

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO-USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

**Diagrama de Voronoi y
Triangulación de Delaunay**

Aplicaciones Computacionales

Maeva Ilenia Flores Quilumba
Matemáticas

*Trabajo de titulación presentado como requisito para la obtención del título
de*
Matemática

Quito, diciembre de 2022

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO - USFQ
Colegio de Ciencias e Ingenierías

HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN

**Diagrama de Voronoi y Triangulación de
Delaunay**
Aplicaciones Computacionales

Maeva Ilenia Flores Quilumba

Nombre del Profesor: Carlos Jiménez,

Título Académico: Ph.D.

Firma: _____

Quito, diciembre de 2022

©Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante: _____

Nombres y apellidos: Maeva Ilenia Flores Quilumba

Código: 00208902

Cédula de identidad: 1004679955

Lugar y fecha: Quito, diciembre de 2022

ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETHeses>.

UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETHeses>.

Dedicado a mi familia

Resumen

Este trabajo de investigación científica tiene como objetivo hallar y analizar las aplicaciones computacionales del diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay. Dos conceptos teóricos matemáticos y geométricos que pueden ser de gran utilidad en varios ámbitos profesionales. Aquí nos centraremos en mostrar dos casos distintos que muestren la amplitud y versatilidad de las aplicaciones existentes.

En el primero de ellos, un análisis geográfico de las Unidades de Policía Comunitaria en Quito, se utilizó Python como software principal, donde se generó un programa con propósitos geográficos que cumplieran con las observaciones deseadas. Para el segundo, un análisis de la visualización, modelo y renderizado de una pieza arqueológica escaneada en tres dimensiones, se utilizó el software Gigamesh conocido académicamente para estudios de elementos arqueológicos.

Tras la observación e investigación de ambas aplicaciones, se concluyó que el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay son sumamente prácticos y tienen una variedad de usos, desde ámbitos académicos y científicos, hasta dentro de seguridad y ubicación.

Abstract

This scientific research work aims to find and analyze the computational applications of the Voronoi diagram and the Delaunay triangulation. Two theoretical mathematical and geometrical concepts that can be very useful in several professional fields. Here we will focus on showing two different cases that demonstrate the breadth and versatility of existing applications.

In the first one, a geographic analysis of the Community Police Units in Quito, Python was used as the main software, where a program with geographic purposes was generated to fulfill the desired observations. For the second, an analysis of the visualization, modeling and rendering of an archaeological piece scanned in three dimensions, we used the Gigamesh software known academically for studies of archaeological elements.

After observation and investigation of both applications, it was concluded that the Voronoi diagram and Delaunay triangulation are extremely practical and have a variety of uses, from academic and scientific fields, to security and location.

Agradecimientos

Una de las cualidades mas importantes del ser humano es la gratitud, es por ello que desde el fondo mi corazón quiero expresar mi más profundo y eterno agradecimiento a todas las personas que de una u otra manera formaron parte de este sueño.

Quisiera iniciar agradeciendo a mi padre y a mi madre que siempre estuvieron apoyándome en este maravilloso camino universitario, a mi familia que estuvieron ahí siempre con su voz de aliento , en aquellos momentos que perdía las fuerzas, a mis entrañables amigas que con su compañía me enseñaron que todo es posible cuando tienes personas tan lindas a tu lado y están listas a sacarte una sonrisa cuando aun quieres llorar, a mis maestros que impregnaron en mi mente y en mi corazón el conocimiento, la sabiduría pero sobre todo a creer que puedo y que siempre la puerta del conocimiento esta abierta para aquellos que quieren superarse, y en general a mi querida Universidad de la que me llevo la mejor época de mi vida estudiantil, en la que me enseñaron a pensar con libertad y a desarrollar mi creatividad, gracias infinitas a todos por siempre.

Indice general

1. Diagrama de Voronoi	14
1.0.1. Algunas propiedades del Diagrama de Voronoi	19
1.0.2. Diagramas de Voronoi presentes en nuestro entorno	26
2. Triangulación de Delaunay	29
2.0.1. Construcción de la red triangular	31
2.0.2. Propiedades de la Triangulación de Delaunay	36
2.0.3. Algoritmos para la construcción	39
3. Aplicación	47
3.1. Unidades de Policía Comunitaria en Quito	47
3.1.1. Método	49
3.1.2. Utilidad	53
3.2. Escultura Antropomorfa	54
3.2.1. Descripción Gráfica y Contexto de la Escultura	54
3.2.2. Método	55
3.2.3. Utilidad	57
3.3. K-Means	59

3.3.1. Relación de k-means y el Diagrama de Voronoi	59
3.3.2. Método	60
3.3.3. Utilidad	62
4. Conclusiones	63
4. Bibliografía	65

Introducción

El diagrama de Voronoi es una estructura geométrica muy útil que ha sido redescubierta muchas veces en diferentes campos de la ciencia. Aun cuando no se había definido formalmente su concepto, varios trabajos a lo largo de la historia incluyen conceptos muy similares.

Aproximadamente en 1644 Descartes describe las regiones de influencia gravitacional del sol y otras estrellas mediante un gráfico, el cual se asemeja a un diagrama de Voronoi (figura 1), en su trabajo sobre vórtices para identificar cúmulos de estrellas y cúmulos de galaxias, mismas regiones que conceptualmente son muy similares a las celdas de Voronoi.

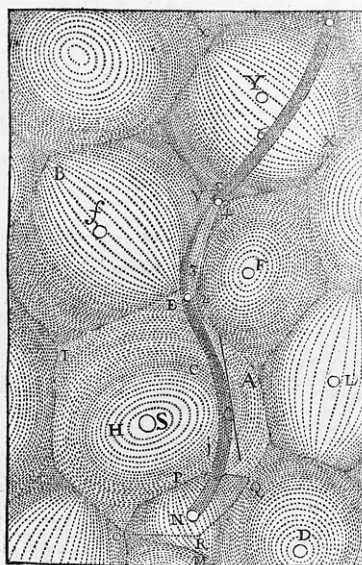


Figura 1: Descomposición del espacio en vórtices por Descartes [19]

Una de las primeras aplicaciones importantes de las cuales se tiene constancia ocurrió en 1854 cuando John Snow, un médico quien hizo un estudio para lograr entender las causantes de la epidemia de cólera en Soho logrando en relacionarla con una fuente de agua de Broad Street y determinando que las fuentes de agua eran el medio de transmisión del cólera. Su trabajo de investigación tuvo como método principal la realización de un mapa el cual indicaba la ubicación de las personas que murieron a causa del cólera, posteriormente realizó una serie de líneas alrededor de cada punto (lo que se puede interpretar como regiones de Voronoi), eventualmente las rayas se superponían logrando así definir las áreas del mapa en las que había mayor concentración de decesos y así conectando el origen de la enfermedad a un área específica. Si bien en su estudio no se menciona directamente el diagrama en discusión, es una aplicación de este.[16].

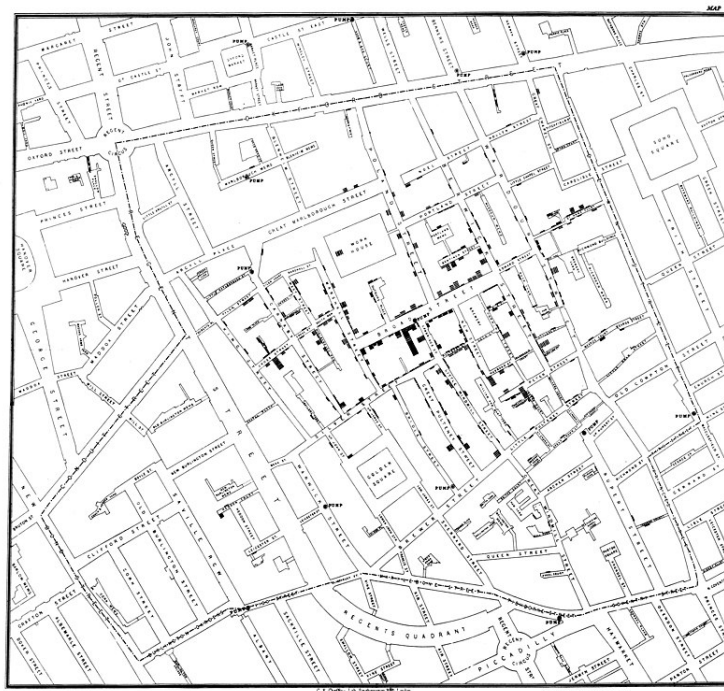


Figura 2: Mapa atribuido a John Snow

Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) fue un matemático alemán quien en su trabajo sobre formas cuadráticas logra definir formalmente este diagrama para dos y tres dimensiones. Luego en 1908 Voronoi formaliza la definición para n-dimensiones.

Por otro lado, la triangulación juega un papel importante en muchas aplicaciones, especialmente en el modelado matemático. En dos dimensiones con elementos finitos se basa en la triangulación de una serie de puntos en el plano y depende de la triangulación elegida, ya que mientras más regulares los triángulos mejor, de esto nace la triangulación de Delaunay.

Borís Nikoláievich Delone fue un matemático ruso de la etapa soviética, quien crea el algoritmo de Delaunay utilizado en el modelado de superficies definidas por puntos. Borís Delaunay trabajó en el campo del álgebra abstracta, teoría de los números. Utilizó los resultados Voronói respecto a su diagrama, y otros en su desarrollo de la cristalografía matemática moderna y en la modelización matemática general de cristales.

Por su funcionalidad es fácil notar que se pueden encontrar la forma de generar un diagrama de Voronoi y a su vez una triangulación de Delaunay en cualquier campo de aplicación, es por eso que estas ideas geométricas tienen un nombre específico para cada área de estudio (región de influencia, celdas, polígonos, etc.).

Los diagramas de Voronoi y las triangulaciones de Delaunay son importantes desde el punto de vista teórico y práctico único, ya que desempeñan un papel interdisciplinario significativo. Si bien existen muchísimos campos de aplicación aun desconocidos este proyecto se centra en mostrar la base conceptual, propiedades y algoritmos fundamentales para aplicaciones simples.

Este proyecto está destinado a explicar los conceptos de dos estructuras geométricas importantes conocidas como el Diagrama de Voronoi y la Triangulación de Delaunay, además se van a presentar aplicaciones de los mismos.

Capítulo 1

Diagrama de Voronoi

El Diagrama de Voronoi se deriva del estudio de un grupo finito de puntos y del análisis de los puntos más cercanos a aquellos pertenecientes al grupo inicial.

Dado un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ puntos distintos en el plano euclidiano a los cuales se les asocia el conjunto de puntos más cercanos al punto respecto a los otros puntos en el conjunto. El resultado es una teselación de plano, un conjunto de las regiones asociadas con los elementos del conjunto de puntos. Se llama a esta teselación el diagrama de Voronoi dado por el conjunto de puntos, y las regiones que constituyen el diagrama de Voronoi se llaman regiones de Voronoi. [4]

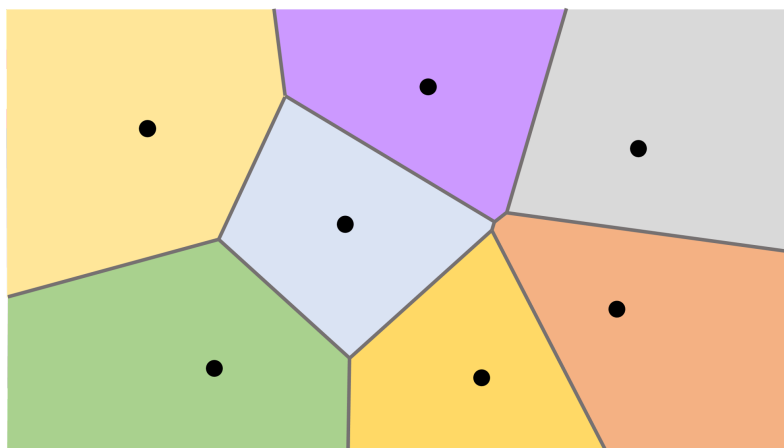


Figura 1.1: Diagrama de Voronoi (7 puntos)

Para iniciar con la construcción del diagrama, es importante tener en cuenta la siguiente notación, se entenderá a S como un conjunto de puntos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ en el plano Euclidiano. Los puntos en S se podrán representar como par ordenado $p = (p_{1x}, p_{1y})$, esto con el fin de definir la distancia a un punto $x = (x_x, x_y)$ distinto de p :

$$d(p, x) = \sqrt{(p_{1x} - x_x)^2 + (p_{1y} - x_y)^2}$$

Es decir que se utilizará la distancia euclidiana en este caso.

El segmento que conecta un punto p_1 con un punto p_2 será denotado por $\overline{p_1 p_2}$. A partir de este segmento podemos definir el bisector $Bis(p_1, p_2)$ de p_1 y p_2 como la recta que pasa por el punto medio de $\overline{p_1 p_2}$ y es perpendicular al mismo.

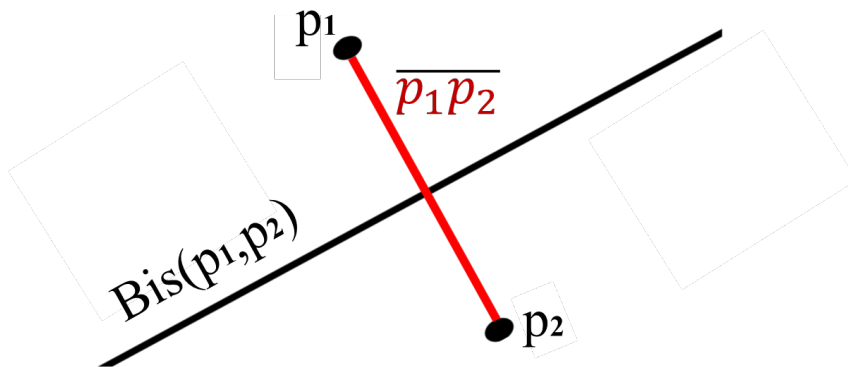


Figura 1.2: $\overline{p_1 p_2}$ y $Bis(p_1, p_2)$

Si se toman dos puntos p_1 y p_2 de S distintos, se puede dividir el plano en dos regiones utilizando la bisectriz entre ambos puntos, a la región creada por la bisectriz que contiene el punto

p_1 se la va a notar como $H_{p_1p_2}$

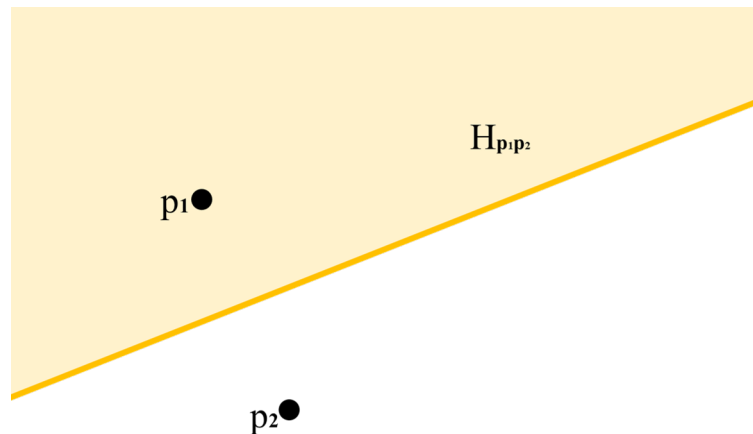


Figura 1.3: Región $H_{p_1p_2}$

Partiendo de esta idea se puede definir a $H_{p_1p_2}$, esta región es conocida como semiplano ya que divide al plano euclidiano en dos partes y se define de la siguiente forma:

$$H_{p_1p_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(p_1, x) \leq d(p_2, x)\}$$

En contraste la región $H_{p_2p_1}$ será la que esta delimitada por la bisectriz $Bis(p_1, p_2)$ y contiene el punto p_2 .

Ahora con la idea previa podemos definir una región de Vornoi V_p asociada a un punto $p \in S$, esta región es la intersección (la cual es finita) de todas las semiplanos H_{pq} . De manera formal podemos decir a V_p como:

$$V_p = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} H_{pq}$$

Por ejemplo, en un conjunto de tres puntos p_1 , p_2 y p_3 las regiones $H_{p_1p_2}$ y $H_{p_1p_3}$ dividirían el plano de la siguiente forma:

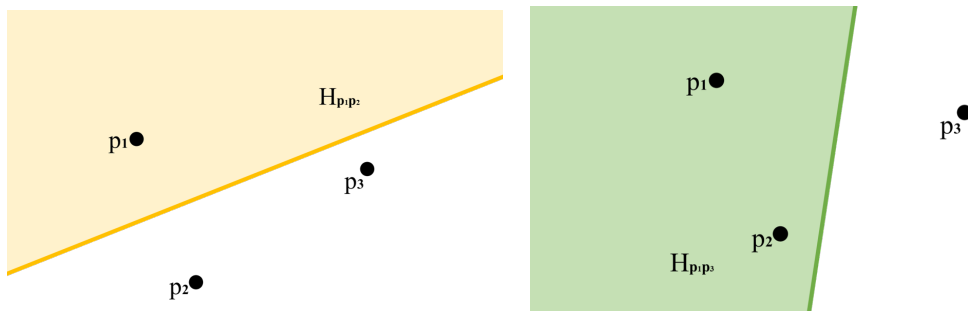


Figura 1.4: Regiones $H_{p_1p_2}$ y $H_{p_1p_3}$

A partir de la intersección de estas regiones, podemos definir la región de Voronoi del punto p_1 .

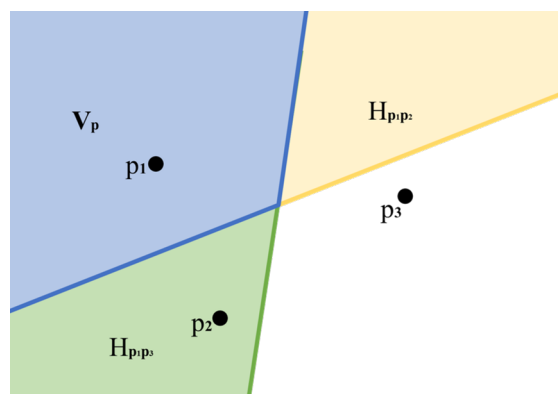


Figura 1.5: Región V_{p_1}

Ahora con la construcción de las regiones de Voronoi se puede crear el diagrama de Voronoi en el cual se ilustran todas las regiones asociadas a los puntos en S , creando bordes delimitantes, es decir, aristas y puntos en los que varias regiones convergen, en otras palabras, vértices, como el diagrama que se muestra en la figura 1.5.

Definición 1. *Dado un conjunto de dos o más pero un número finito de puntos distintos en el plano euclidiano, asociamos todas las ubicaciones en ese espacio con los miembros más cercanos del conjunto de puntos con respecto a la distancia euclidiana. El resultado es una teselación del plano en un conjunto de regiones asociadas con miembros del conjunto de puntos. Llamamos a esta teselación el diagrama de Voronoi ordinario plano generado por el conjunto de puntos, y las regiones que constituyen el diagrama de Voronoi polígonos ordinarios de Voronoi [4].*

Con base en el método de construcción de la región se puede concluir que la Región de Voronoi de p es poligonal¹ debido a que la región que se forma esta restringida por un número finito de segmentos, esto se puede deducir al recordar que a cada punto del conjunto finito $S \setminus \{p\}$ le corresponde una bisectriz, y convexa² ya que es la intersección de semiplanos los cuales son convexos y la intersección de regiones convexas es convexa, además esta puede o no ser acotada.

Nótese que cada Región de Voronoi se centra en un punto y se delimita por los puntos restantes de S , por este motivo cada región tiene como máximo $n - 1$ aristas [1].

Definición 2. *La parte límite común de dos regiones de Voronoi es llamada borde de Voronoi, si contiene más de un punto. El diagrama de Voronoi de S , para abreviar $Vor(S)$, se define como la unión de todos los bordes de Voronoi.*

¹Figura geométrica compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos consecutivos que encierran una región en el plano

²Un polígono convexo tiene todos sus ángulos internos menores o iguales a 180 grados por tanto todas sus diagonales se encuentran en el interior en la figura.

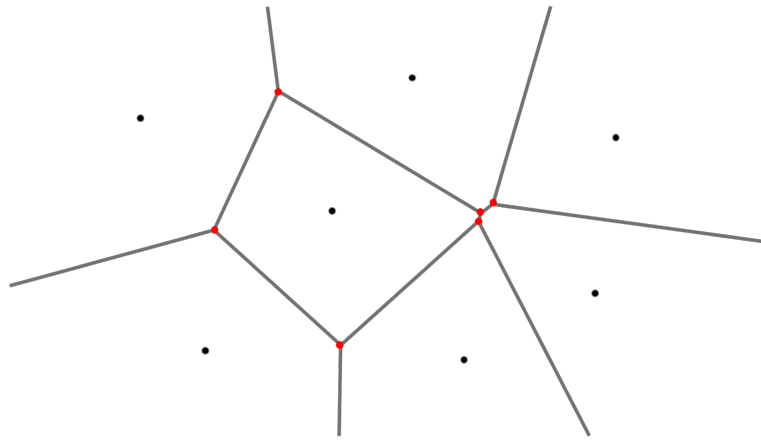


Figura 1.6: Grafo asociado al diagrama de la figura 1.1

1.0.1. Algunas propiedades del Diagrama de Voronoi

1. Como se menciona antes las dos características principales de diagrama son la condición de sus regiones como poligonales y convexas.
2. Sea x un punto en el plano euclidiano y el círculo C_x aquel que se expande desde el punto x , si C_x contiene exactamente a un punto p de S , entonces x pertenece al interior de la región V_p .

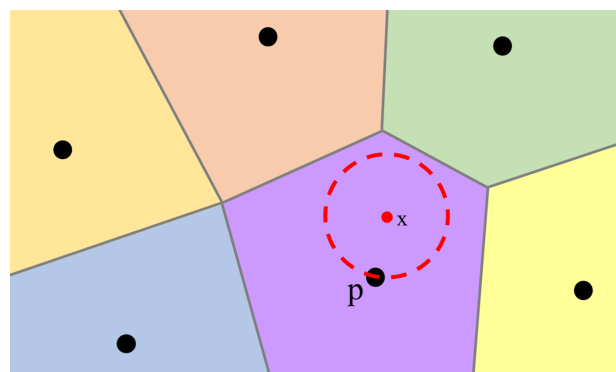


Figura 1.7: Círculo de punto interno

Si C_x contiene exactamente dos puntos, p y q de S , enton-

ces x es un punto en un borde de Voronoi que separa las regiones asociadas con p y q .

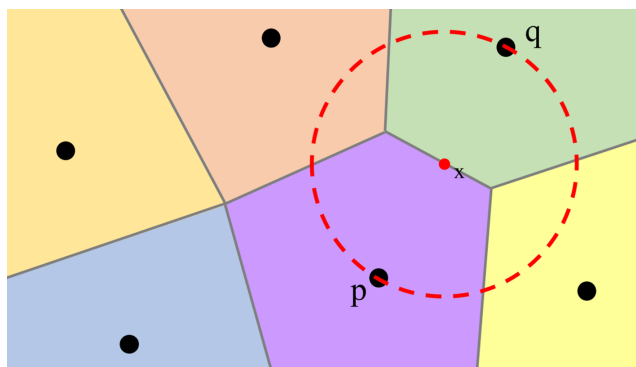


Figura 1.8: Círculo de punto en arista

Si C_x contiene tres o más puntos en S simultáneamente, entonces x es un vértice de Voronoi adyacente a las regiones cuyos puntos asociados han sido tocados.

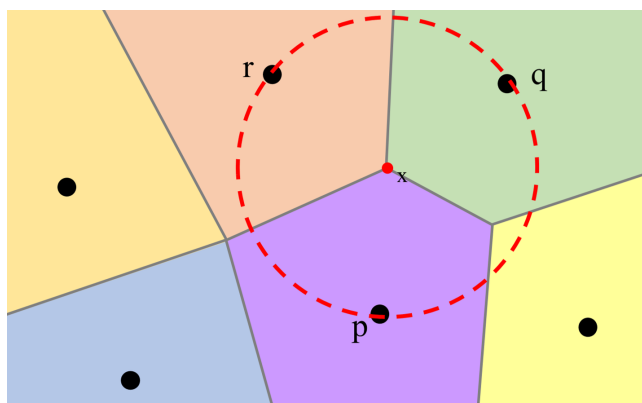


Figura 1.9: Círculo de vértice

Demostración. Si solo se alcanza el punto p de S , entonces p es el único elemento de S más cercano a x . En consecuencia, $x \in H_{pr}$ se cumple para cada punto $r \in S \setminus \{p\}$.

Si contiene exactamente p y q de S , entonces x está contenido en cualquiera de los semiplanos $H_{p,r}$, $H_{q,r}$, donde

$r \in \{p, q\}$, y también en $B(p, q)$, el límite común de H_{pq} y H_{qp} . Por la Definición 1, x pertenece al borde de las regiones de tanto p como q , pero de ningún otro punto en S .

En el tercer caso, si contiene tres o más puntos, podemos tomar de par en par los puntos con los que choca y decir que x pertenece a la arista entre esos puntos, al pertenecer a más de una arista este punto debe ser un vértice. ■

3. Si todos los puntos en S son colineales, se dice que S forma un diagrama de Voronoi desconexo, y todas sus aristas son líneas paralelas.

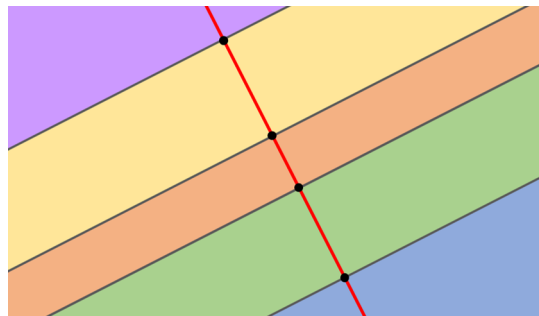


Figura 1.10: Diagrama de Voronoi Desconexo

Demostración. Las aristas del diagrama de Voronoi son perpendiculares a segmentos que unen los puntos en S , si todos los puntos son colineales, todos los segmentos que unen dos puntos distintos están en la misma recta y por tanto todas las aristas son perpendiculares a esta, lo que las hace paralelas entre sí. ■

Para lograr describir las siguientes propiedades es importante definir lo que entendemos por envolvente convexa.

La envolvente convexa es la intersección de todos los semiplanos formados por las rectas que pasan por dos puntos distintos de S que además contienen a todos los puntos de S .

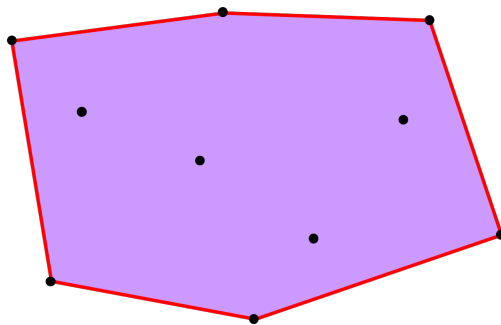


Figura 1.11: Envolvente convexa en conjunto de 10 puntos

4. Un punto p de S está en el límite de la envolvente convexa de S , si y solo si, su región de Voronoi V_p no está acotada.

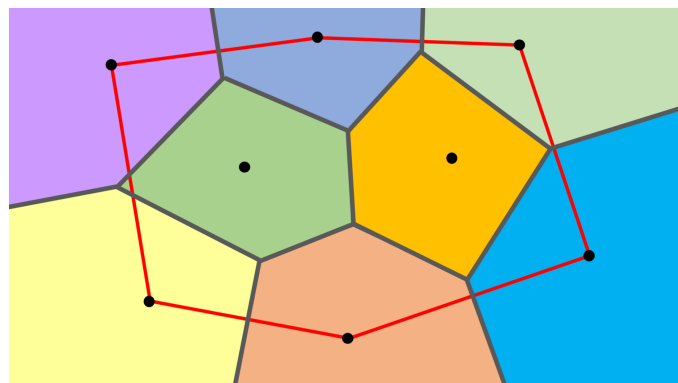


Figura 1.12: Envolvente convexa sobre diagrama

Demostración. La región de Voronoi de p es ilimitada si y solo si existe algún punto $q \in S$ tal que $Vor(S)$ contiene una parte ilimitada de $B(p, q)$ como un borde de Voronoi. Sea $x \in B(p, q)$, y sea C_x el círculo que pasa por p y q centrado en x , como se muestra en la figura 1.13.

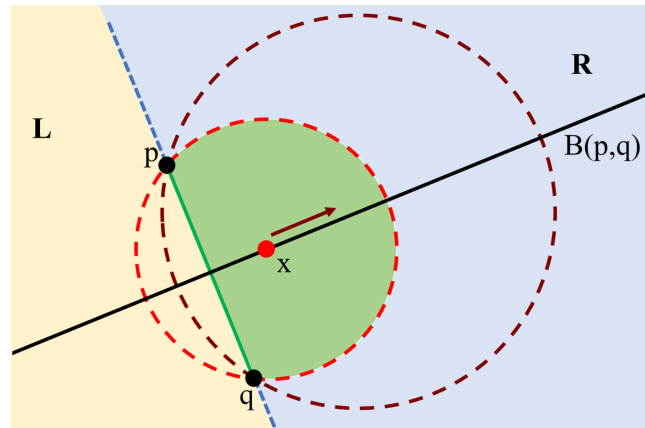


Figura 1.13: Círculo alejándose del segmento \overline{pq}

El punto x pertenece a $Vor(S)$ si y solo si C_x no contiene ningún otro punto. A medida que movemos x hacia la derecha a lo largo de $B(p, q)$, la parte de C_x contenido en el semiplano R sigue creciendo. Si hay otro sitio r en R , eventualmente será alcanzado por C_x , lo que hará que el borde de Voronoi termine en x . De lo contrario, todos los demás sitios de S deben estar contenidos en el cierre del semiplano izquierdo L . Entonces p y q se encuentran en el casco convexo de S . ■

5. Un punto p de S está en el interior de la envolvente convexa de S , si y solo si, su región de Voronoi V_p es acotada.

Demostración. Por definición un punto p de S , es interior o límite respecto a la envolvente convexa; ya que p no es un punto límite de la envolvente su región asociada está acotada, esto sigue de la demostración de la propiedad anterior. ■

6. El borde de Voronoi de dos puntos p_1 y p_2 en S es una semirrecta, si y solo si, p_1 y p_2 son puntos límite consecutivos de la envolvente.

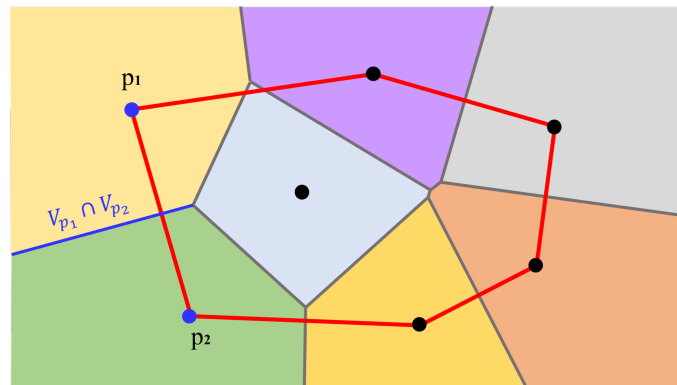


Figura 1.14: Semirrecta formada por p_1 y p_2

Demostración. Ya que p_1 y p_2 son puntos límite de la envolvente, sus regiones asociadas son no acotadas, además, comparten una arista, misma que es una recta que tiene un inicio definido por algún punto interno de la envolvente y continúa al infinito ya que pertenece a una región no acotada, ya que p_1 y p_2 son consecutivos. ■

7. El borde de Voronoi de dos puntos p_1 y p_2 en S es un segmento, si y solo si, al menos uno de los puntos es un punto interno de la envolvente.

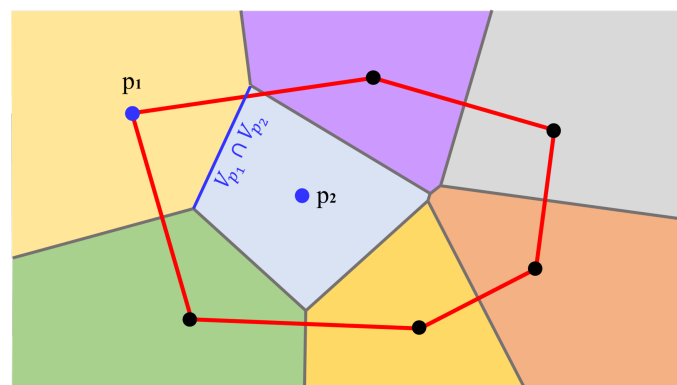


Figura 1.15: Semirrecta formada por p_1 y p_2

Demostración. Si uno de los puntos es interno respecto a la envolvente, la región asociada al mismo es acotada, por lo tanto todas sus aristas son segmentos. ■

8. El grafo asociado al diagrama es planar, lo que esencialmente significa que ninguna de sus aristas se cruza con otra. Esto se cumple por la construcción del diagrama, ya que las intersecciones se convierten en vértice.

Gracias a la propiedad descrita es posible aplicar la fórmula de Euler al grafo asociado, siempre y cuando se agregué un vértice en el infinito:

$$v + n = e + 1$$

Ya que cada vértice incide en al menos 3 aristas, y cada arista tiene exactamente 2 extremos, se tiene que

$$2e \geq 3(v + 1)$$

De donde se obtiene que:

$$v \leq 2n - 5 \qquad e \leq 3n - 6$$

En donde v es el número de vértices, n el número de puntos en S y e el número de aristas.

1.0.2. Diagramas de Voronoi presentes en nuestro entorno

En la naturaleza, existen muchos ejemplos de patrones que pueden ser descritos mediante el uso de diagramas de Voronoi. Por ejemplo, la distribución de semillas en una planta, la distribución de células en un tejido vegetal, la distribución de pozos de petróleo en un campo petrolífero, la distribución de estrellas en una galaxia, entre otros.

A continuación, se presentarán algunas imágenes de los ejemplos mencionados. Estas imágenes proporcionarán una representación visual del concepto y ayudarán a reforzar los puntos clave de este.

1. Pelaje de jirafa.

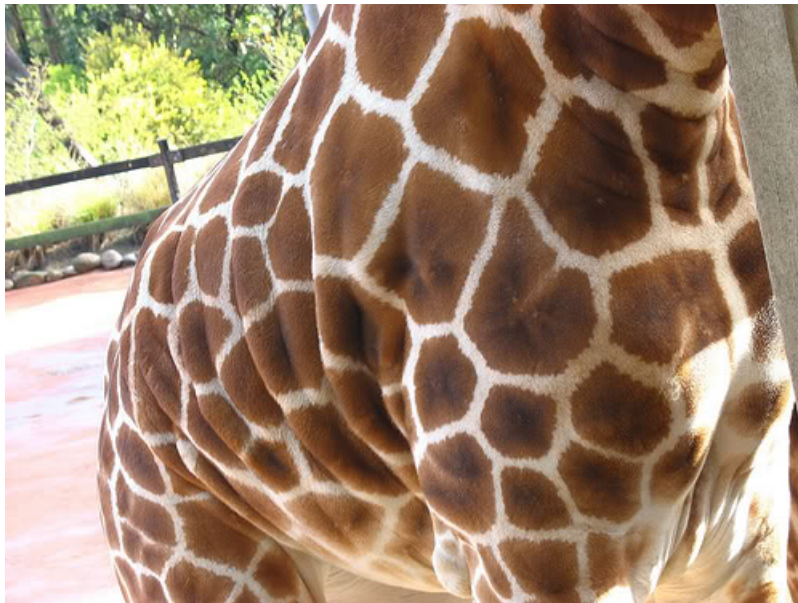


Figura 1.16: ¿Algunos pelos más gordotes que el resto? [10]

2. Grietas en el suelo de un desierto.

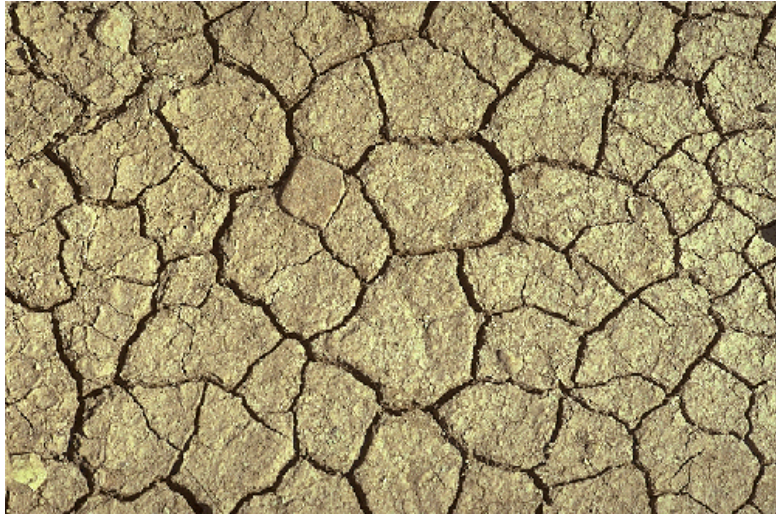


Figura 1.17: ¿Los últimos puntos con algo de humedad? [10]

3. Superficie del sol.

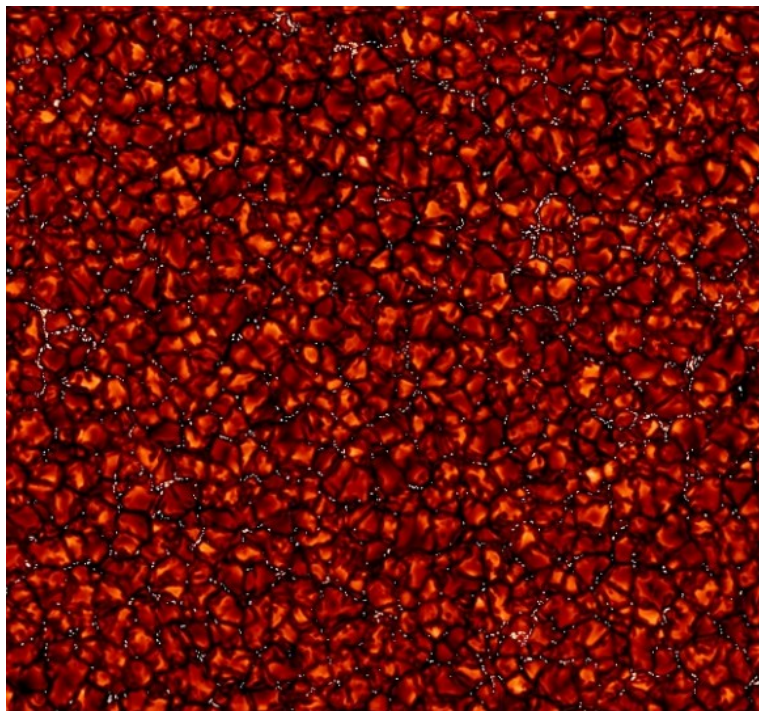


Figura 1.18: ¿Los puntos más calientes de la superficie del Sol?[10]

4. Últimos pedazos de hielo en una montaña,



Figura 1.19: ¿O el último trozo de hielo?[10]

5. Superficie de hoja



Figura 1.20: Distribución de células en un tejido vegetal [10]

Capítulo 2

Triangulación de Delaunay

Esta sección pretende definir la triangulación de Delaunay, describir su construcción, mostrar las características que nos proporciona y de esta forma introducir algunos algoritmos que pueden emplearse para la construcción de programas computacionales similares a los utilizados en este proyecto.

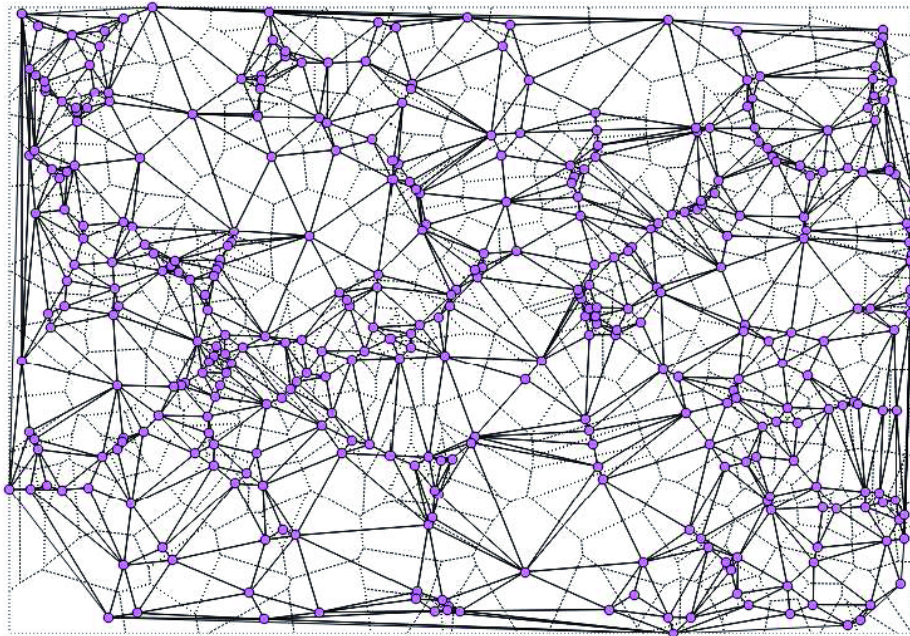


Figura 2.1: Aplicaciones de QGIS en la ordenación de montes. [5]

Dos puntos de S son vecinos si comparten un borde en el diagrama de Voronoi de S . Se obtiene un grafo de proximidad conectando cada punto a sus vecinos de Voronoi.

Definición 3. *El grafo de proximidad que se obtiene de un diagrama de Voronoi se llama grafo de Delaunay o triangulación de Delaunay. El grafo de Delaunay es el dual rectilíneo del grafo o diagrama de Voronoi.*

La dualidad del Diagrama de Voronoi y la Triangulación de Delaunay es una relación matemática entre estos dos conceptos geométricos, donde cada uno de ellos puede ser transformado en el otro.

Los vértices de los triángulos en la triangulación de Delaunay corresponden a los puntos en S que construyen el diagrama de Voronoi, y los centros de los círculos circunscritos a los triángulos en la triangulación de Delaunay corresponden a los puntos de corte en el diagrama de Voronoi.

La triangulación de Delaunay o red triangular consiste en la construcción de un grafo planar³ que tenga como vértices los puntos pertenecientes al conjunto S .

De forma independiente al diagrama de Voronoi se puede definir a la triangulación como:

Definición 4. *La triangulación de Delaunay $TD(S)$ se obtiene conectando con un segmento de línea dos puntos distintos p y q de S , tal que exista un círculo que pasa a través de p y q , pero no contiene ningún otro punto de S en su interior o límite. Las aristas de $TD(S)$ se denominan aristas de Delaunay.*

³Un grafo planar es aquel en el cual ninguna arista se cruza con otra.

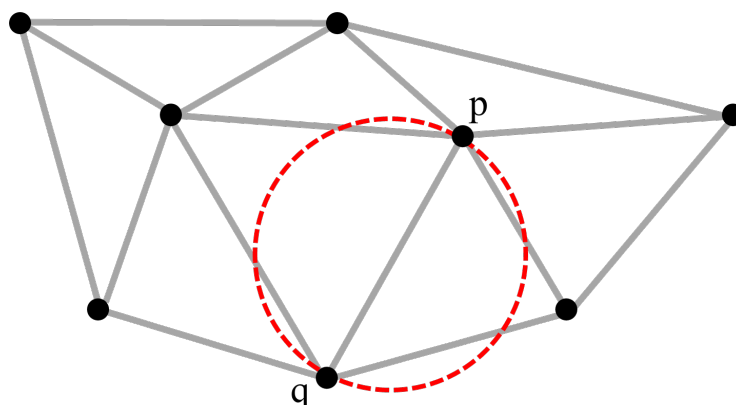


Figura 2.2: Triangulación de Delaunay en conjunto de 8 puntos

Estas dos definiciones son equivalentes, esto se puede comprobar utilizando la segunda propiedad del diagrama de Voronoi descrita en el capítulo anterior, esta nos dice que de existir un círculo que pasa por exactamente dos puntos de conjunto S entre estos existirá un borde de Voronoi, lo que es igual a decir que estos dos puntos son vecinos.

2.0.1. Construcción de la red triangular

La red triangular inicia dibujando los Bordes de Delaunay, esencialmente estos son líneas rectas que conectan dos puntos p y q de S , siempre y cuando las Regiones de Voronoi asociadas a estos puntos V_p y V_q compartan una arista.

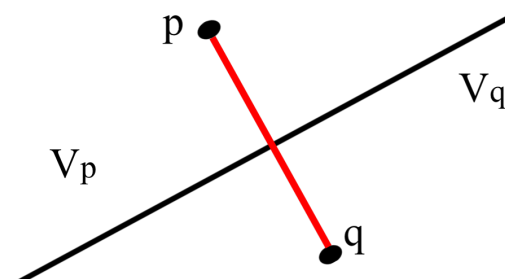


Figura 2.3: Borde de Delaunay pq

Existen casos en los que el Borde de Delaunay intersecará la arista que ambas regiones comparten como se muestra en la figura 2.4, sin embargo, en los casos en los que esto no ocurre se “endereza” la línea que une p y q como se muestra en las siguientes figuras.

Para comenzar se tiene dos puntos distintos p y q en S , los cuales comparten un borde de Voronoi.

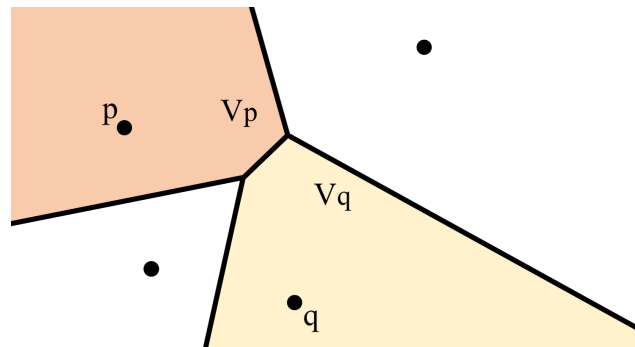


Figura 2.4: Regiones de Voronoi adyacentes

Si trazamos una línea que una los puntos p y q pasando por el borde de Voronoi que comparten obtendríamos una curva como muestra la siguiente gráfica.

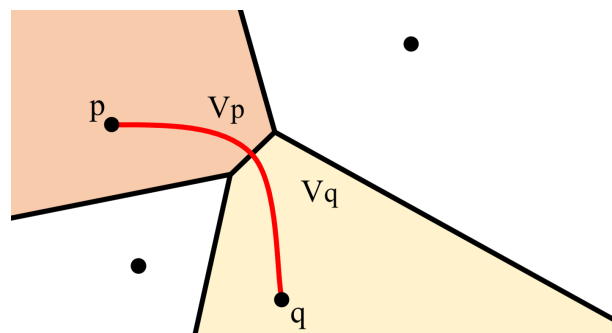


Figura 2.5: Curva que une a p y q

La curva que se ha generado no es útil para poder construir

la triangulación es por eso que se la endereza, tomando directamente el segmento $\bar{p}q$ sin importar que no interseque al borde de Voronoi entre V_p y V_q

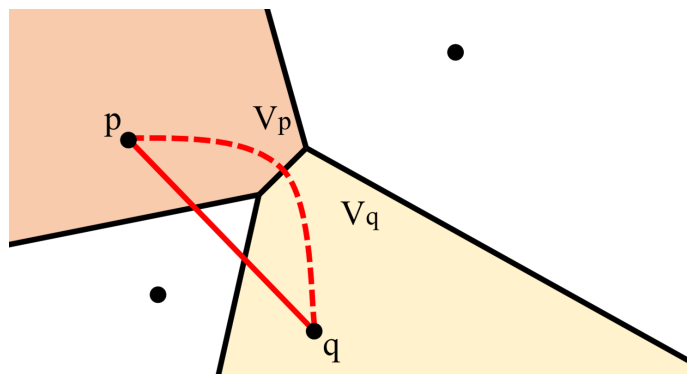


Figura 2.6: Curva que une a p y q

En ningún caso los bordes que se han construido van a intersectar entre sí.

Teorema 2.0.1. *Dado un Diagrama de Voronoi generado por un conjunto S de puntos y dado un segmento de la bisectriz de los puntos p y q de S denominado e . Se dice que e es un borde de Voronoi (arista) si y solo si para todo x en e , el círculo centrado en x que cruce p y q no contiene ningún otro punto de S en su interior.*

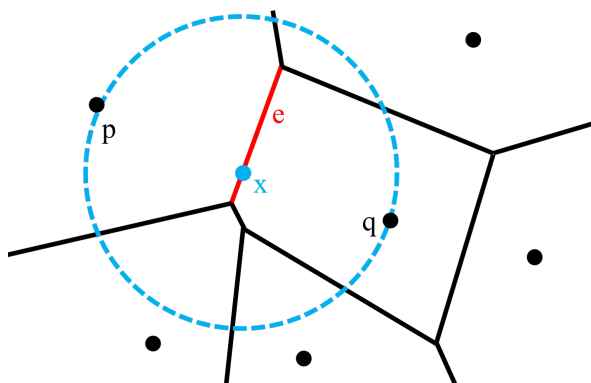


Figura 2.7: Círculo centrado en x

Demostración. Por definición cualquier punto x perteneciente a la recta bisectriz de p y q va a estar a la misma de p y de q . Por lo tanto, el círculo que se describe va a tener radio $\|p - x\|$.

Ahora si asumimos que e es un borde de Voronoi y contiene un x tal que en el círculo descrito existe un punto p_1 distinto de p y q que pertenece a S . Si esto ocurre se puede decir que la distancia $\|p_1 - x\|$ es menor al radio del círculo $\|p - x\|$, pero esto quiere decir que x pertenece por definición a la región de Voronoi respecto al punto p_1 .

Estos resultados generan una contradicción, ya que un punto interno de una región de Voronoi no puede pertenecer a un borde de Voronoi y por tanto e no es un borde de Voronoi. ■

Lema 2.0.2. *Si A y B son dos círculos con cuerdas que se cruzan. Entonces al menos un extremo de una de las cuerdas de los círculos esta estrictamente en el interior del otro círculo.*

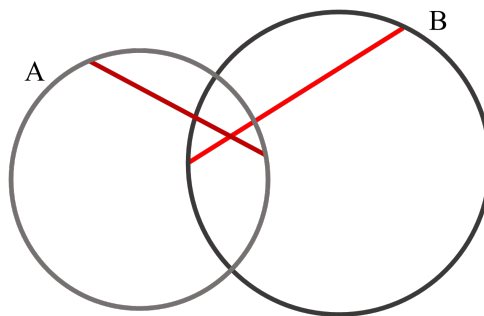


Figura 2.8: Círculos con cuerdas que se intersecan

Demostración. Dados de círculos C_1 de radio r_1 y C_2 de radio r_2 con cuerdas l_1 y l_2 respectivamente, asumimos que l_1 y l_2 se intersecan, pero ninguno de los extremos de l_1 es un punto interno en C_2 y que ninguno de los extremos de l_2 es un punto interno de C_1 .

Se sabe que la longitud máxima de una cuerda es dos veces el radio del círculo que la contiene, por lo tanto, se sabe que $l_1 \leq 2r_1$ y $l_2 \leq 2r_2$.

Ya que existe una intersección para que ningún extremo este dentro de ningún círculo se debería cumplir que: $l_1 > r_2$ y que $l_2 > r_1$. Sin embargo esto provoca una contradicción, ya que si $l_1 > r_2$ entonces $l_1 > l_2$ y si $l_2 > r_1$ entonces $l_2 > l_1$. Por lo tanto, al menos un extremo de las cuerdas de un círculo debe ser un punto interno del otro círculo. ■

Mediante el teorema y el lema previos podemos hacer evidente que este grafo es planar, con una demostración sencilla.

Teorema 2.0.3. *Ninguno de los bordes (aristas) pertenecientes a una Triangulación de Delaunay van a intersectarse.*

Demostración. Se asume que dos Bordes de Delaunay p_1p_2 y p_3p_4 se intersecan, por el Teorema 2.1 se sabe que existe un punto x en el Borde de Voronoi (arista) entre p_1 y p_2 tal que el círculo C_x centrado en x que pasa por p_1 y p_2 está vacío.

De manera similar existe un círculo C_y vacío centrado en y basado en los puntos p_3 y p_4 . Sin embargo, el Lema 2.2 implica que en alguno de los círculos C_x o C_y no está vacío. Esto es una contradicción. ■

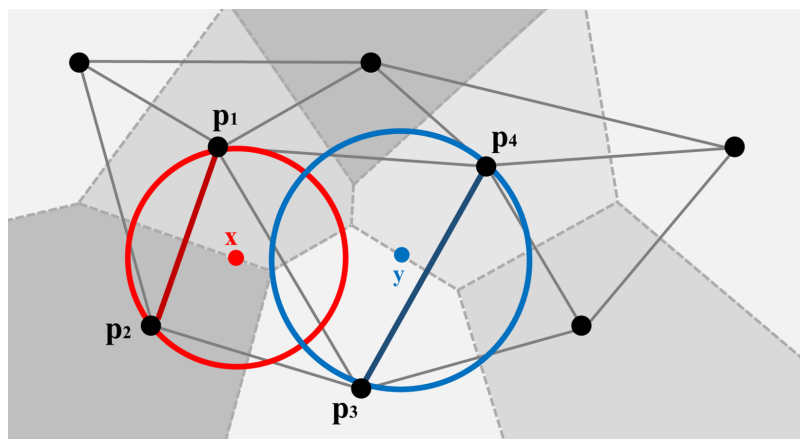


Figura 2.9: Prueba de los círculos

Una vez que todos los Bordes de Delaunay se han construido obtenemos el grafo planar de Delaunay, este grafo es la triangulación sobre el Diagrama de Voronoi como se muestra en la figura 2.10.

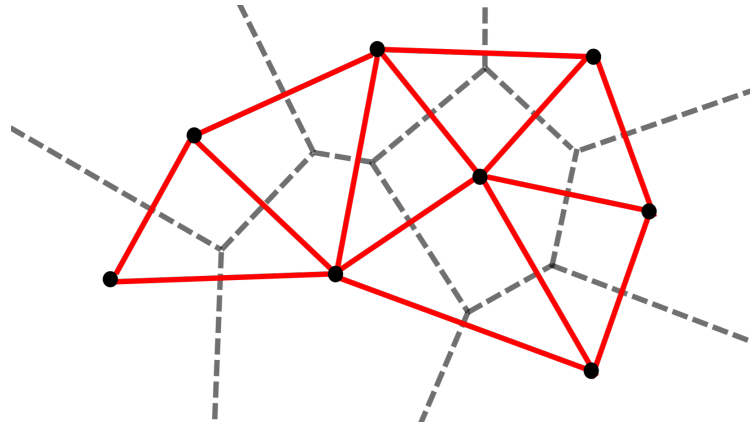


Figura 2.10: Triangulación de Delaunay

La dualidad entre las celdas de Voronoi y los vértices de la triangulación es bastante clara: cada vértice de la triangulación de Delaunay es un punto en el diagrama de Voronoi que se asocia con su celda de Voronoi [13].

2.0.2. Propiedades de la Triangulación de Delaunay

En esta sección se listan algunas de las propiedades que se pueden encontrar en la Triangulación de Delaunay en combinación con el Diagrama de Voronoi.

1. Las aristas de la triangulación obtenida no se intersecan entre sí. La demostración de esta propiedad está en conjunto con el Teorema 2.0.3
2. La triangulación es correcta si no hay 4 puntos co-circulares. Esta propiedad en realidad es una forma alternativa de construir y definir la Triangulación de Voronoi [15].

3. El “contorno” del grafo es la envolvente convexa de del conjunto de puntos S .

Este resultado está directamente relacionado con la dualidad de conceptos geométricos, que existe en el Diagrama de Voronoi y la Triangulación de Delaunay.

Demostración. En la sección de propiedad del Diagrama de Voronoi propiedad 3, se dice que un punto p de S pertenece a la envolvente convexa cuando su región V_p no está acotada, por la dualidad que se mencionó, se sabe que el contorno de la triangulación está formado por los segmentos $\bar{p}q$ que intersecan bisectrices no acotadas. ■

4. Existe un círculo que pasa por los puntos $p_i, p_j \in S$ que no contiene otros puntos de S , si y solo si, $\bar{p}_j\bar{p}_i$ es una arista de la triangulación.

Esto es un resultado directo de la Propiedad 1 del Diagrama de Voronoi en conjunto con la definición de borde de Delaunay.

5. Si el punto $p_j \in S$ es el más cercano al punto $p_i \in S$, entonces, $\bar{p}_j\bar{p}_i$ es una arista de la triangulación.

Demostración. Se conoce que p_j es el punto en S más cercano a p_i , si y solo si, el círculo centrado en p_i con radio $d(p_i, p_j)$ no contiene otros puntos de S . Si esto ocurre el círculo centrado en el punto medio del segmento $p_i\bar{p}_j$ con radio $d(p_i, p_j)/2$ no contiene otros puntos de S , lo que significa, por la Propiedad 1 del Diagrama de Voronoi, que el punto medio del segmento $p_i\bar{p}_j$ pertenece a una arista de Voronoi. Esto finalmente convierte, por definición, al segmento $p_i\bar{p}_j$ en un borde de Delaunay. ■

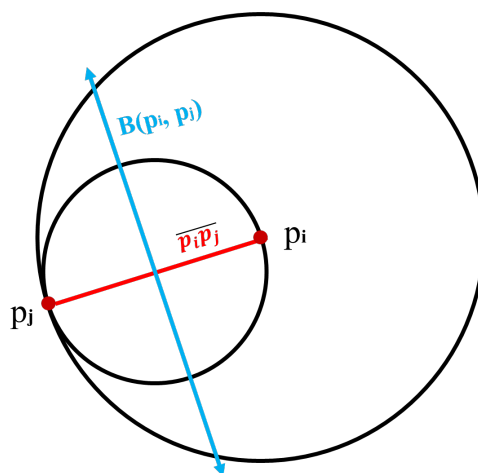


Figura 2.11: Círculos para Demostración

6. La circunferencia circunscrita en los puntos $p_i, p_j, p_k \in S$ no contiene ningún punto de S , si y solo si, $\triangle p_i p_j p_k$ es un triángulo de Delaunay. Esta es la definición de Triángulo de Delaunay.

Si desea profundizar en el tema, hay varias fuentes de información disponibles que se mencionan en las referencias [2], [6] o [8], mismas que tratan estos temas desde distintos puntos de vista.

Ya habiendo descrito la triangulación de Delaunay y la relación que guarda con la diagramación de Voronoi, además, sus propiedades y métodos de construcción, se puede continuar con la explicación de algunos algoritmos simples junto a su pseudocódigo. Si bien este proyecto no trata directamente de la programación de estos, tener presentes las ideas fundamentales de los algoritmos permitirá que tengamos claro el funcionamiento de los programas utilizados para la aplicación de la triangulación y diagramación expuestas.

2.0.3. Algoritmos para la construcción

Algoritmo Naive

El Algoritmo Naive está diseñado para identificar los triángulos que resultan de la triangulación de Delaunay en un conjunto de puntos S .

Este consiste en analizar por separado cada combinación de tres puntos en S , primero definiendo si existe o no un círculo circunscrito, luego verificando que no existen puntos dentro de este; ya que de ser así, el triángulo, formado por los puntos analizados, pertenece a la triangulación de Delaunay.

Para esto se inicia tomando como parámetro el conjunto de puntos S . Se crea un primer loop en el cual se va a recorrer cada punto del conjunto S , para cada punto que se tome se hace un nuevo loop que va a atravesar los puntos anteriores al mismo y se crea un último loop con la misma definición al segundo loop. Esta serie de loops se entiende como el recorrido por todas las combinaciones de tres puntos distintos en S .

Ahora para cada trío de puntos se hace una validación denominada círculo circunscrito, en esta parte del código se verifica si existe un círculo que pase por los tres puntos que se escogió, de ser ese el caso se asume que el triángulo formado por estos puntos es un triángulo de Voronoi.

Sin embargo, el programa debe hacer una última validación, con un nuevo loop se toma los puntos distintos de los tres iniciales y se verifica que la distancia desde el centro del círculo circunscrito al punto sea mayor que el radio del círculo, de no ser mayor el punto estaría dentro del círculo circunscrito el triángulo formado por los tres puntos iniciales no es un triángulo de Voronoi.

```

Delaunay ( $\{p_1, \dots, p_n\}$ )
  > for  $i \in [1, n]$ 
    >>for  $j \in [1, i]$ 
      >>>for  $k \in [1, j]$ 
         $(c, r) \leftarrow \text{Circunscrito}(p_i, p_j, p_k)$ 
         $\_esTriangulo \leftarrow \text{true}$ 
         $\_for\ l \in [1, k]$ 
          if( $\|p_l - c\| < r$ )  $esTriangulo \leftarrow \text{false}$ 
         $\_if(esTriangulo)$  Salida( $p_i, p_j, p_k$ )

```

Figura 2.12: Pseudo Código Algoritmo Naive

Algoritmo de Fortune

El algoritmo de Fortune tiene como fin la construcción del Diagrama de Voronoi. Está basado en una línea que “barre” el plano en el cual están los puntos del conjunto S , cuando la línea pasa por un punto, el límite de la región asociada a este punto, el cual de momento será una parábola, crece hasta chocar con otro límite, generando así las regiones del diagrama [9].

Para entender de donde nace la idea del funcionamiento de este algoritmo se debe definir los conos asociados a los puntos del conjunto S y explicar cómo partiendo de estos se puede visualizar el diagrama.

Conos y Diagrama de Voronoi En principio se puede pensar en generar el Diagrama de Voronoi tomando círculos centrados en los puntos de S e incrementando su radio hasta notar que regiones se superponen.

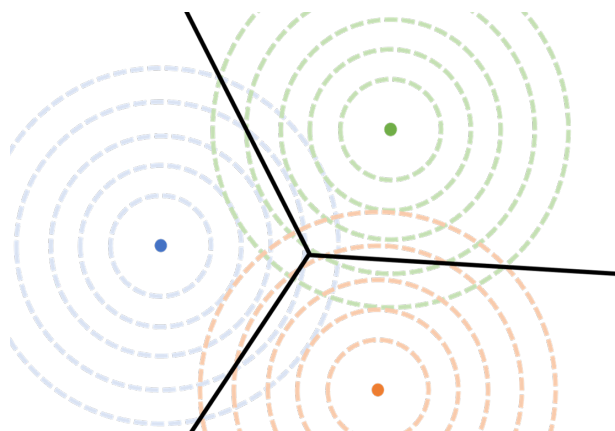


Figura 2.13: Superposición de círculos

Para iniciar la construcción de los conos asociados a los puntos p de S , se los define de manera formal como la superficie que cumple con la siguiente ecuación:

$$z^2 = \frac{(x - p_1)^2}{2} + \frac{(z - p_2)^2}{2}$$

Donde p es un punto en S igual a $p = (p_1, p_2, 0)$.

Partiendo de esta definición se obtiene un cono como el de la figura 2.14.

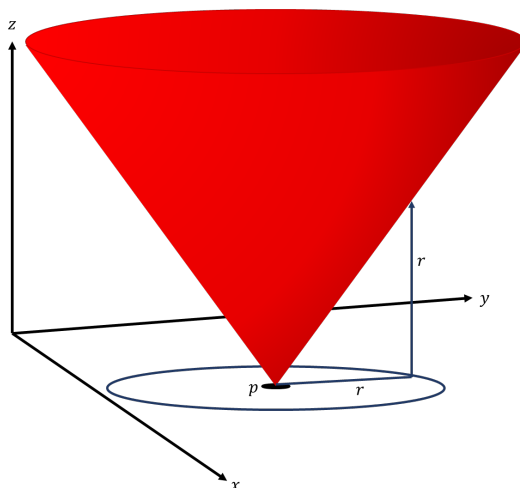


Figura 2.14: Cono asociado a p

Ahora para construir los conos, se puede decir que los círculos de radio r centrados en $p \in S$ que se muestran en el plano como la figura 2.13, son la proyección de la intersección del plano $z = r$ con un cono centrado en p .

Nótese que no es necesario tener los círculos para definir el cono asociado a p .

Una vez “creados” los conos asociados a los puntos se puede observar desde abajo en dirección al eje z como los conos han logrado dividir en regiones al plano xy .

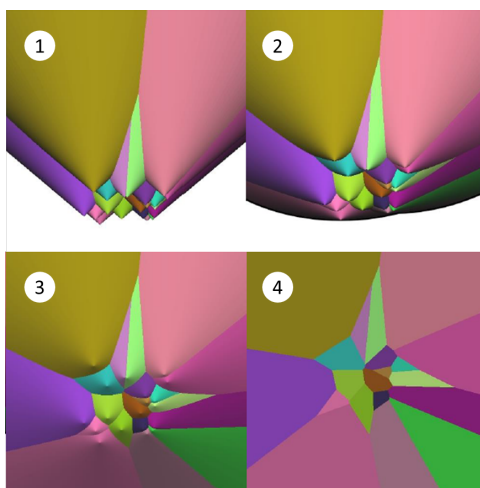


Figura 2.15: Conos-Vista Inferior

Método de construcción de la triangulación Se inicia definiendo una recta $y = y_0$ en donde $y_0 \in \mathbb{R}$ la cual va a recorrer el plano. Para generar el diagrama se analiza cada punto detrás de la recta y la distancia respecto a la misma.

Luego, se define una región asociada a $p \in S$ la cual, en términos simples, debe cumplir con que sus puntos estén más cerca de p que de la línea $y = y_0$; siendo el límite de la región el grupo de puntos que tienen la misma distancia al punto y a la recta.

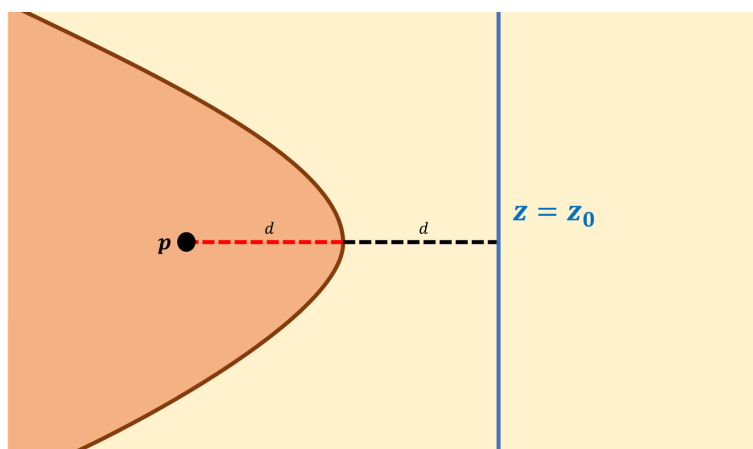


Figura 2.16: Region punto-recta

Entonces la región estaría definida por:

$$VR = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (y - y_0)^2 > d(p, (x, y))^2\}$$

Por tanto, los puntos del límite cumplen con:

$$(y - y_0)^2 = d(p, (x, y))^2$$

Ahora para mostrar la conexión entre esta región y los conos asociados a los puntos definimos el plano P como $z = y - y_0$.

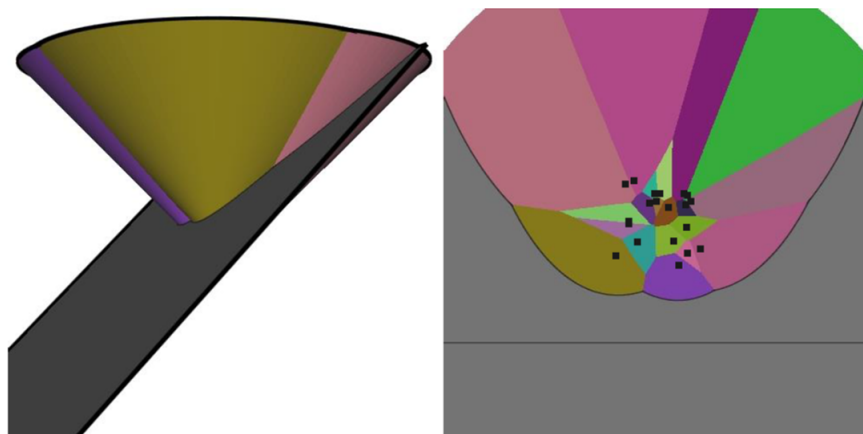


Figura 2.17: Plano recorriendo conos

Esto permite que los puntos del límite (x, y) en conjunto con la coordenada z del plano p definida antes, formen un elemento

de tres dimensiones, que pertenece al cono centrado en el punto p .

Tomando en cuenta lo anterior, se puede notar que el paso de un plano P , que forma un ángulo de 45° con el plano xy , por los conos visto desde abajo (en dirección al eje z) es exactamente lo que ocurre cuando la recta atraviesa el plano en donde se encuentran los puntos, como se muestra en la figura 2.17.

En conclusión, el algoritmo toma las proyecciones de la intersección de los conos asociados a los puntos con un plano (\parallel a x y 45° con el plano xy); a medida que este plano recorre los conos las proyecciones cambian; este procedimiento termina cuando el plano ha atravesado todos los conos.

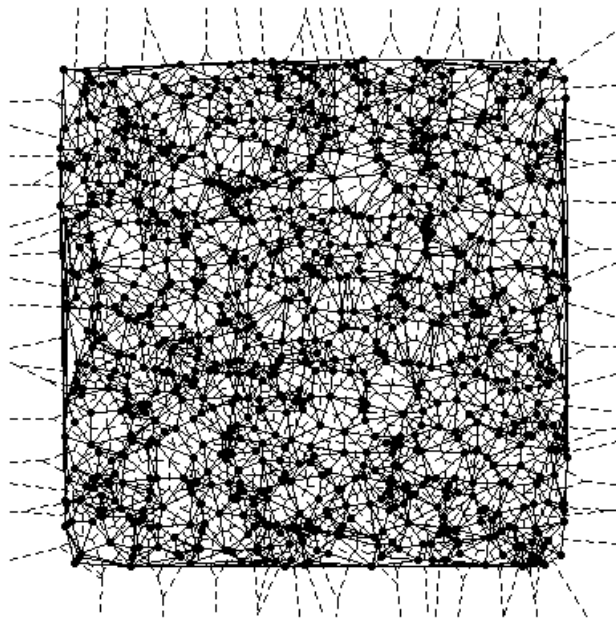


Figura 2.18: Triangulación de Delaunay con 1000 puntos.

La triangularización de Delaunay es esencial para la geometría computacional y la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (PDE) debido a que proporciona una malla triangular equilibrada y regular que divide el espacio en regiones simétri-

cas. Esta malla triangular se utiliza como base para la discretización del espacio en el contexto de la resolución numérica de PDE. La triangularización de Delaunay asegura que la malla triangular cumpla con ciertas propiedades de equilibrio, lo que resulta en una solución más precisa y estable. Además, las características de equilibrio y regularidad de la malla triangular permiten una mayor eficiencia en la resolución numérica de PDE y una mayor robustez frente a errores numéricos. En resumen, la triangularización de Delaunay es fundamental para la geometría computacional y la resolución de PDE debido a que proporciona una malla de discretización precisa y estable para la resolución numérica de estas ecuaciones.

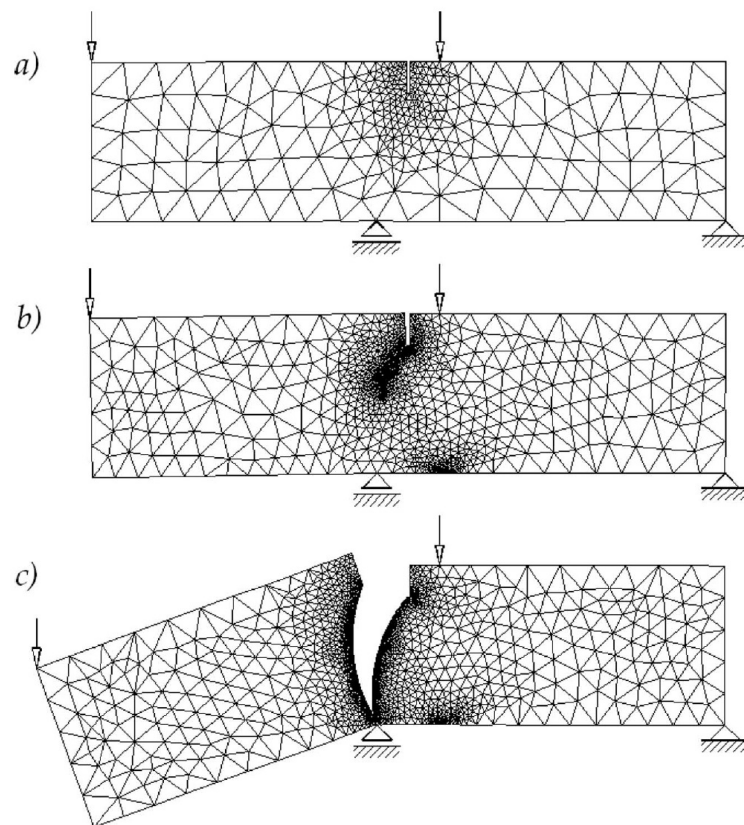


Figura 2.19: Generación de malla adaptativa en el problema evolutivo de la propagación de grietas en un material cohesivo.[20]

El último caso se trata del desafío evolutivo de la propagación de grietas en un material cohesionado, específicamente los cuatro experimentos de corte puntual propuestos por Bocca [3], que hoy en día es un punto de referencia en la mecánica de la fractura.

Capítulo 3

Aplicación

En este trabajo se trató de plasmar las formas en las que los conceptos geométricos presentados pueden ser aplicados. Es común encontrar trabajos como “Localized delaunay triangulation with application in ad hoc wireless networks” [14] en los que se relaciona la triangulación con la localización geográfica o artículos como “A fast Voronoi-diagram algorithm with applications to geographical optimization problems” [12], entre otros [18] en los que se aplica la diagramación de Voronoi para analizar casos de optimización.

Si bien estos métodos no son iguales guardan una relación gráfica y de construcción como se explicó previamente, esto permite comparar la forma en la que estos se utilizaron. Por un lado, se usó el diagrama de Voronoi para crear mapas de los cuales se pueda hacer conjeturas sobre la distribución de puntos de interés en una región (ej. Ciudad, superficie tridimensional); a la vez se creó la triangulación de Delaunay en este mapa con el fin de mostrar la relación gráfica con el diagrama, dejando abierta la posibilidad de darle un uso en el área de geolocalización.

Para ejemplificar el amplio campo de aplicación y la funcionalidad del Diagrama de Voronoi y la Triangulación de Delaunay se realizaron tres aplicaciones específicas; la primera relacionada

con localización geográfica, la segunda con el análisis arqueológico de una escultura antropomorfa y por último el algoritmo de K-means.

3.1. Unidades de Policía Comunitaria en Quito

La motivación principal de esta aplicación fue, como se dijo al inicio de la sección, encontrar puntos de interés dentro de una región, para esto se tomó en cuenta la accesibilidad a los datos y opciones que dieran pie a futuras interpretaciones respecto a optimización de recursos.

Por la enorme cantidad de puntos de interés como hospitales, banco, escuelas, etc. dentro de una ciudad, era necesario escoger un conjunto de puntos más específico para lograr crear una aplicación funcional [17]. Es así como se termina escogiendo a las Unidades de Policía Comunitaria dentro de Quito debido a la facilidad de ubicación de las mismas y el carácter público de la información relacionada con estos espacios, además de la evidente posibilidad de análisis en cuanto a optimización de recursos públicos.

En este caso el estudio consistió en la colocación de puntos de interés dentro de Quito, las regiones de Voronoi de los mismos y posteriormente la producción de la triangulación. Los puntos de interés fueron todas las Unidades de Policía Comunitaria registradas dentro de Quito. Esta información se obtuvo de la página web de la Defensoría Pública del Ecuador, en donde se puede obtener un listado de todas las UPC junto con su dirección registradas en el 2022 [7]. Usando Google Maps, una herramienta de búsqueda de ubicaciones que permite geolocalizar un punto

concreto, se creó un listado con las coordenadas de cada UPC.

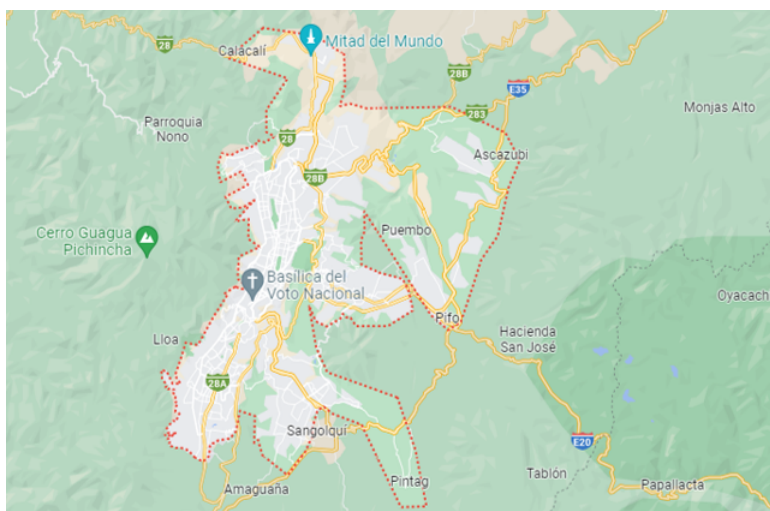


Figura 3.1: Polígono Aprox. Quito

Para delimitar el área en la que se trabajó, se aproximó el perímetro de Quito con un polígono, el cual estaba definido por vértices, que al igual que los UPC fueron ubicados por coordenadas obtenidas en Maps.

3.1.1. Método

Para la implementación del programa se utilizó Jupyter Notebook usando Python como lenguaje. Usando el módulo **Pandas** se cargó en arreglos **Numpy** los datos de las coordenadas del polígono de la ciudad y de las UPC previamente cargados en documentos de Excel.

Usando estos arreglos se crean dos objetos: usando el módulo **Shapely**⁴ se obtiene el polígono de la ciudad y con el módulo

⁴Shapely es un paquete de Python con licencia BSD para la manipulación y el análisis de objetos geométricos planos.

GeoPandas⁵ se cargan las coordenadas del arreglo de UPC a un nuevo arreglo con especificaciones geográficas que posteriormente se adaptarán al polígono de Quito.



Figura 3.2: Polígono y UPC's

Para confirmar visualmente que los UPC están dentro de la región de estudio, se graficó ambos usando el modulo **Matplotlib**. A fin de generar las regiones de Voronoi asociadas a los

⁵GeoPandas es un proyecto de código abierto para facilitar el trabajo con datos geoespaciales en python. GeoPandas amplía los tipos de datos utilizados por pandas para permitir operaciones espaciales en tipos geométricos. Las operaciones geométricas son realizadas por shapely.

puntos UPC se utilizó la función “voronoi_regions_from_coords” perteneciente al módulo **GeoVoronoi**⁶, la cual almacenará los polígonos asociados a cada punto.

Para visualizar las regiones dentro del polígono de ciudad se utilizó la función “plot_voronoi_polys_with_points_in_area” perteneciente al mismo módulo. Obteniendo la siguiente salida:

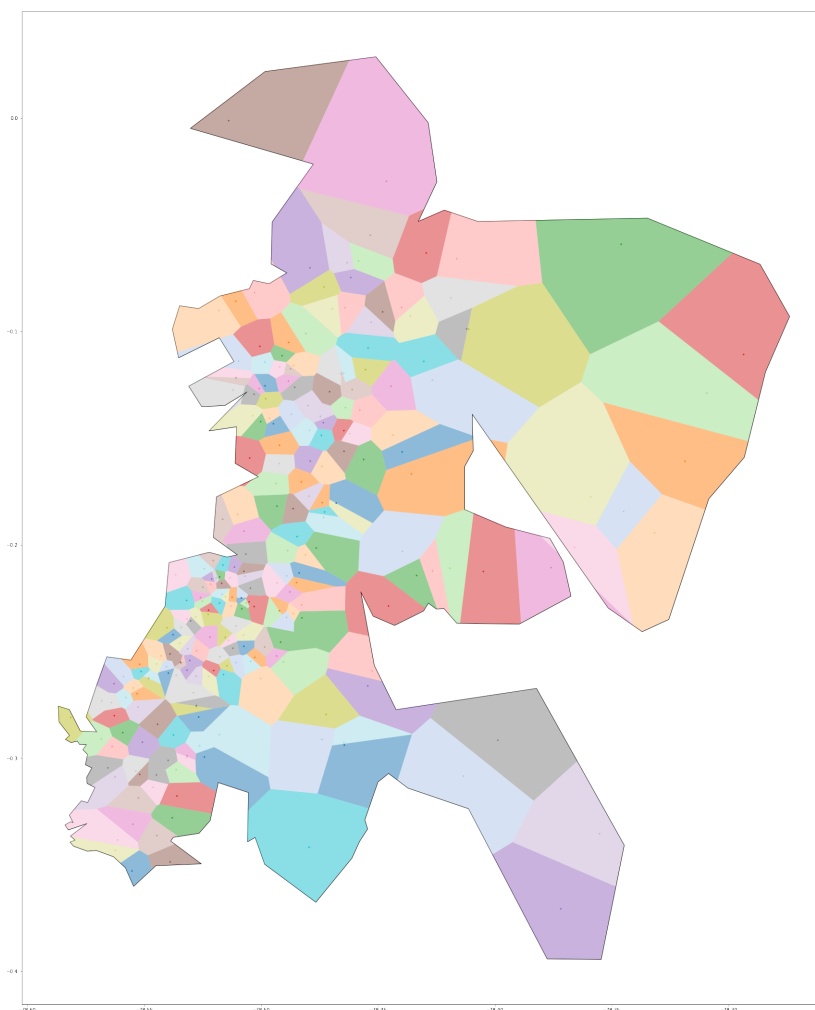


Figura 3.3: Diagrama de Voronoi UPC-Quito

Para obtener la triangulación correspondiente se utilizó el

⁶geovoronoi ayuda a generar regiones de Voronoi para datos geográficos, por ejemplo, coordenadas de universidades públicas en un determinado país. Este paquete le permite generar regiones Voronoi finitas dentro de cualquier forma poligonal circundante válida.

arreglo de coordenadas UPC en la función “Delaunay” perteneciente al módulo **Scipy.spatial**⁷.

Nuevamente graficamos el resultado de las aristas generadas por la función.

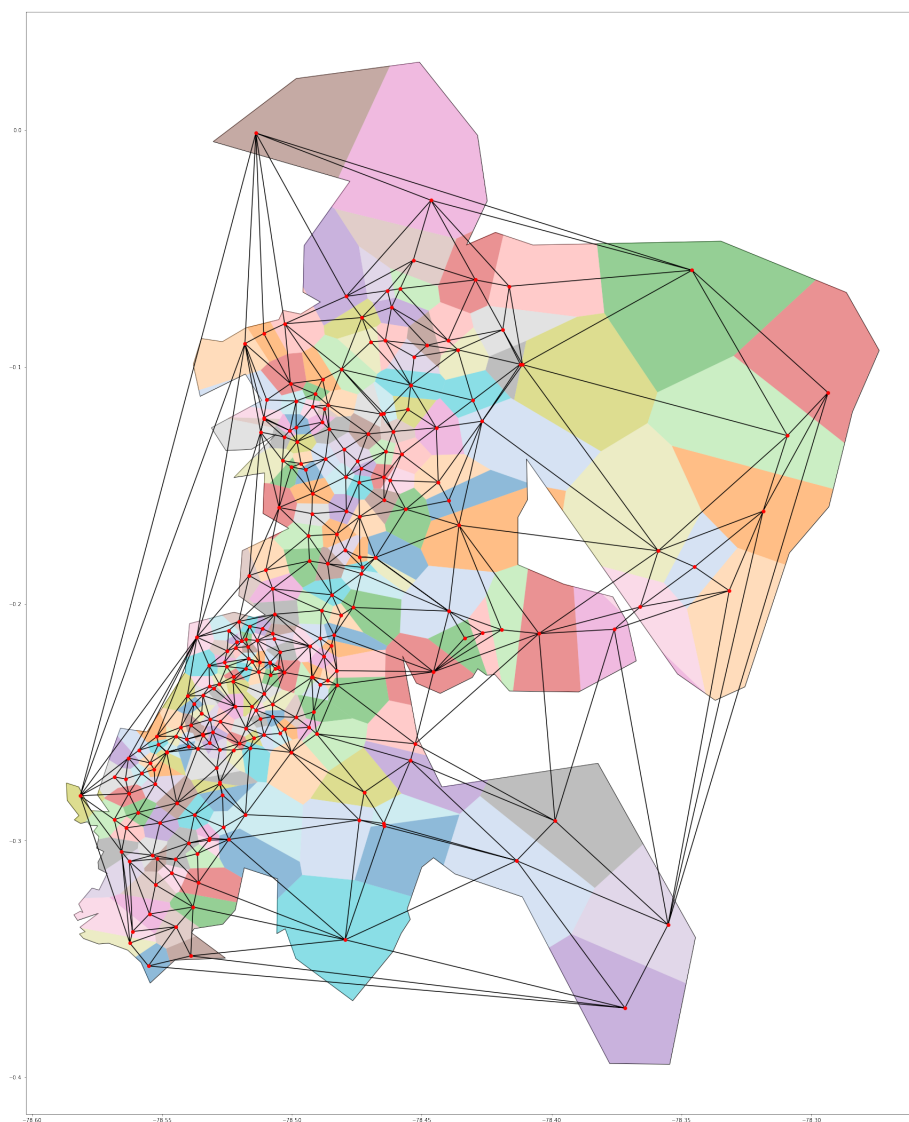


Figura 3.4: Diagrama de Voronoi y Triangulación Delaunay UPC-Quito

⁷Las herramientas ofrecidas en la sublibrería `scipy.spatial` son capaces de computar triangulaciones, diagramas Voronoi y envolventes convexas de conjuntos de puntos

Como resultado se obtuvo un mapa de Quito que muestra gráficamente el área que le corresponde atender a cada Unidad de Policía Comunitaria, además, se realizó una implementación de un programa que puede diagramar y triangular punto geográficos de cualquier carácter dentro de cualquier región.

Se puede concluir, en esta aplicación particular, que la aplicación geográfica de la triangulación de Delaunay y el diagrama de Voronoi en Quito respecto a sus Unidades de Policía facilitan la representación gráfica de áreas de funcionamiento y generan oportunidades en cuanto al análisis de distribución de UPC's y optimización de recursos en la ciudad de Quito.

3.1.2. Utilidad

A partir del mapa generado por el Diagrama de Voronoi es posible determinar las áreas que se deben a cada UPC, es decir que se puede segmentar de manera optima el área de responsabilidad de cada departamento de policía.

Para lograr obtener conclusiones del mapa, se debería trabajar en conjunto con profesionales en el área de administración pública, ya que a partir del mapa se puede analizar que tan favorables son las ubicaciones de las UPC's en términos de recursos económicos públicos, peligrosidad por zonas, población, etc.

En contraste la triangulación nos podría permitir asignar a una persona que requiera de los servicios policiales la mejor opción de UPC en cuanto a distancia. Es decir que a partir de la triangulación, se puede decir, si un punto pertenece o no a la región de Voronoi.

Partiendo de la triangulación obtenida se puede determinar en que triangulo de Delaunay se ubica la persona que contacta

a la policía, esto quiere decir que existen tres unidades policiales que podrían atender el llamado, la selección de la UPC que va a actuar dependerá de factores como la carga de trabajo y personal disponible.

3.2. Escultura Antropomorfa

En esta sección no se realizó ninguna implementación; sin embargo, se analizó el funcionamiento de algunas herramientas en el programa GigaMesh, el cual es un marco de software de código abierto para mostrar, procesar y visualizar mallas grandes que representan superficies 2D generalmente adquiridas con técnicas de escaneo 3D como Structure from Motion (SfM) o escaneo de luz estructurada (SLS).

Las herramientas estudiadas tienen que ver con el estudio de la simetría de una escultura; dentro del campo arqueológico este es importante, ya que este permite que se identifiquen patrones y características anatómicas de ciertos grupos humanos en caso de las esculturas más realistas, así mismo se puede identificar particularidades que permiten clasificar esculturas antropomorfas, pero no apegadas a la realidad.

3.2.1. Descripción Gráfica y Contexto de la Escultura

La escultura antropomorfa escogida para esta aplicación se describe como una obra artesanal prehispánica. Esta figura guarda relación con el estilo Manteño-Hualcavilca, más que nada como una pieza representativa y no ceremonial como los conocidos tronos manteños. En cuanto a material principal se reconoce claramente la piedra porosa.



Figura 3.5: Escultura de U Manteña por Ruben Ramirez C

Aun cuando existen varias similitudes respecto al estilo, al material y a la antigüedad de las sillas manteñas no se puede dar certeza del origen de esta escultura.

En la investigación “La cultura lítico manteño” de la Universidad Central del Ecuador [11] se pueden ver características que coinciden con la escultura estudiada, categorizándola como pieza de arte más que objeto ceremonial.

3.2.2. Método

Para completar el análisis de simetría de una escultura se necesita la creación de celdas de Voronoi en la superficie de la escultura basadas en puntos de interés, por ejemplo, celdas basadas en puntos ubicados en ojos, orejas, comisuras de la boca.

Primero, se generó un modelo tridimensional de una escultura de piedra, esta se obtuvo con ayuda del departamento de antropología específicamente el área de arqueología, para la creación

del modelo se utilizo **PolyCam**⁸.

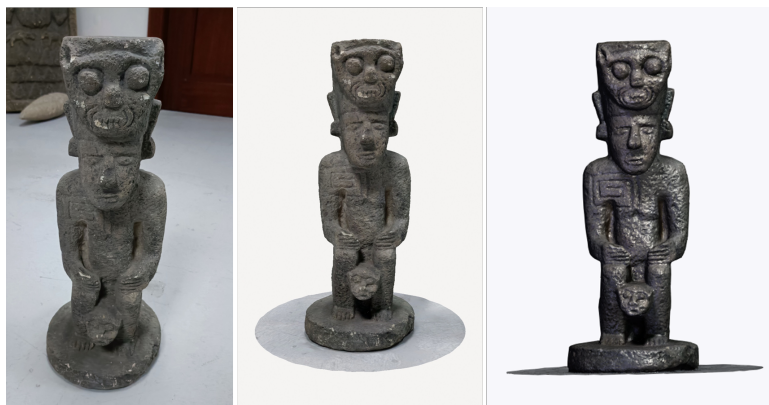


Figura 3.6: Creación Modelo 3D

Ya con el modelo cargado en GigaMesh se utilizó la función “PinPoint Multiple Vertices” para seleccionar los puntos de interés

En la figura 3.7 se puede observar los puntos que se escogieron como lugares de interés en la cara de la escultura.

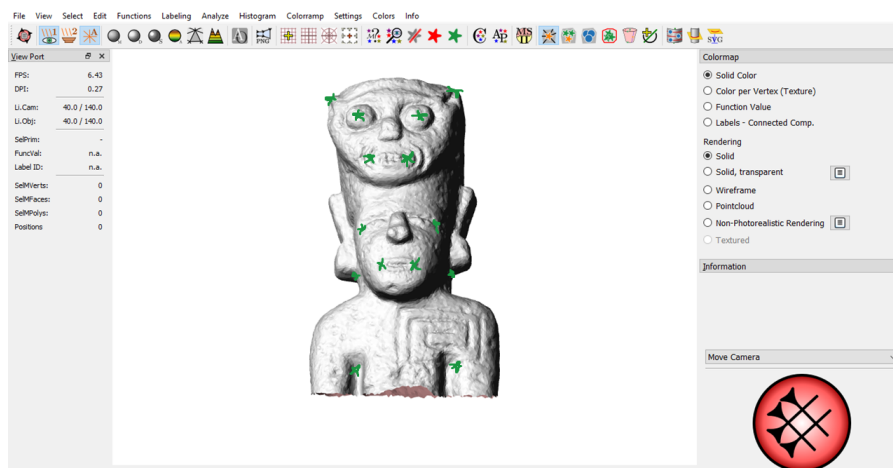


Figura 3.7: Selección de Vertices

⁸PolyCam es una aplicación móvil de escaneo 3D

Mientras que en la figura 3.8 podemos ver los puntos que se seleccionaron en el cuerpo de la escultura.

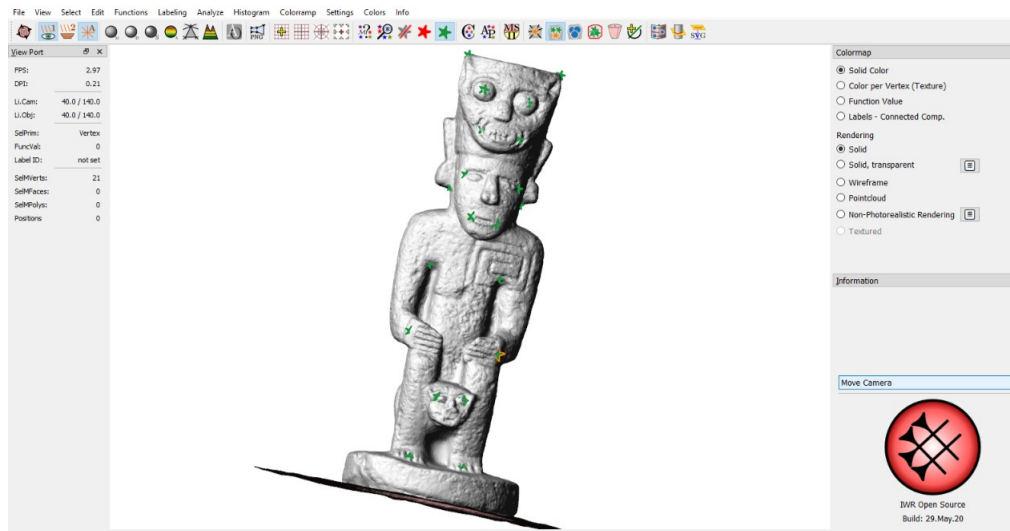


Figura 3.8: Selección de Vértices

Con los vértices seleccionados se pueden obtener las celdas de Voronoi asociadas a cada punto, este procedimiento se realiza mediante el calculo de la distancia geodésica de los puntos de la superficie respecto a los vértices seleccionados.

La distancia geodésica es el camino más corto entre dos puntos en una superficie curva, son el análogo de una línea recta en una superficie plana. Es una forma de mostrar la distancia en un elipsoide mientras esa distancia se proyecta sobre una superficie plana.

Usando la misma definición del diagrama de Voronoi pero ahora usando la distancia geodésica se puede obtener la siguiente imagen:

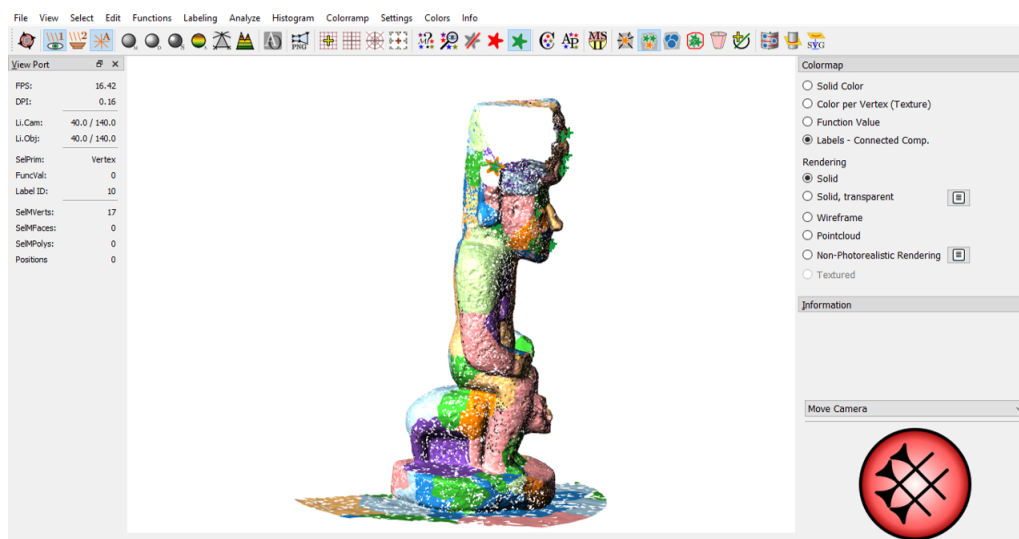


Figura 3.9: Resultado de la Diagramación

Como resultado se obtuvo un diagrama de color en la superficie de la escultura, en este caso se realizó una aplicación en el campo antropológico del diagrama de Voronoi; se puede concluir que mediante la diagramación tridimensional se puede generar oportunidades de análisis en cuanto a la simetría de la escultura y comparación con trabajos artesanales similares.

3.2.3. Utilidad

Como se mencionó antes la aplicación del diagrama de Voronoi en modelados tridimensionales es importante en para el análisis y clasificación de piezas arqueológicas, además de ser una herramienta que permite identificar características anatómicas de esculturas antropomorfas realistas.

Sin embargo, este no es su único uso dentro del modelado tridimensional, el mismo método puede ser usando para analizar simetría de estructuras arquitectónicas. Un ejemplo de esta aplicación es el artículo “Hacia un diseño arquitectónico repensado desde los diagramas de Voronoi” publicado en 2022; mismo

que utilizará este concepto geométrico para analizar diseños arquitectónicos.

Por último, es importante que el software usado en este caso usa triangulaciones para la reconstrucción de modelos 3D. Básicamente, el programa toma un grupo de puntos aleatorios sobre la superficie y genera una triangulación de Delaunay, ya que esta es la que provee de triángulos más regulares, así forma una superficie tridimensional aproximada a la figura real. Mientras más puntos tome el programa más “suave” será la superficie que se muestra. Esto permite a los programas calcular distancias aproximadas e incluso hacer impresiones 3D.

3.3. K-Means

En esta sección, se desarrolló un programa en R-studio para visualizar la agrupación de datos realizada por el algoritmo k-means utilizando un diagrama de Voronoi. El programa permite ver gráficamente cómo se asignan los puntos de datos a los diferentes clusters y cómo estos clusters se relacionan entre sí.

La implementación del diagrama de Voronoi en este programa proporciona una representación visual clara de la estructura de los clusters y de la distribución de los datos, lo que facilita la interpretación y análisis de los resultados del algoritmo k-means. Programas como este son una herramienta valiosa para la investigación en aprendizaje automático y agrupación de datos.

3.3.1. Relación de k-means y el Diagrama de Voronoi

K-means y el diagrama de Voronoi son conceptos relacionados con la creación de conglomerados a partir de datos usados en estadística y ciencia de datos.

K-means se refiere a un algoritmo para agrupar datos en k-conglomerados basados en su similitud. El algoritmo divide un conjunto de n puntos de datos en k -conglomerados, cada uno representado por su centroide (media de los puntos en el conglomerado).

Un diagrama de Voronoi es una partición de un plano en regiones basadas en la distancia a puntos en un subconjunto específico del plano. El diagrama de Voronoi de un conjunto de n puntos divide el plano en n regiones, cada una asociada con uno de los puntos.

En el contexto de k-means, el diagrama de Voronoi puede utilizarse para visualizar la partición de los puntos de datos en conglomerados basados en los centroides. El diagrama de Voronoi de los centroides define los límites de los conglomerados, con cada región del diagrama correspondiendo a uno de los k conglomerados.

3.3.2. Método

Se inicio generando un conjunto de datos bidimensionales aleatorios, y mostrándolos gráficamente sin ningún tipo de división

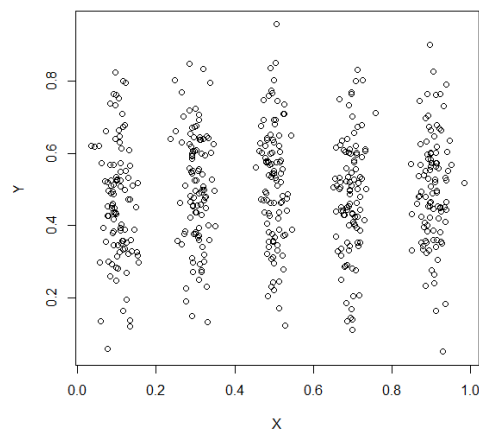


Figura 3.10: Conjunto de datos

A partir de estos datos el algoritmo k-means utiliza un enfoque iterativo para seleccionar las medias. En la primera iteración, se asignan medias aleatorias a cada uno de los k grupos. Luego, cada punto de datos es asignado al grupo cuya media es más cercana. A continuación, se calcula la nueva media de cada grupo, tomando en cuenta todos los puntos asignados a ese grupo. Este proceso se repite hasta que las medias ya no cambian o se alcanza un número máximo de iteraciones. Las medias finales son utilizadas como representación de cada grupo y los puntos de datos se agrupan en función de su cercanía a ellas.

Cuando se han obtenido las medias de cada grupo se puede hacer la representación gráfica de cada grupo con un diagrama de Voronoi.

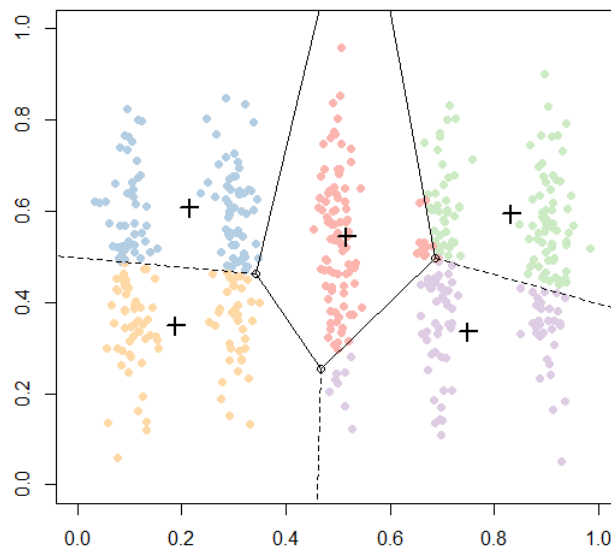


Figura 3.11: Representación gráfica de K-means

3.3.3. Utilidad

El algoritmo k-means es ampliamente utilizado en el análisis de datos para agrupar puntos similares en conglomerados o grupos. Esto es útil para comprender mejor la estructura subyacente de los datos y para identificar patrones y relaciones entre los puntos.

Además de agrupar puntos similares, k-means también se utiliza en la compresión de datos para reducir la dimensionalidad de los datos. El algoritmo puede comprimir grandes conjuntos de datos a una representación más compacta y fácil de manipular.

K-means es ampliamente utilizado en diversas industrias, como la banca, la salud, la publicidad y el marketing, para resolver problemas reales. Por ejemplo, en el sector bancario, puede utilizarse para identificar grupos de clientes similares en función de sus hábitos de gasto, mientras que en la publicidad, se puede utilizar para identificar patrones de comportamiento de los usuarios y para personalizar anuncios en función de sus intereses.

Capítulo 4

Conclusiones

El propósito de este trabajo de investigación fue descubrir y analizar las aplicaciones computacionales de los diagramas de Voronoi y las triangulaciones de Delaunay. Conceptos teóricos, matemáticos y geométricos de gran aplicación en diversos campos.

Para cumplir con este objetivo se tomó en cuenta dos casos de uso diferentes que demuestran lo versátil y adaptable de las aplicaciones existentes.

En el primero de estos proyectos, un análisis geográfico de la Policía Comunitaria de Quito usando Anaconda Navigator una poderosa herramienta computacional que trabaja con Python generando un programa que devuelve un mapa con el diagrama y la triangulación requeridos.

El segundo, es el análisis de visualizaciones, modelos y representaciones de obras arqueológicas escaneadas en 3D utilizando el software Gigamesh.

El tercero, la combinación de k-means y el diagrama de Voronoi; una técnica poderosa para la clasificación de datos y la segmentación de imágenes. K-means permite agrupar datos similares en clusters y asignar etiquetas a cada conglomerado,

mientras que el diagrama de Voronoi utiliza estos conglomerados para crear regiones que describen la relación espacial entre los datos. Juntos, estos métodos brindan una solución efectiva para muchos problemas de análisis de datos, especialmente en aplicaciones que requieren una comprensión visual de la distribución de los datos. Por lo tanto, es una herramienta valiosa para aquellos interesados en el análisis de datos y la visión artificial.

Luego de observar y estudiar las aplicaciones, se puede concluir que los diagramas de Voronoi y las triangulaciones de Delaunay tienen diversas aplicaciones que van desde los campos académico y científico hasta campos sociales, de seguridad y localización.

Como idea primordial se puede destacar como conceptos matemáticos abstractos pueden ser útiles en cualquier ámbito que sea necesario. Este proyecto nos permite ver que en estudios antropológicos complejos la matemática puede ser una herramienta muy útil e incluso en tópicos como la administración pública de recursos.

El aporte matemático implícito dentro de este trabajo es la explicación que se entrega de los conceptos matemáticos y geométricos, además las posibles aplicaciones que estos tienen dentro del campo de las matemáticas aplicadas y la computación.

Tras el análisis, se puede decir que este trabajo deja una puerta abierta para futuros trabajos en colaboración con áreas como la antropología, arquitectura, administración pública o investigación de operaciones. Se ha podido comprobar las variadas posibilidades de futuros trabajos partiendo de conceptos geométricos como los presentados previamente.

Bibliografía

- [1] Aurenhammer, F. (1991). Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 23(3), 345-405.
- [2] Aurenhammer, F., Klein, R., & Lee, D. T. (2013). *Voronoi diagrams and Delaunay triangulations*. World Scientific Publishing Company.
- [3] Bocca P, Carpinteri A, Valente S. Mixed mode fracture of concrete. *Int J Solids Struct* 1991;27:1139–53.
- [4] Boots, B., Sugihara, K., Chiu, S. N., & Okabe, A. (2009). *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*.
- [5] Carazo, Jovino & Álvarez-Álvarez, Pedro Garrote-Haigermoser, Juan. (2016). *Aplicaciones de QGIS en la ordenación de montes*.
- [6] Devadoss, S. L., & O'Rourke, J. (2011). *Discrete and computational geometry*. Princeton University Press.
- [7] Ecuador, D. P. (2022). Directorio Institucional Defensoría Pública [Data set]. En Directorio Institucional Enero 2022. https://www.defensoria.gob.ec/images/defensoria/pdfs/lotaip_2022/literal_b/b1_directorio_institucion_ene_2022.pdf
- [8] Edelsbrunner, H. (2001). *Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge University Press.

- [9] Fortune, S. (1995). Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. *Computing in Euclidean geometry*, 225-265.
- [10] Grima, C. (2011, 23 diciembre). Cada uno en su región y Voronoi en la de todos. *Naukas*. <https://naukas.com/2011/12/23/cada-uno-en-su-region-y-voronoi-en-la-de-todos/>
- [11] Guanoluisa Cedillo, F. P. (2015). *La cultura lítico manteño* (Master's thesis, Quito: UCE.).
- [12] Iri, M., Murota, K., & Ohya, T. (1984). A fast Voronoi-diagram algorithm with applications to geographical optimization problems. In *System modelling and optimization* (pp. 273-288). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [13] Joe, B., & Wang, C. A. (1993). Duality of constrained Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. *Algorithmica*, 9(2), 142-155.
- [14] Li, X. Y., Calinescu, G., Wan, P. J., & Wang, Y. (2003). Localized delaunay triangulation with application in ad hoc wireless networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 14(10), 1035-1047.
- [15] Mumm, M. (2004). Voronoi diagrams. *The Mathematics Enthusiast*, 1(2), 44-55.
- [16] Rippa, S. (1990). Minimal roughness property of the Delaunay triangulation. *Computer Aided Geometric Design*, 7(6), 489-497.
- [17] Rivière, P. (2017). The state of d3 Voronoi (2017). <https://visionscarto.net/the-state-of-d3-voronoi>
- [18] Rodríguez, N. A., & Reparaz, M. M. (2014, 24 abril). *Triangulaciones de Delaunay de alto orden en el terreno*

práctico de los sistemas de información geográfica. Universidad de Buenos Aires. Recuperado 26 de enero de 2023, de http://gestion.dc.uba.ar/media/academic/grade/thesis_reparaz.pdf

- [19] Rodriguez, U. M. (2016). Aplicación de la Geometría Computacional en la Reconstrucción 3D Basada en Diagramas de Voronoi (Doctoral dissertation, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla).
- [20] Secchi, S., & Simoni, L. (2003). An improved procedure for 2D unstructured Delaunay mesh generation. *Advances in Engineering Software*, 34(4), 217-234.