

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingeniería

Caracterización de las trayectorias de partículas en geodésicas temporales y nulas bajo la métrica de Schwarzschild

Rafael Ignacio Vintimilla Gómez de la Torre

Física

Trabajo de titulación presentado como requisito
para la obtención del título de

Licenciado en Física

Quito, 12 de diciembre de 2022

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingeniería

**HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE FIN DE
CARRERA**

**Rafael Ignacio Vintimilla Gómez de la
Torre**

Nombre del profesor, Título académico: Ernesto Contreras, PhD

12 de diciembre de 2022

© Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombres y apellidos: Rafael Ignacio Vintimilla Gómez de la Torre

Código: 00138421

Cédula de Identidad: 1717094054

Lugar y fecha: 12 de diciembre de 2022

ACLARACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>

UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>

Agradecimientos

A mi familia por apoyarme a lo largo de la carrera.

A mis profesores por compartir su conocimiento y experiencia.

A Stephen Hawking por inspirarme a estudiar física.

A mi tutor de tesis Ernesto Contreras por su guía y conocimiento del tema.

A mis padres por que nunca dejaron de creer en mí.

A mis hermanos por enseñarme tantas cosas.

Finalmente me gustaría agradecer a Silvia Chicaiza y a mis amigos,
por ayudarme tanto a lo largo de mi carrera.

Resumen

En este trabajo se exploran las trayectorias de partículas masivas y no masivas alrededor de agujeros negros con simetría esférica y estáticos, en otras palabras, el agujero negro de Schwarzschild. En el capítulo 2 se exploran las propiedades de la métrica que describe a estos agujeros negros, además de introducir una cantidad física importante para el desarrollo del presente trabajo, el potencial efectivo. En el capítulo 3 se exponen varios tipos de soluciones, tanto de partículas masivas como no masivas, donde además de exponer la primera foto de un agujero negro tomada por el EHT [1], se analiza cómo pudo influir en dicha foto la métrica. Se realiza una extrapolación para obtener la masa del objeto causante, se concluye que es un modelo de juguete pues no se ha observado nada parecido en el universo conocido.

Palabras y conceptos clave: *métrica de Schwarzschild, geodésica, trayectoria, métrica, agujero negro, simetría esférica, potencial efectivo.*

Abstract

This work explores the trajectories of massive and non-massive particles around spherically symmetric, static and uncharged black holes or in other words, the Schwarzschild black hole. On chapter 2 properties of the metric that describe those black holes are explored, also an important physical quantity for the development of this dissertation is introduced, the effective potential. On chapter 3 various types of solutions are exposed from massive particles, as well as non-massive particles, where also the first image of a black hole taken by the EHT [1] is described and furthermore how the metric could have influenced in that picture is analyzed. An extrapolation is realized to obtain the mass of the object, and we conclude that this model is a toy model since nothing similar has been observed in the known universe.

Keywords and Key Concepts: *Schwarzschild metric, geodesics, trajectory, metric, black hole, spherical symmetry, effective potential.*

Índice general

1. Introducción	13
2. Métrica de Schwarzschild	17
2.1. Ecuaciones de movimiento	19
3. Resultados	24
3.1. Geodésicas tipo tiempo	26
3.1.1. Órbitas abiertas	26
3.1.2. Órbitas de captura	28
3.1.3. Órbitas acotadas	30
3.2. Geodésicas nulas	34
3.2.1. Captura de la luz	34

	8
3.2.2. Anillo de luz	35
3.2.3. Deflexión de la luz	38
4. Conclusiones	40
Bibliografía	41

Índice de cuadros

3.1. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.1	27
3.2. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.2	27
3.3. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.3	28
3.4. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.4	29
3.5. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.5	30
3.6. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.6	31
3.7. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.7	32
3.8. Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.8	33
3.9. Datos para la elaboración de la figura 3.9	35
3.10. Datos para la elaboración de la figura 3.11	37

3.11. Datos utilizados para la figura 3.12 38

Índice de figuras

3.1. Órbita Abierta alrededor del agujero negro	26
3.2. Órbita Abierta en forma de gota alrededor del eje y	27
3.3. Órbita Abierta que aprovecha el agujero negro para obtener impulso gravitacional	28
3.4. Órbita de captura en forma de espiral con menor momento angular y $V_{eff} = 0$	29
3.5. Espiral de caída al horizonte de sucesos	30
3.6. Órbita acotada elíptica en forma de flor.	31
3.7. Órbita acotada elíptica	32
3.8. Órbita circular	33
3.9. Trayectoria de una partícula sin masa que entra al agujero negro . .	35

3.10. Gas brillante en las proximidades del agujero negro del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea [1]	36
3.11. Anillo de luz	37
3.12. Deflexión de la luz al pasar cerca del agujero negro (a $r > 3[GM]$) .	38

Capítulo 1

Introducción

A finales del siglo XVIII, un catedrático de Cambridge, John Michell escribió un artículo en la revista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* en el cual proponía la existencia de estrellas lo suficientemente masivas y compactas que tuvieran un campo gravitatorio tan intenso que la luz no podría escapar de ellas[2], mismas que serían denominadas por Michell como *estrellas negras*.

En 1915 Albert Einstein en su artículo publicado en la Academia Prusiana de Ciencias propone la teoría de la relatividad general [3]. La TRG (por sus siglas en español **T**eoría de la **R**elatividad **G**eneral) es una teoría que tiene 10 ecuaciones de campo y 4 de geodésicas, 14 ecuaciones en total. Estas ecuaciones describen la curvatura espacio - temporal, las propiedades geométricas del espacio - tiempo, así como la interacción entre la materia y la energía. Estas ecuaciones se pueden escribir de manera resumida en notación tensorial como se muestra en la ecuación

1.1:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, mismo que se obtiene multiplicando el tensor métrico por el tensor de curvatura de Riemann (éste último es el que mide la curvatura espacio - temporal), R es el escalar de Ricci (se lo obtiene multiplicando el tensor métrico por el tensor de Ricci, así: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$), $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, G es la constante newtoniana de la gravitación, c es la velocidad de la luz, $T_{\mu\nu}$ es el tensor momento - energía.[4]

En la ecuación 1.2 se muestran las ecuaciones de la geodésica, la cual describe el movimiento de cuerpos sometidos a campos gravitacionales:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (1.2)$$

donde τ es el tiempo propio, x^μ es el cuadvivector posición, $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ son los símbolos de Christoffel de la métrica y están dados por 1.3:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}). \quad (1.3)$$

Para determinar la curvatura se usará el tensor de Riemann mismo que viene dado por 1.4

$$R_{\nu\lambda\rho}^\mu = \frac{\partial\Gamma_{\nu\rho}^\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\Gamma_{\nu\lambda}^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\mu, \quad (1.4)$$

donde $R_{\nu\lambda\rho}^\mu$ es el tensor de curvatura de Riemann, el cual es una medida de la curvatura en cierto punto del espacio - tiempo, $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ son los símbolos de Christoffel

de la métrica y vienen dados por la ecuación 1.3. A partir de este tensor se pueden calcular el escalar de Ricci y el escalar de Kretschmann, el escalar de Ricci viene dado por la contracción del tensor de Ricci, mismo que aparece en la ecuación 1.1 y que es la traza del tensor de Riemann, mientras que el escalar de Kretschmann es una contracción de 2 tensores de Riemann, así: [5]

$$K = R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (1.5)$$

donde K es el escalar de Kretschmann, $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ es la forma (0,4) del tensor de Riemann, $R^{\mu\nu\lambda\rho}$ es la forma contravariante de dicho tensor.

El tiempo propio es proporcional a la longitud de arco en el espacio - tiempo, así:

$$ds^2 = c^2d\tau^2 = \gamma c^2 dt^2 - \frac{1}{\gamma}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta)(d\phi)^2, \quad (1.6)$$

donde γ es el factor de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

r , θ , ϕ son el radio y las componentes angulares de las coordenadas esféricas de cierto punto en el espacio y t es el tiempo coordenado (medido desde un observador exterior). La métrica determina la distorsión espacio - temporal causada por la presencia de materia y energía.

La TRG estudia el movimiento de los cuerpos en el límite relativista, generalizando así las leyes de Newton a los ámbitos relativistas. Ésta estudia al espacio

tiempo como un espacio topológico en el cual su curvatura se debe a diferentes densidades de masa y energía existentes en distintos puntos del universo. Esta curvatura espacio - temporal, determina en gran medida, el movimiento de los cuerpos sometidos a un campo gravitacional. Si se imagina que el espacio - tiempo es una superficie deformable, la masa de los cuerpos actúa como un pliegue en la superficie que la curva.

En 1916 Karl Schwarzschild llega a una solución de las ecuaciones de Einstein en la que describía el campo gravitatorio de una masa puntual en todo el espacio-tiempo, siendo éste último asintóticamente plano en el infinito [6]. Se estudiará la solución y sus propiedades en el próximo capítulo.

Capítulo 2

Métrica de Schwarzschild

Como se mencionó en el capítulo 1, la métrica de Schwarzschild, encontrada apenas unos meses después de la publicación de la TGR por parte de Einstein, es la primera solución analítica de las ecuaciones de campo de Einstein para el exterior de una distribución de masa con simetría esférica y estática, el espacio - tiempo es asintóticamente plano de acuerdo con la métrica. El elemento de línea para la métrica de Schwarzschild se escribe [7]:

$$(ds)^2 = \gamma(cdt)^2 - \frac{1}{\gamma}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta)(d\phi)^2 \quad (2.1)$$

Nótese que γ no es el mismo de la ecuación 1.6, aquí toma un sentido distinto, aquí $\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ o para abreviar $\gamma = 1 - \frac{r_s}{r}$ donde r_s es el radio de Schwarzschild y a partir de esto es evidente que $r_s = \frac{2GM}{c^2}$, M es la masa del objeto en cuestión, G es la constante de gravitación universal, c es la velocidad de la luz. Si ponemos

$$(d\Omega)^2 = r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2(\theta)(d\phi)^2:$$

$$(ds)^2 = \gamma(cdt)^2 - \frac{1}{\gamma}(dr)^2 - (d\Omega)^2$$

En forma matricial la forma covariante de la métrica está dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La forma contravariante de la métrica puede encontrarse invirtiendo la matriz de la ecuación 2.2, donde r , θ y ϕ son coordenadas esféricas de un determinado punto alrededor de la masa M , ds es el intervalo invariante y t es el tiempo coordenado. Es importante notar que γ posee dos puntos problemáticos: el primero ocurre cuando $r = r_s$ y el segundo ocurre en $r = 0$. Cabe señalar que el primer punto problemático es removible con un cambio de variable, resultado demostrado por Finkelstein y Eddington en 1958 sin embargo el segundo no es removible bajo ningún concepto, porque las leyes físicas tal y como las conocemos ya no son válidas, el escalar de Kretschmann calculado con la ecuación 1.5 viene dado por: [8, 5]

$$K = \frac{48G^2 M^2}{c^4 r^6},$$

a partir de esto, es evidente que la métrica presenta un punto singular donde las leyes de la física no son válidas porque este escalar diverge en $r = 0$.

Para evitar el punto problemático en $r = r_s$ se va a introducir la métrica de Eddington - Finkelstein en 2.1 el cambio de variable viene dado por la ecuación 2.3:

$$\tilde{t} = t \pm \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (2.3)$$

Al sustituir el cambio de variable 2.3 en 2.1, la ecuación de la métrica queda:

$$(ds)^2 = c^2 \gamma (d\tilde{t})^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) (dr)^2 \mp 2r_s d\tilde{t}dr - r^2 (d\Omega)^2, \quad (2.4)$$

de donde se observa que, si $r = r_s$ ya no hay singularidad.

Usando la extensión maximal de Kruskal-Szekeres es posible concluir que la métrica de Eddington-Finkelstein tiene 2 posibles soluciones, la positiva que se corresponde con el agujero negro de Schwarzschild y la negativa que se correspondería con un *agujero blanco*, siendo éstos 2 partes de un ente mayor que los contendría, un agujero de gusano. [9]

Ahora que ya se han explorado las propiedades de la métrica se va a introducir las ecuaciones de movimiento para las diferentes geodésicas, sean estas nulas, tipo tiempo o tipo espacio.

2.1. Ecuaciones de movimiento

En esta sección se explorará las diferentes ecuaciones de movimiento, para ello se recurre a las ecuaciones de la geodésica, además se va a introducir el concepto de potencial efectivo que será utilizado en el programa para simular las órbitas en

el capítulo siguiente.

Si se recuerda las ecuaciones de la geodésica [4]:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (2.5)$$

Para encontrar una relación de conservación de la energía usamos el lagrangiano del sistema el cual viene dado por 2.6[7], donde se ha usado $G = c = M = 1$ (unidades naturales):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2}{r}\right) \dot{t} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2}{r}} - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right], \quad (2.6)$$

A partir de esta ecuación se pueden derivar los momentos canónicos:

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \\ p_r &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r} \\ p_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} \\ p_\phi &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}, \end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{H} = p_t \dot{t} - (p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi}) - \mathcal{L} = \mathcal{L}$$

De la expresión anterior se puede deducir que la igualdad entre el lagrangiano y el hamiltoniano se deben a la ausencia del potencial, únicamente hay contribuciones de la energía cinética, así:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} = cte. = K$$

Reescalando el parámetro afín τ se puede escribir que $2\mathcal{L} = 1$ para las geodésicas de tiempo y para las geodésicas nulas $\mathcal{L} = 0$. Las geodésicas espaciales son las más complicadas de resolver, por lo que solo se las mencionará, no se las resolverá [7].

Las integrales de movimiento quedan

$$\begin{aligned}\frac{dp_t}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \\ \frac{dp_\phi}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0\end{aligned}$$

de donde:

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = cte = E \quad (2.7)$$

$$p_\phi = r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\theta}{d\tau} = cte. \quad (2.8)$$

a partir de la ecuación de movimiento:

$$\frac{dp_\phi}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(r^2 \dot{\theta}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = (r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad (2.9)$$

Si elegimos $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir nos movemos a lo largo del plano equinoccial, esto

implica que $\dot{\theta} = 0$ y por lo tanto $\ddot{\theta}$ también será cero.

De las ecuaciones anteriores se concluye que

$$p_\phi = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = cte = L \quad (2.10)$$

L denota el momento angular orbital de una partícula que orbita el agujero negro.

Como ya se mencionó anteriormente el lagrangiano del sistema en sí es una constante, para que la solución tenga sentido para una partícula masiva debería cumplirse la condición de normalización [7]:

$$g_{tt}^{-1}(E)^2 + g_{rr}^{-1}(p_r)^2 + g_{\phi\phi}^{-1}p_\phi^2 = -1, \quad (2.11)$$

por otro lado la condición de normalización que deben cumplir las partículas no masivas (i.e. fotones, neutrinos) viene dada por:

$$g_{tt}^{-1}(E)^2 + g_{rr}^{-1}(p_r)^2 + g_{\phi\phi}^{-1}p_\phi^2 = 0 \quad (2.12)$$

Para partículas masivas y no masivas, las condiciones de normalización de las ecuaciones 2.11 y 2.12 pueden usarse para derivar una cantidad muy útil, el potencial efectivo :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - V_{eff}(r)^2 \Rightarrow V_{eff}^2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (2.13)$$

Para partículas no masivas cambia la forma del potencial efectivo y pasa a ser:

$$V^2 = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (2.14)$$

En este caso V^2 no tiene mínimo local y solo existen órbitas abiertas y órbitas de captura. Sin embargo, existe una excepción, una órbita circular inestable a $r = 3M$, que es conocida como la esfera de fotones.

Las ecuaciones 2.13 y 2.14 se pueden resumir en la siguiente ecuación:

$$V_{eff}(r) = \left(\frac{L^2}{2r^2} \right) \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) - K \frac{r_s}{r} \quad (2.15)$$

Donde K es una constante que puede tomar los valores de 1, 0, o -1 dependiendo del tipo de geodésica con el que se esté trabajando, para geodésicas de tipo tiempo $K = 1$, para las nulas $K = 0$ y para las de tipo espacio $K = -1$ (éstas no son de nuestro interés, ya que solamente se van a considerar aquellas geodésicas tipo tiempo y nulas).[10].

Las ecuaciones 2.13 y 2.14 se resumen en la ecuación 2.15 que es la que se usa en el código de *Mathematica* para calcular las trayectorias (con $G = c = 1$) [10].

Después de haber introducido las propiedades de la métrica, así como el potencial efectivo y haber obtenido las ecuaciones de movimiento se va a proceder con la presentación de los resultados obtenidos.

Capítulo 3

Resultados

En el presente capítulo se va a presentar y analizar los resultados obtenidos con las diferentes geodésicas y las órbitas que generan éstas. También se obtendrá la equivalencia en masa del agujero negro analizado en este capítulo. Además se hará un pequeño análisis de cómo pudo influir la métrica en la obtención de la primera foto de un agujero negro [1].

La masa del agujero negro en las simulaciones que se presentan en este trabajo se asumirá como $M = \frac{3}{14}$ en unidades naturales. La cantidad obtenida tiene unidades de longitud y se relaciona con la masa real del objeto mediante:

$$M = \frac{G\tilde{M}}{c^2} \Rightarrow \tilde{M} = \frac{c^2 M}{G},$$

donde \tilde{M} es la masa que tendría el objeto, sustituyendo los valores de G y c tendríamos:

$$\tilde{M} \approx 2,8899 \times 10^{26} kg.$$

El radio de Schwarzschild para esta masa usando la expresión derivada en el capítulo 2 a fin de obtener dicho radio es:

$$r_s = \frac{2G\tilde{M}}{c^2} \Rightarrow r_s \approx 0,4285[m].$$

A efectos comparativos, esto es lo que se obtendría si comprimiese un planeta con la masa de Neptuno ($M_{Neptuno} = 1,024 \times 10^{26} kg$) hasta que éste alcance el radio de Schwarzschild.

Esta masa es demasiado grande como para ser un agujero negro primordial $M_{PBH} = 10^{14} \sim 10^{20} kg$ donde M_{PBH} es la masa del agujero negro primordial, que son agujeros negros que pudieron haberse formado en el universo temprano, así mismo la masa es demasiado pequeña para ser un agujero negro estelar, un agujero negro estelar es aquel que surge del colapso gravitatorio de una estrella con una masa por lo menos 5 veces mayor a la del sol y tiene una masa superior a las 3 masas solares[11]. Así, el modelo que se propone no encaja con ninguno de los 2, por lo que se podría concluir que es un modelo de juguete.

Ahora que se estudiaron las propiedades del modelo presentado en este capítulo, se va a proceder con el estudio y análisis de las órbitas obtenidas con el programa [10].

3.1. Geodésicas tipo tiempo

Las geodésicas tipo tiempo son aquellas que tienen $K = 1$ en la ecuación 2.15, por lo que la forma del potencial efectivo estará dada por la ecuación 2.13.

3.1.1. Órbitas abiertas

La órbita que se presenta en la figura 3.1 es una órbita parabólica, ya que llega a un mínimo de distancia entre el agujero negro y la partícula de prueba y luego sale disparada de las cercanías del agujero negro.

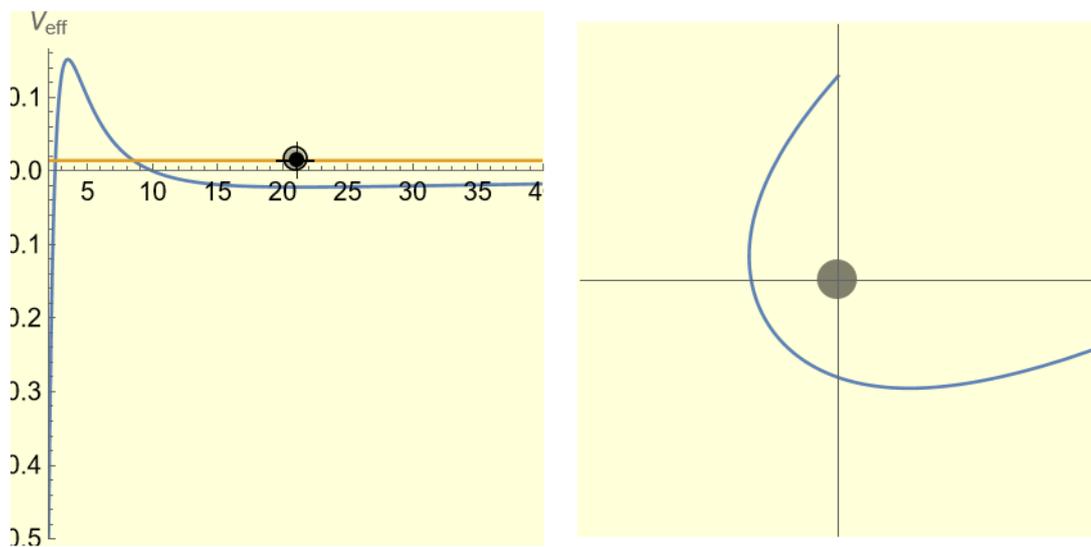


Figura 3.1: Órbita Abierta alrededor del agujero negro

Radio inicial R_0 [GM]	21.2
Potencial efectivo V_{eff}	0.015
Momento angular L	5

Cuadro 3.1: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.1

La órbita que se presenta en la figura 3.2 es una órbita abierta, aquí la partícula de prueba describe una trayectoria tal que ella sale por el mismo lugar donde comenzó a caer hacia el agujero negro.

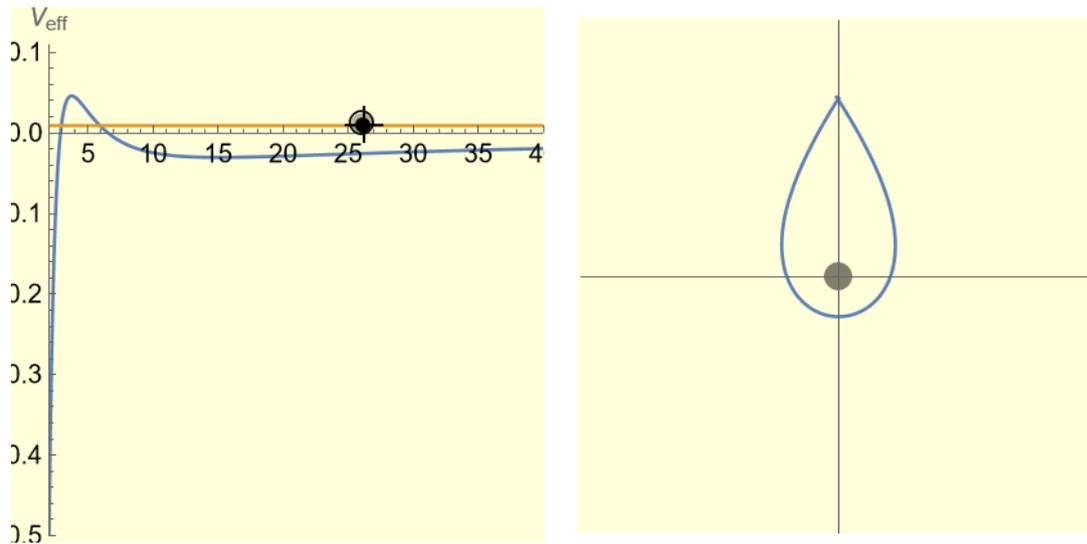


Figura 3.2: Órbita Abierta en forma de gota alrededor del eje y

Radio inicial R_0 [GM]	26
Potencial efectivo V_{eff}	0.02
Momento angular L	4.34

Cuadro 3.2: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.2

La partícula de prueba en la figura 3.3 describe una órbita tal que da una vuelta alrededor del agujero negro y luego sale disparada.

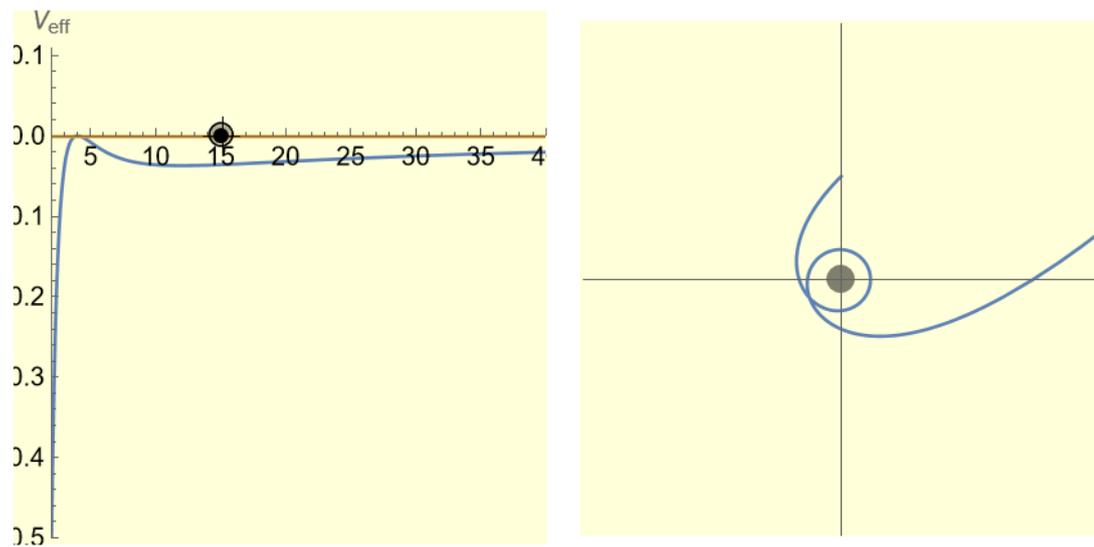


Figura 3.3: Órbita Abierta que aprovecha el agujero negro para obtener impulso gravitacional

Radio inicial R_0 [GM]	15
Potencial efectivo V_{eff}	0
Momento angular L	4

Cuadro 3.3: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.3

3.1.2. Órbitas de captura

Las órbitas de captura son aquellas en las que la partícula de prueba describe una espiral cayendo hacia el horizonte de sucesos del agujero negro. Se dan cuando las partículas que orbitan al agujero negro no tienen suficiente energía y terminan

cayendo al agujero negro.

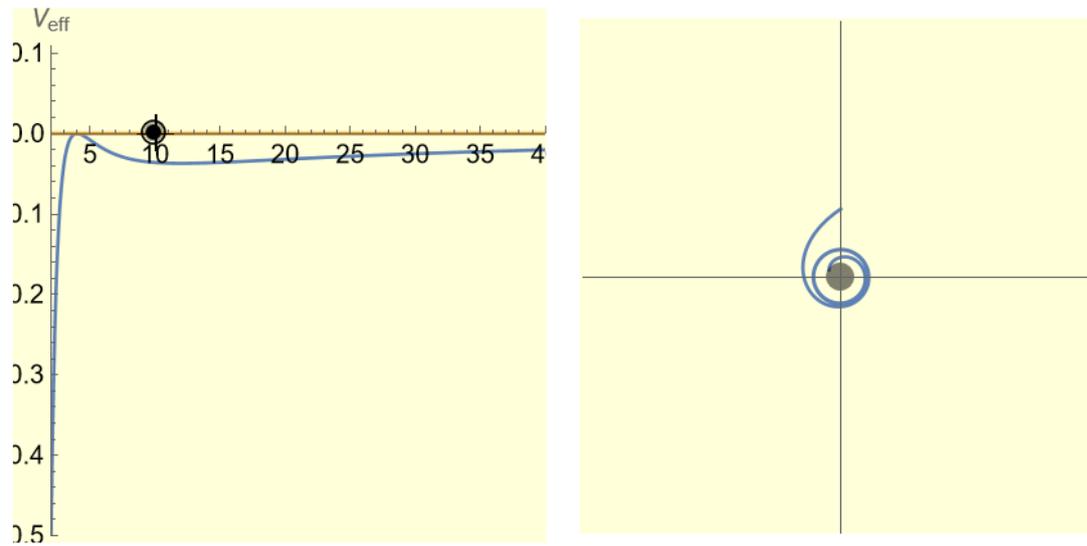


Figura 3.4: Órbita de captura en forma de espiral con menor momento angular y $V_{eff} = 0$

Radio inicial R_0 [GM]	10
Potencial efectivo V_{eff}	0
Momento angular L	4

Cuadro 3.4: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.4

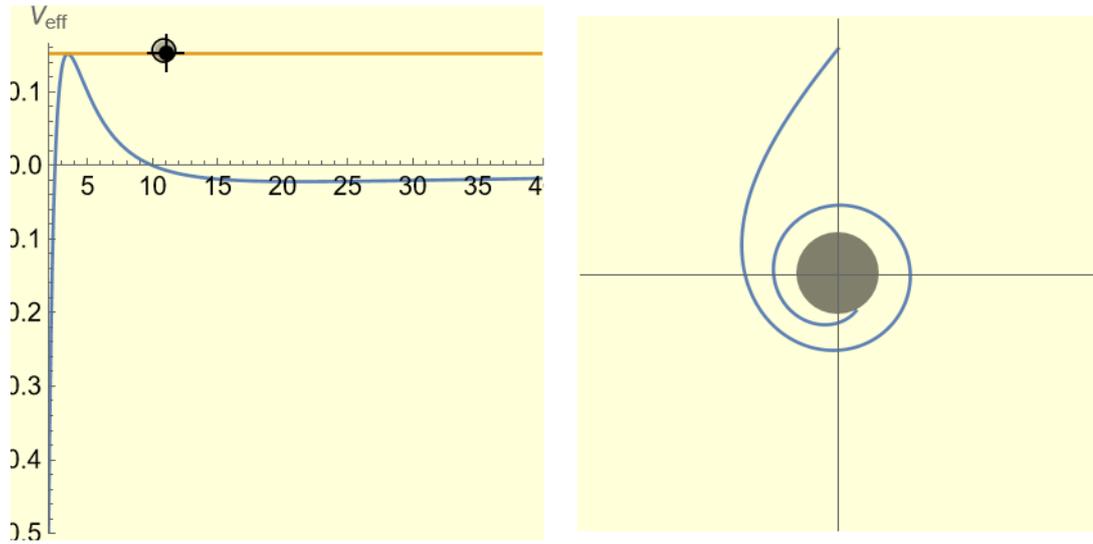


Figura 3.5: Espiral de caída al horizonte de sucesos

Radio inicial R_0 [GM]	12
Potencial efectivo V_{eff}	0.15
Momento angular L	5

Cuadro 3.5: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.5

3.1.3. Órbitas acotadas

Las órbitas acotadas son aquellas en las que las partículas de prueba presentan energías tales que el agujero negro las atrapa pero tienen suficiente energía para describir órbitas completas

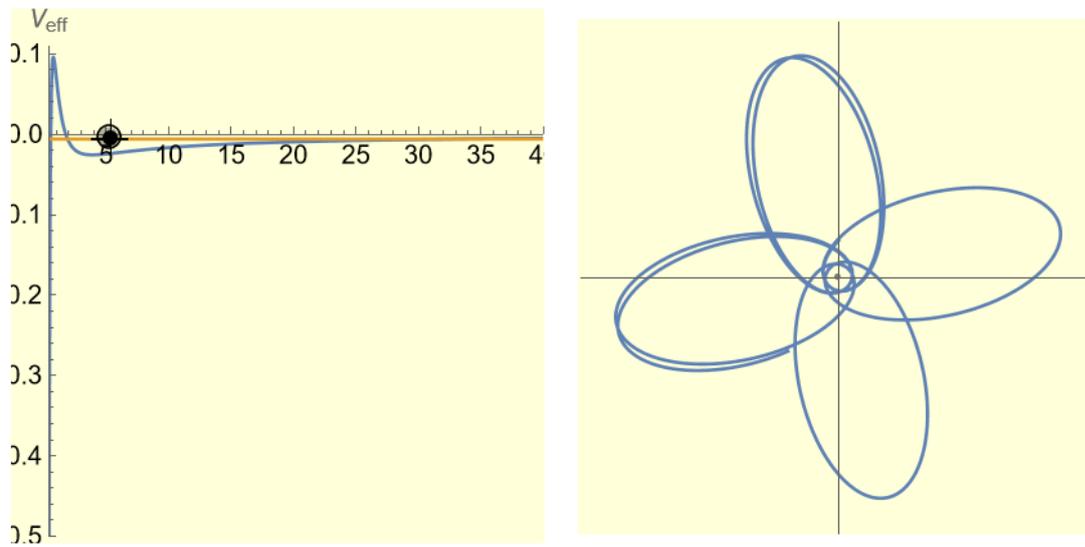


Figura 3.6: Órbita acotada elíptica en forma de flor.

Radio inicial R_0 [GM]	5
Potencial efectivo V_{eff}	-0.02
Momento angular L	1

Cuadro 3.6: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.6

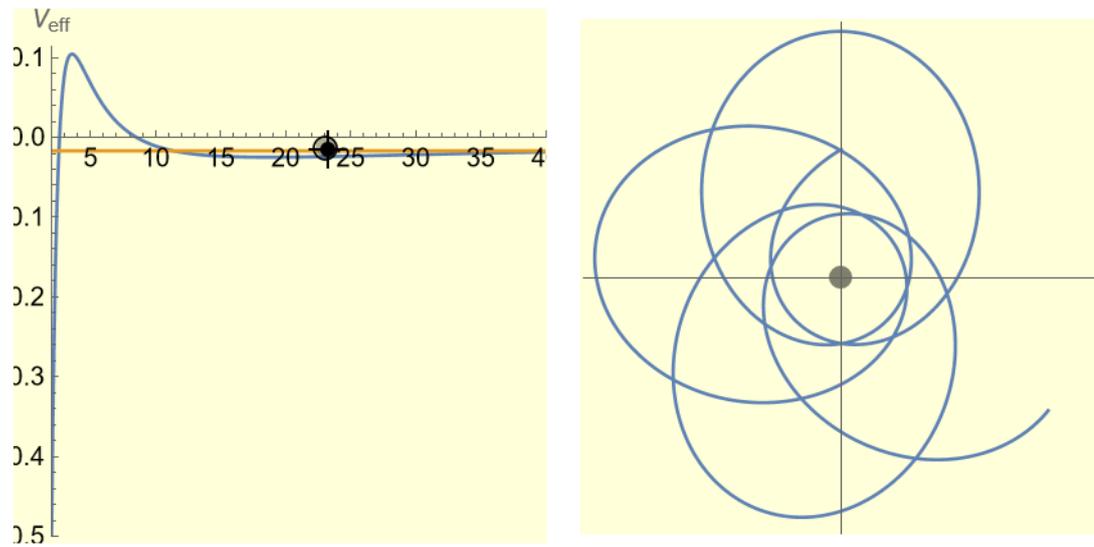


Figura 3.7: Órbita acotada elíptica

Radio inicial R_0 [GM]	23.2
Potencial efectivo V_{eff}	-0.019
Momento angular L	4.72

Cuadro 3.7: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.7

Dentro de las órbitas acotadas están incluidas las circulares que se forman cuando el potencial efectivo es mínimo.

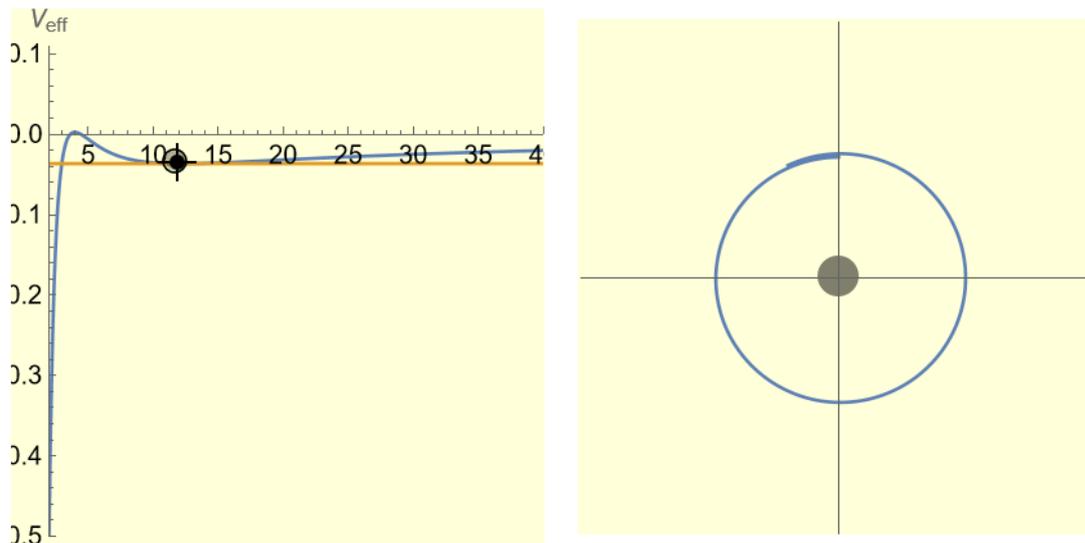


Figura 3.8: Órbita circular

Radio inicial R_0 [GM]	12
Potencial efectivo V_{eff}	-0.039
Momento angular L	4.02

Cuadro 3.8: Datos utilizados para la elaboración de la figura 3.8

Avance del perihelio

Las figuras 3.6 y 3.7 muestran órbitas elípticas alrededor del agujero negro, mismas que, como se puede observar en dichas figuras, presentan un elevado desplazamiento del perihelio, esto es, son órbitas acotadas pero no cerradas. Los ángulos de precesión vienen dados por:

- Para la figura 3.7 el ángulo de precesión es de $78,5544^\circ$ calculado numérica-

mente.

- Para la figura 3.6 el ángulo de precesión es de $88,7739^\circ$.

Ahora que se ha estudiado las propiedades de las geodésicas tipo tiempo se va a estudiar las geodésicas nulas.

3.2. Geodésicas nulas

Las geodésicas nulas son aquellas con $K = 0$ en la ecuación 2.13, por lo que la forma del potencial estará dado por la ecuación 2.14.

3.2.1. Captura de la luz

La captura de la luz se da cuando la luz no es capaz de escapar de la fuerza gravitatoria del agujero negro. La luz describe una espiral hasta llegar al horizonte de sucesos del agujero negro.

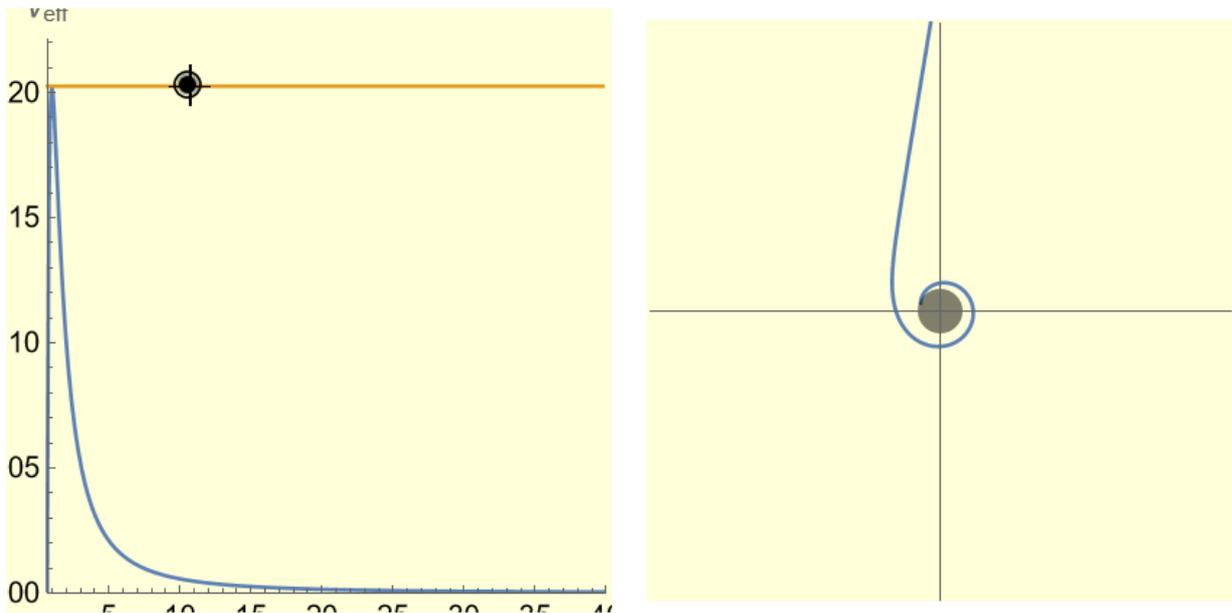


Figura 3.9: Trayectoria de una partícula sin masa que entra al agujero negro

Radio inicial R_0 [GM]	13
Potencial efectivo V_{eff}	20.25
Momento angular L	1.1
Masa (unidades naturales)	$\frac{1}{3}$

Cuadro 3.9: Datos para la elaboración de la figura 3.9

3.2.2. Anillo de luz

En la fotografía del agujero negro del centro de la Vía Láctea (Sagitario A) tomada en 2022 por el EHT (Event Horizon Telescope) se aprecia el gas brillante, note que hay un borde difuso entre el gas brillante y el horizonte de sucesos de

Sagitario A, el borde difuso del interior sería el anillo de luz que lo rodea[1]. La fotografía se muestra en la figura 3.10

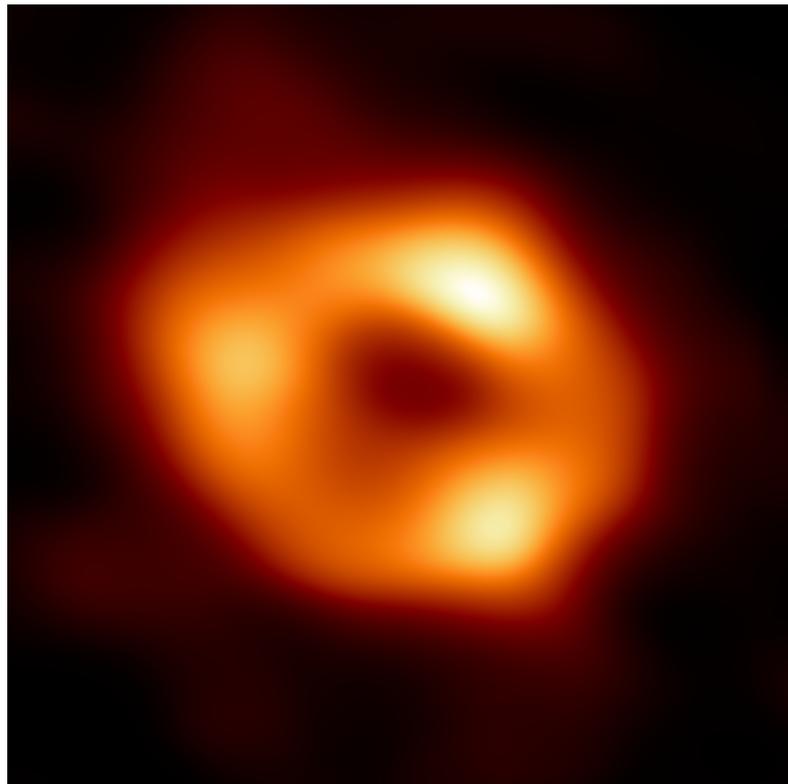


Figura 3.10: Gas brillante en las proximidades del agujero negro del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea [1]

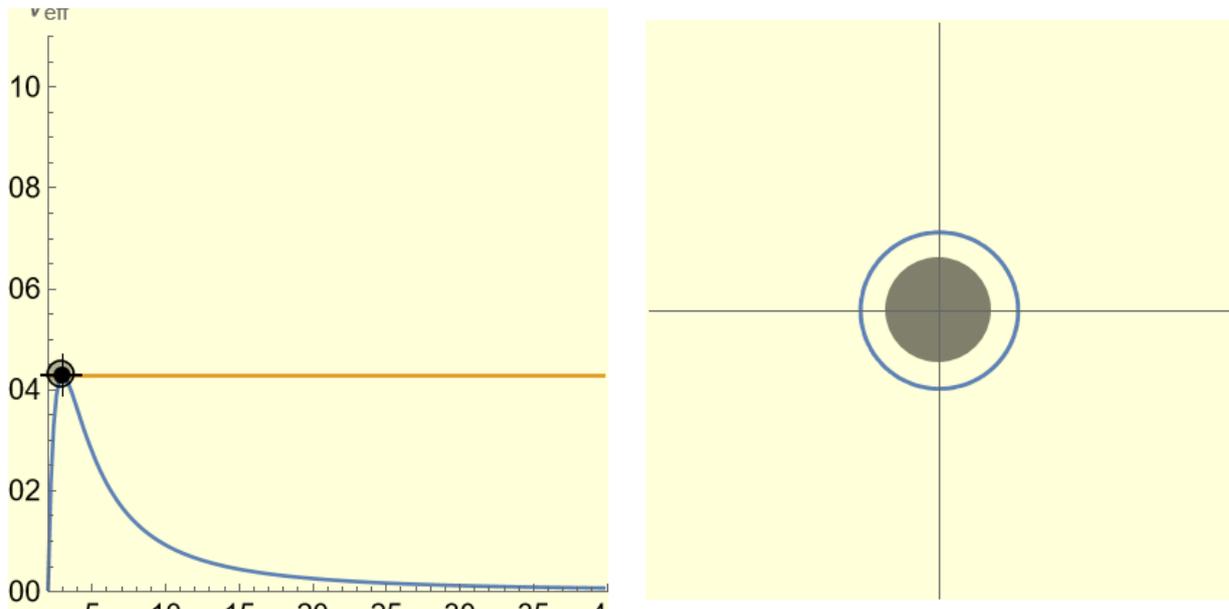


Figura 3.11: Anillo de luz

Radio inicial R_0 [GM]	3
Potencial efectivo V_{eff}	4.5
Momento angular L	1.52

Cuadro 3.10: Datos para la elaboración de la figura 3.11

Dentro del anillo de luz el campo gravitacional es tan fuerte que obliga a los fotones a describir órbitas circulares alrededor del agujero negro. El anillo de luz está a 3 [GM] o $\frac{3r_s}{2}$ como se puede apreciar en la tabla 3.10.

3.2.3. Deflexión de la luz

Debido a la gran concentración de masa, cerca de un agujero negro los fotones se ven obligados a curvar su trayectoria, produciendo así la deflexión de la luz.

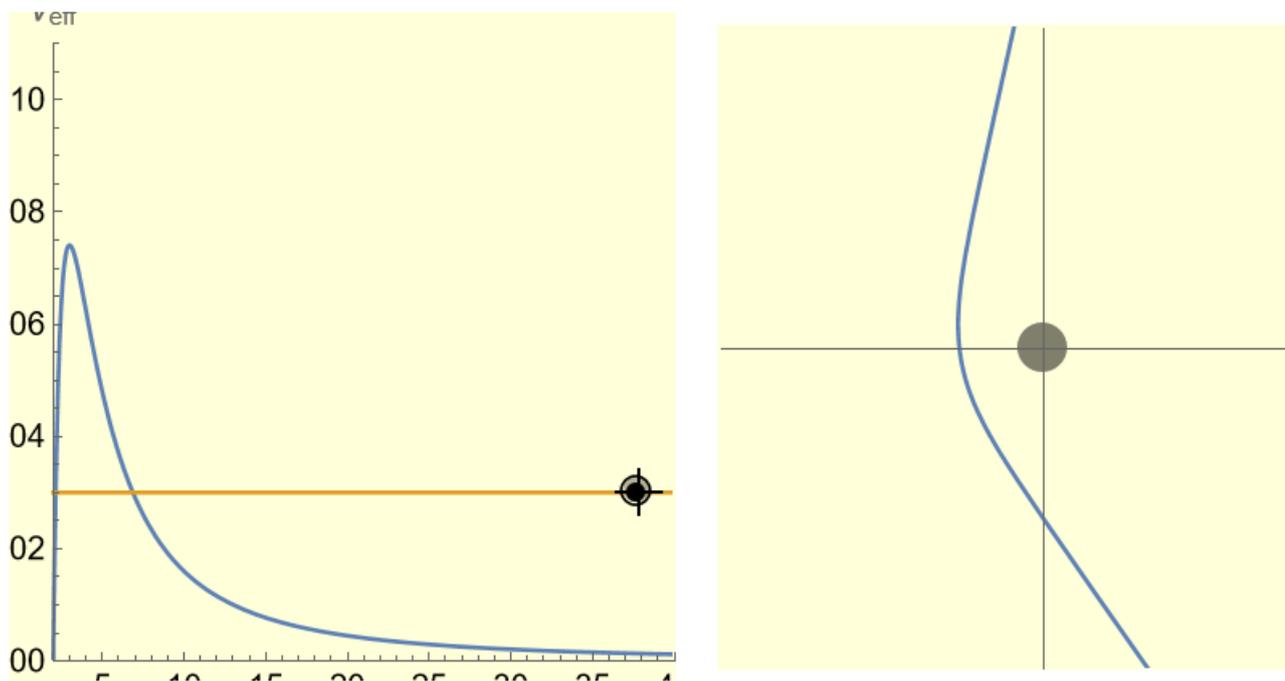


Figura 3.12: Deflexión de la luz al pasar cerca del agujero negro (a $r > 3[GM]$)

Radio inicial R_0 [GM]	37.5
Potencial efectivo V_{eff}	5
Momento angular L	2

Cuadro 3.11: Datos utilizados para la figura 3.12

El ángulo de deflexión de la luz se calcula como

$$\psi = \frac{4M}{R}$$

$$R = 2r_s = 4M$$

$$\psi = 1 \text{radian} = 57,29^\circ.$$

Capítulo 4

Conclusiones

En el capítulo 1 se introduce la Teoría de la Relatividad General, los conceptos matemáticos necesarios para resolver las ecuaciones de Einstein, además de proporcionar un marco para comprender la solución de Schwarzschild. En el capítulo 2 se deducen las ecuaciones de movimiento en la métrica de Schwarzschild para cuerpos masivos y partículas no masivas con $G = c = 1$, se plantea el problema desde el punto de vista del potencial efectivo. Se obtienen 3 ecuaciones diferenciales acopladas, las cuales se resuelven numéricamente y para ello se decidió usar un programa de Wolfram Mathematica[10], este programa trabajaba con unidades naturales, además de permitir manipular la masa, momento angular, tiempo, distancia inicial entre el cuerpo en movimiento y el agujero negro, así como el potencial efectivo de la órbita. En el capítulo 3 se pueden apreciar las diferentes órbitas de distintos tipos, se exploran geodésicas tipo tiempo y nulas. Se hace una extrapolación para calcular la masa que origina las trayectorias y se calcula que la

masa real es $2,8899 \times 10^{26}$ kg, además de eso se calcula el radio de Schwarzschild y resulta ser de 42.85 cm, se concluye que el agujero negro estudiado no presenta un análogo en el universo conocido, por lo que es un modelo de juguete. En las trayectorias tipo tiempo se distinguen 3 tipos de órbitas: abiertas (cuando la partícula en cuestión tiene tanta energía que el agujero negro sólo la desvía un poco), de captura (cuando la partícula en cuestión tiene muy poca energía y cae al agujero negro) y acotadas (cuando las partículas describen órbitas elípticas o circulares siendo el último caso un caso particular de órbita elíptica). Dentro de las trayectorias nulas se encuentran 3 casos, abiertas (cuando la luz es desviada por el agujero negro), una trayectoria especial que sirvió para tomar la primera foto de un agujero negro, misma que puede observarse en la figura 3.10, la circular y por último el caso de la captura de la luz, cuando la luz no puede escapar de la intensa gravedad del agujero negro y cae en espiral hacia él. Adicionalmente, en este trabajo se calcula el avance del perihelio en las órbitas elípticas, mismo que resulta ser alto, de $78,5544^\circ$ en la órbita mostrada en 3.7 y de $88,7739^\circ$ en la figura 3.6 y la desviación de la luz que se da cuando ésta se acerca a un agujero negro (a $r > 3M$). Finalmente, en este trabajo se manipula las ecuaciones de campo de Einstein y las geodésicas para llegar a una solución física, y las constantes universales ya que se normalizaron las constantes, es decir se hizo $G = c = 1$. Estas soluciones son un apoyo para comprender la física detrás de las ecuaciones de la TRG, dando un marco simple de entender, en lugar del amasijo de ecuaciones que se tienen que resolver.

Bibliografía

- [1] Event Horizon Telescope. Astronomers Reveal First Image of the Black Hole at the Heart of Our Galaxy. Foto, 2022. [https : //eventhorizontelescope.org/blog/astronomers – reveal – first – image – black – hole – heart – our – galaxy](https://eventhorizontelescope.org/blog/astronomers-reveal-first-image-black-hole-heart-our-galaxy).
- [2] Stephen Hawking. *A Brief History of Time, the updated and expanded tenth anniversary edition*, chapter 6, pages 83–101. Bantam Books, 1996.
- [3] Albert Einstein. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften*, pages 778–786, 1915. [https : //einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6 – doc/242](https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-doc/242).
- [4] Hans Stephani. *Relativity: an introduction to Special and General Relativity Third Edition*, chapter 22, pages 173–185. Cambridge University Press, 2004.
- [5] Gkigkitsis I Haranas I. & Ragos O. Kretschmann Invariant and Relations between Spacetime Singularities, Entropy and Information. *Arxiv: General Relativity and Quantum Cosmology*, pages 2–3, 2014. [https : //arxiv.org/abs/1406,1581](https://arxiv.org/abs/1406.1581).

- [6] Schwarzschild K. traducido al inglés por Antoci C & Loinger A. On the gravitational field of a mass point, according to Einstein's Theory. *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196, 1916. <https://arxiv.org/pdf/physics/9905030.pdf>.
- [7] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*, chapter 3, pages 85–138. Oxford University Press, 1980.
- [8] Roger Penrose. Gravitational collapse and space - time singularities. *Physical Review Letters*, pages 57–59, 1965. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.14.57>.
- [9] José Lemos & Diogo Silva. Maximal extension of the Schwarzschild metric: From Painlevé–Gullstrand to Kruskal–Szekeres. *Annals of Physics*, pages 1–20, 2021. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491621001032>.
- [10] Niels Walet. Geodesics in Schwarzschild space. *Codigo de Mathematica*, 2012. <https://demonstrations.wolfram.com/GeodesicsInSchwarzschildSpace/>.
- [11] Carr B & Kühnel F. Primordial Black Holes as Dark Matter Candidates. *Arxiv: Astrophysics*, pages 1–6, 2022. <https://arxiv.org/pdf/2110.02821.pdf>.