

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
Colegio de Ciencias e Ingenierías

Estudio y desarrollo de un esquema de control por modos deslizantes basados en cálculo fraccionario para procesos químicos con elevado retardo

D'hamar Elizabeth Agudelo Moreno

Matemáticas

Trabajo de fin de carrera presentado como requisito para la obtención del título de Matemático

Quito, 16 de diciembre de 2022

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
Colegio de Ciencias e Ingenierías

**HOJA DE CALIFICACIÓN
DE TRABAJO DE FIN DE CARRERA**

**Estudio y desarrollo de un esquema de control por modos
deslizantes basados en cálculo fraccionario para procesos
químicos con elevado retardo**

D'hamar Elizabeth Agudelo Moreno

Nombre del profesor, Título académico: Antonio Di Teodoro, Ph.D.

Nombre del profesor, Título académico: Oscar Camacho, Ph.D.

Quito, 16 de diciembre de 2022

© Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombres y apellidos:	D'hamar Elizabeth Agudelo Moreno
Código:	00209912
Cédula de Identidad:	1719259598
Lugar y fecha:	Quito, 16 de diciembre de 2022

ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>

UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>

*Dedicado a la pequeña D'hamar asustada de primer semestre.
Al final lo lograste, con miedo y todo, pero lo lograste.*

Agradecimientos

A Dios.

A mis madres, Luz Agudelo e Inés Rodríguez por su amor y apoyo incondicional. Por ser mi inspiración y ejemplo a seguir. Quienes me enseñaron a nunca rendirme y luchar por mis sueños.

A Nicola Di Teodoro por creer en mí en los momentos más difíciles y no permitir que me rinda. Por impulsarme a cumplir mis metas y a siempre perseverar. Al profesor Oscar Camacho por brindarme la oportunidad de trabajar en su investigación y guiarme en mis primeros pasos.

A Lorena Montero por apoyarme durante todo este camino. Este logro también es el resultado de todo su esfuerzo.

A Narcisa García y Néstor Pérez por formar parte de los pilares fundamentales en mi vida y enseñarme mucho más allá de lo académico. Por ser mi segunda familia.

A todas las personas que me acompañaron en este proceso, enseñándome y apoyándome. Porque cada abrazo y palabra de aliento ayudaron a que el día de hoy cumpliera este objetivo y me convirtiera en una mejor persona. Gracias por dejar una huella en mi vida.

Resumen

En la primera parte de este trabajo se estudia el comportamiento de un controlador de modo deslizante fraccionario diseñado a partir de un modelo de primer orden más tiempo muerto fraccionario. El diseño del controlador aplicado a este modelo utiliza el poder del cálculo de orden fraccionario para describir y representar los sistemas químicos reales como un modelo de orden reducido y, a partir de él, aplicar el procedimiento de control de modo deslizante para desarrollar el controlador. Se busca desarrollar la ley de control fraccionaria para un modelo de primer orden fraccionario con retardo. Con la particularidad, de que se incluye el error en la aproximación de retraso en el tiempo. Para analizar, si cuando el error tiende a cero, ambas leyes de control convergen a una misma. Posteriormente, se presenta una generalización del modelo de primer orden fraccionario con retardo y el desarrollo de su ley de control fraccionaria, con el objetivo de analizar sobre qué parámetros esta ley converge a la ley de control fraccionaria del modelo de primer orden. En la segunda parte de este trabajo se integra una estructura de compensador de tiempo muerto (CTM) con control de modo deslizante y cálculo fraccionario para proporcionar un CTM robusto para sistemas no lineales con un retraso prolongado. El enfoque proporcionado brinda a la estructura de control de modo deslizante (CMD) características predictivas, mejorando la capacidad de respuesta transitoria para los procesos de tiempo muerto, y CMD brinda robustez de estructura predictiva para los desajustes del modelo. El cálculo fraccionario se utiliza para crear un modelo de orden reducido. El nuevo método utiliza un modelo de orden fraccional sin retrasos. La superficie de deslizamiento está destinada a lograrse a pesar de los errores de modelado, asegurando la robustez. Por esto, se presenta un diseño de control a partir de un esquema predictor de Smith y se calcula la ley de control fraccionaria para la función de transferencia fraccionaria. A continuación, se presenta una generalización de la función de transferencia sin retardo y se obtiene su ley de control fraccionaria para así estudiar bajo qué parámetros ambas leyes convergen a una misma. Luego, se realiza un análisis del

comportamiento del parámetro asociado a la derivada fraccional cuando este tiende a uno en la función de transferencia sin retardo, con el objetivo de comparar el comportamiento de derivadas fraccionarias y enteras y de las leyes de control obtenidas en el proceso. Finalmente, se presenta el mismo análisis de la generalización del modelo de primer orden fraccionario pero en lugar de considerar la aproximación del retardo, se estudia la ley de control fraccionaria con Mittag-Leffler.

Palabras clave: Modelo de primer orden con retardo, función de transferencia sin retardo, cálculo fraccionario, control de modo deslizante, aproximación de retardo de tiempo, ley de control fraccionaria, Mittag-Leffler.

Abstract

The first part of this work studies the behavior of a fractional sliding mode controller designed from a first-order plus fractional dead time model. The controller design applied to this model uses the power of fractional order calculus to describe and represent real chemical systems as a reduced order model and, from it, apply the sliding mode control procedure to develop the controller. It sought to develop the fractional control law for a fractional first-order model with delay. With the particularity that the error is included in the time delay approximation. In order to analyze, if when the error tends to zero, both control laws converge to the same one. Subsequently, a generalization of the fractional first-order model with delay and the development of its fractional control law is presented, with the objective of analyzing over which parameters this law converges to the fractional control law of the first-order model. In the second part of this work, a dead-time compensator structure (DTC) with sliding mode control and fractional computation is integrated to provide a robust DTC for nonlinear systems with extended delay. The provided approach gives the sliding mode control (SMC) structure predictive characteristics, improving the transient responsiveness for dead-time processes, and SMC provides predictive structure robustness for model mismatches. Fractional calculus is used to create a reduced-order model. The new method uses a fractional-order model with no delays. The slip surface is intended to be achieved despite modeling errors, ensuring robustness. Therefore, a control design from a Smith predictor scheme is presented and the fractional control law for the fractional transfer function is calculated. Then, a generalization of the transfer function without delay is presented and its fractional control law is obtained in order to study under which parameters both laws converge to the same one. Then, an analysis of the behavior of the parameter associated with the fractional derivative when it tends to one in the transfer function without delay is performed, in order to compare the behavior of fractional and integer derivatives and of the control laws obtained in the process. Finally, the same analysis of the generalization of the fractional first-order model is presented, but instead of considering the delay

approximation, the fractional control law with Mittag-Leffler is studied.

Keywords: First order model with delay, transfer function without delay, fractional calculus, sliding mode control, time delay approximation, fractional control law, Mittag-Leffler.

Índice general

1. Introducción	14
2. Preliminares	17
2.1. Control de Modo Deslizante	18
2.2. Identificación	19
2.2.1. Generalización del modelo FOPDT para identificación y propósitos de control	19
2.2.2. Identificación de un modelo de primer orden con retardo	21
2.3. Aproximación de retardo de tiempo	24
2.4. Caso Clásico	25
2.5. Cálculo Fraccionario	27
2.5.1. Derivada de Caputo y Riemann-Liouville y su conexión	27
2.5.2. Comportamiento en las fronteras	30
2.5.3. Transformada de Laplace de derivadas fraccionarias	30
2.5.4. Mittag-Leffler	31
2.6. Superficie de deslizamiento	33

2.6.1. Análisis de superficie de deslizamiento fraccionaria con generalización completa	34
2.6.2. Análisis de la superficie de deslizamiento fraccionaria para modelos con retardo elevado	35
2.7. Caso Fraccionario	36
3. Resultados Principales	38
3.1. Desarrollo de la ley de control con un modelo de primer orden con retardo	38
3.2. Desarrollo de la ley de control para la generalización del modelo de primer orden fraccionario con retardo	41
3.3. Diseño de control a partir de un esquema predictor de Smith	46
3.4. Generalización de la función de transferencia sin retardo	48
3.4.1. Caso especial: cuando el parámetro asociado tiende a uno en la generalización de la función de transferencia sin retardo	51
3.5. Generalización del modelo de primer orden fraccionario con retardo con Mittag - Leffler	52
Conclusiones	55
Bibliografía	57

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de proceso para identificación de modelos empíricos (ver [Marlin, 1995]).	21
2.2. Curva de reacción del proceso. Método I (ver [Marlin, 1995]).	22
2.3. Curva de reacción del proceso. Método II (ver [Marlin, 1995]).	23
3.1. Estructura clásica del predictor de Smith para sistemas de tiempo muerto dominantes.	46

Capítulo 1

Introducción

La ingeniería generalmente trata con sistemas que tienen no linealidades, entre los cuales se puede mencionar, los retrasos de tiempo, que son una característica de los sistemas físicos (ver [Camacho, 2002, Camacho and Leiva, 2020]). Estos siempre están involucrados en la transferencia física de cualquier cosa, ya sea información, energía o material. Su duración depende de la distancia y la velocidad de transmisión; algunos son extremadamente breves y otros bastante largos (ver [Normey-Rico and Camacho, 2007]). Debido a que su existencia genera la posibilidad de que un sistema se vuelva inestable, se consideran condiciones adicionales al formar el trabajo de diseño. Con la premisa de que el sistema sabe estos estados conocidos como sistemas con variables de estado retardado. Sin embargo, los retrasos de tiempo prolongados aumentan significativamente la complejidad del análisis y control del sistema (ver [Liptak, 2018]). Un compensador de tiempo muerto (CTM) es una estructura de control que se ocupa de tiempos muertos largos. Smith (1957) escribió uno de los primeros artículos para discutir específicamente el tiempo muerto. En la literatura, a esta descripción se la ha llamado predictor de Smith. Ahora, los CTM están integrados en los sistemas de control como módulos estándar (ver [Normey-Rico and Camacho, 2008]).

El diseño estructural de un sistema de control necesita el uso explícito o implícito de un modelo de proceso. Los errores de modelado inevitables dan como resultado una falta de coincidencia entre el modelo y la planta real. En consecuencia, el controlador creado para un modelo dado puede funcionar de manera significativamente diferente cuando se implementa en el proceso real. El desarrollo de controladores capaces de manejar los desajustes modelo-planta es una solución a este desafío (ver [Smith and Corripio, 2005], [Seborg et al., 2016] y [Camacho,

2002]). La metodología de control de modo deslizante (CMD), comúnmente conocida como control de estructura variable (CEV), es un método de control no lineal, (ver [Utkin et al., 2017]). Desarrollar un modelo completo para procesos químicos es bastante difícil debido principalmente a las características de no linealidad y la falta de comprensión o conocimiento de algunos parámetros del proceso (ver [Seborg et al., 2016]). El diseño del controlador de modo deslizante depende del orden del modelo de proceso (ver [Utkin et al., 2017]). Los modelos empíricos se pueden utilizar para modelar el control de procesos. Los modelos First Order Plus Deadtime (FOPDT) son generalmente apropiados para el diseño de control de procesos (ver [Smith and Corripio, 1991]).

La temperatura, el nivel, la presión y el pH son las variables que con mayor frecuencia deben controlarse en las aplicaciones industriales. La mayoría de los sistemas de control se construyen utilizando un modelo de proceso, pero los errores de modelado resultantes de dinámicas no modeladas y perturbaciones desconocidas degradan el rendimiento de este. Se espera que un sistema de control típico, o más bien un controlador adecuado, haga que el proceso sea eficiente, suprima el impacto de las perturbaciones externas, haga que sea estable y lo optimice completamente (ver [Seborg et al., 2016]). Las incertidumbres producen degradación del sistema de control. Los controladores convencionales no tienen la versatilidad necesaria para compensar adecuadamente la variedad de complejidades dinámicas presentes en estos sistemas. Debido a la naturaleza de estas incertidumbres, se requiere un enfoque más genérico para tratar los procesos no lineales.

La teoría de derivadas fraccionarias e integrales describe y modela con precisión muchos fenómenos del mundo real vistos en sistemas y situaciones diversas, (ver [Kilbas et al., 2006b]). Además, los fenómenos matemáticos de orden fraccionario nos permiten describir y representar sistemas reales con mayor precisión que los métodos “enteros”. En consecuencia, las ecuaciones diferenciales basadas en cálculo de orden fraccionario (FOC, por sus siglas en inglés) son herramientas matemáticas más amplias que las de orden entero (ver [Muresan and Ionescu, 2020]). Esto se debe a que las ecuaciones diferenciales basadas en el cálculo fraccionario emplean una derivada de valor real o un operador de integración en lugar de depender simplemente de un diferenciador o integrador de valor entero. A lo largo de las últimas décadas, la teoría de derivadas fraccionarias e integrales ha proporcionado una descripción precisa y un modelo de varios fenómenos del mundo real observados en sistemas y situaciones prácticas.

Este trabajo tiene como objetivo fusionar la metodología de control de modo deslizante (CMD) con el modelo de orden fraccionario con el objetivo de obtener una ley de control. Después se busca aprovechar el compensador de tiempo muerto,

fusionarlo con el control de modo deslizante y mediante la utilización de otro modelo fraccionario obtener un compensador de tiempo robusto. El diseño utiliza el poder de FOC para describir y representar sistemas de fenómenos de modelado matemático con mayor precisión que las técnicas típicas de números enteros.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se definen los conceptos de cálculo fraccionario utilizados en el análisis de la superficie de deslizamiento fraccionaria, se define el control de modo deslizante, se da una introducción a la generalización del modelo FOPDT para identificación y propósitos de control haciendo incapié en la identificación de un modelo de primer orden con retardo, se define lo que es un predictor de Smith y finalmente, la aproximación de retardo de tiempo.

Problemática

El diseño de los esquemas de control de procesos químicos actuales es complicado debido a los efectos no lineales y la complejidad del sistema, y el deseo de un excelente rendimiento y robustez ante las incertidumbres en el proceso de fabricación, entre otros factores (ver [Liptak, 2018]). Los modelos empíricos que emplean modelos lineales de bajo orden con tiempo muerto son una estrategia alternativa eficiente para el control de procesos (ver [Liptak, 2018]). Sin embargo, estos modelos de orden reducido contienen incertidumbres resultantes del conocimiento incompleto del modelo, y los efectos del proceso no lineal contribuyen a una disminución en el rendimiento del controlador. Incluso si está disponible, a menudo es un modelo complicado, que puede estar acompañado de incertidumbres y un comportamiento variable en el tiempo. Los modelos complejos conducen a controladores complicados de orden superior que son difíciles de diseñar, implementar, mantener y diagnosticar.

2.1. Control de Modo Deslizante

El control de modo deslizante (CMD) es un método de control no lineal comúnmente conocido como control de estructura variable (CEV) (ver [Slotine et al., 1991]). El controlador tiene dos componentes, componentes de alta y baja frecuencia. La parte de alta frecuencia lleva el sistema desde el estado inicial hasta la superficie deslizante, y la parte de baja frecuencia lleva el sistema al estado deseado. Mientras que la variable controlada está en la superficie de deslizamiento, la dinámica de la planta está restringida a la ecuación de la superficie de deslizamiento. Son robustos a las perturbaciones internas y externas. La ventaja más importante es su insensibilidad a la variación de los parámetros de control. Por lo tanto, en la siguiente parte se explican los tres pasos principales: elección de la superficie de deslizamiento, determinación de la ley de control y, finalmente, establecimiento de una convergencia o condición de alcance.

El CMD es un control robusto que responde bien a las no linealidades, retrasos, incertidumbres, perturbaciones y errores de modelado (ver [Camacho and Smith, 2000], [Utkin et al., 2020]). El controlador de modo deslizante contiene dos partes, una parte discontinua $u_d(t)$ responsable del modo de accesibilidad y la parte equivalente o continua $u_{eq}(t)$ asociada con el modo deslizante. La ley de control que rige el CMD es:

$$U(t) = u_{eq}(t) + u_d(t), \quad (2.1)$$

donde $u_{eq}(t)$ obtiene del método de control equivalente. Esta ley de control se utiliza para mantener la variable a controlar sobre la superficie de deslizamiento $S(t) = 0$. Se deduce el control equivalente considerando que la derivada de la superficie es cero. La condición de deslizamiento viene dada por:

$$\frac{dS(t)}{dt} = 0, \quad (2.2)$$

donde $u_d(t)$ es la parte de control discontinua que permite que el sistema alcance la superficie de deslizamiento. Esta incorpora un elemento no lineal que incluye el elemento de conmutación de la ley de control: por lo tanto, $u_d(t)$ contiene el elemento de conmutación, y viene dado por:

$$u_d(t) = K_D \text{sign}(S(t)). \quad (2.3)$$

Donde K_D es un parámetro de sintonización relacionado con la fase de accesibilidad. Para reducir el problema de la vibración, se utiliza una función similar a la

sigmoide de la siguiente manera:

$$u_d(t) = K_D \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta}. \quad (2.4)$$

Donde δ se usa para reducir el problema de vibración.

2.2. Identificación

En esta sección se generalizará del modelo FOPDT (First Order Plus Dead Time) utilizado para la identificación y propósitos de control, se menciona el proceso de identificación de un modelo de primer orden con retardo y el proceso que se utiliza para la aproximación de retardo de tiempo.

2.2.1. Generalización del modelo FOPDT para identificación y propósitos de control

El modelo FOPDT es una aproximación registrada de la dinámica del proceso respuesta con el propósito de diseño de control. En el diseño de un lazo de control de retroalimentación, se considera su rendimiento a una perturbación de carga o cambio de punto de ajuste, su robustez a los cambios en el controlado características del proceso, y su fragilidad a la variación de sus propios parámetros. Varios métodos se han propuesto para ajustar los controladores teniendo en cuenta estas características, mientras se aproxima al verdadero proceso respuesta dinámica con FOPDT (ver [Alfaro, 2007]). La industria informa que el control tipo proporcional integral derivativo (PID) sigue siendo el algoritmo de retroalimentación de primera línea y esa identificación sigue siendo responsable de grandes costos (ver [Samad, 2017]). Por lo tanto, las aproximaciones como FOPDT son útiles para permitir métodos de diseño de control de primera mano. Para operadores de procesos no expertos en control, como se ejemplifica ampliamente en (ver [Ionescu and Copot, 2019]). La sintonización óptima basada en la respuesta de frecuencia para controladores de tipo proporcional integral derivativo PID es muy popular tanto para controladores de tipo PID de orden clásico y fraccionario (ver [Monje et al., 2010], [Dastjerdi et al., 2019]). Los márgenes de estabilidad se imponen como parte del diseño, como la ganancia y el margen de fase. Estos se utilizan intrínsecamente para determinar la cantidad de robustez uno apunta al comportamiento carac-

terístico de lazo cerrado. Las reglas de ajuste óptimas para el tipo PID de control han sido ampliamente analizados en el dominio de la frecuencia (ver [Kristiansson and Lennartson, 2002], [Åström et al., 2006]). La fragilidad para el tipo PID de orden entero (ver [Alfaro, 2007]) y para el control de tipo PID de orden fraccionario (ver [Padula and Visioli, 2016], [Luo and Chen, 2009]) es una medida importante para tener en cuenta robustez a la variabilidad dinámica del proceso. La variabilidad del tiempo muerto es un factor importante para determinar la cantidad de fragilidad de un proceso, y el control de orden fraccional ha demostrado ser intrínsecamente robusto para estas variaciones (ver [Birs et al., 2019]). El modelo FOPDT clásico, conocido como modelo (First Order Plus Dead Time) FOPDT entero, tiene la forma:

$$P_1(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-t_0 s}, \quad (2.5)$$

con K la ganancia, τ la constante de tiempo y t_0 el tiempo de retardo del proceso aproximado. La primera generalización de este modelo fue propuesta en (ver [De Keyser and Ionescu, 2017]) como una función de transferencia de orden fraccionario con un orden entero de tiempo muerto:

$$P_2(s) = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \cdot e^{-t_0 s}, \quad (2.6)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Nos referiremos a la ecuación (2.6) como (First Order fractional Plus Dead Time) FO^fPDT . La segunda generalización (2.7) fue propuesta en (ver [Juchem et al., 2019]) como una función de transferencia de primer orden de enteros con un tiempo muerto de orden fraccionario:

$$P_3(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-t_0 s^\beta}, \quad (2.7)$$

con $\beta \in \mathbb{R}$. Nos referiremos a la ecuación (2.7) como (First Order Plus Dead Time fractional) $FOPDT^f$. En esta ecuación agregamos la generalización completa, es decir, una función de transferencia de orden fraccionario con fraccionario orden de tiempo muerto:

$$P_4(s) = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \cdot e^{-t_0 s^\beta}, \quad (2.8)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nos referiremos a la ecuación (2.8) como (First Order fractional Plus Dead Time fractional) FO^fPDT^f .

2.2.2. Identificación de un modelo de primer orden con retardo

La curva de reacción del proceso es probablemente el método más utilizado para identificar modelos dinámicos. Es sencillo realizar y, aunque es el método menos general, proporciona modelos adecuados para muchas aplicaciones. El método de la curva de reacción del proceso involucra las siguientes cuatro acciones:

- Permitir que el proceso alcance el estado estacionario.
- Introducir un solo cambio de paso en la variable de entrada.
- Recopilar datos de respuesta de entrada y salida hasta que el proceso vuelva a alcanzar el estado estable.
- Realizar los cálculos de la curva de reacción del proceso gráfico.

Los cálculos mediante gráficos determinan los parámetros para un modelo de primer orden con tiempo muerto. La forma del modelo es la siguiente:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot e^{-t_0 s}, \quad (2.9)$$

donde $X(s)$ denota la entrada e $U(s)$ denota la salida, ambos expresados en variables de desviación.

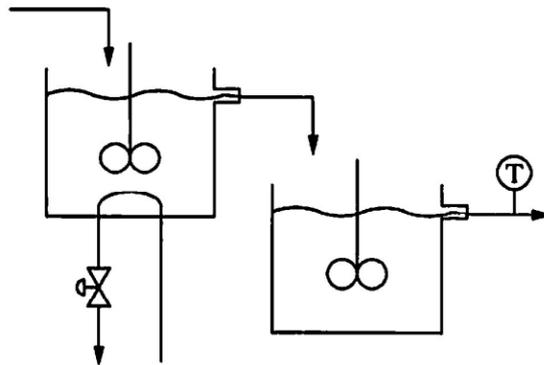


Figura 2.1: Ejemplo de proceso para identificación de modelos empíricos (ver [Marlin, 1995]).

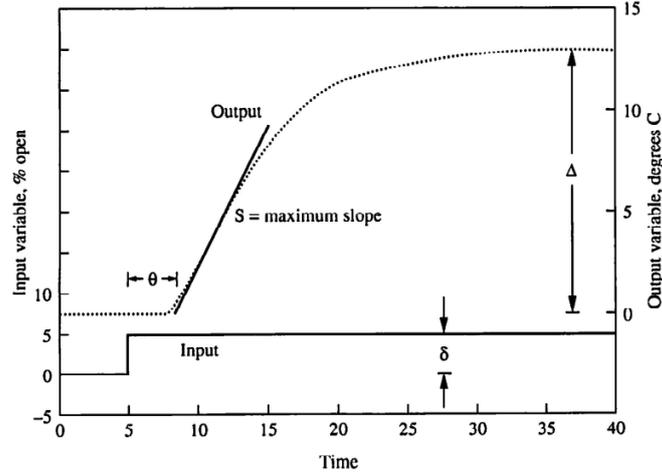


Figura 2.2: Curva de reacción del proceso. Método I (ver [Marlin, 1995]).

Hay dos técnicas gráficas ligeramente diferentes de uso común. La primera técnica, el Método I, adaptado de Ziegler y Nichols (1942), utiliza los cálculos gráficos que se muestran en la Figura 2.2 para el proceso de tanque agitado de la Figura 2.1. Los valores intermedios determinados a partir del gráfico son la magnitud del cambio de entrada, δ ; la magnitud del cambio de estado estacionario en la salida, Δ ; y la pendiente máxima de la gráfica de salida versus tiempo, S . Los valores de la gráfica se pueden relacionar con los parámetros del modelo de acuerdo con las siguientes relaciones para un modelo de primer orden con tiempo muerto. El modelo general para un paso en la entrada con $t \geq 0$ es:

$$Y'(t) = K_p \delta [1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}]. \quad (2.10)$$

Se puede determinar que la pendiente de esta respuesta en cualquier momento $t \geq 0$ es de la forma (ver [Marlin, 1995]):

$$\frac{dY'(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [K_p \delta [1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}]] = \frac{\Delta}{\tau} e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau}}. \quad (2.11)$$

La pendiente máxima se produce en $t = \theta$, y $S = \frac{\Delta}{\tau}$. Así, los parámetros del modelo se puede calcular como:

- $K_p = \frac{\Delta}{\delta},$

- $\tau = \frac{\Delta}{S}$,
- θ = intersección de la pendiente máxima con el valor inicial (como se muestra en la Figura 2.2).

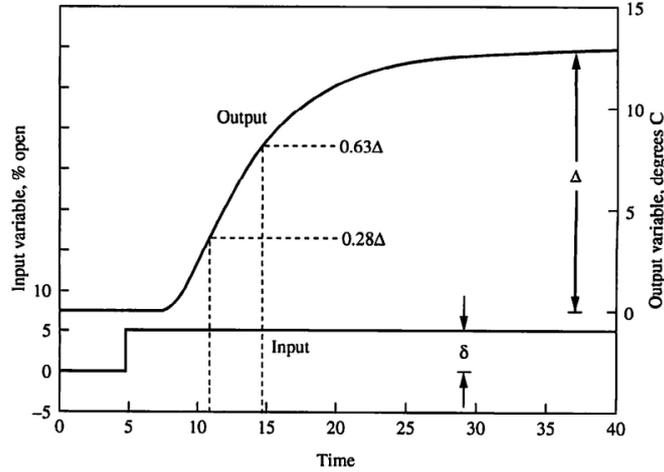


Figura 2.3: Curva de reacción del proceso. Método II (ver [Marlin, 1995]).

En la segunda técnica, el Método II, utiliza los cálculos gráficos que se muestran en la figura 2.3. Los valores intermedios determinados a partir del gráfico son la magnitud del cambio de entrada, δ ; la magnitud del cambio de estado estacionario en la salida, Δ ; y los momentos en que la producción alcanza el 28 % y el 63 % de su valor final. Los valores de la gráfica se pueden relacionar con los parámetros del modelo usando la ecuación de expresión general (2.10). Se pueden seleccionar dos valores cualesquiera de tiempo para determinar los parámetros desconocidos, θ y τ . Se seleccionan los tiempos típicos donde la respuesta transitoria cambia rápidamente para que los parámetros del modelo puedan determinarse con precisión a pesar del ruido de medición (Smith, 1972). Las expresiones son:

$$Y(\theta + \tau) = \Delta(1 - e^{-1}) = 0,632\Delta. \quad (2.12)$$

$$Y(\theta + \frac{\tau}{3}) = \Delta(1 - e^{-\frac{1}{3}}) = 0,283\Delta. \quad (2.13)$$

Así, los valores de tiempo en los que la salida alcanza el 28,3 % y el 63,2 % de su valor final se utilizan para calcular los parámetros del modelo.

- $t_{28\%} = \theta + \frac{\tau}{3}$.
- $t_{63\%} = \theta + \tau$.

- $\tau = 1,5(t_{63\%} - t_{28\%})$.
- $\theta = t_{63\%} - \tau$.

Idealmente, ambas técnicas deberían dar modelos representativos; sin embargo, el Método I requiere que el investigador encuentre una pendiente (es decir, una derivada) de una señal medida.

Debido a la dificultad de evaluar la pendiente, especialmente cuando la señal tiene ruido de alta frecuencia, el Método I suele tener errores más grandes en las estimaciones de los parámetros; por lo tanto, se prefiere el **Método II**.

2.3. Aproximación de retardo de tiempo

Un primer problema encontrado en la realización del controlador fraccional es la parte del tiempo de retardo (ver [Camacho and Smith, 2000], [Slotine et al., 1991]). En entornos complejos, la función exponencial natural e^z puede ser representada como la conocida serie de Taylor centrada en cero.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.14)$$

que es absolutamente convergente para $z \in \mathbb{C}$. Una aproximación lineal simple es $1 + z$ donde el error absoluto $|e^z - 1 - z|$ igual al resto de Taylor R_1 dado por:

$$R_n(z) = \frac{1}{n-1} \int_0^z e^t (z-t) dt, \quad (2.15)$$

donde el camino de integración es un segmento recto que conecta 0 y z . Por lo tanto, el resto está acotado por $\frac{|z|^n}{n!} \max\{1, e^z\}$. Por otro lado, podemos aproximar e^z por $\frac{1}{1+z}$. Para esto, el error de aproximación, $|e^z - \frac{1}{1+z}|$, debe estar acotado por

$\epsilon_{max} > 0$. Así,

$$\begin{aligned} \left| e^{-z} - \frac{1}{1+z} \right| &= \left| \frac{e^z - 1 - z}{e^z(1+z)} \right| \\ &= \frac{R_1(z)}{e^{Re\{z\}}|1+z|} \\ &\leq \frac{|z|}{|1+z|} \max\{1, e^{-Re\{z\}}\} \\ &= \epsilon_{max}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Mediante este análisis se realiza una primera aproximación en (ver [Camacho and Smith, 2000]), sin el predictor de Smith donde el retardo de tiempo e^{-t_0s} se puede aproximar $\frac{1}{t_0s+1}$ y, a su vez, la función de transferencia FOPDT es la siguiente:

$$\frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1} \approx \frac{K}{(\tau s + 1)(t_0s + 1)}, \quad (2.17)$$

que tiene una forma de ecuación diferencial de segundo orden.

2.4. Caso Clásico

En esta sección se presenta el desarrollo matemático del control por modo deslizante basado en una superficie fraccional tipo proporcional integral derivativo (FOPID). Dado que el control de modo deslizante (CMD) es un controlador basado en modelos, se utiliza un modelo empírico del proceso real. Utilizando el procedimiento de la curva de reacción, el proceso no lineal se puede aproximar a un modelo de primer orden más tiempo muerto (FOPDT) (ver [Smith and Corripio, 2005]).

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}. \quad (2.18)$$

Debido a que s no se encuentra elevado a ningún $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el desarrollo para encontrar la ley de control fraccionaria equivalente se realizará sin la necesidad de utilizar cálculo fraccionario. Utilizando el análisis de la sección 2.3 se puede aproximar de la siguiente manera:

$$e^{t_0s} \approx \frac{1}{(t_0s + 1)}. \quad (2.19)$$

De manera que sustituyendo (2.19) en (2.18) se obtiene:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{(\tau s + 1)(t_0 s + 1)}. \quad (2.20)$$

La cual en forma de ecuación diferencial es:

$$t_0 \tau \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + (t_0 + \tau) \frac{dX(t)}{dt} + X(t) = KU(t). \quad (2.21)$$

La superficie deslizante $S(t)$ se elige para representar un comportamiento global deseado, por ejemplo, la estabilidad y el rendimiento de seguimiento. Esta $S(t)$ es una ecuación diferencial integral que actúa sobre la expresión del error de seguimiento.

$$S(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \int_0^t e(t) dt. \quad (2.22)$$

Se realiza un análisis más profundo de la superficie de deslizamiento en la sección 2.6. Debido a que la ecuación diferencial (2.21) es de segundo orden, se reemplaza $n = 2$ en la ecuación (2.22). Obteniendo así:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \lambda_1 \frac{de(t)}{dt} + \lambda_0 e(t) = 0. \quad (2.23)$$

Sustituyendo la definición de error $e(t) = R(x) - X(t)$ en los primeros dos términos de la ecuación se tiene:

$$\frac{d^2 R(t)}{dt^2} - \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \lambda_1 \left(\frac{dR(t)}{dt} - \frac{dX(t)}{dt} \right) + \lambda_0 e(t) = 0. \quad (2.24)$$

Resolviendo la derivada más alta de (2.21), sustituyéndola en (2.24) y resolviendo para $U(t)$ se obtiene la siguiente ley de control equivalente (ver [Camacho and Smith, 2000]):

$$U_{eq}(t) = \left(\frac{t_0 \tau}{K} \right) \left[\frac{d^2 R(t)}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dR(t)}{dt} + \left(\frac{t_0 + \tau}{t_0 \tau} - \lambda_1 \right) \frac{dX(t)}{dt} + \frac{X(t)}{t_0 \tau} + \lambda_0 e(t) \right]. \quad (2.25)$$

Este proceso se realizó debido a que en el análisis se utilizó el modelo First Order Plus Dead Time (FOPDT). Sin embargo, para utilizar las generalizaciones con parámetros fraccionarios se necesitará definir operaciones de orden fraccionario. Por esto, se presentará una introducción a las nociones del cálculo fraccionario en el siguiente capítulo.

2.5. Cálculo Fraccionario

2.5.1. Derivada de Caputo y Riemann-Liouville y su conexión

A continuación se presenta la definición de la derivada de Caputo y Riemann-Liouville y su conexión, debido a que forman parte fundamental para el desarrollo del estudio de la superficie de deslizamiento fraccionario.

Definición 2.5.1. *La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\eta > 0$ viene dada por (ver [Kilbas et al., 2006b], [Miller and Ross, 1993], [Podlubny, 1994] y [Kilbas et al., 1993]).*

$$(I_{a+}^{\eta} h)(x) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_a^x \frac{h(t)}{(x-t)^{1-\eta}} dt, \quad x > a. \quad (2.26)$$

Para entender su funcionamiento se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. *Sea $h(x) = (x-a)^{\beta}$ para algún $\beta > -1$ y $\eta > 0$. Entonces*

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\eta} h)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_a^x (t-a)^{\beta} (x-t)^{\eta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\eta)} (x-a)^{\eta+\beta} \int_0^1 s^{\beta} (1-s)^{\eta-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\eta+\beta+1)} (x-a)^{\eta+\beta}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Denotamos $I_{a+}^{\eta}(L_1)$ la clase de funciones h , representada por la integral fraccionaria (2.26) de una función sumable, es decir $h = I_{a+}^{\eta} \varphi$, donde $\varphi \in L_1(a, b)$. Una descripción de esta clase de funciones se encuentra en (ver [Kilbas et al., 2006b], [Kilbas et al., 1993]) ($L_1[a, b]$ puede definirse como un espacio de funciones medibles cuyo valor absoluto es integrable en Lebesgue).

Para definir de manera completa a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se debe introducir el espacio de funciones absolutamente continuas.

Definición 2.5.2. *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es absolutamente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si para toda familia de*

subintervalos $[a, b]$, dos a dos disjuntos, $(a_k, b_k) : k = 1, \dots, n$, que cumple que

$$\sum_{k=1}^n |a_k - b_k| < \delta, \quad (2.28)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(b_k)| < \epsilon. \quad (2.29)$$

Al espacio de funciones absolutamente continuas sobre $[a, b]$ se lo denota por $AC([a, b])$. Se dirá que $f \in AC^n([a, b])$, con $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)} \in AC([a, b])$ para $k = 0, \dots, n - 1$. Nótese que bajo esta definición, $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$. Además, de manera general se tiene que $C^n([a, b]) \subset AC^n([a, b]) \subset C^{n-1}([a, b])$. Ya con la definición de funciones absolutamente continuas se procede a establecer la definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Definición 2.5.3. Sea $(D_{a^+}^\eta h)(x)$ la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$ se tiene que: (ver [Kilbas et al., 2006b], [Miller and Ross, 1993], [Podlubny, 1994] y [Kilbas et al., 1993])

$$(D_{a^+}^\eta h)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^s \frac{1}{\Gamma(s - \eta)} \int_a^x \frac{h(t)}{(x - t)^{\eta - s + 1}} dt, \quad (2.30)$$

$$s = [\eta] + 1, x > a, \quad (2.31)$$

donde $[\eta]$ es la parte entera de η y Γ es la función gamma.

Cuando $0 < \eta < 1$, entonces (2.31) toma la forma

$$\left({}^*D_{a^+}^\eta h\right)(x) = \frac{d}{dx} (I_{a^+}^{1-\eta} h)(x). \quad (2.32)$$

Para entender su funcionamiento se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. ${}^*D_{a^+}^\eta (x - a)^\gamma = \begin{cases} 0, & \gamma = \eta - 1, \\ \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\eta+1)} (x - a)^{\gamma-\eta}, & \text{de lo contrario} \end{cases}$

Con $\eta \in (0, 1)$, $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ and $\gamma > -1$.

Existe una relación entre las derivadas y las derivadas fraccionarias. Esta relación se cumple cuando el orden de la derivada fraccionaria es entero. Con el fin de establecer esta relación, se presenta la siguiente definición.

Definición 2.5.4. Sea $\eta \geq 0$ y $m = [\eta]$. Entonces, podemos definir el operador $\mathcal{D}_{a^+}^\eta$ por $\mathcal{D}_{a^+}^\eta f := I_{a^+}^{m-\eta} \left(\frac{d}{dx}\right)^m f$, cuando $\left(\frac{d}{dx}\right)^m f \in L_1[a, b]$.

Ejemplo 3. $\mathcal{D}_{a^+}^\eta (x-a)^\beta = 0$ si $\beta \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$.

A partir de esta definición, surgen como consecuencia dos importantes lemas, los cuales se utilizarán posteriormente para definir la superficie de deslizamiento fraccionaria.

Lema 2.5.1. Sea $\eta \geq 0$ y $m = [\eta]$. Supongamos que f es tal que $\mathcal{D}_{a^+}^\eta$ y ${}^*D_{a^+}^\eta$ existe. Entonces

$$\mathcal{D}_{a^+}^\eta f = {}^*D_{a^+}^\eta f - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{k-\eta}}{\Gamma(k-\eta+1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(a). \quad (2.33)$$

En consecuencia, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.5.2. Sea $\eta \geq 0$ y $m = [\eta]$. Supongamos que f es tal que $\mathcal{D}_{a^+}^\eta$ y ${}^*D_{a^+}^\eta$ existe. Entonces $\mathcal{D}_{a^+}^\eta f = {}^*D_{a^+}^\eta f$ si y solo si $\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(a) = 0$ para $k = 0, \dots, m-1$.

A continuación mencionamos la propiedad de semigrupo la cual se utilizará posteriormente para obtener derivadas fraccionarias de ordenes superiores. **La propiedad del semigrupo** para la composición de las derivadas fraccionarias no se cumple en general (ver [Podlubny, 1994]). De hecho, la propiedad:

$$D_{a^+}^\eta (D_{a^+}^\gamma h) = D_{a^+}^{\eta+\gamma} h, \quad (2.34)$$

se mantiene siempre que

$$h^{(j)}(a^+) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, s-1, \quad (2.35)$$

y $h \in AC^{s-1}([a, b])$, $h^{(s)} \in L_1(a, b)$ y $s = [\gamma] + 1$ ($AC^s([a, b])$ denota la clase de funciones h , que son continuamente diferenciables en el segmento $[a, b]$, hasta el orden $s-1$ y $h^{(s-1)}$ es absolutamente continua en $[a, b]$).

2.5.2. Comportamiento en las fronteras

Consideremos los polinomios fraccionarios reales de Riemann-Liouville definidos para $\eta \in (0, 1)$ y $a_j^+ > 0$ como:

$$\Phi_j^{\eta,m} := \frac{(x_j - a_j)^{(m+1)\eta-1}}{\Gamma(\eta)\Gamma((m+1)\eta)}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad j = 0, 1. \quad (2.36)$$

Entonces tenemos

$$(i) \quad \lim_{\eta \rightarrow 1^-} \left[D_{a_j^+}^\eta \Phi_j^{\eta,m} \right] = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \frac{(x_j - a_j)^{m-1}}{(m-1)!}, & m \neq 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

$$(ii) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[D_{a_j^+}^\eta \Phi_j^{\eta,m} \right] = 0.$$

2.5.3. Transformada de Laplace de derivadas fraccionarias

A continuación se define la transformada de Laplace de derivadas fraccionarias, debido a que posteriormente se utilizará este proceso para obtener la ley de control fraccionario equivalente $U_{eq}^{\alpha,\beta}(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie.

Definición 2.5.5. Sea $F(s) := (\mathcal{L}f)(s)$, i.e., digamos, la transformada de Laplace de la función f y $\eta > 0$ (ver [Kilbas et al., 1993]).

$$(\mathcal{L} \mathcal{D}_{0^+}^\eta f)(s) = s^\eta F(s) - \sum_{j=0}^{l-1} f^{(j)}(0^+) s^{\eta-j-1}, \quad (2.38)$$

donde $l = [\eta] + 1$ y $f^{(j)}(0^+) = \frac{d^j}{dt^j} f(t)|_{t \rightarrow 0^+}$, $j = 0, \dots, l-1$. Claramente, si $\eta \in (0, 1)$ entonces

$$(\mathcal{L} \mathcal{D}_{0^+}^\eta f)(s) = s^\eta F(s) - f(0^+) s^{\eta-1}, \quad (2.39)$$

y si $\eta \in (1, 2)$ entonces

$$(\mathcal{L} \mathcal{D}_{0^+}^\eta f)(s) = s^\eta F(s) - f(0^+) s^{\eta-1} - f'(0^+) s^{\eta-2}. \quad (2.40)$$

Teorema 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f(x)$ una función dada en \mathbb{R}^+ . Entonces la solución

general de la ecuación

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad (2.41)$$

con $0 < \alpha \leq 1$ y $1 < \alpha \leq 2$ tiene las formas

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt + c_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha), \quad (2.42)$$

y

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt + c_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha) + c_1 x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha), \quad (2.43)$$

respectivamente, donde c_0 y c_1 son constantes reales arbitrarias (ver [Kilbas et al., 2006a]).

Teorema 2. El operador de convolución de Fourier de dos funciones h y φ está definido por la integral

$$h * \varphi = (h * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\varphi(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (2.44)$$

que tiene la propiedad conmutativa (ver [Kilbas et al., 2006b]):

$$h * \varphi = \varphi * h. \quad (2.45)$$

2.5.4. Mittag-Leffler

Para definir de manera completa la la función de Mittag-Leffler se debe introducir la definición de función gamma, la cual generaliza la idea de factorial (comúnmente solo aplicado para números naturales) a los números reales y complejos .

Definición 2.5.6. La función $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (2.46)$$

es llamada función gamma de Euler o integral de Euler de segunda clase.

Teorema 3. Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (2.47)$$

A continuación, se presenta la definición de función de Mittag-Leffler.

Definición 2.5.7. *Sea $u > 0$. La función E_u definida por*

$$E_u(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(uk + 1)}. \quad (2.48)$$

Siempre que la serie converge se llama función de orden n de Mittag-Leffler. Para desarrollar una ley de control, haremos uso de la función Mittag-Leffler de dos parámetros. Esta función se define clásicamente como

Definición 2.5.8. *Sea $u, v > 0$. La función $E_{u,v}$ definida por*

$$E_{u,v}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(uk + v)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2.49)$$

Esta función es uniformemente convergente sobre \mathbb{C} por la definición 2.5.9. Entonces para u, v se tiene que:

$$E_{u,v}(z) = \sum \frac{z^k}{\Gamma(uk + v)} = \frac{1}{\Gamma(v)} + \frac{z}{\Gamma(u + v)} + R_1. \quad (2.50)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{E_{u,v}(z)} = \frac{\Gamma(v)\Gamma(u + v)}{\Gamma(u + v) + \Gamma(v)z + \Gamma(v)\Gamma(u + v)R_1}. \quad (2.51)$$

Observación 1. *Es evidente que las funciones de un parámetro de Mittag-Leffler pueden ser definidas en términos de sus dos contrapartes de parámetros a través de la relación $E_u(z) = E_{u,1}(z)$.*

En particular, $E_{u,1} = E_u$ se conoce como la función de Mittag-Leffler de un parámetro y es considerada como la generalización de la función exponencial. Gracias a las representaciones en series de Taylor para valores específicos, se obtienen funciones conocidas como la exponencial compleja (ver [Gorenflo et al., 2020]).

$$E_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z). \quad (2.52)$$

Esta serie converge sobre todo \mathbb{C} y, por lo tanto, $E_{u,v}$ es finita para cualquier valor de $z \in \mathbb{C}$. A continuación, se presenta la definición junto con su respectiva demostración.

Definición 2.5.9. *Para todo $u > 0$ real y $v \in \mathbb{C}$, la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{u,v}(z)$ converge para cualquier $z \in \mathbb{C}$.*

Demostración Dado que la función $E_{u,v}(z)$ es una serie de potencias, se va a verificar las hipótesis del Teorema de Cauchy-Hadamard para probar la convergencia de esta serie, por lo cual, hay que estudiar los coeficientes

$$c_k = \frac{1}{\Gamma(uk + v)}. \quad (2.53)$$

Por la fórmula de Stirling (ver [Gorenflo et al., 2020]) se tiene que

$$\Gamma(uk + v) = \sqrt{2\pi} uk^{uk+v-\frac{1}{2}} e^{-uk} [1 + o(1)]. \quad (2.54)$$

cuando $k \rightarrow +\infty$, en donde $o(*)$ se refiere a la notación de orden pequeño. Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\sqrt{2\pi} uk^{uk+v-\frac{1}{2}} e^{-uk} [1 + o(1)]|^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{e^{-u} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}^{\frac{1}{k}} |uk|^{u+\frac{v}{k}-\frac{1}{2k}} [1 + o(1)]^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{+\infty} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Así, $R = +\infty$, lo que demuestra que $E_{u,v}$ es finita sobre \mathbb{C} .

2.6. Superficie de deslizamiento

En la literatura se han sugerido diferentes superficies de deslizamiento, y cada una funciona mejor para una aplicación determinada. La forma más común de obtener el régimen de deslizamiento que garantiza que el estado avanzará hacia su referencia es utilizar la superficie (ver [Camacho and Smith, 2000], [Slotine et al.,

1991]).

$$S[e(t)] = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \int e(t) dt. \quad (2.56)$$

Donde $e(t)$ es la diferencia entre la referencia $R(t)$ y la variable controlada $X(t)$; $e(t) = R(t) - X(t)$. El objetivo del control es mantener la superficie de deslizamiento en cero. Y $S(t)$ es la superficie deslizante; el diseñador la elige. En este trabajo, utilizamos una superficie, donde n depende del orden del sistema y λ es un parámetro ajustable (ver [Camacho and Smith, 2000], [Slotine et al., 1991]).

2.6.1. Análisis de superficie de deslizamiento fraccionaria con generalización completa

En base a la ecuación (2.69), que se presentará en un análisis posterior, se plantea el caso para la superficie de deslizamiento fraccionaria con $n = 2$, la ecuación (2.56) se convierte en:

$$S[e(t)] = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_1 \frac{d}{dt} + \lambda_0 \right) \int e(t) dt, \quad (2.57)$$

con esta idea, podemos definir la siguiente versión de superficie de deslizamiento fraccionaria:

Definición 2.6.1. Sea $\alpha, \beta > 0$, $m = [\alpha + \beta] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a, b])$ y $e^{(m)} \in L_1(a, b)$. Entonces, la superficie de deslizamiento fraccionaria, $S_{\alpha, \beta}$ está definida como

$$S_{\alpha, \beta}[e(t)] := \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^{\beta} + \lambda_0 \right) I^1[e(t)], \quad (2.58)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

En general, la versión de la superficie de deslizamiento fraccionaria viene dada por:

Definición 2.6.2. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $m = [\alpha + \beta]$, $e(t) \in AC^{m-1}([a, b])$ y $e^{(m)} \in L_1(a, b)$. Entonces, la superficie de deslizamiento fraccionaria, $S_{\alpha, \beta}$, está definida como:

$$(S_{\alpha, \beta} e)(t) = \left(\sum_{i=0}^i \lambda_i \mathcal{D}^{\alpha_i^+} \right) (I^1 e)(t), \quad (2.59)$$

tal que $\lambda_0 \mathcal{D}^0 f = \lambda_0 f$ and $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Observación 2. *Nótese que las condiciones de los lemas 2.5.1 y 2.5.2 nos permiten conmutar el operador integral clásico I^1 en el operador de la superficie deslizante fraccionaria de la definición 2.6.3 , i.e,*

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^{\beta} + \lambda_0 \right) I^1 = I^1 \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^{\beta} + \lambda_0 \right). \quad (2.60)$$

Derivando la ecuación (2.58) tenemos que:

$$\frac{d}{dt} S_{\alpha,\beta}[e(t)] = \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^{\beta} + \lambda_0 \right) [e(t)]. \quad (2.61)$$

Donde hemos utilizado el resultado de la observación 2 seguido de la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo.

2.6.2. Análisis de la superficie de deslizamiento fraccionaria para modelos con retardo elevado

En base a la ecuación (2.20) se plantea el caso para la superficie de deslizamiento fraccionaria con $n = 1$, la ecuación (2.56) se convierte en:

$$S[e(t)] = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_0 \right) \int e(t) dt, \quad (2.62)$$

con esta idea, podemos definir la siguiente versión de superficie de deslizamiento fraccionaria:

Definición 2.6.3. *Sea $\alpha > 0$, $m = [\alpha] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a,b])$ y $e^{(m)} \in L_1(a,b)$. Entonces, la superficie de deslizamiento fraccionaria, S_α está definida como*

$$S_\alpha[e(t)] := (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} + \lambda_0) I^1[e(t)], \quad (2.63)$$

donde $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Observación 3. *En el sentido clásico, nuestro operador converge a (2.56) cuando $n = 1$ y α se aproxima a 1^- . El teorema del binomio se puede utilizar para generalizar n . Solo destacando el cálculo fraccionario para los parámetros de los intervalos exteriores $(0, 1)$ es mucho más difícil de calcular. Adicionalmente podemos escribir:*

- Cuando $\alpha \rightarrow 1$ entonces $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \rightarrow \mathcal{D}_{a+} \simeq O \frac{d}{dt}$, donde $O \in \mathbb{R}$.

- Cuando $\alpha \rightarrow 0$ y $f \in L_1[a, b]$ entonces $\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f \rightarrow Of$, donde $O \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4. $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{D}_{a^+}(x-a)^{-\alpha} = -\frac{2}{(a-x)^2}$ si $0 < a < x$.

Podemos omitir el uso de la constante en los casos teóricos.

Observación 4. *Nótese que las condiciones de los lemas 2.5.1 y 2.5.2 nos permiten conmutar el operador integral clásico I^1 en el operador de la superficie deslizante fraccionaria de la definición 2.6.3, i.e.,*

$$(\mathcal{D}_{0^+}^\alpha + \lambda_0) I^1 = I^1 (\mathcal{D}_{0^+}^\alpha + \lambda_0). \quad (2.64)$$

Derivando la ecuación (2.63) tenemos que:

$$\frac{d}{dt} S_\alpha[e(t)] = (\mathcal{D}_{0^+}^\alpha + \lambda_0)[e(t)]. \quad (2.65)$$

Donde hemos utilizado el resultado de la observación 4 seguido de la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo.

2.7. Caso Fraccionario

En esta sección se presenta un análisis realizado para calcular la ley de control fraccionaria equivalente partiendo de un modelo $FO^f PDT^f$. Se realizó un análisis más profundo sobre este caso en (ver [Di Teodoro et al., 2022]).

Definición 2.7.1. *Sea $P(s)$ una función donde $\alpha, \in [a, b]$ tal que:*

$$P(s) = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \cdot e^{-t_0 s^\beta}. \quad (2.66)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \cdot e^{-t_0 s^\beta}. \quad (2.67)$$

Por la sección 2.3, el retraso de tiempo $e^{-t_0 s^\beta}$ se puede aproximar a $\frac{1}{1+t_0 s^\beta}$ y, a su vez, la función de transferencia (2.67)

$$\frac{K}{1 + \tau s^\alpha} \cdot e^{-t_0 s^\beta} = \frac{K}{1 + \tau s^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + t_0 s^\beta}. \quad (2.68)$$

De manera que la función de transferencia (2.66) puede ser aproximada por:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + t_0 s^\beta}. \quad (2.69)$$

Sea $\alpha, \beta > 0$ se define la función de transferencia fraccionaria más el tiempo muerto como:

$$\left[s^{\alpha+\beta} + \frac{1}{t_0} s^\alpha + \frac{1}{\tau} s^\beta + \frac{1}{\tau t_0} \right] X(s) = \frac{K}{\tau t_0} U(s). \quad (2.70)$$

Definimos la superficie de deslizamiento fraccional, tal que: (ver la sección 2.6.1)

$$S_{\alpha,\beta}[e(t)] := \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^\beta + \lambda_0 \right) I^1[e(t)], \quad (2.71)$$

Sustituyendo la definición de error $e(t) = R(x) - X(t)$ en los primeros dos términos de la ecuación. Y resolviendo la derivada más alta para posteriormente sustituirla en (2.71) y resolviendo para $U(t)$ se obtiene la siguiente ley de control fraccionaria equivalente.

$$U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} R(t) + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^\beta R(t) + \lambda_0 R(t)}{\frac{K}{\tau t_0}} + \frac{\left(\frac{1}{t_0} - \lambda_1 \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^\alpha X \right) (t) + \left(\frac{1}{\tau} - \lambda_2 \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^\beta X \right) (t) + \left(\frac{1}{\tau t_0} - \lambda_0 \right) X(t)}{\frac{K}{\tau t_0}}. \quad (2.72)$$

Capítulo 3

Resultados Principales

En este capítulo se define lo que es un compensador de tiempo muerto robusto basado en el cálculo fraccionario y se realiza un análisis de la superficie de deslizamiento fraccionaria para modelos con retardo elevado y con generalización completa, se hace un análisis de la función de transferencia sin retardo, de la generalización de la función de transferencia sin retardo, del modelo de primer orden con retardo, de su generalización junto con varios casos especiales. A su vez, se replica el análisis de la generalización del modelo de primer orden fraccionario con retardo pero con la función de Mittag-Leffler.

3.1. Desarrollo de la ley de control con un modelo de primer orden con retardo

En este análisis se realiza la obtención de la ley de control fraccionaria equivalente como en la sección 2.7. Sin embargo, la nueva metodología que se propone es incluir el error en la aproximación del retraso de tiempo. Con el objetivo de analizar si cuando este converge a cero se obtiene la misma ley de control fraccionaria equivalente que el en proceso realizado sin considerar el error.

Definición 3.1.1. Sea $F_1(s)$ una función donde $\alpha, \in [a, b]$ tal que:

$$F_1(s) = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \cdot e^{-t_0 s^\beta}. \quad (3.1)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \cdot e^{-t_0 s^\beta}. \quad (3.2)$$

De la sección 2.3, el retraso de tiempo $e^{-t_0 s^\beta}$ se puede aproximar a $\frac{1}{1+t_0 s^\beta + \xi}$ y, a su vez, la función de transferencia (3.2)

$$\frac{K}{1 + \tau s^\alpha} \cdot e^{-t_0 s^\beta} = \frac{K}{1 + \tau s^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + t_0 s^\beta + \xi}. \quad (3.3)$$

De manera que la función de transferencia (3.2) puede ser aproximada por:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + t_0 s^\beta + \xi}. \quad (3.4)$$

Sea $\alpha, \beta > 0$ se define la función de transferencia fraccionaria más el tiempo muerto como:

$$\left[s^{\alpha+\beta} + \frac{1+\xi}{t_0} s^\alpha + \frac{1}{\tau} s^\beta + \frac{1+\xi}{\tau t_0} \right] X(s) = \frac{K}{\tau t_0} U(s). \quad (3.5)$$

Si tomamos $\alpha + \beta \leq 2$ son posibles dos casos en vista del valor de $\alpha + \beta$. Por un lado, $\alpha + \beta \in (0, 1]$ entonces es posible usar (2.39) para toda inversión en el LHS. Por otro lado, si $\alpha + \beta \in (1, 2]$ la inversión del primer término se puede obtener con (2.40) y (2.39) para los siguientes términos. Sin embargo, si la función X satisface las condiciones de los lemas 2.5.1 y 2.5.2, entonces

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} X \right) (t) + \frac{1+\xi}{t_0} \left(\mathcal{D}_{0+}^\alpha X \right) (t) + \frac{1}{\tau} \left(\mathcal{D}_{0+}^\beta X \right) (t) + \left(\frac{1+\xi}{\tau t_0} \right) X(t) \\ = \frac{K}{\tau t_0} U(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

El siguiente teorema muestra cómo podemos construir la ley de control fraccional equivalente $U_{eq}^{\alpha,\beta} q(t)$ en base al análisis realizado en la sección 2.6.1.

Teorema 4. *Sea $\alpha, \beta > 0$, $m = [\alpha + \beta] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a, b])$ y $R^{(m)}(t)$, $X^{(m)}(t) \in L_1(a, b)$. Entonces, la ley de control fraccionario equivalente $U_{eq}^{\alpha,\beta}(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie es:*

$$\begin{aligned} U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} R(t) + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^\beta R(t) + \lambda_0 R(t)}{\frac{K}{\tau t_0}} \\ + \frac{\left(\frac{1+\xi}{t_0} - \lambda_1 \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^\alpha X \right) (t) + \left(\frac{1}{\tau} - \lambda_2 \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^\beta X \right) (t) + \left(\frac{1+\xi}{\tau t_0} - \lambda_0 \right) X(t)}{\frac{K}{\tau t_0}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Demostración Sea $e(t) = R(t) - X(t)$. En primer lugar, aplicamos el operador (2.61) a la función $e(t)$ para obtener:

$$\frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[e(t)] = \frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[R(t)] - \frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[X(t)], \quad (3.8)$$

por la linealidad de este operador fraccionario.

Luego, $\frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[e(t)]$ nos lleva a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t) = \\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) + \lambda_0X(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En segundo lugar, combinamos la ecuación (3.6) y(3.9) y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t) + \\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X(t) + \frac{1+\xi}{t_0}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + \frac{1}{\tau}\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) + \frac{1+\xi}{\tau t_0}X(t) = \\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) + \lambda_0X(t) + \\ \frac{K}{\tau t_0}U(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

El resultado se obtiene directamente. □

Límite cuando el error tiende a cero

Analizamos qué pasa con $U(t)$ cuando $\xi \rightarrow 0$ en la ecuación (3.7).

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t)}{\frac{K}{\tau t_0}} \\ + \frac{\left(\frac{1+\xi}{t_0} - \lambda_1\right) (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X)(t) + \left(\frac{1}{\tau} - \lambda_2\right) (\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X)(t) + \left(\frac{1+\xi}{\tau t_0} - \lambda_0\right) X(t)}{\frac{K}{\tau t_0}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Obteniendo así:

$$U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t)}{\frac{K}{\tau t_0}} + \frac{\left(\frac{1}{t_0} - \lambda_1\right) \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X\right)(t) + \left(\frac{1}{\tau} - \lambda_2\right) \left(\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X\right)(t) + \left(\frac{1}{\tau t_0} - \lambda_0\right) X(t)}{\frac{K}{\tau t_0}}. \quad (3.12)$$

que coincide con (2.72)

3.2. Desarrollo de la ley de control para la generalización del modelo de primer orden fraccionario con retardo

Definición 3.2.1. Sea $F(s)$ una función donde $\alpha, \beta \in [a, b]$ donde $A, B, C, P, Q, T \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F(s) = \left(\frac{CK}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} + A \right) \left[e^{-t_0(s^\beta + B)T + Q} \right]. \quad (3.13)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \left(\frac{CK}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} + A \right) \left[e^{-t_0(s^\beta + B)T + Q} \right]. \quad (3.14)$$

Reordenando tenemos:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \left(\frac{CK + A[P\tau(s^\alpha + B) + 1]}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} \right) \left[e^{-t_0(s^\beta + B)T + Q} \right]. \quad (3.15)$$

Por la sección 2.3, el retraso de tiempo $e^{-t_0(s^\beta + B)T + Q}$ se puede aproximar a $\frac{1}{(t_0(s^\beta + B)T + Q) + 1}$ y, a su vez, la función de transferencia (3.14) se tiene que:

$$\left(\frac{CK + A[P\tau(s^\alpha + B) + 1]}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} \right) \left[e^{-t_0(s^\beta + B)T + Q} \right] \approx \left(\frac{CK + A[P\tau(s^\alpha + B) + 1]}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} \right) \left[\frac{1}{(t_0(s^\beta + B)T + Q) + 1} \right]. \quad (3.16)$$

De manera que la función de transferencia (3.14) puede ser aproximada por:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \left(\frac{CK + A[P\tau(s^\alpha + B) + 1]}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} \right) \left[\frac{1}{(t_0(s^\beta + B)T + Q) + 1} \right]. \quad (3.17)$$

Sea $\alpha, \beta > 0$ se define la función de transferencia fraccionaria más el tiempo muerto como:

$$\begin{aligned} \left[PTs^{\alpha+\beta} + \left(PTB + \frac{PQ}{t_0} + \frac{P}{t_0} \right) s^\alpha + \left(PTB + \frac{T}{\tau} \right) s^\beta + M \right] X(s) \\ = \left[\frac{CK}{\tau t_0} + \frac{AP}{t_0} s^\alpha + N \right] U(s), \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$M = PTB^2 + \frac{PQB}{t_0} + \frac{TB}{\tau} + \frac{Q+1}{\tau t_0}. \quad (3.19)$$

$$N = \frac{APB\tau + A}{\tau t_0}. \quad (3.20)$$

Si tomamos $\alpha + \beta \leq 2$. Son posibles dos casos en vista del valor de $\alpha + \beta$. Por un lado, $\alpha + \beta \in (0, 1]$ entonces es posible usar (2.39) para toda inversión en el lado izquierdo. Por otro lado, si $\alpha + \beta \in (1, 2]$ la inversión del primer término se puede obtener con (2.40) y (2.39) para los siguientes términos. Sin embargo, si la función X satisface las condiciones de los lemas 2.5.1 y 2.5.2, entonces:

$$\begin{aligned} PT \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} X \right) (t) + \left(PTB + \frac{PQ}{t_0} + \frac{P}{t_0} \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^\alpha X \right) (t) + \left(PTB + \frac{T}{\tau} \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^\beta X \right) (t) \\ + MX(t) = \frac{AP}{t_0} \left(\mathcal{D}_{0+}^\alpha U \right) (t) + \left[\frac{CK}{\tau t_0} + N \right] U(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

El siguiente teorema muestra cómo podemos construir la ley de control fraccional equivalente $U_e^{\alpha,\beta} q(t)$ en base al análisis realizado en la sección 2.6.1.

Teorema 5. *Sea $\alpha, \beta > 0$, $m = [\alpha + \beta] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a, b])$ y $R^{(m)}(t)$, $X^{(m)}(t) \in L_1(a, b)$. Entonces, la ley de control fraccionario equivalente $U_{eq}^{\alpha,\beta}(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie es*

si A o P son iguales a 0, entonces:

$$\begin{aligned}
U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t)}{\left(\frac{CK}{\tau t_0} + N\right)} \\
&+ \frac{(PT - 1)\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} + \left(\left(PTB + \frac{PQ}{t_0} + \frac{P}{t_0}\right) - \lambda_1\right)\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t)}{\left(\frac{CK}{\tau t_0} + N\right)} \\
&+ \frac{\left(\left(PTB + \frac{T}{\tau}\right) - \lambda_2\right)\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) + (M - \lambda_0)X(t)}{\left(\frac{CK}{\tau t_0} + N\right)}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

De lo contrario,

$$\begin{aligned}
U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{[t^{-(\beta+1)}E_{\alpha,-\beta}(-\phi t^\alpha)] \star R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{[\lambda_1 t^{-1}E_{\alpha,0}(-\phi t^\alpha)] \star R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
&\frac{[\lambda_2 t^{\alpha-(\beta+1)}E_{\alpha,\alpha-\beta}(-\phi t^\alpha)] \star R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{\lambda_0 t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\phi t^\alpha) \star R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
&\frac{[PT - 1] t^{-(\beta+1)}E_{\alpha,-\beta}(-\phi t^\alpha) \star X(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
&\frac{\left[PTB + \frac{PQ}{t_0} + \frac{P}{t_0} - \lambda_1\right] t^{-1}E_{\alpha,0}(-\phi t^\alpha) \star X(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
&\frac{\left[PTB + \frac{T}{\tau} - \lambda_2\right] t^{\alpha-(\beta+1)}E_{\alpha,\alpha-\beta}(-\phi t^\alpha) \star X(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
&\frac{[M - \lambda_0] t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\phi t^\alpha) \star X(t)}{\frac{AP}{t_0}}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Donde el simbolo \star representa la operación de convolución (ver teorema 2) y $E_{\eta,v}$ es la función de dos parámetros Mittag-Leffler (ver [Gorenflo et al., 2020]) y

$$\phi = \frac{\left[\frac{CK}{\tau t_0} + N\right]}{\frac{AP}{t_0}}.$$

Demostración Sea $e(t) = R(t) - X(t)$. En primer lugar, aplicamos el operador (2.61) a la función $e(t)$ para obtener:

$$\frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[e(t)] = \frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[R(t)] - \frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[X(t)], \tag{3.24}$$

por la linealidad de este operador fraccionario.

Luego, $\frac{d}{dt}S_{\alpha,\beta}[e(t)]$ nos lleva a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t) = \\ \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) + \lambda_0X(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

En segundo lugar, combinamos la ecuación (3.21) y(3.25) y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t) + \\ PT \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X(t) + \left(PTB + \frac{PQ}{t_0} + \frac{P}{t_0}\right) \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + \left(PTB + \frac{T}{\tau}\right) \mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) \\ + MX(t) = \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) + \lambda_0X(t) + \\ \left[\frac{CK}{\tau t_0} + N\right] U(t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

El resultado se obtiene directamente de (3.51) si A, P o τ son iguales a 0. Por otro lado, si $A, P, \tau \neq 0$, entonces (3.51) se puede escribir, en base al teorema 1, como ecuación diferencial fraccionaria lineal de la siguiente manera:

$$(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}U)(t) + \phi U(t) = f_{\alpha,\beta}(t), \quad (3.27)$$

donde $\phi = \frac{[\frac{CK}{\tau t_0} + N]}{\frac{AP}{t_0}}$ y

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\ \frac{PT}{\frac{AP}{t_0}} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X(t) + \frac{\left[PTB + \frac{PQ}{t_0} + \frac{P}{t_0}\right]}{\frac{AP}{t_0}} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + \\ \frac{\left[PTB + \frac{T}{\tau}\right]}{\frac{AP}{t_0}} \mathcal{D}_{0+}^{\beta}X(t) + \frac{M}{\frac{AP}{t_0}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La ecuación (3.27) puede resolverse usando el método de Laplace para obtener:

(ver [Kilbas et al., 2006a], Thm. 2)

$$\begin{aligned}
& \frac{t^{-(\beta+1)} E_{\alpha, -\beta}(-\phi t^\alpha) R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{\lambda_1 t^{-1} E_{\alpha, 0}(-\phi t^\alpha) R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
& \frac{\lambda_2 t^{\alpha-(\beta+1)} E_{\alpha, \alpha-\beta}(-\phi t^\alpha) R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{\lambda_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\phi t^\alpha) \star R(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
& \frac{t^{-(\beta+1)} E_{\alpha, -\beta}(-\phi t^\alpha) PT}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{t^{-1} E_{\alpha, 0}(-\phi t^\alpha) \left[PTB + \frac{PQ}{t_0} + \frac{P}{t_0} \right]}{\frac{AP}{t_0}} + \\
& \frac{t^{\alpha-(\beta+1)} E_{\alpha, \alpha-\beta}(-\phi t^\alpha) \left[PTB + \frac{T}{\tau} \right]}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\phi t^\alpha) \star M}{\frac{AP}{t_0}} = \\
& \frac{t^{-(\beta+1)} E_{\alpha, -\beta}(-\phi t^\alpha) X(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{\lambda_1 t^{-1} E_{\alpha, 0}(-\phi t^\alpha) X(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \\
& \frac{\lambda_2 t^{\alpha-(\beta+1)} E_{\alpha, \alpha-\beta}(-\phi t^\alpha) X(t)}{\frac{AP}{t_0}} + \frac{\lambda_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\phi t^\alpha) \star X(t)}{\frac{AP}{t_0}} + U(t). \quad (3.29)
\end{aligned}$$

El resultado se obtiene directamente. \square

Caso especial aplicado al modelo de pimer orden fraccionario con retardo

Si aplicamos $C, P, T = 1$ y $A, B, Q = 0$, en (3.13) la generalización del modelo de pimer orden fraccionario con retardo obtenemos el **modelo de primer orden con retardo**.

$$F_2(s) = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1} \cdot e^{-t_0 s^\beta}. \quad (3.30)$$

Si aplicamos $C, P, T = 1$ y $A, B, Q = 0$, en la ecuación (3.19) tenemos que:

$$\Rightarrow M = \frac{1}{\tau t_0}. \quad (3.31)$$

Si aplicamos $C, P, T = 1$ y $A, B, Q = 0$, en la ecuación (3.20) tenemos que:

$$\Rightarrow N = 0. \quad (3.32)$$

Si aplicamos $C, P, T = 1$ y $A, B, Q = 0$, en la ecuación (3.22) tenemos que:

$$U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\tau t_0}{K} \left[\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} R(t) + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} R(t) + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^{\beta} R(t) + \lambda_0 R(t) \right] + \frac{\tau t_0}{K} \left[\left(\frac{1}{t_0} - \lambda_1 \right) \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} X(t) + \left(\frac{1}{\tau} - \lambda_2 \right) \mathcal{D}_{0+}^{\beta} X(t) + \left(\frac{1}{\tau t_0} - \lambda_0 \right) X(t) \right]. \quad (3.33)$$

Que coincide con la ley de control fraccionario equivalente $U_{eq}^{\alpha,\beta}(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie (3.12).

3.3. Diseño de control a partir de un esquema predictor de Smith

La estructura clásica del **Predictor de Smith** que se muestra en la Figura 3.1 consta de dos partes fundamentales; el primero es el controlador. Sin embargo, existe la posibilidad de diseñar controladores más robustos. Por otro lado, existe una etapa de predicción compuesta por el modelo de proceso sin tiempo muerto, conocido como modelo rápido. En consecuencia, el ajuste del controlador debe realizarse desde el modelo rápido, (ver [Normey-Rico and Camacho, 2008]).

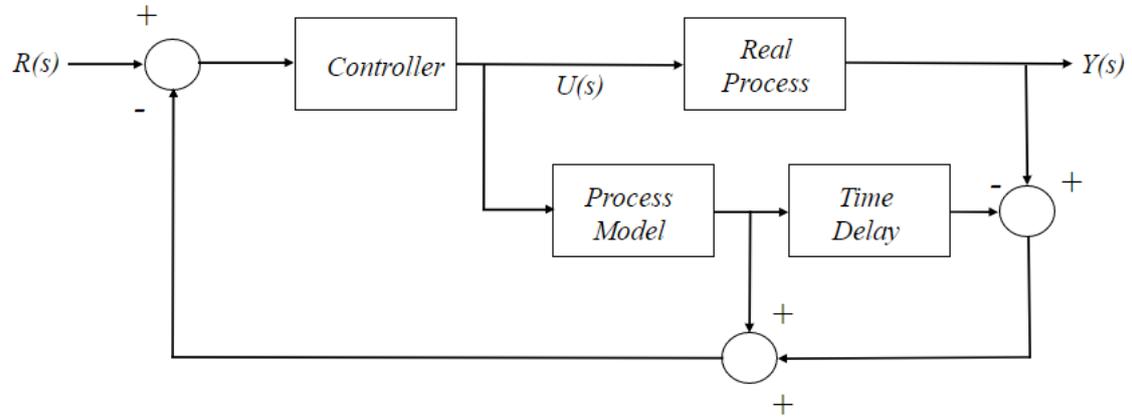


Figura 3.1: Estructura clásica del predictor de Smith para sistemas de tiempo muerto dominantes.

A partir de esta sección se presenta el desarrollo matemático del control por modo deslizante basado en se presenta una superficie FOPID. Dado que SMC es un controlador basado en modelos, se utilizará un modelo empírico del actual

proceso. Usando el procedimiento de la curva de reacción, el proceso no lineal se puede aproximar a un modelo de primer orden más tiempo muerto (FOPDT).

Definición 3.3.1. Sea $F_3(s)$ una función donde $\alpha, \in [a, b]$ tal que:

$$F_3(s) = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1}. \quad (3.34)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s^\alpha + 1}. \quad (3.35)$$

Sea $\alpha > 0$ se define la función de transferencia fraccionaria más el tiempo muerto como:

$$[\tau s^\alpha + 1] X(s) = K U(s). \quad (3.36)$$

Por otro lado, $\alpha \in (0, 1]$ entonces es posible utilizar (2.39) para cualquier inversión en el LHS. Por otro lado, si $\alpha \in (1, 2]$ la inversión del primer término se puede obtener con (2.40) y (2.39) para los siguientes términos. Sin embargo, si la función X satisface las condiciones de los lemas 2.5.1 y 2.5.2, entonces:

$$\tau (\mathcal{D}_{0+}^\alpha X)(t) + X(t) = K U(t). \quad (3.37)$$

El siguiente teorema muestra cómo podemos construir la ley de control fraccional equivalente $U_{eq}^\alpha q(t)$ en base al análisis realizado en la sección 2.6.2.

Teorema 6. Sea $\alpha > 0$, $m = [\alpha] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a, b])$ y $R^{(m)}(t)$, $X^{(m)}(t) \in L_1(a, b)$. Entonces, la ley de control fraccionario equivalente $U_{eq}^\alpha(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie es:

$$\begin{aligned} U_{eq}^\alpha(t) &= \frac{1}{K} \cdot [\lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_0 R(t)] \\ &+ \frac{1}{K} \cdot [(\tau - \lambda_1) \mathcal{D}_{0+}^\alpha X(t) + (1 - \lambda_0) X(t)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Demostración Sea $e(t) = R(t) - X(t)$. En primer lugar, aplicamos el operador (2.65) a la función $e(t)$ para obtener:

$$\frac{d}{dt} S_\alpha[e(t)] = \frac{d}{dt} S_\alpha[R(t)] - \frac{d}{dt} S_\alpha[X(t)], \quad (3.39)$$

por la linealidad de este operador fraccionario.

Luego, $\frac{d}{dt} S_\alpha[e(t)]$ nos lleva a

$$\lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_0 R(t) = \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha X(t) + \lambda_0 X(t). \quad (3.40)$$

En segundo lugar, combinamos la ecuación (3.37) y (3.40) y obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_0 R(t) + \tau (\mathcal{D}_{0+}^\alpha X)(t) + X(s) = \\ \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha X(t) + \lambda_0 X(t) + K U(s). \end{aligned} \quad (3.41)$$

El resultado se obtiene directamente. \square

3.4. Generalización de la función de transferencia sin retardo

Definición 3.4.1. Sea $F_4(s)$ una función donde $A, B, C, P \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [a, b]$ tal que:

$$F_4(s) = \frac{CK}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} + A. \quad (3.42)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{CK}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} + A. \quad (3.43)$$

Reordenando tenemos:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{CK + A(P\tau(s^\alpha + B) + 1)}{P\tau(s^\alpha + B) + 1}. \quad (3.44)$$

Sea $A, B, C, P \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ definimos la función de transferencia fraccionaria más el tiempo muerto como:

$$[P\tau(s^\alpha + B) + 1] X(s) = [CK + A(P\tau(s^\alpha + B) + 1)] U(s). \quad (3.45)$$

Por otro lado, $\alpha \in (0, 1]$ entonces es posible utilizar (2.39) para cualquier inversión en el LHS. Por otro lado, si $\alpha \in (1, 2]$ la inversión del primer término se puede obtener con (2.40) y (2.39) para los siguientes términos. Sin embargo, si la función X satisface las condiciones de los lemas 2.5.1 y 2.5.2, entonces

$$\begin{aligned} P\tau (\mathcal{D}_{0+}^\alpha X)(t) + (PB\tau + 1)X(t) \\ = AP\tau (\mathcal{D}_{0+}^\alpha U)(t) + [CK + A(PB\tau + 1)]U(t). \end{aligned} \quad (3.46)$$

El siguiente teorema muestra cómo podemos construir la ley de control fraccional equivalente $U_e^\alpha q(t)$ en base al análisis realizado en la sección 2.6.2.

Teorema 7. Sea $\alpha > 0$, $m = [\alpha] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a, b])$ y $R^{(m)}(t)$, $X^{(m)}(t) \in L_1(a, b)$. Entonces, la ley de control fraccional $U_{eq}^\alpha(t)$ basada en la superficie deslizante fraccionaria (2.63) es:

si A, P o τ son iguales a 0, entonces:

$$U_{eq}^\alpha(t) = \frac{\lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_0 R(t) + (P\tau - \lambda_1) \mathcal{D}_{0+}^\alpha X(t) + (PB\tau + 1 - \lambda_0) X(t)}{[CK + A(PB\tau + 1)]}. \quad (3.47)$$

De lo contrario,

$$U_{eq}^{\alpha, \beta}(t) = \frac{[\lambda_1 t^{-1} E_{\alpha, 0}(-\theta t^\alpha) + \lambda_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\theta t^\alpha)] \star R(t)}{AP\tau} + \frac{(P\tau - \lambda_1) t^{-1} E_{\alpha, 0}(-\theta t^\alpha) \star X(t)}{AP\tau} + \frac{(P\tau B + 1 - \lambda_0) t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\theta t^\alpha) \star X(t)}{AP\tau}. \quad (3.48)$$

Donde el simbolo \star representa la operación de convolución (ver teorema 2) y $E_{\eta, \nu}$ es la función de dos parámetros Mittag-Leffler (ver [Gorenflo et al., 2020]) y $\phi = \frac{[CK + A(PB\tau + 1)]}{AP\tau}$.

Demostración Sea $e(t) = R(t) - X(t)$. Primero aplicamos el operador (2.65) a la función $e(t)$ para obtener:

$$\frac{d}{dt} S_\alpha[e(t)] = \frac{d}{dt} S_\alpha[R(t)] - \frac{d}{dt} S_\alpha[X(t)], \quad (3.49)$$

por la linealidad de este operador fraccionario.

A continuación, $\frac{d}{dt} S_\alpha[e(t)]$ nos lleva a

$$\lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_0 R(t) = \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha X(t) + \lambda_0 X(t). \quad (3.50)$$

En segundo lugar, combinamos la ecuación (3.46) y (3.50) y obtenemos

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha R(t) + \lambda_0 R(t) + \\ & P\tau (\mathcal{D}_{0+}^\alpha X)(t) + (P\tau B + 1)X(t) = \\ & \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^\alpha X(t) + \lambda_0 X(t) + \\ & AP\tau (\mathcal{D}_{0+}^\alpha U)(t) + [CK + A(PB\tau + 1)]U(t). \end{aligned} \quad (3.51)$$

El resultado se obtiene directamente de (3.51) si A, P o τ son iguales a 0. Por otro lado, si $A, P, \tau \neq 0$, entonces (3.51) se puede escribir, en base al teorema 1, como

ecuación diferencial fraccionaria lineal de la siguiente manera:

$$(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}U)(t) + \phi U(t) = f_{\alpha}(t), \quad (3.52)$$

donde $\phi = \frac{[CK+A(PB\tau+1)]}{AP\tau}$ y

$$f_{\alpha}(t) = \frac{\lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_0 R(t)}{AP\tau} + \frac{(P\tau - \lambda_1) \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t)}{AP\tau} + \frac{(P\tau B + 1 - \lambda_0) X(t)}{AP\tau}. \quad (3.53)$$

La ecuación (3.52) puede resolverse usando el método de Laplace para obtener (ver [Kilbas et al., 2006a], Thm. 2)

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1 t^{-1} E_{\alpha,0}(-\phi t^{\alpha}) \star R(t)}{AP\tau} + \frac{\lambda_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\phi t^{\alpha}) \star R(t)}{AP\tau} + \\ & + \frac{(P\tau) t^{-1} E_{\alpha,0}(-\phi t^{\alpha}) \star X(t)}{AP\tau} + \frac{(P\tau B + 1) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\phi t^{\alpha}) \star X(t)}{AP\tau} = \\ & + \frac{\lambda_1 t^{-1} E_{\alpha,0}(-\phi t^{\alpha}) \star X(t)}{AP\tau} + \frac{\lambda_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\phi t^{\alpha}) \star X(t)}{AP\tau} + U(t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

El resultado se obtiene directamente. \square

Caso especial: De lo general a lo particular

Si aplicamos $C, P = 1$ y $A, B = 0$, en (3.42) la función generalizada de la función de transferencia sin retardo obtenemos la **función de transferencia sin retardo**

$$F_3(s) = \frac{K}{\tau s^{\alpha} + 1}. \quad (3.55)$$

Así que si aplicamos $C, D, P = 1$ y $A, B = 0$, en (3.47) tenemos que:

$$\begin{aligned} U(t)_{eq} &= \frac{1}{K} \cdot [\lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_0 R(t)] \\ &+ \frac{1}{K} \cdot [(\tau - \lambda_1) \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X(t) + (1 - \lambda_0) X(t)]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

que coincide con (3.38).

Análisis del comportamiento del parámetro asociado

3.4.1. Caso especial: cuando el parámetro asociado tiende a uno en la generalización de la función de transferencia sin retardo

Sea $\alpha \rightarrow 1$, $m = [\alpha] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a,b])$ y $e^{(m)} \in L_1(a,b)$. Usando la observación 3, la superficie de deslizamiento fraccionaria, $S_{\alpha,\beta}$ está dada por:

$$S_{1,\beta}[e(t)] := \left(\lambda_1 \frac{d}{dt} + \lambda_0 \right) I^1[e(t)]. \quad (3.57)$$

En consecuencia, la ecuación (3.46) se convierte en

$$\begin{aligned} & P\tau \frac{d}{dt} X(t) + (PB\tau + 1)X(t) \\ &= AP\tau \frac{d}{dt} U(t) + [CK + A(PB\tau + 1)]U(t). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Y el teorema 7 convierte el control fraccional equivalente para este caso en:

Teorema 8. *Sea $\alpha \rightarrow 1$, $m = [\alpha] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a,b])$ y $R^{(m)}(t)$, $X^{(m)}(t) \in L_1(a,b)$. Entonces, la ley de control fraccional $U_e^1 q(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie es*

$$\begin{aligned} U_{eq}^1(t) &= \frac{\lambda_1 \frac{d}{dt} R(t) + \lambda_0 R(t)}{[CK + AP\tau \frac{d}{dt} X(t) + A(PB\tau + 1)]} \\ &+ \frac{(P\tau - \lambda_1) \frac{d}{dt} X(t) + ((PB\tau + 1) - \lambda_0) X(t)}{[CK + AP\tau \frac{d}{dt} X(t) + A(PB\tau + 1)]}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Demostración Sea $e(t) = R(t) - X(t)$. Primero aplicamos el operador (3.57) a la función $e(t)$ para obtener:

$$\frac{d}{dt} S_1[e(t)] = \frac{d}{dt} S_1[R(t)] - \frac{d}{dt} S_1[X(t)], \quad (3.60)$$

por la linealidad de este operador fraccional.
A continuación, $\frac{d}{dt}S_1[e(t)]$ conduce a

$$\lambda_1 \frac{d}{dt}R(t) + \lambda_0 R(t) = \lambda_1 \frac{d}{dt}X(t) + \lambda_0 X(t). \quad (3.61)$$

En segundo lugar, combinamos (3.46) y (3.61) y obtenemos

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \frac{d}{dt}R(t) + \lambda_0 R(t) + \\ & P\tau \frac{d}{dt}X(t) + (PB\tau + 1)X(t) = \\ & \lambda_1 \frac{d}{dt}X(t) + \lambda_0 X(t) + \\ & \left[CK + AP\tau \frac{d}{dt}X(t) + A(PB\tau + 1) \right] U(t). \end{aligned} \quad (3.62)$$

El resultado se obtiene directamente. \square

Caso especial: cuando el parámetro tiende a uno

Si aplicamos $C, P = 1$ y $A, B = 0$, en (3.59) tenemos que:

$$U_{eq}^1(t) = \frac{\lambda_1 \frac{d}{dt}R(t) + \lambda_0 R(t)}{K} + \frac{(\tau - \lambda_1) \frac{d}{dt}X(t) + (1 - \lambda_0) X(t)}{K}. \quad (3.63)$$

3.5. Generalización del modelo de pimer orden fraccionario con retardo con Mittag - Leffler

A continuación se realiza el cálculo para la función $F_0(s)$ pero con Mittag-Leffler en lugar del análisis con la exponencial realizado en la sección 3.2 para comprobar si se obtiene el mismo resultado.

Sea $F_0(s)$ una función donde $\alpha, \beta \in [a, b]$ y $A, B, C, P, Q, T \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F_0(s) = \left(\frac{CK}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} + A \right) \cdot \left[\frac{1}{E_{n,r}(t_o(s^\beta + B)T + Q)} \right]. \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{X(s)}{U(s)} &= \left(\frac{CK + A[P\tau(s^\alpha + B) + 1]}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} \right) \cdot \left[\frac{1}{E_{n,r}(t_o(s^\beta + B)T + Q)} \right] \\ &\approx \left(\frac{CK + A[P\tau(s^\alpha + B) + 1]}{P\tau(s^\alpha + B) + 1} \right) \cdot \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+r) + (t_o(s^\beta + B)T + Q)\Gamma(n)}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Si $\alpha, \beta > 0$ se define la función de transferencia fraccionaria más el tiempo muerto como:

$$\begin{aligned} &\left[PTs^{\alpha+\beta} \Gamma(n) + \left(P\frac{1}{t_0} \Gamma(n+r) + PBT \Gamma(n) + PQ\frac{1}{t_0} \Gamma(n) \right) s^\alpha \right] X(s) \\ &+ \left[\left(PBT \Gamma(n) + T\frac{1}{\tau} \Gamma(n) \right) s^\beta + PB\frac{1}{t_0} \Gamma(n+r) + \frac{1}{\tau t_0} \Gamma(n+r) \right] X(s) \\ &+ \left[PTB^2 \Gamma(n) + BT\frac{1}{\tau} \Gamma(n) + PBQ\frac{1}{t_0} \Gamma(n) + Q\frac{1}{\tau t_0} \Gamma(n) \right] X(s) \\ &= \frac{1}{\tau t_0} [CK \Gamma(n) \Gamma(n+r) + AP\tau s^\alpha \Gamma(n) \Gamma(n+r) + APB\tau \Gamma(n) \Gamma(n+r)] U(s) \\ &\quad + \frac{1}{\tau t_0} [+APB\tau \Gamma(n) \Gamma(n+r) + A \Gamma(n) \Gamma(n+r)] U(s). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Si tomamos $\alpha + \beta \leq 2$. Son posibles dos casos en vista del valor de $\alpha + \beta$. Por un lado, $\alpha + \beta \in (0, 1]$ entonces es posible usar la ecuación (2.39) para toda inversión en el LHS. Por otro lado, si $\alpha + \beta \in (1, 2]$ la inversión del primer término se puede obtener con (2.40) y (2.39) para los siguientes términos. Sin embargo, si la función X satisface las condiciones de los lemas 2.5.1 y 2.5.2, entonces:

$$\begin{aligned} &PT \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} X \right) (t) \Gamma(n) + \left[P\frac{1}{t_0} \Gamma(n+r) + PBT \Gamma(n) + PQ\frac{1}{t_0} \Gamma(n) \right] \left(\mathcal{D}_{0+}^\alpha X \right) (t) \\ &+ \left[PBT \Gamma(n) + T\frac{1}{\tau} \Gamma(n) \right] \left(\mathcal{D}_{0+}^\beta X \right) (t) + \left[PB\frac{1}{t_0} \Gamma(n+r) + \frac{1}{\tau t_0} \Gamma(n+r) \right] X(t) \\ &\quad + \left[+PTB^2 \Gamma(n) + BT\frac{1}{\tau} \Gamma(n) + PBQ\frac{1}{t_0} \Gamma(n) + Q\frac{1}{\tau t_0} \Gamma(n) \right] X(t) \\ &= \frac{1}{\tau t_0} AP\tau \left(\mathcal{D}_{0+}^\alpha U \right) (t) \Gamma(n) \Gamma(n+r) + \frac{1}{\tau t_0} [CK \Gamma(n) \Gamma(n+r) +] U(t) \\ &\quad + APB\tau \Gamma(n) \Gamma(n+r) + \frac{1}{\tau t_0} [APB\tau \Gamma(n) \Gamma(n+r) + A \Gamma(n) \Gamma(n+r)] U(t). \end{aligned} \quad (3.67)$$

El siguiente teorema muestra cómo podemos construir la ley de control fraccional

equivalente $U_e^{\alpha,\beta}q(t)$ en base al análisis realizado en la sección 2.6.1.

Teorema 9. Sea $\alpha, \beta > 0$, $m = [\alpha + \beta] + 1$, $e(t) \in AC^{m-1}([a, b])$ y $R^{(m)}(t)$, $X^{(m)}(t) \in L_1(a, b)$. Entonces, la ley de control fraccionario equivalente $U_{eq}^{\alpha,\beta}(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie es:

$$\begin{aligned}
U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) = & \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} R(t) + \lambda_1 \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} R(t) + \lambda_2 \mathcal{D}_{0+}^{\beta} R(t) + \lambda_0 R(t)}{M + N} \\
& + \frac{(PT - 1) \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta} X \right) (t) \Gamma(n)}{M + N} \\
& + \frac{\left[\left(P \frac{1}{t_0} \Gamma(n+r) + PBT \Gamma(n) + PQ \frac{1}{t_0} \Gamma(n) \right) - \lambda_1 \right] \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} X \right) (t)}{M + N} \\
& + \frac{\left[(PBT \Gamma(n) + T \frac{1}{\tau} \Gamma(n)) - \lambda_2 \right] \left(\mathcal{D}_{0+}^{\beta} X \right) (t) + \left[\left(PB \frac{1}{t_0} \Gamma(n+r) + \frac{1}{\tau t_0} \Gamma(n+r) \right) \right]}{M + N} \\
& + \frac{\left(PTB^2 \Gamma(n) + BT \frac{1}{\tau} \Gamma(n) + PBQ \frac{1}{t_0} \Gamma(n) + Q \frac{1}{\tau t_0} \Gamma(n) \right) - \lambda_0 X(t)}{M + N}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Donde:

$$M = \frac{1}{\tau t_0} [CK \Gamma(n) \Gamma(n+r) + AP\tau \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} X \right) (t) \Gamma(n) \Gamma(n+r) + APB\tau \Gamma(n) \Gamma(n+r)] \tag{3.69}$$

$$N = \frac{1}{\tau t_0} [APB\tau \Gamma(n) \Gamma(n+r) + A \Gamma(n) \Gamma(n+r)]. \tag{3.70}$$

Caso especial: cuando n y r son iguales a uno

Primero se realiza un análisis de la función gamma aplicada a los valores 1 y 2.
Sea $n = r = 1 \Rightarrow$

$$\Gamma(n) = \Gamma(1) = 0! = 1. \tag{3.71}$$

$$\Gamma(n+r) = \Gamma(2) = 1! = 1. \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t)}{M + N} \\
+ \frac{(PT - 1) \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}X \right) (t) + \left[\left(P\frac{1}{t_0} + PBT + PQ\frac{1}{t_0} \right) - \lambda_1 \right] \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X \right) (t)}{M + N} \\
+ \frac{\left[(PBT + T\frac{1}{\tau}) - \lambda_2 \right] \left(\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X \right) (t) + \left[\left(PB\frac{1}{t_0} + \frac{1}{\tau t_0} \right) \right.}{M + N} \\
+ \left. \left. \left(PTB^2 + BT\frac{1}{\tau} + PBQ\frac{1}{t_0} + Q\frac{1}{\tau t_0} \right) - \lambda_0 \right] X(t)}{M + N}. \quad (3.73)
\end{aligned}$$

Donde:

$$M = \frac{1}{\tau t_0} AP\tau \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}U \right) (t) + \frac{1}{\tau t_0} [CK + APB\tau]. \quad (3.74)$$

$$N = \frac{1}{\tau t_0} [APB\tau + A]. \quad (3.75)$$

Caso especial: cuando C, T, P son iguales a uno y A, Q, B son iguales a cero

$$\begin{aligned}
U_{eq}^{\alpha,\beta}(t) &= \frac{\tau t_0}{K} \left[\mathcal{D}_{0+}^{\alpha+\beta}R(t) + \lambda_1\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}R(t) + \lambda_2\mathcal{D}_{0+}^{\beta}R(t) + \lambda_0R(t) \right] \\
+ \frac{\tau t_0}{K} \left[\left(\frac{1}{t_0} - \lambda_1 \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}X \right) (t) + \left(\frac{1}{\tau} - \lambda_2 \right) \left(\mathcal{D}_{0+}^{\beta}X \right) (t) + \left(\frac{1}{\tau t_0} - \lambda_0 \right) X(t) \right]. \quad (3.76)
\end{aligned}$$

Que coincide con la ley de control fraccionario equivalente $U_{eq}^{\alpha,\beta}(t)$ basada en el deslizamiento fraccionario de la superficie (3.12).

Resultados y conclusiones

Se estudió el comportamiento de un controlador de modo deslizante fraccional diseñado a partir de un modelo de primer orden más tiempo muerto fraccional mediante el desarrollo de la ley de control fraccionaria para un modelo de primer orden fraccionario con retardo, incluyendo el error en la aproximación de retraso en el tiempo. Se obtuvo como resultado que cuando el error tiende a cero, ambas leyes de control convergen a una misma. En el diseño del controlador para este modelo se logró fusionar el poder del cálculo de orden fraccional para describir y representar los sistemas químicos reales como un modelo de orden reducido y, a partir de él, aplicar el procedimiento de control de modo deslizante, desarrollando así, el controlador. Se obtuvo una generalización del modelo de primer orden fraccionario con retardo y el desarrollo de su ley de control fraccionaria, y los parámetros sobre los cuales esta ley converge a la ley de control fraccionaria del modelo de primer orden. Se logró integrar una estructura de compensador de tiempo muerto (CTM) con control de modo deslizante y cálculo fraccionario para proporcionar un CTM robusto para sistemas no lineales con un retraso prolongado observando que el enfoque proporcionado brinda a la estructura de control de modo deslizante (CMD) características predictivas, mejorando la capacidad de respuesta transitoria para los procesos de tiempo muerto, y el CMD brinda robustez de estructura predictiva para los desajustes del modelo. Mediante la implementación del cálculo fraccionario se creó un modelo de orden reducido. Al presentar un diseño de control a partir de un esquema predictor de Smith se logró obtener la ley de control fraccionaria para la función de transferencia fraccionaria. Se presentó una generalización de la función de transferencia sin retardo y se obtuvo su ley de control fraccionaria determinando bajo qué parámetros ambas leyes convergen a una misma. Al realizar análisis del comportamiento del parámetro asociado cuando este tiende a uno en la función de transferencia sin retardo, se consiguió comparar el comportamiento de derivadas fraccionarias y enteras y de las leyes de control obtenidas en el proceso. Finalmente, al realizar el análisis de la generalización del modelo de primer orden fraccionario con Mittag-Leffler en lugar de considerar la aproximación del retardo, se obtuvo la

misma ley de control fraccionaria. Demostrando así que esta permanece invariante independientemente del proceso utilizado para su análisis.

Bibliografía

- [Alfaro, 2007] Alfaro, V. M. (2007). Pid controllers' fragility. *ISA transactions*, 46(4):555–559.
- [Åström et al., 2006] Åström, K. J., Hägglund, T., and Astrom, K. J. (2006). *Advanced PID control*, volume 461. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society Research Triangle Park.
- [Birs et al., 2019] Birs, I., Muresan, C., Nascu, I., and Ionescu, C. (2019). A survey of recent advances in fractional order control for time delay systems. *Ieee Access*, 7:30951–30965.
- [Camacho, 2002] Camacho, O. (2002). A predictive approach based-sliding mode control. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1):381–385.
- [Camacho and Leiva, 2020] Camacho, O. and Leiva, H. (2020). Impulsive semilinear heat equation with delay in control and in state. *Asian Journal of Control*, 22(3):1075–1089.
- [Camacho and Smith, 2000] Camacho, O. and Smith, C. A. (2000). Sliding mode control: an approach to regulate nonlinear chemical processes. *ISA transactions*, 39(2):205–218.
- [Dastjerdi et al., 2019] Dastjerdi, A. A., Vinagre, B. M., Chen, Y., and Hosseini-Nia, S. H. (2019). Linear fractional order controllers; a survey in the frequency domain. *Annual Reviews in Control*, 47:51–70.
- [De Keyser and Ionescu, 2017] De Keyser, R. and Ionescu, C. M. (2017). Minimal information based, simple identification method of fractional order systems for model-based control applications. In *2017 11th Asian Control Conference (ASCC)*, pages 1411–1416. IEEE.

- [Di Teodoro et al., 2022] Di Teodoro, A., Ochoa-Tocachi, D., Aboukheir, H., and Camacho, O. (2022). Sliding-mode controller based on fractional order calculus for chemical processes. *2022 IEEE International Conference on Automation/XXV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*.
- [Gorenflo et al., 2020] Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., Rogosin, S. V., et al. (2020). *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer.
- [Ionescu and Copot, 2019] Ionescu, C. and Copot, D. (2019). Hands-on mpc tuning for industrial applications. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 67(5).
- [Juchem et al., 2019] Juchem, J., Dekemele, K., Chevalier, A., Loccufer, M., and Ionescu, C.-M. (2019). First order plus frequency dependent delay modeling: new perspective or mathematical curiosity? In *2019 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)*, pages 2025–2030. IEEE.
- [Kilbas et al., 2006a] Kilbas, A., Rivero, M., Rodriguez-Germa, L., and Trujillo, J. (2006a). Caputo linear fractional differential equations. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(11):52–57.
- [Kilbas et al., 1993] Kilbas, A. A., Marichev, O., and Samko, S. (1993). Fractional integrals and derivatives (theory and applications).
- [Kilbas et al., 2006b] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006b). *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier.
- [Kristiansson and Lennartson, 2002] Kristiansson, B. and Lennartson, B. (2002). Robust and optimal tuning of pi and pid controllers. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 149(1):17–25.
- [Liptak, 2018] Liptak, B. G. (2018). *Instrument engineers' handbook, volume two: Process control and optimization*. CRC press.
- [Luo and Chen, 2009] Luo, Y. and Chen, Y. (2009). Fractional order [proportional derivative] controller for a class of fractional order systems. *Automatica*, 45(10):2446–2450.
- [Marlin, 1995] Marlin, T. E. (1995). Process control. *Chemical Engineering Series, McGraw-Hill International Editions: New York*.
- [Miller and Ross, 1993] Miller, K. S. and Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.

- [Monje et al., 2010] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., and Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media.
- [Muresan and Ionescu, 2020] Muresan, C. I. and Ionescu, C. M. (2020). Generalization of the fopdt model for identification and control purposes. *Processes*, 8(6):682.
- [Normey-Rico and Camacho, 2007] Normey-Rico, J. E. and Camacho, E. F. (2007). *Control of dead-time processes*, volume 462. Springer.
- [Normey-Rico and Camacho, 2008] Normey-Rico, J. E. and Camacho, E. F. (2008). Dead-time compensators: A survey. *Control engineering practice*, 16(4):407–428.
- [Padula and Visioli, 2016] Padula, F. and Visioli, A. (2016). On the fragility of fractional-order pid controllers for fopdt processes. *ISA transactions*, 60:228–243.
- [Podlubny, 1994] Podlubny, I. (1994). Fractional-order systems and fractional-order controllers. *Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Kosice*, 12(3):1–18.
- [Samad, 2017] Samad, T. (2017). A survey on industry impact and challenges thereof [technical activities]. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(1):17–18.
- [Seborg et al., 2016] Seborg, D. E., Edgar, T. F., Mellichamp, D. A., and Doyle III, F. J. (2016). *Process dynamics and control*. John Wiley & Sons.
- [Slotine et al., 1991] Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- [Smith and Corripio, 1991] Smith, C. A. and Corripio, A. B. (1991). *Control automático de procesos*. Limusa.
- [Smith and Corripio, 2005] Smith, C. A. and Corripio, A. B. (2005). *Principles and practices of automatic process control*. John wiley & sons.
- [Utkin et al., 2017] Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (2017). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press.
- [Utkin et al., 2020] Utkin, V., Poznyak, A., Orlov, Y. V., and Polyakov, A. (2020). *Road map for sliding mode control design*. Springer.