}).$$

Haciendo el cambio de índices mudos ( $\beta \leftrightarrow \mu$ ) en el tercer término:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}(g^{\mu\beta}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + g^{\mu\beta}\partial_{\nu}g_{\beta\mu} - g^{\mu\beta}\partial_{\mu}g_{\beta\nu}).$$

Observamos que el primer y segundo termino se cancelan, por lo que podemos escribir:

$$\Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\partial_{\nu}g_{\beta\mu}.$$

Ahora tomando la expresión obtenida en el apéndice anterior para la variación de la raíz del tensor métrico:

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\beta\mu}\delta g_{\beta\mu}.$$

Dividiendo para  $\delta x^{\nu}$ :

$$\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta x^{\nu}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\beta\mu}\frac{\delta g_{\beta\mu}}{\delta x^{\nu}}.$$

Tomando el límite  $\delta x^{\nu} \rightarrow 0$ :

$$\partial_{\nu}\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\beta\mu}\partial_{\nu}g_{\beta\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\partial_{\nu}g_{\beta\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\sqrt{-g}.$$

Finalmente, al comparar las expresiones podemos escribir:

$$\therefore \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\sqrt{-g}. \quad \blacksquare$$

## Apéndice D

# Variación del Tensor de Curvatura de Ricci

Partimos del tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}.$$

El tensor de curvatura de Ricci se define como:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}.$$

Procedemos a tomar la variación de la expresión anterior:

$$\delta R_{\sigma\nu} = \delta(\partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \delta(\partial_{\nu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho}) + \delta(\Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}) - \delta(\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}),$$

$$\delta R_{\sigma\nu} = \partial_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho}) + \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta(\Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}) + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\delta(\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}) - \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}\delta(\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}) - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta(\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}).$$

Hacemos el cambio de índices mudos ( $\rho \rightarrow \mu$ ):

$$\delta R_{\sigma\nu} = \partial_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \partial_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu) + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda).$$

Como la diferencia de conexiones  $\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  es un tensor, entonces podemos tomar su derivada covariante:

$$\nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) = \partial_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu) - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu),$$

$$\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) = \partial_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu) - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu).$$

Restando las expresiones anteriores se tiene:

$$\nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) = \partial_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \partial_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu) + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda(\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu) + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda).$$

Finalmente, comparando se tiene:

$$\therefore \quad \delta R_{\sigma\nu} = \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu). \quad \blacksquare$$

Esta expresión es mejor conocida como la Identidad de Palatini.

## Apéndice E

### Variación del Escalar de Ricci

El Escalar de Ricci se define como:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

Tomamos la variación de la ecuación anterior:

$$\delta R = R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}.$$

Al reemplazar por la expresión para la variación del Tensor de Ricci se tiene:

$$\delta R = R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} (\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}) - \nabla_{\beta}(\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda})),$$

$$\delta R = R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}) - g^{\alpha\beta} \nabla_{\beta}(\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda}).$$

Recuerde que por la conexión métrica se tiene que  $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ . Si  $T_{\alpha\beta}^\gamma$  es un tensor, entonces  $\nabla_\rho(g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}^\gamma) = g_{\mu\nu}\nabla_\rho T_{\alpha\beta}^\gamma + T_{\alpha\beta}^\gamma\nabla_\rho g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\nabla_\rho T_{\alpha\beta}^\gamma$ . Por lo que podemos escribir:

$$\delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\lambda(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda) - \nabla_\beta(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda).$$

Hacemos el cambio de los índices mudos en el segundo término ( $\lambda \rightarrow a$ ) y para el tercer término ( $\beta \rightarrow a$ )

$$\delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_a(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^a) - \nabla_a(g^{\alpha a}\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda),$$

$$\delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla_a(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^a - g^{\alpha a}\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda).$$

Como la diferencia de conexiones es un tensor y la multiplicación de tensores es un tensor, definimos el siguiente tensor contravariante de rango 1:

$$J^a = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^a - g^{\alpha a}\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda.$$

Tomando la derivada covariante del vector  $J^a$ :

$$\nabla_b J^a = \partial_b J^a + \Gamma_{bc}^a J^c.$$

Iguando los índices  $a = b$  en la expresión anterior y utilizando la expresión del apéndice C:

$$\nabla_a J^a = \partial_a J^a + \Gamma_{ac}^a J^c = \partial_a J^a + \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_c \sqrt{-g} \right) J^c.$$

Haciendo el cambio de índices  $c \rightarrow a$ :

$$\nabla_a J^a = \partial_a J^a + \Gamma_{ac}^a J^c = \partial_a J^a + \frac{1}{\sqrt{-g}} J^a \partial_a \sqrt{-g},$$

$$\nabla_a J^a = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g} \partial_a J^a + \frac{1}{\sqrt{-g}} J^a \partial_a \sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \partial_a J^a + J^a \partial_a \sqrt{-g}),$$

$$\nabla_a J^a = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} J^a) \quad \rightarrow \quad \sqrt{-g} \nabla_a J^a = \partial_a (\sqrt{-g} J^a).$$

Reemplazando en la expresión para la variación del escalar de Ricci:

$$\therefore \quad \delta R = R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} J^a). \quad \blacksquare$$

# Apéndice F

## Ecuación TOV

Tomando la derivada covariante del tensor energía-momento  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  para un fluido perfecto, se tiene que:

$$\nabla_\mu \left[ \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu} \right] = 0,$$

$$U^\mu U^\nu \nabla_\mu \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) [U^\mu \nabla_\mu U^\nu + U^\nu \nabla_\mu U^\mu] - p \nabla_\mu g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\mu p = 0. \quad (\text{F.1})$$

Multiplicamos la expresión anterior por  $U_\nu$ . Además, recuerde que  $U^\nu U_\nu = c^2$  y  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ :

$$c^2 U^\mu \nabla_\mu \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) [U^\mu U_\nu \nabla_\mu U^\nu + c^2 \nabla_\mu U^\mu] - g^{\mu\nu} U_\nu \nabla_\mu p = 0,$$

$$c^2 U^\mu \nabla_\mu \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) [U^\mu U_\nu \nabla_\mu U^\nu + c^2 \nabla_\mu U^\mu] - U^\mu \nabla_\mu p = 0.$$

Note que  $\nabla_\mu(U^\nu U_\nu) = \nabla_\mu c^2 = 0 \Rightarrow U_\nu \nabla_\mu U^\nu = 0$ . Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned} c^2 U^\mu \nabla_\mu \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) + c^2 \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) \nabla_\mu U^\mu - U^\mu \nabla_\mu p &= 0, \\ c^2 U^\mu \nabla_\mu \rho_m + U^\mu \nabla_\mu p + c^2 \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) \nabla_\mu U^\mu - U^\mu \nabla_\mu p &= 0, \\ U^\mu \nabla_\mu \rho_m + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) \nabla_\mu U^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Reemplazando la ecuación (F.2) en la ecuación (F.1):

$$\begin{aligned} U^\nu U^\mu \nabla_\mu \rho_m + U^\mu U^\nu \nabla_\mu \frac{p}{c^2} + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) [U^\mu \nabla_\mu U^\nu + U^\nu \nabla_\mu U^\mu] - p \nabla_\mu g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\mu p &= 0, \\ - \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U^\nu \nabla_\mu U^\mu + U^\mu U^\nu \nabla_\mu \frac{p}{c^2} + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) [U^\mu \nabla_\mu U^\nu + U^\nu \nabla_\mu U^\mu] - g^{\mu\nu} \nabla_\mu p &= 0, \\ U^\mu U^\nu \nabla_\mu \frac{p}{c^2} + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu \nabla_\mu U^\nu - g^{\mu\nu} \nabla_\mu p &= 0, \\ - \left( g^{\mu\nu} - \frac{U^\mu U^\nu}{c^2} \right) \nabla_\mu p + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu \nabla_\mu U^\nu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

La expresión anterior es la Ecuación de Euler para fluidos en forma covariante. Note que el único índice independiente en la ecuación (F.3) es  $\nu$ . Considere los siguientes casos:

- Si  $\nu = t$

$$- \left( g^{\mu t} - \frac{U^\mu U^t}{c^2} \right) \nabla_\mu p + \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu \nabla_\mu U^t = 0.$$

Debido a que la métrica  $g^{\mu\nu}$  es diagonal y el vector cuadrivelocidad  $U^\mu$  posee solo componente temporal, al expandir los índices los únicos términos no

nulos se obtienen cuando  $\mu = t$ :

$$-\left(g^{tt} - \frac{U^t U^t}{c^2}\right) \nabla_t p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^t \nabla_t U^t = 0.$$

Como la presión es un campo escalar se tiene que  $\nabla_t p = \partial_t p$ :

$$-\left(g^{tt} - \frac{U^t U^t}{c^2}\right) \partial_t p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^t [\partial_t U^t + \Gamma_{tk}^t U^k] = 0.$$

Expandiendo sobre el índice  $k$ :

$$-\left(g^{tt} - \frac{U^t U^t}{c^2}\right) \partial_t p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^t [\partial_t U^t + \Gamma_{tt}^t U^t] = 0. \quad (\text{F.4})$$

Note que  $\Gamma_{tt}^t = 0$  y por la condición de que el cuerpo es estático se tiene que  $\partial_t p = 0$  y  $\partial_t U^t = 0$ . Por lo tanto, se satisface la ecuación anterior.

- Si  $\nu = j$  (alguna coordenada espacial)

$$-\left(g^{\mu j} - \frac{U^\mu U^j}{c^2}\right) \nabla_\mu p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^\mu \nabla_\mu U^j = 0,$$

$$-g^{\mu j} \nabla_\mu p + \frac{U^\mu U^j}{c^2} \nabla_\mu p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^\mu \nabla_\mu U^j = 0.$$

Note que  $\mu = i$  (alguna coordenada espacial) en el primer término, debido a que el segundo índice  $j$  en la métrica representa a una coordenada espacial y la métrica es diagonal. Además,  $U^j = 0$  en el segundo término porque representa a una componente espacial de la cuadrivelocidad y esta sólo tiene componente temporal, pero  $\nabla_\mu U^j = \partial_\mu U^j + \Gamma_{\mu k}^j U^k = \Gamma_{\mu t}^j U^t \neq 0$  en el último

término.

$$-g^{ij}\nabla_i p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^\mu \Gamma_{\mu t}^j U^t = 0.$$

Expandiendo sobre el índice  $\mu$  en el segundo término:

$$-g^{ij}\partial_i p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^t \Gamma_{tt}^j U^t = 0.$$

Note que el único elemento de  $\Gamma_{tt}^j$  distinto de cero es  $\Gamma_{tt}^r$ . Por lo tanto, en la ecuación anterior escogemos  $j = r$ :

$$-g^{ir}\partial_i p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) U^t \Gamma_{tt}^r U^t = 0.$$

Como la métrica es diagonal, necesariamente  $i = r$ :

$$-g^{rr}\partial_r p + \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) \Gamma_{tt}^r (U^t)^2 = 0. \quad (\text{F.5})$$

Recuerde que  $U^t = (c, 0, 0, 0)$  y  $g_{tt}U^tU^t = c^2 \Rightarrow (U^t)^2 = c^2/g_{tt} = g^{tt}c^2$ :

$$-g^{rr}\partial_r p + c^2 \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) g^{tt}\Gamma_{tt}^r = 0.$$

Reemplazando la métrica de la ecuación (3.8) y tomando  $\Gamma_{tt}^r$  de la ecuación (3.10), se tiene que:

$$-e^{-2\beta}\partial_r p - c^2 \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) e^{-2\alpha} e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha = 0,$$

$$e^{-2\beta}\partial_r p + c^2 \left(\rho_m + \frac{p}{c^2}\right) e^{-2\beta} \partial_r \alpha = 0,$$

$$\partial_r p + c^2 \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right) \partial_r \alpha = 0.$$

Para un cuerpo con simetría esférica, la presión únicamente dependería de forma explícita del radio. Por lo tanto, se tiene que:

$$\partial_r \alpha = -\frac{1}{c^2 \left( \rho_m + \frac{p}{c^2} \right)} \frac{dp}{dr}. \quad \blacksquare \quad (\text{F.6})$$

Esta es la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

# Apéndice G

## Espacio - Tiempo de Sitter

### G.1. Espacios Maximalmente Simétricos

**Def.<sup>n</sup>** Una variedad  $n$  - dimensional con  $\frac{1}{2}n(n+1)$  vectores de Killing (número de isometrías) es un espacio maximalmente simétrico.

Si una variedad es maximalmente simétrica, la curvatura es la misma en todas partes (debido a las isometrías de traslación) y la misma en cada dirección (debido a las isometrías de rotación). Por lo tanto, si sabemos la curvatura en un punto de un espacio maximalmente simétrico, entonces sabemos su curvatura en todos sus puntos.

Debido a que la geometría es la misma en todas las direcciones, entonces el tensor de curvatura debe de ser el mismo en todas las direcciones, es decir,  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  no cambia respecto a transformaciones de Lorentz en un vecindario para un punto  $p$  (donde  $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ ). Los únicos tensores que no cambian respecto a las transformaciones de Lorentz son la métrica, la delta de Kronecker y el tensor de Levi -

Civita. Esto significa que para estas coordenadas y para este punto, las componentes el tensor de Riemann  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  serán proporcionales a un tensor construido a partir de estos tensores invariantes. Intentando construir un tensor con las mismas simetrías que el tensor de Riemann se llega a que la única posibilidad es:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = k(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}),$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Note que al multiplicar por  $g^{\alpha\rho}$ :

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\alpha} = k(\delta_{\mu}^{\alpha}g_{\sigma\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha}g_{\sigma\mu}).$$

Haciendo la contracción  $\mu = \alpha$ :

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\alpha\nu}^{\alpha} = k(\delta_{\alpha}^{\alpha}g_{\sigma\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha}g_{\sigma\alpha}) = k(n g_{\sigma\nu} - g_{\sigma\nu}) = k(n-1)g_{\sigma\nu}.$$

Finalmente, al multiplicar por  $g^{\sigma\nu}$  se tiene que:

$$R = g^{\sigma\nu}R_{\sigma\nu} = k(n-1)g^{\sigma\nu}g_{\sigma\nu} = n(n-1)k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{R}{n(n-1)}.$$

Obteniendo las expresiones para el tensor de Riemann y el tensor de Ricci en espacios maximalmente simétricos:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad y \quad R_{\sigma\nu} = \frac{R}{n}g_{\sigma\nu}. \quad \blacksquare \quad (\text{G.1})$$

Esta es una relación tensorial, así que debe de ser cierta para cualquier sistema de coordenadas. Nuestro argumento para construir esta relación se basa en un pequeño vecindario para un punto  $p$ , pero en un espacio maximalmente simétrico todos los puntos son creados igual, así que esta relación debe de ser cierta en cualquier otro punto. Por lo tanto, esta relación es verdadera para cualquier espacio maximalmente simétrico, en cualquier punto, para cualquier sistema de coordenadas.

## G.2. Espacio - tiempo de Sitter

**Def.<sup>n</sup>** El espacio tiempo de Sitter es una subvariedad de un espacio de Minkowski generalizado de una dimensión superior.

Considere el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,n}$  con la métrica estandar:

$$ds^2 = -dx_o^2 + \sum_{i=1}^n dx_i^2. \quad (\text{G.2})$$

El espacio de Sitter es la subvariedad descrita por la hiperboloide de una hoja:

$$-x_o^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha^2, \quad (\text{G.3})$$

donde  $\alpha$  es alguna constante distinta de cero con dimensiones de longitud. El grupo de isometrías del espacio - tiempo de Sitter es el grupo de Lorentz  $O(1, n)$ . Por lo tanto, el espacio - tiempo de Sitter tiene  $\frac{1}{2}n(n + 1)$  campos vectoriales

de Killing linealmente independientes y es maximalmente simétrico (su curvatura escalar debe de ser constante).

Debido a que el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  es nulo para el espacio - tiempo de Sitter, entonces este debe de ser una solución de vacío para las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}, \quad (\text{G.4})$$

donde  $\Lambda > 0$  es una constante positiva que representa la energía de vacío.

Se define el tensor de energía - momento del vacío como:

$$T_{\mu\nu}^{(vacuum)} = -\frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (\text{G.5})$$

Reemplazando la expresión para el tensor de Ricci (G.1) en (G.4), se tiene que:

$$\frac{R}{n}g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu},$$

$$\left(\Lambda - \frac{n-2}{2n}R\right)g_{\mu\nu} = 0.$$

Como  $g_{\mu\nu} \neq 0$ , se deduce que:

$$R = \frac{2n}{n-2}\Lambda > 0. \quad \blacksquare \quad (\text{G.6})$$

La curvatura escalar  $R$  es positiva y constante.

### G.3. Espacio Tiempo de Sitter en Coordenadas Estáticas

Considere un espacio - tiempo de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,4}$  con la métrica estandar:

$$ds^2 = -dx_o^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (\text{G.7})$$

El espacio - tiempo de Sitter es la hipersuperficie definida por:

$$-x_o^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \alpha^2, \quad (\text{G.8})$$

donde  $(x_o, x_1, x_2, x_3, x_4)$  son las coordenadas cartesianas en el espacio de Minkowski. El espacio de Sitter está dado por una hiperboloide. Considere el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_o &= -\sqrt{\alpha^2 - r^2} \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right), \\ x_1 &= -\sqrt{\alpha^2 - r^2} \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right), \\ x_2 &= r \cos(\theta), \\ x_3 &= r \sin(\theta) \cos(\phi), \\ x_4 &= r \sin(\theta) \sin(\phi). \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Note que las ecuaciones (G.9) satisfacen la relación (G.8) y  $(x_2, x_3, x_4)$  son la parametrización de una esfera de radio  $r$ . La métrica de Sitter puede ser obtenida

al calcular la métrica inducida por el cambio de coordenadas en (G.9):

$$\begin{aligned}
 dx_o &= -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - r^2} \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt + \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}} \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) dr, \\
 dx_1 &= -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - r^2} \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt + \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}} \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) dr, \\
 dx_2 &= \cos(\theta)dr - r \sin(\theta)d\theta, \\
 dx_3 &= \sin(\theta) \cos(\phi)dr + r \cos(\theta) \cos(\phi)d\theta - r \sin(\theta) \sin(\phi)d\phi, \\
 dx_4 &= \sin(\theta) \sin(\phi)dr + r \cos(\theta) \sin(\phi)d\theta + r \sin(\theta) \cos(\phi)d\phi.
 \end{aligned} \tag{G.10}$$

Al reemplazar las ecuaciones (G.10) en (G.7) y simplificando términos, se obtiene la métrica de Sitter:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad \blacksquare \tag{G.11}$$

Note que hay un horizonte cosmológico en  $r = \alpha$ .