

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingeniería

**Agujeros de gusano atravesables: modos cuasinormales, movimiento geodésico y acreción esférica.**

**Alejandro Rueda Manosalvas**

**Física**

Trabajo de titulación presentado como requisito  
para la obtención del título de

Físico

14 de mayo de 2023

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Ciencias e Ingeniería**

**HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE FIN DE  
CARRERA**

**Agujeros de gusano atravesables: modos cuasinormales,  
movimiento geodésico y acreción esférica.**

**Alejandro Rueda Manosalvas**

Nombre del profesor, Título académico: Ernesto Contreras, PhD

14 de mayo de 2023

## © Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombres y apellidos: Alejandro Rueda Manosalvas

Código: 00207772

Cédula de Identidad: 1750257733

Lugar y fecha: Quito, 14 de mayo de 2023

## ACLARACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN

**Nota:** El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>

## UNPUBLISHED DOCUMENT

**Note:** The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>

# Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis padres y a mi familia por toda la ayuda y apoyo que siempre me han dado. Quiero agradecer a mis profesores por transmitir sus conocimientos acerca de los temas más interesantes que pueda haber. Especialmente agradezco a Ernesto Contreras y Roberto Avalos, de quienes he aprendido una cantidad gigante de cosas, no solo de física sino también del mundo; durante el tiempo trabajando con ellos los he llegado a considerar verdaderos mentores. Finalmente quiero agradecer a mis amigos: Ari, Bale, Mari, Mateo, Mile y Jose; a quienes conozco desde primer semestre y, por los últimos cinco años, han sido, a la vez, la fuente más grande de sensatez como de irracionalidad. También vale la pena mencionar a mis compañeros con los que he compartido toda clase de aventuras y desventuras resultantes de la experiencia estética de estudiar Física en la USFQ.

# Resumen

En este trabajo se construye una solución de agujero de gusano atravesable a partir de una función de *embedding* adecuada, asegurando que se cumpla la condición de *flaring-out*. La solución contiene parámetros libres que son reducidos a través del estudio de condiciones de aceptabilidad para un agujero de gusano atravesable. Se calcularon la cantidad de materia exótica requerida para la formación del agujero de gusano (*quantifier*) y los modos cuasinormales usando la aproximación WKB del 6<sup>to</sup> orden. Se calcularon las órbitas tipo tiempo y se analizó la deflexión de la luz. Se estudió la acreción esférica de un fluido de presión nula sobre el agujero de gusano. Se obtuvo que la solución requiere una cantidad finita de materia exótica y parece ser estable bajo perturbaciones escalares.

Palabras clave: *Agujero de gusano atravesable, Modos Cuasinormales, Movimiento geodésico, Acreción esférica*

# Abstract

In this work a traversable wormhole solution is constructed from a suitable embedding function. Ensuring the fulfillment of the flaring-out condition. The free parameters of the solution are reduced using acceptable conditions for a traversable wormholes. We calculated the quantifier for exotic matter and the quasinormal modes with the 6<sup>th</sup> order WKB approximation. We calculated orbits for massive particles and we studied light deflection. We studied spherical accretion of a pressureless fluid over the wormhole. We obtain that the solution can be sustained by a finite amount of exotic matter and seems to be stable under scalar perturbations.

Keywords: *Traversable Wormholes, Quasinormal modes, Geodesic motion, spherical accretion*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>12</b>
<b>2. Agujeros de Gusano Atravesables</b>	<b>15</b>
<b>3. Modos Cuasinormales</b>	<b>21</b>
<b>4. Aproximación WKB</b>	<b>24</b>
<b>5. Ecuaciones de movimiento geodésico</b>	<b>29</b>
5.1. Geodésicas de tipo tiempo . . . . .	31
5.2. Geodésicas nulas . . . . .	32
<b>6. Acreción esférica</b>	<b>35</b>

	8
<b>7. Resultados</b>	<b>38</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>
<b>A. Derivación de la ecuación 3.4</b>	<b>57</b>
<b>B. Condiciones de Energía</b>	<b>60</b>
B.1. Condición nula de energía . . . . .	61
B.2. Condición débil de energía . . . . .	61
B.3. Condición fuerte de energía . . . . .	62
B.4. Condición dominante de energía . . . . .	62

# Índice de figuras

4.1. Diagrama de la función $Q(x)$ . . . . .	25
7.1. Diagramas de <i>embedding</i> para $c = 0.4$ (primera fila, panel izquierdo), 0.8 (primera fila, panel derecho), 1.2 (segunda fila, panel izquierdo), 1.6 (segunda fila, panel derecho) y $d = 0.2$ (negro), $d = 0.6$ (azul), $d = 1.4$ (verde), $d = 1.8$ (rojo). . . . .	39
7.2. Gráficas de $b/r$ en función de $r/r_0$ para $c = 0.4$ (primera fila, panel izquierdo), 0.8 (primera fila, panel derecho), 1.2 (segunda fila, panel izquierdo), 1.6 (segunda fila, panel derecho) y $d = 0.2$ (negro), $d = 0.6$ (azul), $d = 1.4$ (verde), $d = 1.8$ (rojo). . . . .	40
7.3. Cuantificador como función de $d$ para $c = 0.4$ (primera fila, panel izquierdo), 0.8 (primera fila, panel derecho), 1.2 (segunda fila, panel izquierdo), 1.6 (segunda fila, panel derecho). . . . .	41

- 7.4. El potencial de la perturbación como función de la coordenada de tortuga  $x$  para  $l = 6$  (azul),  $l = 7$  (verde),  $l = 8$  (rojo). Donde se fijaron los parámetros  $c = 0.4$  (primera fila),  $c = 0.8$  (segunda fila),  $c = 1.2$  (tercera fila) y  $c = 1.6$  (cuarta fila). Para cada fila obtenemos  $d = 0.2$  (panel izquierdo),  $d = 0.6$  (panel central) y  $d = 1.4$  (panel derecho). . . . . 42
- 7.5. Parte imaginaria de la frecuencia como función de  $d$  para  $n = 0$  (negro),  $n = 1$  (azul),  $n = 2$  (verde),  $n = 3$  (rojo). Fijamos  $c = 0.4$  (primera fila),  $c = 0.8$  (segunda fila),  $c = 1.2$  (tercera fila) y  $c = 1.6$  (cuarta fila). Para cada fila  $l = 6$  (panel izquierdo),  $l = 7$  (panel central) y  $l = 8$  (panel derecho). . . . . 43
- 7.6. Parte real de la frecuencia como función de  $d$  para  $n = 0$  (negro),  $n = 1$  (azul),  $n = 2$  (verde),  $n = 3$  (rojo). Fijamos  $c = 0.4$  (primera fila),  $c = 0.8$  (segunda fila),  $c = 1.2$  (tercera fila) y  $c = 1.6$  (cuarta fila). Para cada fila  $l = 6$  (panel izquierdo),  $l = 7$  (panel central) y  $l = 8$  (panel derecho). . . . . 44
- 7.7. Potencial efectivo para orbitas de tipo tiempo como función de la coordenada de tortuga para los tres tipos de órbitas. Esto para  $c = 0.4$ ,  $d = 0.2$  (izquierda);  $c = 0.6$ ,  $d = 0.8$  (centro);  $c = 1.8$ ,  $d = 1.6$  (derecha). La curva verde es la energía de la partícula. . . . . 45

- 7.8. Geodésicas tipo tiempo para  $c = 0.4$ ,  $d = 0.2$  (izquierda);  $c = 0.6$ ,  $d = 0.8$  (derecha);  $c = 1.8$ ,  $d = 1.6$  (abajo), con  $\delta = 0.5$  y  $x_i = 5$ . Las líneas negras indican las órbitas para una partícula con  $L = L_c - \delta$ , líneas verdes con  $L = L_c + \delta$  y líneas azules con  $\delta = 0.5$ . . . . . 46
- 7.9. Trazado de rayos del agujero de gusano para  $c = 0.4$ ,  $d = 0.2$  (izquierda);  $c = 0.6$ ,  $d=0.8$  (derecha);  $c = 1.8$ ,  $d = 1.6$  (abajo). . . . . 47
- 7.10. Densidad de energía como función de la coordenada de tortuga para  $c=0.4$ ,  $d=0.2$  (azul);  $c=0.6$ ,  $d=0.8$  (negro);  $c=1.8$ ,  $d=1.6$  (verde). . . . . 47
- 7.11. Velocidad del fluido como función de la coordenada de tortuga para  $c=0.4$ ,  $d=0.2$  (azul);  $c=0.6$ ,  $d=0.8$  (negro);  $c=1.8$ ,  $d=1.6$  (verde). . . . . 48
- 7.12. Tasa de cambio de la masa del fluido como función de la coordenada de tortuga, para  $c=0.4$ ,  $d=0.2$  (azul);  $c=0.6$ ,  $d=0.8$  (negro);  $c=1.8$ ,  $d=1.6$  (verde). . . . . 49

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de agujeros de gusano empieza con Flamm [1], quien se dio cuenta que la solución de Schwarzschild representa un agujero de gusano. Más tarde, Einstein y Rosen obtuvieron una solución de agujero de gusano conocido como puente de Einstein-Rosen [2]. Sin embargo, hay varios factores que hacen que un humano no sea capaz de atravesar este tipo de agujeros de gusano, por ejemplo, las intensas fuerzas de marea. En el trabajo publicado por Morris y Thorne [3] en 1988 sobre agujeros de gusano atravesables se construye la geometría de manera que se forma un puente entre dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo. Además, se construye la solución para que sea atravesable por un ser humano. Esto implica que al atravesar la garganta deben existir fuerzas de marea pequeñas, tal que un ser humano pueda soportar el viaje. Se consideran fuerzas de marea aceptables si son del orden de magnitud a la gravedad en la tierra. También, el tiempo propio del viajero debe ser finito y lo suficientemente pequeño al atravesar

la garganta.

A partir de este primer trabajo, la teoría de agujeros de gusano atravesables ha sido un campo de estudio muy atractivo debido a sus propiedades interesantes, como la posibilidad de viajar muy grandes distancias en poco tiempo. Una de las propiedades más importantes de los agujeros de gusano atravesables es el hecho de que pueden ser imitadores de agujeros negros sin tener una singularidad [4, 5, 6]. El estudio de esta clase de objetos se basa en la detección de ondas gravitacionales por parte de experimentos como LIGO [7, 8, 9]. A partir de esto, se puede considerar a ciertas soluciones de agujeros de gusano como imitadores de agujeros negro por la similitudes en su espectro de modos cuasinormales [10, 11, 12].

Una forma de explorar la estabilidad de la solución es estudiando modos cuasinormales, que consisten en la deformación del agujero de gusano inducida por perturbaciones externas, por ejemplo, las perturbaciones de un campo escalar. Las oscilaciones están caracterizadas por un espectro discreto de frecuencias complejas, en la que la parte real indica la frecuencia de oscilación y la parte imaginaria indica el factor de amortiguamiento. En este trabajo se calculó las frecuencias complejas de los modos cuasinormales de perturbaciones escalares usando el método semi analítico WKB del 6<sup>to</sup> orden. Una vez comprobada la estabilidad de la solución se puede estudiar el movimiento de partículas en el agujero de gusano.

Un problema interesante en la geometría de un agujero de gusano atravesable es la trayectoria que sigue una partícula masiva o un rayo de luz cerca de la garganta. En astrofísica, esto se aplica en la deflexión de la luz por un objeto muy masivo como el sol. En [13, 14, 15] se puede encontrar una discusión sobre la deflexión de

la luz en agujeros negros y de gusano. En [16] se calculan las geodésicas del agujero de gusano de Ellis de forma analítica. En general no hay una solución analítica para la ecuación de la geodésica, por lo que en este trabajo se calculan numéricamente algunas geodésicas nulas y de tipo tiempo para diferentes parámetros del modelo de agujero de gusano propuesto.

Después de estudiar el comportamiento de una partícula es importante explorar cómo se comporta un fluido que atraviesa la garganta del agujero de gusano; este proceso se conoce como acreción. El proceso de acreción es un fenómeno astrofísico de gran importancia que ha ayudado a estudiar varios procesos astrofísicos y observaciones [17, 18]. En [19, 20, 21, 22] se discute la acreción para agujeros de gusano. Este proceso es bastante complejo, por lo que Bondi propone el modelo más simple para acreción hacia un objeto compacto, en la que un fluido acreta de forma uniforme y con simetría esférica [23]. En este trabajo se estudia el proceso de acreción esférica de un fluido de presión nula para el modelo de agujero de gusano, se calcula la velocidad y la densidad de energía del fluido.

## Capítulo 2

# Agujeros de Gusano Atravesables

El estudio de agujeros de gusano y de sus propiedades es parte importante de la relatividad general. En 1915, la teoría general de la relatividad surge como una teoría de la gravitación que toma en cuenta y expande las nociones desarrolladas en la relatividad especial. Clásicamente, el espacio y el tiempo han tenido un papel de escenario en el que sucede la física. La relatividad general, en cambio, se encarga de estudiar el espacio y el tiempo en sí mismos. Considera al espacio-tiempo como una variedad pseudoriemanniana que se curva en presencia de materia, curvatura que modifica las trayectorias de partículas y de la luz. Se ha corroborado experimentalmente en varias ocasiones, por ejemplo con la detección de ondas gravitacionales [7, 8, 9].

La información de la geometría del espacio-tiempo se encuentra en el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , y el Tensor de Riemann  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$  contiene toda la información de la curvatura del espacio tiempo. La fuente de curvatura del espacio-tiempo es la

materia, que está codificada en el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$ . El tensor de energía momento debe cumplir con la conservación de la energía en el espacio-tiempo curvo  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Para relacionar la curvatura del espacio tiempo con el tensor de energía momento se debe buscar un tensor  $G_{\mu\nu}$  que contenga información de la curvatura y cumpla con  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ . Esto se obtiene a partir del tensor de Riemann y sus contracciones como el tensor de curvatura  $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$  y el escalar de Ricci  $R = R^\mu{}_\mu$ . El tensor deseado es  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  y es conocido como el tensor de Einstein. Se puede demostrar que efectivamente  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$  usando una de las identidades de Bianchi  $\nabla_\eta R_{\lambda\mu\nu\kappa} + \nabla_\kappa R_{\lambda\mu\eta\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\kappa\eta} = 0$ . Las ecuaciones de campo de Einstein indican la relación entre la curvatura del espacio-tiempo y la materia

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

con  $\kappa = 8\pi G/c^2$ <sup>1</sup>. Al tener una fuente de materia conocida, por ejemplo, una esfera de fluido perfecto o una masa puntual, se usa (2.1) para obtener la geometría del espacio-tiempo que resulta de determinada distribución de materia. Sin embargo, se puede proponer una solución para la métrica empleando (2.1) para encontrar el tensor de energía momento para ese espacio-tiempo. Esto es especialmente útil cuando se tiene un espacio-tiempo con características particulares y se busca que tipo de objeto genere dicha geometría, como es el caso de los agujeros de gusano atravesables.

La solución de las ecuaciones de campo de Einstein que consideraron Morris y

---

<sup>1</sup>A partir de este punto se asume que  $c = G = 1$ .

Thorne es el siguiente elemento de línea esféricamente simétrico

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b/r} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.2)$$

donde  $\Phi$  y  $b$  son funciones de la coordenada radial  $r$ , y son conocidas como función de corrimiento al rojo y función forma respectivamente. La coordenada  $r$  decrece desde  $+\infty$  hasta un mínimo  $r_0$  que representa la garganta de la agujero de gusano, teniendo  $b(r_0) = r_0$ , y aumenta de  $r_0$  a  $+\infty$ . La parte radial de la métrica  $g_{rr}$  diverge en la garganta, pero la distancia propia  $x(r) = \pm \int_{r_0}^r [1 - b(r)/r]^{-1/2} dr$  debe ser finita en todas partes. La distancia propia cumple que  $x \in (-\infty, +\infty)$  y  $x(r_0) = 0$ . Para que el agujero de gusano sea atravesable no deben existir horizontes, por lo que  $\Phi(r)$  debe ser finito en todas partes. [24]

La solución 2.2 tiene como fuente  $T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p_r, p_t, p_t)$ . A partir de las ecuaciones de campo de Einstein 2.1 en un sistema de coordenadas esféricas ortogonales se obtiene la densidad de energía y las presiones en términos de las funciones  $b$  y  $\Phi$  [24]

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \frac{b'}{r^2} \quad (2.3)$$

$$p_r = -\frac{1}{8\pi} \left[ \frac{b}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \right] \quad (2.4)$$

$$p_t = \frac{1}{8\pi} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \left[ \Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r^2(1 - b/r)} \Phi' - \frac{b'r - b}{2r^3(1 - b/r)} + \frac{\Phi'}{r} \right]. \quad (2.5)$$

Una forma útil de visualizar la solución de agujero de gusano y extraer infor-

mación de la función forma  $b(r)$  son los diagramas de *embedding*. Por la simetría esférica de la solución, sin pérdida de generalidad, podemos considerar el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$  y un instante de tiempo fijo, por lo que tenemos el elemento de línea

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - b/r} + r^2 d\phi^2, \quad (2.6)$$

que se puede interpretar como un *embedding* generado por

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.7)$$

Asumiendo  $z = z(r)$  podemos escribir

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.8)$$

Comparando (2.6) con (2.8) obtenemos la expresión para  $z(r)$

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (2.9)$$

Para que la solución sea de agujero de gusano atravesable debe tener una garganta, es decir, debe existir un mínimo  $r_0$  de  $b(r)$  tal que  $b(r_0) = r_0$ , lo que implica  $dz/dr \rightarrow \infty$  en  $r = r_0$ . La solución es asintóticamente plana, por lo que  $dz/dr \rightarrow 0$  a medida que  $r \rightarrow \infty$ . Para asegurar la suavidad de la solución se debe imponer la condición de *flaring-out*; esto implica que la función  $r(z)$  debe cumplir  $dr^2/dz^2 > 0$  en un intervalo pequeño cerca de la garganta  $r_0$ . Derivando 2.9 se obtiene que

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0. \quad (2.10)$$

La condición de (2.10) lleva a la violación de la llamada condición nula de energía (NEC) [25]. Para ver esto definamos la cantidad

$$\xi = -\frac{p_r + \rho}{|\rho|} = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|}, \quad (2.11)$$

$\xi$  puede ser escrita como

$$\xi = \frac{2b^2}{r|b'|} \frac{d^2r}{dz^2} - 2(r-b) \frac{\phi'}{|b'|} \quad (2.12)$$

dado que  $(r-b) \rightarrow 0$  en  $r_0$ , tenemos

$$\xi = \frac{2b^2}{r|b'|} \frac{d^2r}{dz^2} > 0, \quad (2.13)$$

por lo tanto, cerca de la garganta, tenemos

$$\xi = -\frac{p_r + \rho}{|\rho|} > 0. \quad (2.14)$$

Si  $\rho > 0$  la condición implica  $p_r < 0$ , por lo tanto  $T_1^1$  debe ser interpretado como una tensión. Si definimos  $\tau = -p_r$  la condición 2.10 implica

$$\tau - \rho > 0. \quad (2.15)$$

Esto significa que, para este tipo de materia exótica, la tensión en la garganta debe ser mayor que la densidad de energía total, lo que viola la condición nula de energía (NEC)<sup>2</sup>. No se ha observado energía exótica en el universo, pero podemos minimizar la cantidad requerida para construir la solución de agujero de gusano

---

<sup>2</sup>Para una discusión detallada de las condiciones de energía ver B

definiendo el cuantificador [26] y demandando que sea finito

$$I = \int dV(\rho + p_r) = - \int_{r_0}^{\infty} (1 - b') \left[ \ln \left( \frac{e^{2\phi}}{1 - b/r} \right) \right] dr. \quad (2.16)$$

Dónde ' representa la derivada con respecto a  $r$ . A partir de lo mencionado en este capítulo se puede estudiar la geometría del *embedding* y la materia del agujero de gusano. También es necesario el estudio de la estabilidad de la solución, por lo que en la siguiente sección se estudiará la teoría de modos cuasinormales producidos por campos escalares.

## Capítulo 3

# Modos Cuasinormales

Los modos cuasinormales consisten en perturbaciones del espacio-tiempo por campos externos, como un campo escalar. El estudio de perturbaciones del espacio-tiempo empieza con Regge y Wheeler [27] para perturbaciones pequeñas de la solución de Schwarzschild, con el objetivo de explorar la estabilidad de la solución. En [28] se estudia la dispersión de ondas gravitacionales por un agujero negro. Thorne estudió las perturbaciones de estrellas de neutrones en los 60s [29]. En [30, 31, 32, 33, 34] se estudian perturbaciones para determinar la estabilidad de agujeros de gusano. Las perturbaciones del espacio tiempo de un agujero de gusano se pueden dar de dos maneras. Una es añadiendo campos al espacio tiempo o perturbando la métrica en sí misma. En la aproximación lineal, el primer caso se reduce a la propagación del campo en el agujero de gusano. En [35] se puede encontrar una revisión extensiva de métodos de cálculo para modos cuasinormales.

Para estudiar perturbaciones de campos escalares se debe resolver la ecuación

de Klein-Gordon, la cual describe este tipo de campos. En un espacio-tiempo curvo la ecuación covariante de Klein - Gordon para campo escalar  $\Psi$  de masa  $m$  tiene la forma

$$(\nabla^\nu \nabla_\nu - m^2)\Psi = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\nabla_\nu$  es la derivada covariante y  $m$  la masa de la partícula. La ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\mu\Psi) - m^2\Psi = 0, \quad (3.2)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica. Hacemos separación de variables y escribimos  $\Psi$  en términos de los armónicos esféricos

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = e^{\pm i\omega t} Y_l(\theta, \phi) \chi(r)/r, \quad (3.3)$$

donde  $l = 0, 1, 2, \dots$  es el número multipolar o el sobretono. A partir de la separación de variables obtenemos una ecuación de tipo Schrödinger para  $\chi(r)$ <sup>1</sup>

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x)\right)\chi(x) = 0 \quad (3.4)$$

Donde  $x$  es la coordenada de tortuga definida, en términos de la coordenada radial, como

$$x(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - b(r')/r'}}. \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>La derivación detallada de (3.4) se encuentra en el apéndice A

$x$  está definida en el intervalo  $(-\infty, +\infty)$  y  $V(r)$  es el potencial efectivo

$$V_l(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{rb' - b}{2r^3} \quad (3.6)$$

Esto para la métrica de agujero de gusano (2.2) con  $\Phi = 0$ . Los modos cuasinormales son oscilaciones generadas en la vecindad de la garganta del agujero de gusano, por lo que, en el infinito, únicamente hay ondas salientes. La solución de (3.4) con las condiciones de borde correspondientes a ondas puramente salientes en el infinito es

$$\chi(x) \sim C_{\pm} e^{\mp i\omega x}, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (3.7)$$

La solución mostrada en (3.7) son los modos cuasinormales con una frecuencia compleja  $\omega = Re(\omega) + iIm(\omega)$ . A partir de (3.7) se puede ver que la parte real de la frecuencia corresponde a la frecuencia de oscilación y la parte imaginaria corresponde al amortiguamiento de la oscilación. Esto implica que si  $Im(\omega) > 0$  la amplitud de la onda crece exponencialmente a medida que la coordenada de tortuga aumenta, lo que significa una inestabilidad en el sistema. Nótese que se debe tener  $Im(\omega) < 0$  para asegurar la estabilidad del sistema. Una oscilación real está compuesta por la combinación de todos los modos cuasinormales con distintos sobretonos  $l$ , por lo que todas las frecuencias deben satisfacer  $Im(\omega) < 0$ . Existe una gran cantidad de métodos semianalíticos y numéricos para calcular las frecuencias  $\omega$  y la función  $\chi$ . En [35, 36, 37, 38, 39] se exploran estos métodos. En particular, para el cálculo de frecuencias es de gran interés la aproximación semianalítica WKB, la cual se explorará en la siguiente sección.

## Capítulo 4

# Aproximación WKB

Para calcular las frecuencias  $\omega$  se usará el método semianalítico WKB. La aproximación WKB puede ser muy poderosa dado que el método puede ser llevado a ordenes superiores para mejorar la exactitud o para determinar los errores. Además, la aproximación WKB es menos costosa en términos de tiempo y de poder computacional que la integración numérica de la ecuación (3.4). La primera parte de esta sección muestra la primera aproximación a orden cuadrático que se realiza en [36] para la aproximación WKB. Más adelante se estudiará la aproximación de orden superior que se usó para calcular las frecuencias del agujero de gusano.

El motivo principal para usar la aproximación WKB es la similitud que (3.4) tiene con la ecuación de Schrödinger en una dimensión para una barrera de potencial. Consideramos un potencial aproximadamente constante en el infinito y con un máximo en  $x = 0$ , como se muestra en Fig.4.1. Debido a las condiciones de

borde de los modos cuasinormales de ondas puramente salientes en  $x = \pm\infty$  se tiene que las ondas reflejadas y transmitidas por la barrera de potencial tienen amplitudes similares, debido a que la onda incidente es nula.

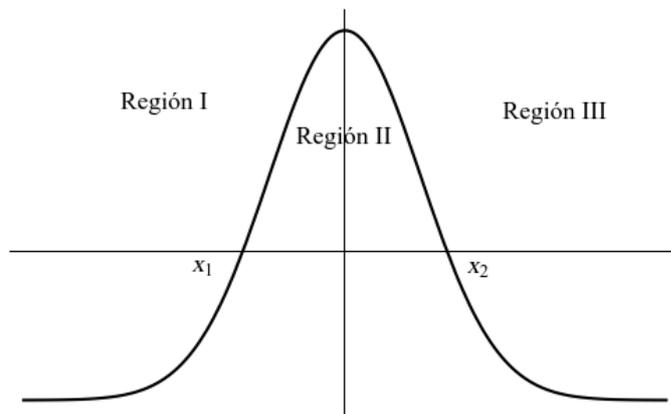


Figura 4.1: Diagrama de la función  $Q(x)$ .

Esto se cumple cuando  $Q(x) = V(x) - \omega^2 = 0$ , es decir, el cuadrado de la frecuencia es igual al máximo del potencial la aproximación WKB lleva a amplitudes iguales para la onda transmitida y reflejada. Esto dice que los modos cuasinormales existen para frecuencias tal que  $Q(x)|_{max} \approx 0$ . En el caso  $Q(x)|_{max} \gtrsim 0$  los puntos de retorno están demasiado cerca para aplicar la aproximación WKB usual, por lo que se deben realizar unas simples modificaciones.

Las modificaciones consisten en hacer coincidir las soluciones de la aproximación en los puntos de retorno. En las regiones I y III (Fig.4.1) las soluciones de la aproximación son

$$\begin{aligned} \chi_I(x) &\approx Q^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int_{x_2}^x Q^{1/2}(x) dt \right\} \\ \chi_{III}(x) &\approx Q^{-1/4} \exp \left\{ \pm i \int_x^{x_1} Q^{1/2}(x) dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dado que se asume que los puntos de retorno son cercanos, se puede aproximar la región II como una parábola. La función  $Q$  tiene la forma  $Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0)^2 + O(x - x_0)^3$ . Donde  $Q_0 \equiv Q(x_0)$  y  $Q_0'' \equiv d^2Q/dx^2|_{x_0}$ . Definimos

$$\begin{aligned} k &\equiv \frac{1}{2}Q_0'', & t &\equiv (4k)^{1/4}e^{i\pi/4}(x - x_0), \\ \nu + \frac{1}{2} &\equiv -iQ_0/(2Q_0'')^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

de forma que la ecuación (3.4) se vuelve

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 \right) \chi = 0. \quad (4.3)$$

La solución general de esta ecuación es  $\chi = AD_\nu(t) + BD_{-\nu-1}(it)$ , donde  $D_\nu(t)$  son las funciones cilíndricas parabólicas. Las formas asintóticas de estas funciones, cuando  $|t|$  es muy grande, son

$$\begin{aligned} \chi &\approx Be^{-3i\pi(\nu+1)/4}(4k)^{-(\nu+1)/4}(x - x_0)^{-(\nu+1)}e^{ik^{1/2}(x-x_0)^2/2} \\ &+ [A + B(2\pi)^{1/2}e^{-i\nu\pi/2}/\Gamma(\nu + 1)] e^{i\pi\nu/4}(4k)^{\nu/4} \\ &\times (x - x_0)^\nu e^{ik^{1/2}(x-x_0)^2/2}, \\ x_2 &\ll x \\ \chi &\approx Be^{-3i\pi\nu/4}(4k)^{\nu/4}(x - x_0)^\nu e^{-ik^{1/2}(x-x_0)^2/2} \\ &+ [B - iA(2\pi)^{1/2}e^{-i\nu\pi/2}/\Gamma(-\nu)] e^{i\pi(\nu+1)/4} \\ &\times (4k)^{-(\nu+1)/4}(x - x_0)^{-(\nu+1)}e^{ik^{1/2}(x-x_0)^2/2}, \\ x &\ll x_1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Las dos soluciones en (4.4) deben coincidir con las soluciones de WKB obtenidas

en las regiones *I* y *III*. Esto solo es posible con  $B = 0$  y  $\Gamma(-\nu) \rightarrow \infty$ . Esta última condición implica que  $\nu$  debe ser un entero positivo, dado que  $\Gamma$  únicamente diverge en enteros negativos. Llegamos a una condición para los modos cuasinormales

$$\frac{Q_0}{(2Q_0'')^{1/2}} = i \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

La expresión anterior es útil para calcular  $\omega$  dado que  $Q_0 = \omega^2 - V(0)$ . La exactitud de este resultado se puede mejorar en gran medida considerando términos superiores en la expansión de  $Q$ . En [37] se desarrolla un método para aproximar la solución a 3<sup>er</sup> orden de WKB. El método es similar al desarrollado anteriormente, sin embargo, se considera hasta el término  $(x - x_0)^6$  en la expansión en serie de Taylor de la función  $Q$ . Siguiendo un método similar, en [38] y [39] se mejora la aproximación a un 6<sup>to</sup> orden de WKB. Esto se hace considerando términos de hasta  $(x - x_0)^{12}$  en la expansión en serie de potencias de  $Q$ .

En este trabajo se usó la aproximación de 6<sup>to</sup> orden, la cual resulta en la expresión

$$i \frac{\omega^2 - V_0}{\sqrt{-2V_0''}} - \sum_{j=2}^6 \Lambda_j = n + \frac{1}{2}, \quad (4.6)$$

donde  $V_0 = V(0)$  y  $V_0'' = \frac{d^2V}{dx^2}(0)$ . Las correcciones  $\Lambda_j$  dependen de las derivadas del potencial evaluadas en el máximo de la campana  $x_0 = 0$ . Las expresiones exactas se pueden encontrar en [39]. La aproximación WKB funciona mejor para  $l$  grandes y  $n$  pequeños. Además la aproximación del 6<sup>to</sup> orden da los resultados más exactos [38]. Otra parte importante del estudio de la estabilidad de la solución es el comportamiento de la luz y de partículas en presencia del agujero de gusano.

En la siguiente sección se estudiará el movimiento geodésico de partículas y de la luz.

## Capítulo 5

# Ecuaciones de movimiento geodésico

El estudio del movimiento geodésico en un agujero de gusano es importante, en particular si se considera un agujero de gusano atravesable. Es interesante examinar cuando una partícula o un rayo de luz atraviesa la garganta del agujero de gusano. Para estudiar este tipo de trayectorias se necesita resolver las ecuaciones de movimiento geodésico, por lo que partimos del lagrangiano de una partícula libre sobre el espacio-tiempo y las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.2)$$

donde  $\tau$  es un parámetro afín y  $\dot{\phantom{x}}$  representa la derivada con respecto a  $\tau$ . Usando (5.1) para el elemento de línea (2.2) con  $\Phi(r) = 0$ . Por la simetría esférica de la solución se puede asumir que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Se obtienen las ecuaciones de movimiento geodésico

$$\dot{t} = E \quad (5.3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (5.4)$$

$$\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left(E^2 - \epsilon - \frac{L^2}{r^2}\right), \quad (5.5)$$

donde  $L$  y  $E$  corresponden al momento angular y la energía de la partícula respectivamente,  $\epsilon$  toma el valor de 1 para geodésicas tipo tiempo y 0 para geodésicas nulas. Tomando  $\phi$  en función de  $r$  llegamos a la ecuación de la órbita

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 = \frac{L^2}{r^4 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left(\epsilon + E^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)}, \quad (5.6)$$

de donde se obtienen dos soluciones que corresponden a geodésicas entrantes (+) y salientes (-). Con el objetivo de clasificar las órbitas es útil ver a la ecuación de la órbita en términos de la coordenada de tortuga  $x$  definida en (3.5)

$$\dot{x}^2 = E^2 - V^2(x). \quad (5.7)$$

Donde  $V(x)$  es el potencial efectivo, definido como

$$V(x) = \sqrt{\epsilon + \frac{L^2}{r(x)^2}} \quad (5.8)$$

Partiendo de la teoría mencionada anteriormente, en las siguientes secciones se estudia en mayor detalle las geodésicas de tipo tiempo y nulas.

## 5.1. Geodésicas de tipo tiempo

En esta sección estudiaremos en detalle las geodésicas de tipo tiempo. En este caso  $\epsilon = 1$ , por lo que la ecuación de la órbita es

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{L}{r^2 \sqrt{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left(1 + E^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)}}. \quad (5.9)$$

Para calcular  $\phi(r)$  consideramos condiciones de contorno en coordenadas polares  $r_i$  y  $\phi_i$ . Para la geodésica entrante se tiene que

$$\phi_{in}(r) = \int_{r_i}^r \frac{L}{r'^2 \sqrt{\left(1 - \frac{b(r')}{r'}\right) \left(1 + E^2 - \frac{L^2}{r'^2}\right)}} dr' + \phi_i. \quad (5.10)$$

La integral se calcula desde  $(r_i, \phi_i)$  hasta  $(r_0, \phi_{in}(r_0))$ , punto en el que la partícula comienza la órbita saliente. La integral para la geodésica saliente con la nueva condición de contorno  $\phi'_i = \phi_{in}(r_0)$  es

$$\phi_{out}(r) = - \int_{r_0}^r \frac{L}{r'^2 \sqrt{\left(1 - \frac{b(r')}{r'}\right) \left(1 + E^2 - \frac{L^2}{r'^2}\right)}} dr' + \phi'_i. \quad (5.11)$$

Podemos usar el potencial efectivo como función de la coordenada de tortuga

(5.8) y (5.7) para clasificar los diferentes tipos de órbitas. Si  $E > V(x)$  la partícula atraviesa la garganta y continúa por el otro universo, si  $E = V(x)$  la partícula sigue una órbita circular alrededor de la garganta y si  $E < V(x)$  la partícula no atraviesa la garganta y continúa por el mismo universo. A partir de esto se debe considerar los tres casos en términos del momento angular. En el caso crítico  $E = V(0)$  la partícula sigue órbitas circulares de radio  $r_0$ . Usando esta condición y (5.8) se puede calcular el momento angular crítico  $L_c = r_0^2(E^2 - \epsilon)$ . El momento angular de cada órbita es calculado con  $L = L_c \pm \delta$ , para  $\delta > 0$ . Si  $L = L_c + \delta$  la partícula se queda en el mismo universo y si  $L = L_c - \delta$  la partícula pasa por la garganta al otro universo. Para el caso crítico  $L = L_c$  consideramos únicamente la integral

$$\phi(r) = \int_{r_i}^r \frac{L}{r'^2 \sqrt{\left(1 - \frac{b(r')}{r'}\right) \left(1 + E^2 - \frac{L^2}{r'^2}\right)}} dr' + \phi_i. \quad (5.12)$$

Para el caso crítico únicamente se necesita una integral de entrada dado que la partícula sigue una órbita circular en la garganta y no logra escapar. Cabe destacar que a medida que el momento angular se acerca a  $L_c$  la partícula da un número cada vez más grande de vueltas alrededor de la garganta. En la siguiente sección se realiza un estudio similar para geodésicas nulas.

## 5.2. Geodésicas nulas

La deflexión de la luz por el agujero de gusano atravesable es particularmente interesante dado que la luz, a parte de ser desviada, puede atravesar la garganta o seguir una órbita circular. La luz sigue geodésicas nulas, por lo que en esta sección

estudiaremos geodésicas nulas y la deflexión de la luz. La ecuación (5.7) determina las órbitas de rayos de luz con  $\epsilon = 0$ , por lo que se puede reescribir la ecuación de la órbita en términos del parámetro de impacto  $b_i = L/E$

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{b_i}{r^2 \sqrt{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \left(1 - \frac{b_i^2}{r^2}\right)}}. \quad (5.13)$$

La imagen que recibe el observador esta compuesta por las trayectorias de los fotones modificadas por efectos gravitacionales, por lo que es útil usar el método de Trazado de rayos. El método consiste en usar (5.13) partiendo desde el observador y retroceder hasta el origen de la fuente. Para geodésicas nulas también es útil usar (5.7) para clasificar las órbitas

$$\dot{x}^2 L^2 = \frac{1}{b_i^2} - \frac{1}{r(x)^2}. \quad (5.14)$$

A partir de (5.14) se puede encontrar, para cada  $b_i$ , un  $x_{min}$  tal que  $\frac{1}{b_i^2} = \frac{1}{r(x_{min})^2}$ , esto es el  $x_{min}$  que cumple  $\dot{x} = 0$ . Notemos que  $x_{min}$  es la distancia más pequeña a la que llega el rayo de luz a la garganta. El parámetro de impacto  $b_c$  corresponde al máximo del potencial efectivo, por lo que, para que exista un orbita circular en  $x_c$  fuera de la garganta, se debe cumplir

$$\frac{1}{b_c^2} = V(x_c), \quad \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_c} = 0, \quad \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_c} < 0. \quad (5.15)$$

Las trayectorias de los fotones con el parámetro de impacto son conocidas como esferas de fotones. El fotón sigue una orbita circular inestable en  $r_c = r(x_c)$ . Nótese que (5.15) no tiene solución para  $x_c$ , por lo que la única esfera de fotones es en

$r_c = r_0$  [40]. De forma similar a la sección anterior 5.1 un fotón con  $b_i > b_c$  se mantiene en el mismo universo. Un fotón con  $b_i < b_c$  pasa por la garganta hacia al otro universo. Notamos que cuando  $b_i$  se acerca a  $b_c$  el fotón sigue una órbita que circula un número más grande de veces a la garganta del agujero de gusano. Al haber explorado el movimiento de partículas y de la luz en presencia del agujero de gusano atravesable, es interesante preguntarse por el comportamiento de un fluido en el agujero de gusano. En la siguiente sección se estudia la acreción sobre un agujero de gusano atravesable.

## Capítulo 6

### Acreción esférica

Ahora nos enfocamos en acreción esférica del modelo de agujero de gusano. La acreción es un proceso en el que un fluido es atraído por un objeto, en este caso un agujero de gusano atravesable. El caso de acreción sobre un agujero de gusano atravesable es particularmente interesante, dado que el fluido puede pasar por la garganta y salir al otro universo. Para el estudio de acreción sobre un agujero de gusano consideramos polvo, que es un fluido perfecto con presión nula. El tensor de energía momento para polvo es

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu, \quad (6.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $u^\mu$  es la velocidad del fluido. La velocidad se define como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (u^t, u^r, 0, 0). \quad (6.2)$$

Los componentes angulares de la velocidad son cero por la simetría esférica. Cabe destacar que la velocidad y la densidad de energía dependen únicamente de  $r$ . Por la condición de normalización de la velocidad  $u^\mu u_\mu = -1$  se tiene

$$u^t \equiv \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{u^2}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} + 1}, \quad (6.3)$$

donde definimos  $u \equiv u^r$ . La ley de conservación de la energía  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$  implica

$$\frac{\rho u r^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} \sqrt{u^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} = A_1, \quad (6.4)$$

donde  $A_1$  es una constante de integración. La segunda ecuación de movimiento para el proceso de acreción es la ecuación de continuidad  $J^\mu{}_{;\mu} = 0$ , Para polvo tenemos la relación  $J^\mu = \rho u^\mu$ . Se obtiene que

$$\frac{\rho u r^2}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}} = A_2, \quad (6.5)$$

donde  $A_2$  es una constante de integración. Dividiendo (6.4) para (6.5) se obtiene una relación independiente de  $\rho$

$$\sqrt{\frac{u^2}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} + 1} = \frac{A_1}{A_2} \equiv A_4. \quad (6.6)$$

Cabe destacar que resolviendo (6.6) para  $u$  se obtienen dos soluciones: la solución con  $u > 0$  corresponde a fluido entrante y  $u < 0$  a fluido saliente. Las constantes  $A_4$  y  $A_2$  pueden ser calculadas con condiciones de contorno para  $u$  y  $\rho$ . Usando (6.5) y (6.6) se obtiene la densidad de energía y la velocidad en términos de las

constantes  $A_2$  y  $A_4$ . La tasa de cambio de la masa  $\dot{M}$  del fluido que atraviesa la garganta del agujero de gusano es la integral del flujo del fluido sobre la 2-esfera.

$$\dot{M} = \int T_0^1 \sqrt{-g} d\theta d\phi \quad (6.7)$$

Para la métrica (2.2)  $T_0^1 = -\rho u^t u$ , por lo que  $\dot{M}$  es

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho u \sqrt{\frac{u^2}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} + 1} \quad (6.8)$$

usando (6.5) y (6.8) se obtiene una expresión para la tasa de cambio de la masa

$$\dot{M} = 4\pi A_2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \sqrt{u^2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + 1}. \quad (6.9)$$

A lo largo de esta sección se estudió acreción esférica de polvo sobre un agujero de gusano atravesable. En las secciones anteriores se estudiaron los modos cuasinormales y el movimiento geodésico para un agujero de gusano atravesable. En la siguiente sección se propone un modelo concreto de un agujero de gusano atravesable y se explora sus características a partir de los modos cuasinormales, el movimiento geodésico y la acreción.

# Capítulo 7

## Resultados

En este capítulo se muestran los resultados de modos cuasinormales, movimiento geodésico y acreción de una solución de agujero de gusano. Se propuso una función de *embedding*  $z(r)$  y calculamos la función forma  $b(r)$  a partir de (2.9). Además se considera una función de corrimiento al rojo nula  $\Phi = 0$ . La función de *embedding* propuesta es [41]

$$z(r) = \sqrt{\log \left( a + \left( \frac{cr}{r_0} + d \right)^2 \right)}, \quad (7.1)$$

donde  $a$ ,  $c$  y  $d$  son parámetros libres. Estos parámetros pueden ser reducidos imponiendo la existencia de una garganta, es decir, la existencia de un mínimo  $r_0$  de  $b$  tal que  $b(r_0) = r_0$  y la condición de *flaring-out* (2.10). Obtenemos que

$$a = 1 - c^2 - 2cd - d^2, \quad (7.2)$$

quedando libres los parámetros  $c$  y  $d$ . En la figura 7.1 se muestra la función de *embedding* (7.1) para  $\theta = \pi/2, -\pi/2$  para los parámetros libres  $c \in \{0.4, 0.8, 1.2, 1.6\}$  y  $d \in \{0.2, 0.6, 1.4, 1.8\}$ . Notemos que a medida que  $d$  y  $c$  aumentan el diagrama de *embedding* se vuelve plano más lentamente.

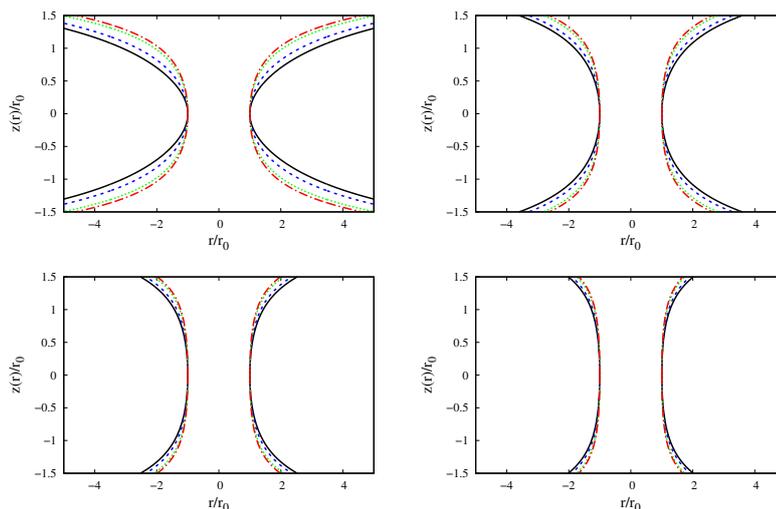


Figura 7.1: Diagramas de *embedding* para  $c = 0.4$  (primera fila, panel izquierdo),  $0.8$  (primera fila, panel derecho),  $1.2$  (segunda fila, panel izquierdo),  $1.6$  (segunda fila, panel derecho) y  $d = 0.2$  (negro),  $d = 0.6$  (azul),  $d = 1.4$  (verde),  $d = 1.8$  (rojo).

La función forma calculada a partir de (7.1) con (2.9) es

$$b(r) = \frac{c^2 \zeta^2 r}{c^2 \zeta^2 + r_0^2 (a + \zeta^2)^2 \log(a + \zeta^2)} \quad (7.3)$$

Donde

$$\zeta = \left( \frac{cr}{r_0} + d \right). \quad (7.4)$$

En Fig. 7.2 se muestra los gráficos de la función  $b(r)/r$  para distintos valores de los parámetros  $c$  y  $d$ . Se puede notar que se cumple las condiciones de existencia

de un mínimo  $r_0$  tal que  $b(r_0) = r_0$  y se cumple la condición de *flaring-out* para todos los parámetros considerados. Se nota que mientras  $c$  aumenta, las curvas para distintos  $d$  se acercan entre sí.

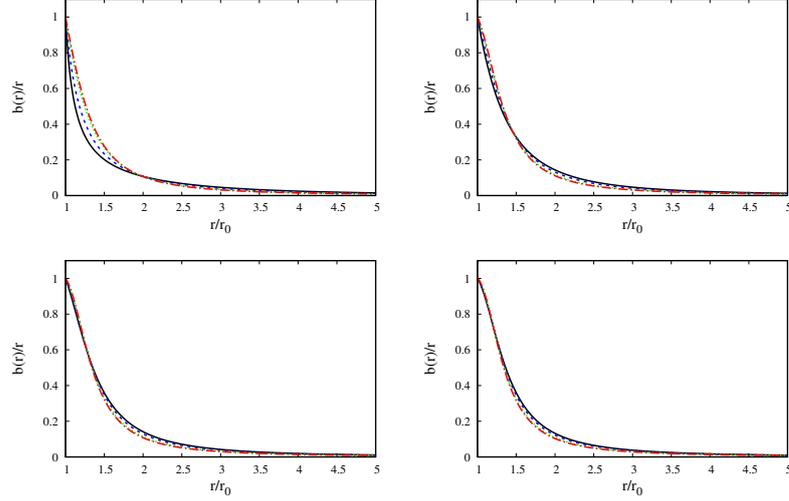


Figura 7.2: Gráficas de  $b/r$  en función de  $r/r_0$  para  $c = 0.4$  (primera fila, panel izquierdo),  $0.8$  (primera fila, panel derecho),  $1.2$  (segunda fila, panel izquierdo),  $1.6$  (segunda fila, panel derecho) y  $d = 0.2$  (negro),  $d = 0.6$  (azul),  $d = 1.4$  (verde),  $d = 1.8$  (rojo).

En Fig. 7.3 se muestra el cuantificador, definido en (2.16), para el modelo de agujero de gusano (7.3), en función del parámetro  $d \in (0.2, 2)$ . Esto, para varios parámetros  $c \in \{0.4, 0.8, 1.2, 1.6\}$ . Se puede observar que para todos los parámetros considerados el cuantificador es finito y para  $c \in \{0.8, 1.2, 1.6\}$  es una función creciente que se acerca a 0; para  $c = 0.4$  decrece, pero se acerca de forma asintótica a una constante, por lo que se mantiene finito.

Con el objetivo de estudiar la estabilidad de la solución se calcularon las frecuencias de los modos cuasinormales de perturbaciones escalares con la aproximación WKB de 6<sup>to</sup> orden (4.6) para el modelo de agujero de gusano atravesable.

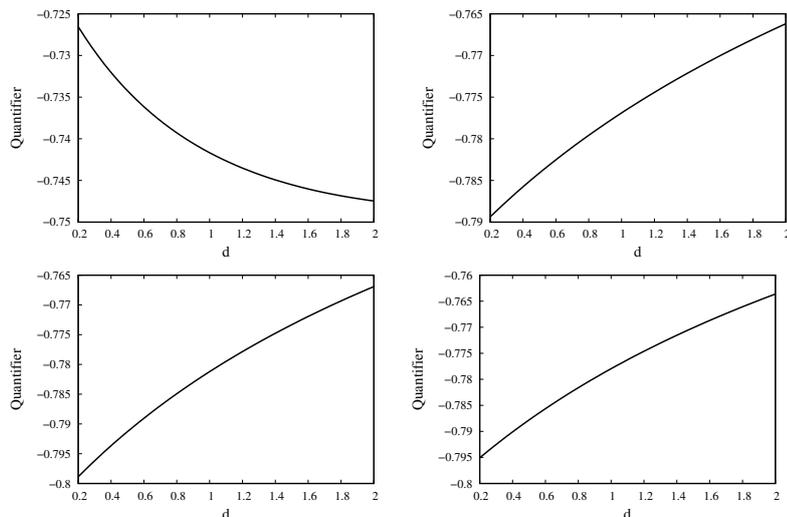


Figura 7.3: Cuantificador como función de  $d$  para  $c = 0.4$  (primera fila, panel izquierdo),  $0.8$  (primera fila, panel derecho),  $1.2$  (segunda fila, panel izquierdo),  $1.6$  (segunda fila, panel derecho).

Esto para varios tonos  $n$ , sobretonos  $l$  y parámetros  $c$  y  $d$ . Estos resultados se muestran a continuación.

En Fig. 7.4 se muestra el potencial efectivo (3.6) en función de la coordenada de tortuga  $x$ . Esto para el modelo de agujero de gusano determinado por (7.3) para distintos parámetros  $c$  y  $d$ . El potencial en función de la coordenada de tortuga  $V(x)$  tiene forma de campana con máximo en la garganta, por lo que se puede aplicar la aproximación WKB. Se puede notar que a medida que el sobretono  $l$  aumenta, el pico del potencial efectivo disminuye. Además, a medida que el parámetro  $c$  aumenta, el potencial se tiene una forma más extendida.

En Fig. 7.5 se muestra la parte imaginaria de la frecuencia en función de  $d$ . Se puede notar que en la primera fila ( $c = 0.4$ ) para  $n = 0, 1$  (curvas negras y azules) la curva aumenta monótonamente y se acerca a 0 a medida que  $d$  crece. Mientras

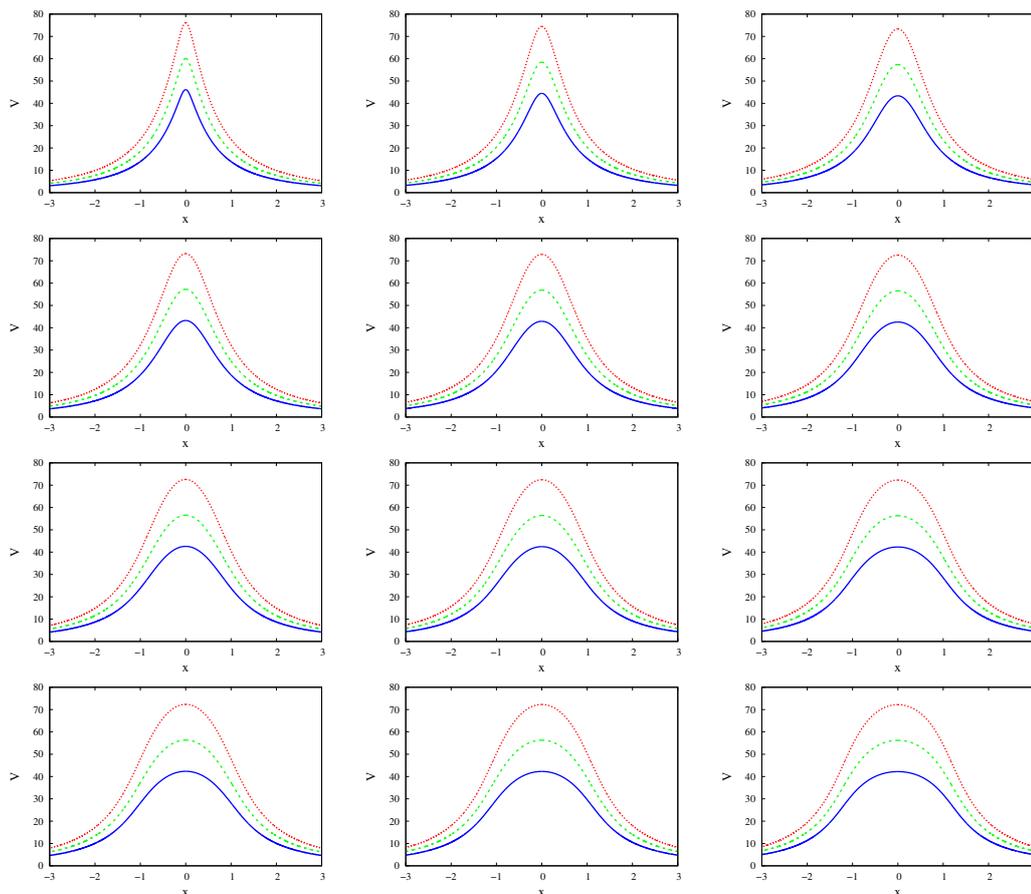


Figura 7.4: El potencial de la perturbación como función de la coordenada de tortuga  $x$  para  $l = 6$  (azul),  $l = 7$  (verde),  $l = 8$  (rojo). Donde se fijaron los parámetros  $c = 0.4$  (primera fila),  $c = 0.8$  (segunda fila),  $c = 1.2$  (tercera fila) y  $c = 1.6$  (cuarta fila). Para cada fila obtenemos  $d = 0.2$  (panel izquierdo),  $d = 0.6$  (panel central) y  $d = 1.4$  (panel derecho).

que para  $n = 2, 3$   $Im(\omega)$  decrece, alcanza un máximo y aumenta acercándose asintóticamente a 0. Para  $l = 6, 7$  y  $n = 3$  hay valores de  $d$  tal que  $Im(\omega)$  es positiva, lo que indica que el agujero de gusano es inestable para estos parámetros. Para  $c = 0.8, 1.2$  y  $1.6$   $Im(\omega)$  aumenta de forma monótona y es siempre negativa para todos los valores de  $l$ ,  $n$  y  $d$  considerados. Por lo que la solución puede considerarse como estable para estos parámetros. En Fig.7.6 se muestra la parte

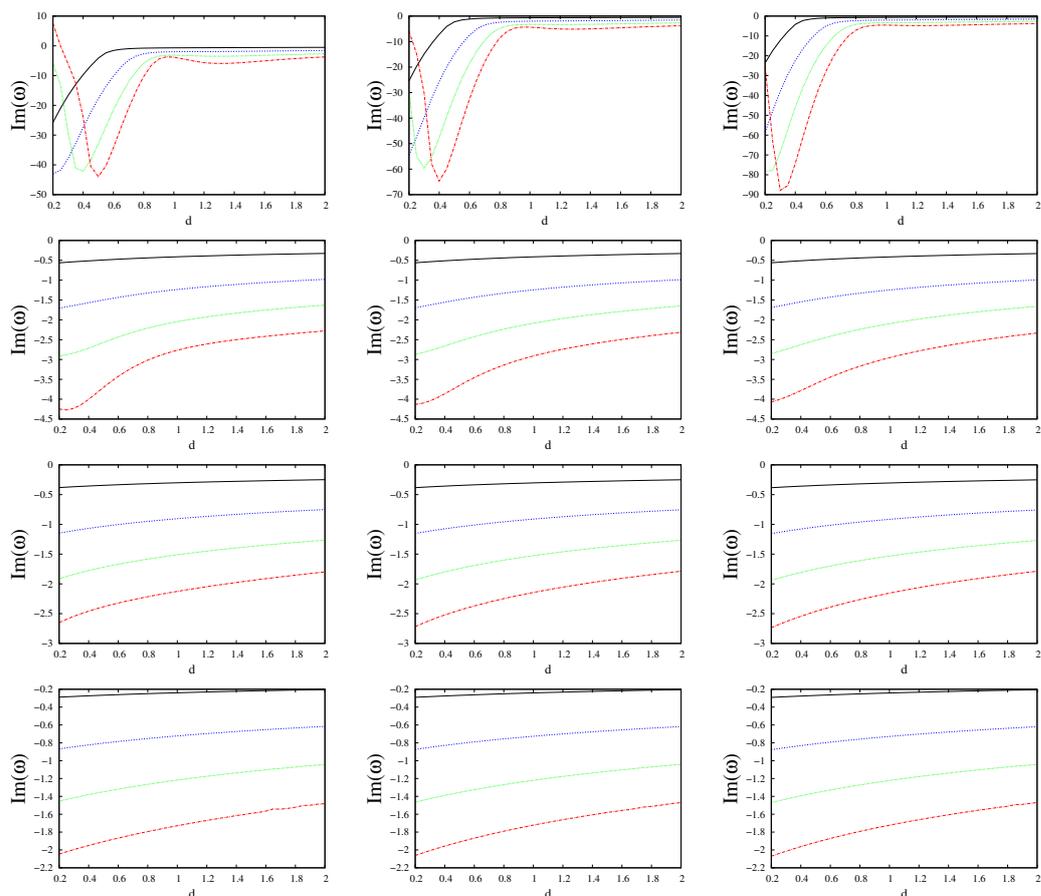


Figura 7.5: Parte imaginaria de la frecuencia como función de  $d$  para  $n = 0$  (negro),  $n = 1$  (azul),  $n = 2$  (verde),  $n = 3$  (rojo). Fijamos  $c = 0.4$  (primera fila),  $c = 0.8$  (segunda fila),  $c = 1.2$  (tercera fila) y  $c = 1.6$  (cuarta fila). Para cada fila  $l = 6$  (panel izquierdo),  $l = 7$  (panel central) y  $l = 8$  (panel derecho).

real de la frecuencia como función del parámetro  $d$ . Se puede notar que para  $c = 0.4$   $Re(\omega)$  disminuye a medida que  $d$  aumenta hasta que alcanza un mínimo y vuelve a aumentar hasta una constante. Para  $n = 3$  existen dos mínimos locales. Para  $n = 0, 1, 2$  las curvas se acercan a la misma constante y esta constante aumenta según aumenta  $l$ . En cambio para  $c = 0.8$  la curva es constante para  $n = 0$  y para  $n = 1, 2, 3$  aumenta hasta un máximo y disminuye hasta acercarse a una constante, el pico del máximo es menos pronunciado a medida que aumenta  $l$ . Para  $c = 1.6$

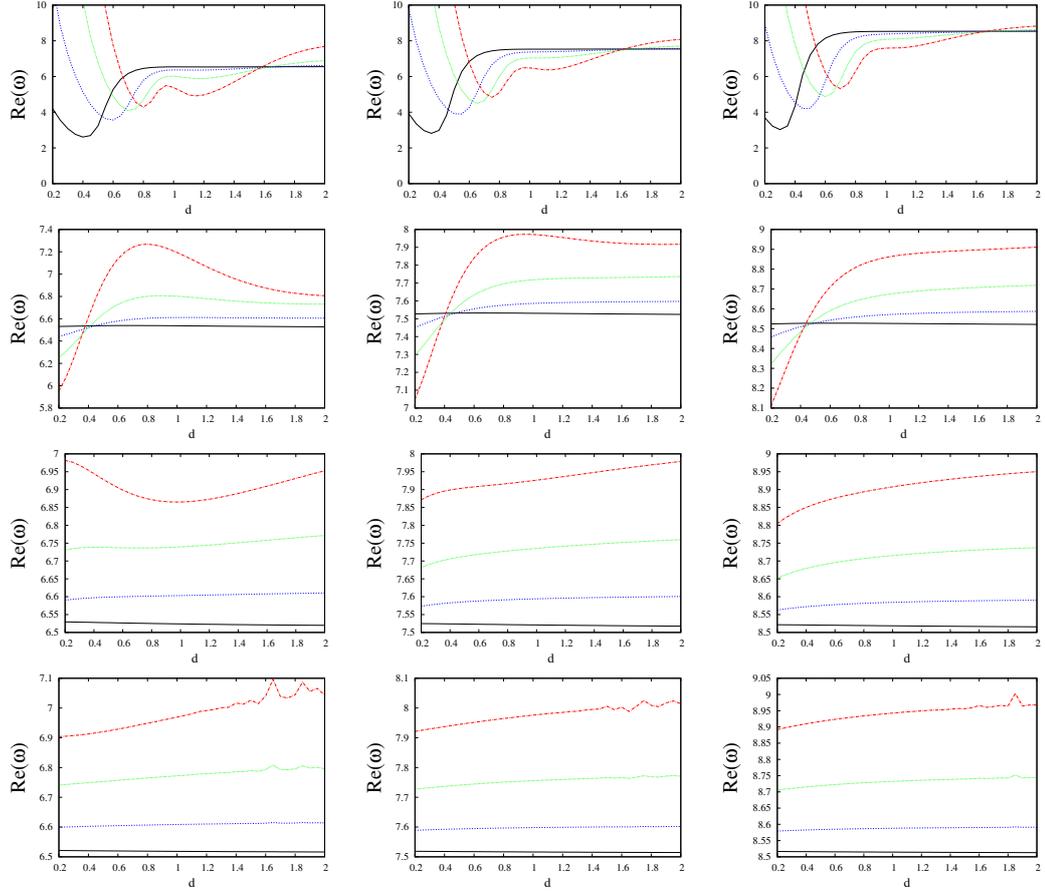


Figura 7.6: Parte real de la frecuencia como función de  $d$  para  $n = 0$  (negro),  $n = 1$  (azul),  $n = 2$  (verde),  $n = 3$  (rojo). Fijamos  $c = 0.4$  (primera fila),  $c = 0.8$  (segunda fila),  $c = 1.2$  (tercera fila) y  $c = 1.6$  (cuarta fila). Para cada fila  $l = 6$  (panel izquierdo),  $l = 7$  (panel central) y  $l = 8$  (panel derecho).

$Re(\omega)$  es constante para  $n = 0$  y monótonamente creciente para  $n = 1, 2, 3$ , pero tiene un comportamiento oscilatorio, el cual puede ser asociado con inestabilidades numéricas.

Es interesante estudiar el movimiento geodésico del agujero de gusano propuesto dado que partículas y rayos de luz pueden atravesar por la garganta hacia el otro universo. Por lo que, es esta sección se muestran los resultados de geodésicas

tipo tiempo y nulas para el agujero de gusano propuesto.

En Fig. 7.7 se muestra el potencial efectivo (5.8) como función de  $x$ , esto para órbitas tipo tiempo. La curva roja es el potencial efectivo con momento angular  $L = L_c - \delta$ , la curva azul es el potencial efectivo con momento angular  $L = L_c$  y La curva negra es el potencial efectivo con momento angular  $L = L_c + \delta$ , para  $\delta = 0.5$ .

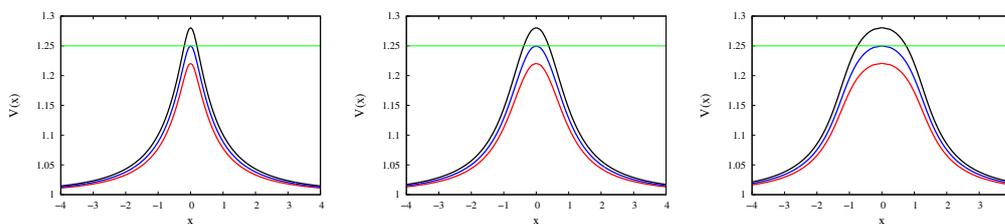


Figura 7.7: Potencial efectivo para órbitas de tipo tiempo como función de la coordenada de tortuga para los tres tipos de órbitas. Esto para  $c = 0.4$ ,  $d = 0.2$  (izquierda);  $c = 0.6$ ,  $d = 0.8$  (centro);  $c = 1.8$ ,  $d = 1.6$  (derecha). La curva verde es la energía de la partícula.

Los resultados obtenidos al integrar numéricamente (5.10) y (5.11) para geodésicas de tipo tiempo  $\epsilon = 1$  se muestran en Fig.7.8, esto para distintos parámetros del agujero de gusano.

Las imágenes en Fig. 7.9 son las soluciones de trazado de rayos de (5.13). El observador se encuentra en el lado izquierdo de la pantalla en el infinito y se muestran las trayectorias de los fotones desde el polo norte. Para integrar (5.13) consideramos las condiciones iniciales en coordenadas cartesianas  $(x_i, y_i)$ , donde  $x_i = 100r_0$  es el infinito numérico y  $y_i = b_i$ . El parámetro de impacto varía en el intervalo  $[0.5, 2]$  con un paso de 0.05. Las curvas verdes son las trayectorias de fotones entrantes con  $b_i > b_c$ , que son desviados en el mismo universo. Las

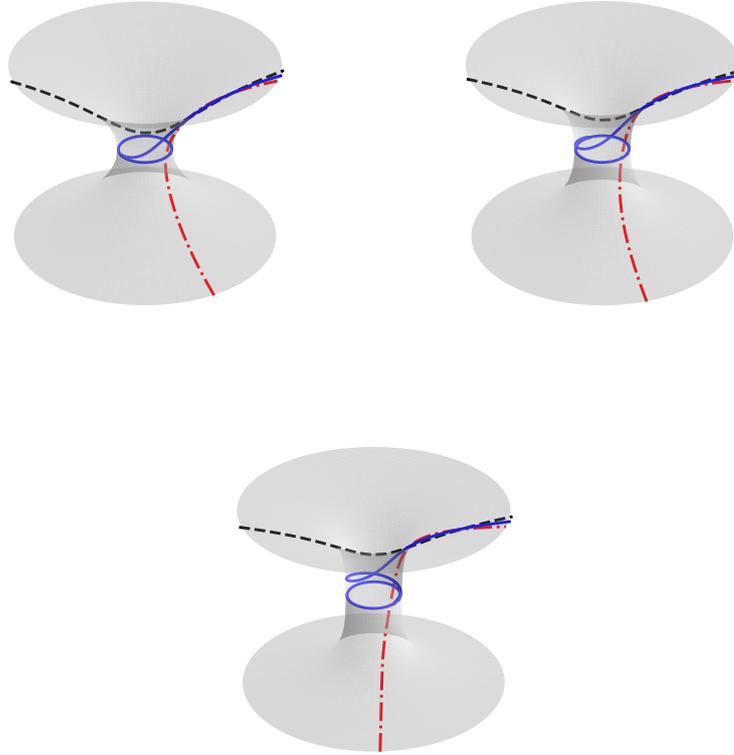


Figura 7.8: Geodésicas tipo tiempo para  $c = 0.4$ ,  $d = 0.2$  (izquierda);  $c = 0.6$ ,  $d = 0.8$  (derecha);  $c = 1.8$ ,  $d = 1.6$  (abajo), con  $\delta = 0.5$  y  $x_i = 5$ . Las líneas negras indican las órbitas para una partícula con  $L = L_c - \delta$ , líneas verdes con  $L = L_c + \delta$  y líneas azules con  $\delta = 0.5$ .

curvas rojas son las trayectorias de fotones entrantes con  $b_i < b_c$ . Las curvas azules son trayectorias salientes de los fotones que atravesaron la garganta hacia el otro universo.

A parte de partículas y rayos de luz es interesante estudiar fluidos y su comportamiento en el espacio-tiempo del agujero de gusano propuesto. Usando (6.6) y (6.5) se puede hacer una gráfica de la velocidad  $u$  y la densidad de energía  $\rho$  del

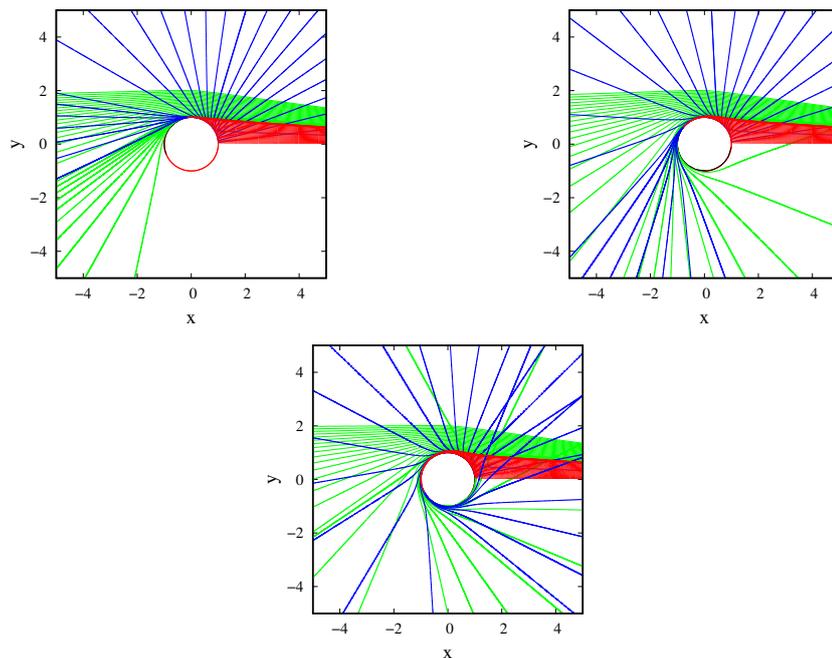


Figura 7.9: Trazado de rayos del agujero de gusano para  $c = 0.4$ ,  $d = 0.2$  (izquierda);  $c = 0.6$ ,  $d=0.8$  (derecha);  $c = 1.8$ ,  $d = 1.6$  (abajo).

fluido en función de la coordenada de tortuga. En este caso consideramos las siguientes condiciones de borde:  $u_\infty = 0.6$  y  $\rho_\infty = 0.001$  en infinito. Estos resultados se muestra en Fig. 7.10 para la densidad de energía y Fig. 7.11 para la velocidad del fluido.

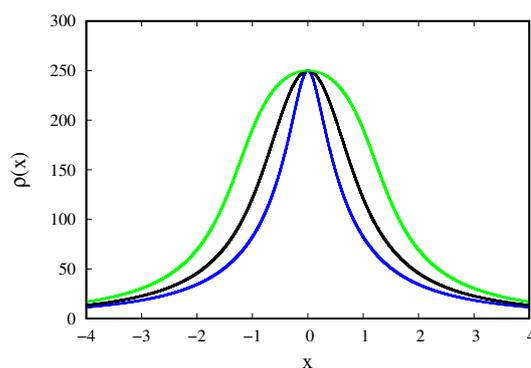


Figura 7.10: Densidad de energía como función de la coordenada de tortuga para  $c=0.4$ ,  $d=0.2$  (azul);  $c=0.6$ ,  $d=0.8$  (negro);  $c=1.8$ ,  $d=1.6$  (verde).

En Fig.7.10 se puede notar que la densidad de energía tiene forma de campana con máximo en  $x = 0$  y tiene el mismo máximo para todos los parámetros  $c$  y  $d$  considerados. Además la curva se ensancha a medida que se aumente  $c$  y  $d$ .

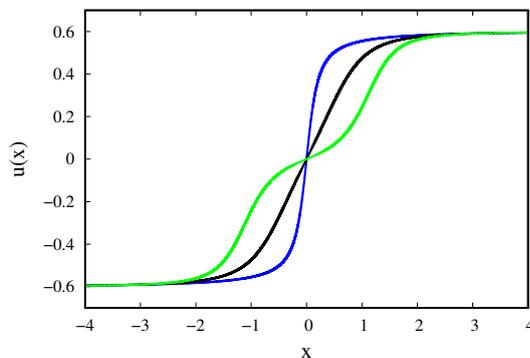


Figura 7.11: Velocidad del fluido como función de la coordenada de tortuga para  $c=0.4$ ,  $d=0.2$  (azul);  $c=0.6$ ,  $d=0.8$  (negro);  $c=1.8$ ,  $d=1.6$  (verde).

En Fig. 7.11 se puede observar que para  $x > 0$  la velocidad disminuye monótonamente a medida que  $x$  disminuye, hasta hacerse 0 en  $x = 0$ . Para  $x < 0$  la velocidad cambia de signo dado que el fluido sale del agujero de gusano. También, la velocidad se vuelve más negativa a medida que  $x$  disminuye. A medida que los parámetros  $c$  y  $d$  aumentan, la curva se vuelve más aplanada.

Usando (6.9) se puede realizar una gráfica de  $\dot{M}$  en función de la coordenada de tortuga, esto para varios parámetros del modelo. Estos resultados se muestran en Fig.7.12. La tasa de cambio de la masa del fluido disminuye a medida que  $x$  disminuye hasta llegar a  $x = 0$ . Para  $x < 0$ ,  $\dot{M}$  vuelve a aumentar. A partir de estos resultados de distintas propiedades del agujero de gusano atravesable propuesto se puede obtener ciertas propiedades de la solución. En la siguiente sección se mencionarán ciertas conclusiones sobre los resultados obtenidos.

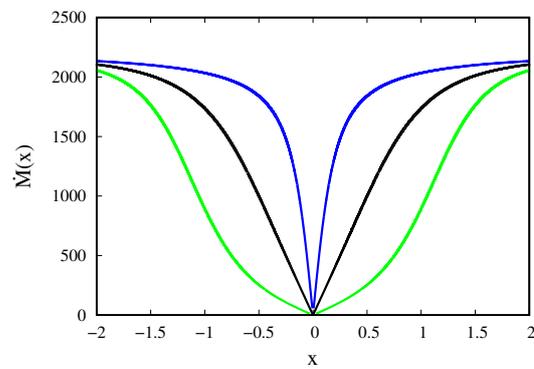


Figura 7.12: Tasa de cambio de la masa del fluido como función de la coordenada de tortuga, para  $c=0.4, d=0.2$  (azul);  $c=0.6, d=0.8$  (negro);  $c=1.8, d=1.6$  (verde).

## Capítulo 8

### Conclusiones

En este trabajo se obtuvo una solución de agujero de gusano atravesable con fuerzas de marea radiales nulas proponiendo una función de *embedding* con algunos parámetros libres. Los parámetros se redujeron al imponer las condiciones básicas que debe tener un agujero de gusano atravesable. En particular, se demanda que exista un radio mínimo y el cumplimiento de la condición de *flaring-out*. Para explorar el comportamiento de la solución en términos de los parámetros resultantes se estudió la materia exótica necesaria para generar la geometría por medio del *quantifier*. Similarmente se exploró la estabilidad de la solución mediante los modos cuasinormales de una perturbación escalar. Se usó la aproximación WKB de 6<sup>to</sup> orden para calcular las frecuencias complejas de oscilación. Se estudió el movimiento geodésico para partículas masivas y rayos de luz del modelo. Se calcularon los tres tipos de órbitas para geodésicas de tipo tiempo, para varios parámetros del agujero de gusano. De la misma forma se calcularon las geodésicas nulas para

determinar los efectos ópticos de la solución. Se calcularon las orbitas de rayos de luz usando el método de trazado de rayos para diferentes parámetros de impacto. Se exploró la acreción esférica de un fluido de presión nula sobre el agujero de gusano. Se calculó la velocidad y densidad de energía del fluido y la tasa de cambio de la masa.

Como resultado se obtuvo que la solución requiere una cantidad finita de materia exótica que decrece para ciertos valores de los parámetros. Además, a partir del cálculo de las frecuencias de los modos cuasinormales podemos llegar a la conclusión de que la solución es estable para ciertos parámetros, dado que la parte imaginaria de la frecuencia es siempre negativa para los sobretonos considerados.

# Bibliografía

- [1] L. Flamm. Beitrage zur Einsteinschen Gravitationstheorie. *Phys. Z.*, 17:448, 1916.
- [2] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Physical Review*, 48(1):73–77, 1935.
- [3] M. S. Morris and K. S. Thorne. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56:395–412, 1988.
- [4] R. Avalos, E. Fuenmayor, and E. Contreras. Traversable wormholes with like-casimir complexity supported with arbitrarily small amount of exotic matter. *The European Physical Journal C*, 82(5), 2022.
- [5] Hristu Culetu. On a particular morris–thorne wormhole. *Physica Scripta*, 90(8):085001, 2015.
- [6] Remo Garattini. Casimir wormholes. *The European Physical Journal C*, 79(11), 2019.

- [7] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [8] B. P. Abbott et al. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 116(24):241103, 2016.
- [9] Benjamin P. Abbott et al. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.*, 118(22):221101, 2017. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 121, 129901 (2018)].
- [10] Pablo Bueno, Pablo A. Cano, Frederik Goelen, Thomas Hertog, and Bert Vercknocke. Echoes of Kerr-like wormholes. *Phys. Rev. D*, 97(2):024040, 2018.
- [11] Vitor Cardoso, Seth Hopper, Caio F. B. Macedo, Carlos Palenzuela, and Paolo Pani. Gravitational-wave signatures of exotic compact objects and of quantum corrections at the horizon scale. *Phys. Rev. D*, 94(8):084031, 2016.
- [12] R. A. Konoplya and A. Zhidenko. Wormholes versus black holes: quasinormal ringing at early and late times. *JCAP*, 12:043, 2016.
- [13] Valerio Bozza. Gravitational lensing by black holes. *General Relativity and Gravitation*, 42(9):2269–2300, Sep 2010.
- [14] Volker Perlick. Gravitational lensing from a spacetime perspective. *Living Reviews in Relativity*, 7(1):9, Dec 2004.
- [15] Petarpa Boonserm, Tritos Ngampitipan, Alex Simpson, and Matt Visser. Exponential metric represents a traversable wormhole. *Physical Review D*, 98(8), 2018.

- [16] Thomas Müller. Exact geometric optics in a morris-thorne wormhole space-time. *Phys. Rev. D*, 77:044043, Feb 2008.
- [17] Feng Yuan and Ramesh Narayan. Hot accretion flows around black holes. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 52(1):529–588, 2014.
- [18] Juhan Frank, Andrew R. King, and Derek J. Raine. *Accretion power in Astrophysics*. Cambridge Univ. Pr., 1985.
- [19] Rosaliya M. Yusupova, Ramis Kh. Karimov, Ramil N. Izmailov, and Kamal K. Nandi. Accretion flow onto ellis-bronnikov wormhole. *Universe*, 7(6), 2021.
- [20] Ujjal Debnath. Accretions of dark matter and dark energy onto  $(n + 2, n + 2)$ -dimensional schwarzschild black hole and morris-thorne wormhole. *Astrophysics and Space Science*, 360(2), 2015.
- [21] Pedro F. González-Díaz. On the accretion of phantom energy onto wormholes. *Physics Letters B*, 632(2-3):159–161, 2006.
- [22] Naoki Tsukamoto. Strong deflection limit analysis and gravitational lensing of an ellis wormhole. *Physical Review D*, 94(12), 2016.
- [23] H. Bondi. On spherically symmetrical accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 112(2):195–204, 1952.
- [24] Matt Visser. *Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking*. 1995.
- [25] Francisco S. N. Lobo. Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, 71:084011, 2005.

- [26] Matt Visser, Sayan Kar, and Naresh Dadhich. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations. *Phys. Rev. Lett.*, 90:201102, 2003.
- [27] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Physical Review*, 108(4):1063–1069, 1957.
- [28] Lester A. Edelman and C. V. Vishveshwara. Differential equations for perturbations on the schwarzschild metric. *Physical Review D*, 1(12):3514–3517, 1970.
- [29] Kip S. Thorne and Alfonso Campolattaro. Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. i. analytic analysis for  $l \geq 2$ . *The Astrophysical Journal*, 149:591, 1967.
- [30] S. Aneesh, Sukanta Bose, and Sayan Kar. Gravitational waves from quasi-normal modes of a class of lorentzian wormholes. *Physical Review D*, 97(12), 2018.
- [31] K. A. Bronnikov, R. A. Konoplya, and A. Zhidenko. Instabilities of wormholes and regular black holes supported by a phantom scalar field. *Physical Review D*, 86(2), 2012.
- [32] M.A. Cuyubamba, R.A. Konoplya, and A. Zhidenko. No stable wormholes in einstein-dilaton-gauss-bonnet theory. *Physical Review D*, 98(4), 2018.
- [33] Peter Taylor. Propagation of test particles and scalar fields on a class of wormhole space-times. *Physical Review D*, 90(2), 2014.

- [34] R. Ávalos and E. Contreras. Quasinormal modes of a casimir-like traversable wormhole through the semi-analytical wkb approach. *Annals of Physics*, 446:169128, 2022.
- [35] R. A. Konoplya and Alexander Zhidenko. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Reviews of Modern Physics*, 83(3):793–836, 2011.
- [36] Bernard F. Schutz and Clifford M. Will. BLACK HOLE NORMAL MODES: A SEMIANALYTIC APPROACH. *Astrophys. J. Lett.*, 291:L33–L36, 1985.
- [37] Sai Iyer and Clifford M. Will. Black-hole normal modes: A wkb approach. i. foundations and application of a higher-order wkb analysis of potential-barrier scattering. *Phys. Rev. D*, 35:3621–3631, Jun 1987.
- [38] R. A. Konoplya, A. Zhidenko, and A. F. Zinhailo. Higher order WKB formula for quasinormal modes and grey-body factors: recipes for quick and accurate calculations. *Class. Quant. Grav.*, 36:155002, 2019.
- [39] R. A. Konoplya. Quasinormal behavior of the  $d$ -dimensional schwarzschild black hole and the higher order wkb approach. *Phys. Rev. D*, 68:024018, Jul 2003.
- [40] Anuj Mishra and Subenoy Chakraborty. On the trajectories of null and timelike geodesics in different wormhole geometries. *The European Physical Journal C*, 78(5), 2018.
- [41] A. Rueda, R. Avalos, and E. Contreras. Construction of a traversable wormhole from a suitable embedding function. *Eur. Phys. J. C*, 82(7):605, 2022.

## Apéndice A

### Derivación de la ecuación 3.4

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(g^{\beta\alpha}\sqrt{-g}\partial_\beta\Psi) - \mu^2\Psi = 0 \quad (\text{A.1})$$

Los términos no nulos de de la expansión de la ecuación anterior son

$$\begin{aligned} g^{00}\partial_0\partial_0\Psi + g^{11}\partial_1\partial_1\Psi + \partial_1\Psi\partial_1g^{11} + \partial_1\Psi g^{11}\frac{\partial_1\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} + \\ g^{22}\partial_2\partial_2\Psi + \partial_2\Psi g^{22}\frac{\partial_2\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} + g^{33}\partial_3\partial_3\Psi - \mu^2\Psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Reemplazando la métrica (2.2) con  $\Phi(r) = 0$  en (A.2)se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t\partial_t\Psi + \left(1 - \frac{1}{b(r)}\right)\partial_r\partial_r\Psi + \partial_r\Psi\partial_r\left(1 - \frac{1}{b(r)}\right) \\ + \partial_r\Psi\left(1 - \frac{1}{b(r)}\right)\frac{-5b(r) + 4r + rb'(r)}{2r^2 - 2rb(r)} + \frac{1}{r^2}\partial_\theta\partial_\theta\Psi \\ + \partial_2\Psi\frac{1}{r^2}\cot\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi\partial_\phi\Psi - \mu^2\Psi = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Asumimos una solución con la siguiente forma para realizar la separación de variables

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = e^{\pm i\omega t} Y_L(\theta, \phi) \chi(r)/r \quad (\text{A.4})$$

Aplicando las propiedades de la exponencial compleja y los armónicos esféricos tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_t \Psi &= -\omega^2 \Psi \\ \frac{1}{r^2} \partial_\theta \partial_\theta \Psi + \partial_2 \Psi \frac{1}{r^2} \cot \theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \partial_\phi \Psi &= -\frac{L(L+1)}{r^2} \Psi \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Definimos  $\omega^2 = -\omega'^2 - \mu^2$  y reemplazamos (A.5) en (A.3)

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{b(r)}\right) \partial_r \partial_r \Psi + \partial_r \Psi \partial_r \left(1 - \frac{1}{b(r)}\right) \\ + \partial_r \Psi \left(1 - \frac{1}{b(r)}\right) \frac{-5b(r) + 4r + rb'(r)}{2r^2 - 2rb(r)} + \omega^2 \Psi - \frac{L(L+1)}{r^2} \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ahora reemplazamos la forma de la solución (A.4) en (A.6) y derivando se obtiene

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{b(r)}\right) \left(\frac{2\chi(r) - 2r\chi'(r) + r^2\chi''(r)}{r^3}\right) \\ + \left(\frac{r\chi'(r) - \chi(r)}{r^2}\right) \left(\frac{b(r) - rb'(r)}{r^2} + \frac{-5b(r) + 4r + rb'(r)}{2r^2}\right) \\ + \left(\omega^2 - \frac{L(L+1)}{r^2}\right) \left(\frac{\chi(r)}{r}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Simplificando llegamos a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{b(r)}\right) \chi''(r) + \chi'(r) \left(\frac{b(r) - rb'(r)}{2r^2}\right) \\ + \left(\omega^2 - \frac{L(L+1)}{r^2} - \frac{b(r) - rb'(r)}{2r^3}\right) \chi(r) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A partir de (3.5) y (A.8) usando la regla de la cadena obtenemos

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - \frac{L(L+1)}{r(x)^2} - \frac{b(x) - r(x)b'(x)}{2r(x)^3} \right) \chi(x) = 0 \quad (\text{A.9})$$

que es lo que se quería.

## Apéndice B

### Condiciones de Energía

Las Condiciones de Energía son condiciones matemáticas impuestas sobre el tensor de energía-momento para decidir que tipos de materia son físicamente razonables. Las Condiciones de Energía son, simplemente, formas para tratar de implementar la idea de que el tensor de energía-momento debe ser positivo y que la fuerza gravitatoria siempre es atractiva. [26, 25] Consideremos el tensor de energía momento en un sistema de coordenadas ortogonales apropiado dado por  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$ , las componentes son la densidad de energía y las presiones principales.

## B.1. Condición nula de energía

La condición nula de energía es la afirmación de que para cualquier vector nulo  $k^\mu$  se cumple que

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (\text{B.1})$$

En términos de las presiones principales se tiene

$$\rho + p_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{B.2})$$

## B.2. Condición débil de energía

La condición débil de energía es la afirmación de que para cualquier vector de tipo tiempo  $V^\mu$  se cumple que

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (\text{B.3})$$

Si esta condición se cumple para todo vector nulo, entonces (por continuidad) se cumple para todo vector tiempo, implicando la condición nula de energía. Físicamente, esta condición implica que la densidad de energía debe ser positiva para cualquier observador. En términos de las presiones principales se tiene

$$\rho \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{B.4})$$

### B.3. Condición fuerte de energía

La condición fuerte de energía es la afirmación de que para cualquier vector de tipo tiempo  $V^\mu$  se cumple que

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right)V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (\text{B.5})$$

donde  $T$  es la traza del tensor de energía-momento  $T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ . La condición fuerte de energía implica la condición nula de energía (por continuidad), pero no implica la condición débil de energía. En términos de las presiones principales se tiene

$$T = -\rho + \sum_j p_j \quad (\text{B.6})$$

y

$$\rho + p_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad \rho + \sum_j p_j \geq 0 \quad (\text{B.7})$$

### B.4. Condición dominante de energía

La condición dominante de energía es la afirmación de que para cualquier vector de tipo tiempo  $V^\mu$  se cumple que

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu}V^\mu \quad \text{no es de tipo espacio.} \quad (\text{B.8})$$

La condición dominante de energía implica la condición nula de energía y la condición débil de energía, pero no implica la condición fuerte de energía. En términos

de las presiones principales se tiene

$$\rho \geq 0, \quad y \quad p_j \in [-\rho, \rho] \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{B.9})$$

Las condiciones de energía se usan para demostrar varios teoremas sobre termodinámica de agujeros negros. Además, existen algunos sistemas físicos que violan una o más de las condiciones de energía, por ejemplo, el efecto Casimir viola la condición nula de energía.