

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Posgrados**

**Soluciones Interiores: Ecuaciones de Lane-Emden para  
Polítropos Anisótropos Relativistas**

**Tesis en torno a una hipótesis o problema de investigación y  
su contrastación.**

**Oscar Fernando Bustos Ganchozo**

**Ernesto Contreras, PhD.  
Director de Trabajo de Titulación**

Trabajo de titulación presentado como requisito  
para la obtención del título de Magister en Física

Quito, mayo 2023

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ  
COLEGIO DE POSGRADOS

Hoja de aprobación de trabajo de titulación

**Soluciones Interiores: Ecuaciones de Lane-Emden para  
Polítropos Anisótropos Relativistas**

**Oscar Fernando Bustos Ganchozo**

Nombre del Director del Programa:

Dario Niebieskikwiat.

Título Académico:

Doctor en Física.

Director del Programa de:

Maestría en Física.

Nombre del Decano del Colegio Académico:

Eduardo Alba.

Título académico:

Doctor en Ciencias Matemáticas.

Decano del Colegio:

Colegio de Ciencias e Ingeniería.

Nombre del Decano del Colegio de Posgrados:

Hugo Burgos Yáñez.

Título académico:

Doctorado en Estudios de Medios.

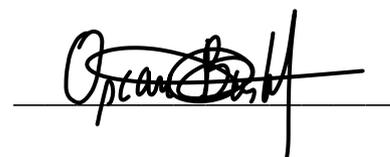
Quito, mayo 2023

## Derechos de autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante:



Nombres y apellidos:

Oscar Fernando Bustos Ganchozo

Código:

00325183

Cédula de identidad:

1205741455

Lugar y fecha:

Quito, 25 de mayo de 2023

## Aclaración para publicación

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>.

## Unpublished document

Note: The following graduation project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>.

**DEDICATORIA**

*Dedicado a mis padres.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Primero quiero expresar mis agradecimientos a la Universidad San Francisco de Quito USFQ, ya que este trabajo se hizo realidad gracias al programa de becas del Colegio de Ciencias e Ingenierías.

Así como quiero agradecer a Darío Niebieskikwiat quien ha estado atento en mi formación y desempeño como estudiante del Grado de Máster.

A todos los profesores quienes en las aulas de clases fomentaron el conocimientos y el trabajo duro para lograr las metas académicas establecidas.

Compañeros de cursos quienes estuvieron prestos a ayudar en el momento que se los requirió y se ha forjado una especial amistad.

En especial, quiero agradecer a Ernesto Contreras por su guía en el desarrollo de este proyecto, y por instigar el trabajo duro en la investigación académica.

## Resumen

En este trabajo de investigación se estudian objetos compactos esféricamente simétricos con materia anisótropa en el marco de la relatividad general. Para ello, se utiliza la ecuación de estado del polítropo maestro  $P = K\rho^\gamma + \alpha\rho - \beta$  que evita la divergencia de la velocidad tangencial en la superficie del objeto y generaliza el tratamiento de la ecuación de estado. Se encuentra la respectiva ecuación de Lane-Emden y se la integra considerando tres modelos para la anisotropía: anisotropía heurística (la anisotropía es proporcional al término gravitacional en la ecuación TOV), el doble polítropo maestro (considera que tanto la presión radial y la tangencial están determinados por la ecuación de estado del polítropo maestro) y el polítropo conformalmente plano (determina una relación entre los potenciales métricos a través de la anulación del tensor de Weyl). Además, se analiza la aceptabilidad física de las soluciones.

Palabras clave: Objeto compacto, ecuación de estado, polítropos, ecuación de Lane-Emden, distribución de presión anisótropa.

## Abstract

In this research work, spherically symmetric compact objects with anisotropic matter are studied within the framework of general relativity. For this, the equation of state of the master polytrope  $P = K\rho^\gamma + \alpha\rho - \beta$  is used, which avoids the divergence of the tangential velocity on the surface of the object and generalizes the treatment of the equation of state. The respective Lane-Emden equation is found and integrated considering three models for anisotropy: heuristic anisotropy (anisotropy is proportional to the gravitational term in the TOV equation), double master polytrope (considers both radial and tangential pressure are determined by the master polytrope's equation of state), and flat conformal polytrope (determines a relationship between the metric potentials through the cancellation of the Weyl tensor). In addition, the physical acceptability of the solutions is analyzed.

Compact object, equation of state, polytropes, Lane-Emden equation, anisotropic pressure distribution.

# Índice general

Resumen . . . . .	7
Abstract . . . . .	8
Índice de figuras . . . . .	11
Índice de cuadros . . . . .	12
<b>1. Introducción</b>	<b>14</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>17</b>
2.1. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	17
2.2. Polítropos . . . . .	19
2.3. Polítropo anisótropo relativista . . . . .	22
2.4. Polítropo Maestro Relativista . . . . .	30
2.5. Ecuación “maestra” de Lane-Emdem . . . . .	32
2.6. Modelos para la anisotropía de los polítropos relativistas . . . . .	35
2.6.1. Modelo Heurístico . . . . .	35
2.6.2. Doble Polítropo maestro . . . . .	36
2.6.3. Polítropos conformalmente planos . . . . .	38
<b>3. Modelos físicamente aceptables</b>	<b>41</b>
<b>4. Resultados y discusión</b>	<b>48</b>
4.1. Modelo Heurístico . . . . .	48
4.2. Doble Polítropo . . . . .	53
4.3. Polítropo conformalmente plano . . . . .	58
4.4. Polítropo maestro como modelo de estrella de neutrones . . . . .	62
4.5. Discusión . . . . .	64
<b>5. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>Referencias</b>	<b>69</b>
<b>Anexos</b>	<b>77</b>

<b>A. Deducción de la Ecuación “maestra” de Lane-Emden</b>	<b>78</b>
<b>B. Conformalmente plano</b>	<b>85</b>
<b>C. Anticracking</b>	<b>88</b>
<b>D. Resultados del politropo conformalmente plano con <math>C=1</math></b>	<b>92</b>

# Índice de figuras

4.1.	Función $\psi$ (a) y función $\eta$ (b), para distintos valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	49
4.2.	Los potenciales métricos $e^{-2\lambda}$ (a), $e^{2\nu}$ (b) y el desplazamiento hacia el rojo (c), para distintos valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	50
4.3.	Densidad (a), presión radial (b), presión tangencial (c) y anisotropía (d), para distintos valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	51
4.4.	Las velocidades del sonido $v_s^2$ (a) y $v_\perp^2$ (b), para distintos valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	53
4.5.	Condición de energía fuerte, para los valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	54
4.6.	Función $\psi$ (a) y función $\eta$ (b) para el doble polítropo y para distintos valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	54
4.7.	Los potenciales métricos $e^{-2\lambda}$ (a), $e^{2\nu}$ (b) y el desplazamiento hacia el rojo $Z$ (c) para el doble polítropo, para los valores de índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	55
4.8.	Densidad $\rho$ (a), presión $P$ radial (b), presión tangencial $P_\perp$ (c) y anisotropía $\Delta$ (d) para el doble polítropo, para los valores de índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	56
4.9.	Las velocidades del sonido $v_s^2$ (a) y $v_\perp^2$ (b) para el doble polítropo, para los valores de índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	57
4.10.	Condición de energía fuerte para el doble polítropo, para los valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	58
4.11.	Función $\psi$ (a) y función $\eta$ (b) del polítropo conformalmente plano con $C = 0.01$ , para distintos valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	58

4.12. Los potenciales métricos $e^{-2\lambda}$ (a), $e^{2\nu}$ (b) y el desplazamiento hacia el rojo (c) del polítopo conformalmente plano con $C = 0.01$ , para distintos valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	60
4.13. Densidad (a), presión radial (b), presión tangencial (c) y anisotropía (d) del polítopo conformalmente plano con $C = 0.01$ , para los valores de índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	61
4.14. Las velocidades del sonido $v_s^2$ (a) y $v_\perp^2$ (b) del polítopo conformalmente plano con $C = 0.01$ , para los valores del índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	62
4.15. Condición de energía fuerte para polítopo conformalmente plano con $C = 0.01$ , para los valores de índice politrópico $n = 0.5$ (rojo), $n = 1.0$ (azul), $n = 1.5$ (negro) y $n = 2.0$ (verde). . . . .	62
D.1. Las funciones métricas $e^{-2\lambda}$ (decreciente), $e^{2\nu}$ (creciente) y se unen en la superficie del objeto (a), corrimiento al rojo $Z$ (b), para los valores de los parámetros $\alpha = 0.05$ , $\chi = 0.29$ , $\sigma = 0.45$ y índices politrópicos $n = 1.0$ (rojo), $n = 1.5$ (azul), $n = 2.0$ (negro) y $n = 2.5$ (verde). . . . .	93
D.2. Perfiles para $\rho$ (a), $P$ (b), $P_\perp$ (c), $\Delta$ (d), para los valores de los parámetros $\alpha = 0.05$ , $\chi = 0.29$ , $\sigma = 0.45$ y los índices politrópicos $n = 1.0$ (rojo), $n = 1.5$ (azul), $n = 2.0$ (negro) y $n = 2.5$ (verde). . . . .	94
D.3. Velocidad del sonido radial $v_s^2$ (a), velocidad del sonido tangencial $v_\perp$ (b) y condición de energía fuerte (SEC) (c) para los valores de los parámetros $\alpha = 0.05$ , $\chi = 0.29$ , $\sigma = 0.45$ y $n = 1.0$ (rojo), $n = 1.5$ (azul), $n = 2.0$ (negro) y $n = 2.5$ (verde). . . . .	95

## Índice de cuadros

4.1. Radios de superficie, factores de compacidad y corrimiento al rojo para el modelo heurístico. . . . .	51
4.2. Radios de superficie y factores de compacidad para el doble polítopo . . . . .	53
4.3. Radios de superficie, factores de compacidad y corrimiento al rojo para $C = 0.01$ . . . . .	59
4.4. Radios de superficie, factores de compacidad y corrimiento al rojo para $C = 1.0$ con $\alpha = 0.05$ , $\chi = 0.29$ y $\sigma = 0.45$ . . . . .	63
4.5. Resultados para el modelo heurístico con $C = 0.09$ y conformemente plano con $C = 0.1$ que se compara con la anulación del factor de complejidad con ecuación de estado de estado $P = K\rho^{1+1/n}$ para $n = 3.0$ y el resultado de Lindblom considerando la densidad superficial $\rho_R \leq 3.0 \times 10^{14} g/cm^{-3}$ . Para el doble polítopo no se encontró un resultado favorable. . . . .	64

# Capítulo 1

## Introducción

La Teoría General de la Relatividad (TGR) es capaz de explicar los fenómenos relativistas gravitacionales observados en cualquier punto del espacio-tiempo y medidos por cualquier sistema general de referencia. En 1915 Einstein publicó en forma tensorial las ecuaciones de campo de la TGR. Dichas ecuaciones relacionan la curvatura del espacio tiempo local (expresada por el tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ ) con la energía local, el momento y la tensión dentro de ese espacio-tiempo (expresada por el tensor de tensión-energía  $T_{\mu\nu}$ ) [1–5]. Según esta formulación, la gravedad no es considerada como una fuerza de acción a distancia inmediata, en su lugar el campo gravitacional es tomado como la curvatura del espacio-tiempo.

Poco tiempo después de que Einstein publicara sus ecuaciones, el físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild obtuvo la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein, para el campo gravitatorio generado por una estrella o una masa esférica estática en el vacío [1–5]. Esta acción fue la precursora para buscar más soluciones que describan muchos sistemas, mayormente en el área de la astrofísica, por ejemplo objetos compactos autogravitantes, tales como las enanas blancas [6], estrellas de neutrones [7], agujeros negros y diferentes

configuraciones estelares [8].

Para modelar la estructura interna de objetos compactos, se han desarrollado métodos para obtener soluciones de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, dada la simetría del sistema es obligatorio introducir ecuaciones de estado para cerrar el sistema, que son expresiones matemáticas que relacionan la presión y la densidad de masa o de energía. Las ecuaciones de estado también sirven para describir muchas propiedades de los fluidos [6–8].

Una estrella u objeto compacto es un fluido que transmite energía desde su parte interior hacia el exterior. Esta transmisión se puede considerar mucho menor que la energía del objeto para tiempos muy extensos y podemos aproximar a la estrella como un sistema adiabático [9], por lo cual una estrella se la puede considerar como un polítropo con ecuación de estado estándar<sup>1</sup>  $P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}$ , donde  $P$ ,  $K$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$  y  $n$  son la presión, la constante politrópica, la densidad de energía, el exponente politrópico y el índice politrópico respectivamente [9–17]. Los polítropos han sido ampliamente utilizados para resolver problemas de soluciones interiores de objetos compactos, junto con la ecuación de Lane-Emdem [18–22].

Aunque es muy común suponer la isotropía local en las estrellas [15–17], en estos objetos compactos están presentes ciertos fenómenos como: convección por altas temperaturas, campos magnéticos fuertes, perturbaciones debido a la rotación de la estrella, la presencia de un núcleo y capas que componen a la estrella, hacen que nuestra percepción de que la estrella se comporte como un fluido perfecto no sea correcto [23–46]. Estas imperfecciones en la estrella nos permiten asumir que está compuesta de un fluido anisótropo, donde la presión tiene una componente radial y otra componente tangencial [47, 48]. La introducción de la anisotropía  $\Delta = P - P_\perp$  hace que se necesiten más condiciones para poder cerrar el sistema [49]. Para resolver este

---

<sup>1</sup>Un gas adiabático tiene como ecuación de estado  $P = K\rho^\gamma$ , donde  $K$  es la constante adiabática y  $\gamma$  es el índice adiabático. Tienen similitud con el polítropo, pero se diferencia en que la ecuación de estado politrópica describe cómo cambia la presión con la densidad en el interior a medida que uno se mueve a través de una estrella, mientras que la ecuación de estado adiabática describe cómo respondería una capa de gas determinada al ser comprimida.

problema en muchos casos se puede modelar la anisotropía haciendo una suposición que introduzca la anisotropía como una función [49–51], o buscando relaciones entre las variables métricas [52, 53].

En la búsqueda de generalizar la descripción de estos objetos compactos, en este trabajo se propone el uso de la ecuación de estado del polítopo maestro  $P = K\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta$  [67, 68]. Siguiendo el procedimiento dado en las referencias [67, 68], se construye la ecuación de Lane-Emden con la ecuación de estado para el polítopo maestro relativista. El objetivo de nuestro proyecto es determinar una solución numérica para las ecuaciones de Lane-Emden para el polítopo maestro relativista, con ayuda de alguna condición que permita resolver la presencia de la anisotropía en las ecuaciones. Para esto empleamos el modelo heurístico que supone que la anisotropía es proporcional a la fuerza de gravedad [49], doble polítopo [50, 51], y condición de nulidad del tensor de Weyl (polítopo conformemente plano) [52]

El manuscrito está dividido de la siguiente manera. El capítulo 2 está dedicado a establecer el marco teórico en el cual se basa este trabajo, en el mismo se revisará las ecuaciones de campo de Einstein, la teoría de polítopos, la ecuación de Lane-Emden y la función de anisotropía. En el capítulo 3 se establecen las condiciones para que una solución sea físicamente aceptable. En el capítulo 4 se muestran los resultados para los casos de anisotropía para el modelo heurístico, doble polítopo, el polítopo conformemente plano y discusión. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones.

## Capítulo 2

### Marco teórico

#### 2.1. Ecuaciones de campo de Einstein

En el año 1915, Einstein publicó su Teoría General de la Relatividad, y con ella sus ecuaciones de campo (conocidas como ecuaciones de campo de Einstein) que relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de la materia contenida en él [1, 2], por medio de la relación tensorial

$$G_{\alpha\beta} = -\kappa^2 T_{\alpha\beta}, \quad (2.1)$$

donde  $\kappa^2 = 8\pi$  es una constante de proporcionalidad<sup>1</sup>,  $G_{\alpha\beta}$  es el tensor de Einstein que contiene la información geométrica del espacio-tiempo,  $T_{\alpha\beta}$  contiene la información de la materia (densidad de energía y presión de la materia) llamado tensor energía-impulso y  $\alpha = \beta = 0, 1, 2, 3$  son los índices espacio-temporales [1, 2].

---

<sup>1</sup> $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$ , en este estudio usaremos unidades naturales  $G = c = 1$

El tensor de Einstein se puede escribir como

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico,  $R_{\alpha\beta}$  y  $R$  son el tensor de Ricci y el escalar de curvatura y definidos como

$$R_{\alpha\beta} = R^{\rho}{}_{\alpha\rho\beta} \quad (2.3)$$

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (2.4)$$

La cantidad  $R^{\rho}{}_{\alpha\rho\beta}$  en la ecuación (2.3) es la contracción del tensor de Riemann cuya forma es

$$R^{\rho}{}_{\alpha\sigma\beta} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\beta\alpha}^{\rho} - \partial_{\beta}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\rho}, \quad (2.5)$$

donde  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  son los símbolos de Christoffel definidos como [1–3, 5]:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_{\beta}g_{\gamma\sigma} + \partial_{\gamma}g_{\beta\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\beta\gamma}). \quad (2.6)$$

La primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) fue dada por Schwarzschild en 1916. Describe el exterior de un cuerpo de masa  $M$  y de radio  $R$ , esférico y estático, viene dada por la métrica [1, 2]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.7)$$

Nuestro interés es modelar el interior de una estrella con distribución de materia anisótropa. En este capítulo vamos a dar las herramientas necesarias que permitirán construir nuestro mo-

delo. Empezaremos describiendo las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) en el interior de un objeto con simetría esférica que modela una estrella.

## 2.2. Polítropos

Los polítropos<sup>2</sup> son esferas gaseosas autogravitantes y son usados como modelos estelares. Fueron introducidos en el estudio de objetos compactos en el régimen Newtoniano (ver referencias [6–8, 10–12]). Su gran éxito se debe principalmente a la simplicidad de la ecuación de estado  $P = P(\rho)$  y la ecuación principal resultante: la ecuación de Lane-Emden.

La teoría de polítropos se basa en la ecuación de estado politrópica, la cual en el caso Newtoniano puede ser escrita como

$$P = K\rho_o^\gamma = K\rho_o^{1+1/n}, \quad (2.8)$$

donde  $P$  y  $\rho_o$  denotan la presión y la densidad de masa (bariónica). La constantes  $K$ ,  $\gamma$  y  $n$  son la constante politrópica, el exponente politrópico y el índice politrópico respectivamente [6–8]. La ecuación de estado politrópica puede servir para modelar las siguientes situaciones:

- a) Cuando la constante  $K$  se calcula a partir de las constantes naturales. En este caso se tiene un gas de electrones completamente degenerado. En el límite no relativista cuando  $\gamma = 5/3$  o  $n = 3/2$  (en el límite relativista cuando  $\gamma = 4/3$  o  $n = 3$ ). Los polítropos de esta clase son útiles para modelar objetos compactos como las enanas blancas, y conducen de una manera bastante simple al límite de Chandrasekhar (para  $n = 3$ ) [8, 49].
- b) Por otro lado cuando  $K$  es un parámetro libre, sirve para modelar un gas ideal isotérmico,

<sup>2</sup>Proviene de la etimología del griego “poly” que significa muchos, y “tropic” que significa manera.

o en una estrella completamente convectiva<sup>3</sup>. Estos modelos están relacionados con el gas ideal isotérmico y son relevantes en el llamado límite de Schönberg–Chandrasekhar [8, 49].

En algunos casos los objetos en estudio pueden ser tan compactos de manera que se requiera el uso de la teoría de la relatividad (por ejemplo: las estrellas de neutrones, quarks) [13–22]. En el contexto de esta teoría, es posible dos extensiones de la ecuación de estado polítripo:

a) En el primero, la ecuación original de estado politrópica (2.8) se conserva,

$$P = K\rho_o^\gamma = K\rho_o^{1+1/n}.$$

La primera y la segunda ley de la termodinámica pueden ser escritas como<sup>4</sup> [49]:

$$Td\left(\frac{\sigma}{\rho_o}\right) = d\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right) + Pd\left(\frac{1}{\rho_o}\right). \quad (2.9)$$

Considerando un proceso adiabático y  $P = K\rho_o^\gamma$ , se obtiene

$$d\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right) - K\rho_o^{\gamma-2}d\rho_o = 0, \quad (2.10)$$

con

$$\gamma = 1 + 1/n.$$

---

<sup>3</sup>La energía dentro de la estrella se transporta por medio de convección

<sup>4</sup>La combinación de la primera y segunda ley de la termodinámica es  $TdS = dU + PdV$ . La densidad de energía está relacionada con la energía interna por medio de  $\rho = \rho_o + U$  y  $T$  es la temperatura [15]. Para un cambio de volumen específico  $dV = d(1/\rho_o)$ , los cambios de entropía y energía interna son  $dS = d(\sigma/\rho_o)$  y  $dU = d(\rho/\rho_o)$  respectivamente, donde  $\sigma$  denota la entropía por unidad de volumen [49].

Si  $\gamma \neq 1$ , (2.10) se integra para obtener [49]

$$\rho = C\rho_o + P/(\gamma - 1). \quad (2.11)$$

En el régimen no relativista  $\rho = \rho_o$  entonces  $C = 1$  y  $n = 1/(\gamma - 1)$ , se sigue que la densidad de energía  $\rho$  y la densidad de masa bariónica  $\rho_o$  están relacionadas a través de la ecuación [49]

$$\rho = \rho_o + nP. \quad (2.12)$$

- b) El segundo caso corresponde a reemplazar la densidad de materia bariónica  $\rho_o$  por la densidad de energía. En tal caso podemos escribir

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}, \quad (2.13)$$

Se puede demostrar que la relación entre dos densidades esta dada por (para más detalles, observar [49]),

$$\rho = \frac{\rho_o}{\left(1 - K\rho_o^{1/n}\right)^n}. \quad (2.14)$$

Inicialmente, tanto en el régimen Newtoniano y de relatividad general, los objetos compactos se les han considerado compuestos de un fluido isotrópico<sup>5</sup> [15–19]. Sin embargo, en muchos trabajos se ha utilizado la suposición de las ecuaciones de estado politrópicas para flujo anisótropos<sup>6</sup> [47–53]. El motivo para tal estudio se debe a que muchos fenómenos físicos en

<sup>5</sup>Fluido de Pascal cuya tensiones principales son iguales.

<sup>6</sup>Las tensiones principales no son iguales.

objetos compactos pueden causar desviaciones en la isotropía o anisotropía local [23–26].

Son varias las razones detrás de la anisotropía. Una puede ser a causa de los campos magnéticos intensos observados en objetos compactos tal como las enanas blancas, las estrellas de neutrones o estrellas de quarks magnetizadas [27–30]. Otra causa de anisotropía se espera en las estrellas de neutrones y materia de alta densidad debido a la viscosidad [31–37], así como la mezcla de fluidos de diferente tipos, el movimiento rotacional, transición de fase, etc. Las ideas que envuelve la anisotropía y sus aplicaciones en diversos campos están disponibles en la literatura [38–43].

Si consideramos simetría esférica y asumimos anisotropía local en la materia, esta viene dada por  $\Delta = P_{\perp} - P$ , donde  $P$  y  $P_{\perp}$  corresponde a las presiones radial y tangencial respectivamente. En la teoría de polítopos anisótropos relativista [49–53], se considera que la presión radial  $P$  tiene una ecuación de estado de polítopo

$$P = K\rho^{1+1/n}.$$

En la siguiente sección presentamos la teoría para modelar los polítopos anisótropos relativistas mediante las ecuaciones de campo de Einstein.

### 2.3. Polítopo anisótropo relativista

Una estrella es un objeto compacto masivo que ha mantenido su estructura y su forma casi esférica, inalterada durante un largo periodo de tiempo y por lo tanto, se le puede modelar como un fluido compacto, con simetría esférica rodeado por un espacio vacío [6, 8]. Basado en las

suposiciones anteriores la geometría interior de la estrella es descrita por el elemento de línea

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.15)$$

que representa un espacio estático y de simetría esférica, donde  $\nu$  y  $\lambda$  son funciones de  $r$ . De lo anterior

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ahora las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \nu', & \Gamma_{00}^1 &= e^{\nu-\lambda} \nu', \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{11}^1 &= \lambda', \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que las componentes no nulas del tensor de Einstein son

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2(\nu-\lambda)} (2r\lambda' - 1 + e^{2\lambda}) \quad (2.17)$$

$$G_{11} = \frac{1}{r} \left( 2\nu' + \frac{1}{r} (1 - e^{2\lambda}) \right) \quad (2.18)$$

$$G_{22} = r^2 e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 + \frac{\nu'}{r} - \nu'\lambda' - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (2.19)$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta G_{22}. \quad (2.20)$$

El tensor energía-impulso  $T_{\alpha\beta}$ , para materia anisotrópica esta dado por:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P_{\perp}) u_{\alpha} u_{\beta} - P_{\perp} g_{\alpha\beta} + (P - P_{\perp}) s_{\alpha} s_{\beta} \quad (2.21)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $P$  y  $P_{\perp}$  son la presión radial y la presión tangencial respectivamente. Además para un observador local inercial resulta que,

$$u^{\alpha} = (e^{-\nu}, 0, 0, 0), \quad (2.22)$$

es la cuadrivelocidad del fluido y  $s^{\alpha}$  es definido como

$$s^{\alpha} = (0, e^{-\lambda}, 0, 0), \quad (2.23)$$

con las propiedades  $s^\alpha u_\alpha = 0$ ,  $s^\alpha s_\alpha = -1$ . Entonces;

$$(T^\alpha_\beta) = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_\perp \end{bmatrix}.$$

En el caso de materia isotrópica  $P = P_\perp$  el tensor energía-impulso se reduce a

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P)u_\alpha u_\beta - P g_{\alpha\beta}.$$

Remplazando (2.17)-(2.20) y (2.21) en (2.1), las ecuaciones de campo toman la forma:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2} + e^{-2\lambda} \left( \frac{2\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right), \quad (2.24)$$

$$8\pi P = -\frac{1}{r} + e^{-2\lambda} \left( \frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (2.25)$$

$$8\pi P_\perp = e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right). \quad (2.26)$$

Estas tres ecuaciones no lineales corresponden a las componentes temporal, radial y tangencial de las ecuaciones de campo de Einstein y forman un sistema de ecuaciones con cinco incógnitas  $\rho$ ,  $P$ ,  $P_\perp$ ,  $\nu$  y  $\lambda$ . Por lo cual se necesitan dos relaciones adicionales para cerrar el sistema. La solución de este sistema corresponde a la parte interior del objeto compacto. Una forma de buscar una solución es tratar de disminuir la complejidad de estas ecuaciones introduciendo una nueva variable. Para lograr este objetivo la ecuación temporal (2.24) se puede escribir en la

forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r (1 - e^{-2\lambda})] = \kappa \rho, \quad (2.27)$$

esto permite remplazar a la función  $\lambda(r)$  por una nueva función  $m(r)$

$$m(r) = \frac{1}{2} r (1 - e^{-2\lambda}). \quad (2.28)$$

Con esta nueva definición se reescribe la ecuación (2.27) como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.29)$$

que tiene la misma forma del caso Newtoniano para determinar la masa de una esfera, razón por lo cual  $m(r)$  es llamada la función de masa. Al integrar (2.29), se obtiene la masa que encierra una esfera de radio  $r$

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'. \quad (2.30)$$

Con esta nueva definición el coeficiente espacial radial de la métrica en función de  $m(r)$  es

$$e^{2\lambda} = \left(1 - 2\frac{m(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (2.31)$$

por lo que la métrica al interior de la estrella toma la forma

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.32)$$

De la conservación del tensor de energía momento

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.33)$$

se obtiene

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{d\nu}{dr} + \frac{2}{r}(P_{\perp} - P). \quad (2.34)$$

Esta última ecuación es la ecuación de equilibrio hidrostático para materia anisótropa. Con la nueva variable  $m(r)$ , se puede demostrar que la ecuación radial de campo (2.25) se puede escribir en la forma

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi Pr^3}{r(r - 2m(r))}. \quad (2.35)$$

Remplazando esta última expresión en (2.34) da como resultado la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para la materia anisótropa

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{m(r) + 4\pi Pr^3}{r(r - 2m(r))} + \frac{2}{r}(P_{\perp} - P), \quad (2.36)$$

Reescribiendo esta ecuación en

$$\underbrace{\frac{dP}{dr}}_{F_P} = - \underbrace{\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}}_{F_g} + \underbrace{\frac{2}{r}\Delta}_{F_a}, \quad (2.37)$$

donde  $\Delta = P_{\perp} - P$  es la anisotropía que presenta el sector material. Esta ecuación nos indica que el gradiente de presión  $F_P$  que apunta hacia afuera del sector material, se equilibra con un

término asociado con la fuerza gravitacional  $F_g$  que empuja hacia el interior y una fuerza  $F_a$  que genera la anisotropía cuya influencia depende de su signo. Cuando la presión tangencial domina a la presión radial, la anisotropía es positiva y genera una fuerza  $F_a$  que actúa hacia el exterior y el objeto estelar experimenta una fuerza de repulsión que contrarresta el gradiente gravitatorio  $F_g$ . Por otro lado, cuando el factor de anisotropía es negativo, el sistema experimenta una fuerza de atracción  $-F_a$ . Esto es relevante, ya que un factor positivo de anisotropía mejora la estabilidad y el equilibrio en el sistema [14].

Nótese que en límite Newtoniano  $P \ll \rho$ , y por lo tanto  $4\pi r^3 P \ll m$ . Luego, como la métrica debe ser cercana a una plana, se requiere que  $m \ll r$  [3]. Con esas consideraciones la ecuación TOV se reduce a

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2}, \quad (2.38)$$

que es exactamente la misma del equilibrio hidrostático para estrellas Newtonianas [47].

Las ecuaciones (2.29) y (2.37) forman un sistema de ecuaciones con las incógnitas  $\rho$ ,  $P$ ,  $P_\perp$  y  $m$ , tiene las condiciones de contorno

$$m(0) = 0, \quad m(R) = M, \quad P(R) = 0. \quad (2.39)$$

Para integrar estas ecuaciones son necesarias dos relaciones adicionales para cerrar el sistema. En este trabajo consideramos que estas relaciones están dadas por una ecuación de estado  $P = P(\rho)$  y la anisotropía  $\Delta$ .

Supongamos que el objeto se extiende hasta un radio  $R$ , después del cual hay vacío, por lo

que la métrica para  $r > R$  es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

como necesitamos un espacio-tiempo continuo, las métricas (2.7) y (2.15) deben acoplarse en la superficie de la estrella cuando  $r = R$  [2, 3], de manera que

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R r'^2 \rho(r') dr'. \quad (2.40)$$

Las componentes temporal y radial de las métricas también deben ser continuas en  $r = R$ , por lo que

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 - 2\frac{M}{R}. \quad (2.41)$$

La presión radial también debe acoplarse con el hecho de que fuera de la estrella la presión es cero, por lo tanto en la superficie

$$P(R) = 0. \quad (2.42)$$

En la siguiente sección describiremos la necesidad de introducir la ecuación de estado para el polítopo maestro que usaremos para cerrar el sistema formado por las ecuaciones (2.29) y (2.37).

## 2.4. Polítropo Maestro Relativista

La ecuación de estado  $P = K\rho^{1+1/n}$  tiene la contrariedad de que al evaluar la velocidad del sonido radial  $v_s^2 = \partial P/\partial\rho$  diverge en la superficie del objeto compacto. Para resolver este problema es necesario introducir una ecuación de estado más general [67, 68], que lo justificaremos como sigue a continuación. Si tomamos la ecuación radial (2.25) y despejamos  $dv/dr$  obtenemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2r} [e^{2\lambda} (8\pi r^2 P + 1) - 1],$$

reemplazando en la ecuación de equilibrio hidrostático (2.34), llegamos a

$$P_{\perp} = P + \frac{e^{2\lambda}}{4} (\rho + P) (8\pi r^2 P - e^{-2\lambda} + 1) + \frac{r}{2} v_s^2 \rho', \quad (2.43)$$

donde  $v_s^2 = dP/d\rho$  es la velocidad del sonido radial. De esta última ecuación obtenemos la velocidad del sonido tangencial

$$v_{s\perp}^2 = \frac{dP_{\perp}}{d\rho} = \frac{1}{2} \left[ 3 + r \frac{\rho''}{\rho'} \right] v_s^2 + \frac{1}{\rho'} \left[ \frac{e^{2\lambda}}{4} (\rho + P) (8\pi r^2 P - e^{-2\lambda} + 1) \right]' + \frac{r}{2} (v_s^2)'. \quad (2.44)$$

Para la ecuación de estado (2.13), la velocidad del sonido radial y tangencial son

$$v_s^2 = (1 + 1/n) K \rho^{1/n} \quad (2.45)$$

$$v_{s\perp}^2 = \frac{1}{2} \left[ 3 + r \frac{\rho''}{\rho'} \right] v_s^2 + \frac{1}{\rho'} \left[ \frac{e^{2\lambda}}{4} (\rho + P) (8\pi r^2 P - e^{-2\lambda} + 1) \right]' + \frac{r}{2} (1 + n) \frac{K}{n} \frac{\rho^{1/n}}{\rho} \rho'. \quad (2.46)$$

Con la ecuación de estado (2.13), en la superficie del objeto cuando  $r = R$  (radio del objeto) tenemos que  $\rho(R) = P(R) = 0$ . Podemos observar que el último término de la ecuación (2.46) diverge para  $n > 1$ , y como consecuencia  $v_{s\perp}$  será singular en la superficie del objeto [67]. Esta es la principal motivación para introducir una ecuación de estado anisotrópica más general conocida como la ecuación de estado politrópica “maestra” relativista, la cual está dada por [67]

$$P = K \rho^{1+1/n} + \alpha \rho - \beta, \quad (2.47)$$

donde  $P$ ,  $\rho$ ,  $K$  y  $n$  son la presión radial, la densidad de masa, la constante politrópica y el índice politrópico [68]. Esta última ecuación de estado se diferencia de la ecuación de estado estándar de politropos (2.13), en la que los parámetros  $\alpha = \beta = 0$ . Para esta nueva ecuación de estado la velocidad del sonido radial y tangencial son:

$$v_s^2 = (1 + 1/n) K \rho^{1/n} + \alpha \quad (2.48)$$

$$v_{s\perp}^2 = \frac{1}{2} \left[ 3 + r \frac{\rho''}{\rho'} \right] v_s^2 + \frac{1}{\rho'} \left[ \frac{e^{2\lambda}}{4} (\rho + P(\rho)) (8\pi r^2 P(\rho) - e^{-2\lambda} + 1) \right]' + \frac{r}{2} (1 + n) \frac{K}{n} \frac{\rho^{1/n}}{\rho} \rho'. \quad (2.49)$$

Nótese que la velocidad del sonido radial para la ecuación de estado estándar (2.45) difiere de la

maestra (2.48) por el parámetro  $\alpha$ , mientras que la velocidad del sonido tangencial permanece igual para ambas ecuaciones de estado [67]. De la ecuación (2.47), y del hecho que la presión en la superficie se anula, se obtiene

$$\beta = K\rho_R^{1+1/n} + \alpha\rho_R. \quad (2.50)$$

Esto muestra que la densidad no se anula en la superficie del objeto y por lo tanto la velocidad del sonido tangencial no es singular allí [67]. Ahora, podemos tomar la ecuación de estado maestra del polítropo como una relación adicional para integrar las ecuaciones (2.37) y (2.29).

## 2.5. Ecuación “maestra” de Lane-Emden

La ecuación de Lane-Emden es una forma adimensional de la expresión de TOV (2.37) para una ecuación de estado politrópica. Su importancia radica en que se puede construir un modelo estelar politrópico que pueda representar objetos compactos similares introduciendo valores en los parámetros que tenga la ecuación. En esta sección describiremos la obtención de la correspondiente ecuación de Lane-Emden para la ecuación de estado politrópica “maestra” generalizada siguiendo los pasos mostrados en Hernández et al., 2022 [68]. Para esto, vamos a determinar los parámetros físicos involucrados en esta derivación. Los parámetros  $K$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación (2.47) no son independientes pero, debido a que la presión en la superficie se anula (cuando  $r = R$ , donde  $R$  es el radio de la superficie), se obtiene

$$\beta = K\rho_R^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho_R,$$

con

$$K = \frac{\sigma - \alpha[1 - \chi]}{\rho_c^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \chi^{1+\frac{1}{n}} \right]}, \quad (2.51)$$

donde

- $\sigma = P_c/\rho_c$ , describe la dureza en el centro<sup>7</sup> de la distribución de la materia.
- $\chi = \rho_R/\rho_c$ , bosqueja el descenso de la densidad desde el centro hasta la superficie de la estrella [68].

Para integrar las ecuaciones (2.37) y (2.29), se usará la ecuación de estado (2.47) e introduciendo el siguiente cambio de variables [68]:

$$r = a\xi, \quad \rho = \rho_c \psi^n(\xi), \quad m = 4\pi a^3 \rho_c \eta(\xi), \quad (2.52)$$

donde  $a$  es el radio de dimensión de Lane-Emden, que se puede escribir como

$$a^2 = \frac{\Upsilon(1+n)}{4\pi\rho_c} \quad \text{con} \quad \Upsilon = K\rho_c^{1/n} = \frac{\sigma - \alpha(1-\chi)}{1 - \chi^{1+1/n}}, \quad (2.53)$$

$\psi$  y  $\eta$  son funciones adimensionales de la variable adimensional  $\xi$ .

Remplazando las nuevas variables en la ecuación de estado (2.47), y dividiendo para la densidad central obtenemos

$$\mathcal{P} = \frac{P}{\rho_c} = \Upsilon (\psi^{n+1} - \chi^{1+1/n}) + \alpha(\psi^n - \chi). \quad (2.54)$$

---

<sup>7</sup>El subíndice  $c$  indica que una variable es evaluada en el centro de la estrella

Realizando el cambio de variables (2.52) y haciendo uso de (2.54), la ecuación de TOV se expresa como

$$\psi'(\xi) = -\frac{1}{\xi} \left[ \frac{[\eta + \xi^3 \mathcal{P}][1 + \mathcal{P}\psi^{-n}]}{\xi - 2\Upsilon(1+n)\eta} - \frac{2\Delta}{\rho_c \Upsilon(1+n)\psi^n} \right] \left[ 1 + \frac{\alpha\eta}{\Upsilon(1+n)\psi} \right]^{-1}, \quad (2.55)$$

donde  $\Delta = P_{\perp} - P$  representa la anisotropía. Esta última ecuación es la ecuación generalizada de Lane-Emden para el polítopo maestro relativista y su obtención se muestra en el anexo A.

Realizando el mismo cambio de variable en la ecuación de masa (2.29), se obtiene

$$\eta'(\xi) = \xi^2 \psi^n. \quad (2.56)$$

Las ecuaciones (2.55) y (2.56) forman un sistema de ecuaciones no lineales para las incógnitas  $\psi$ ,  $\eta$  y  $\Delta$ , en función de la nueva variable  $\xi$ .

Una vez resuelto, las cantidades físicas en las nuevas variables pueden ser obtenida mediante las siguientes relaciones

$$\rho = \rho_c \psi^n, \quad (2.57)$$

$$P = \rho_c \mathcal{P}, \quad (2.58)$$

$$m = \Upsilon(n+1)a\eta, \quad (2.59)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - 2\frac{\Upsilon(n+1)\eta}{\xi}, \quad (2.60)$$

mientras que la función métrica  $\nu$  se la obtiene de la ecuación diferencial

$$\frac{d\nu}{d\xi} = \frac{4\pi P \xi a^2 + \Upsilon(n+1)\eta/\xi^2}{1 - 2\Upsilon(n+1)\eta/\xi}, \quad (2.61)$$

con la condición de borde

$$e^{2\nu(\xi_R)} = 1 - 2 \frac{\Upsilon(n+1)\eta(\xi_R)}{\xi_R}. \quad (2.62)$$

Para cerrar el sistema es necesaria una condición adicional para la anisotropía  $\Delta$ . En la siguiente sección presentamos tres tipos de modelos considerados en este trabajo.

## 2.6. Modelos para la anisotropía de los polítopos relativistas

En este trabajo se presentan tres modelos para anisotropía. El primero modelo es heurístico, considera que la anisotropía es proporcional a fuerza gravitacional [23]. El segundo, considera que tanto la presión radial y la presión tangencial son ecuaciones de estado del polítopo maestro [51]. El tercer modelo impone una relación entre las variables métricas con la anulación del tensor de Weyl denominada condición conformemente plana [53].

### 2.6.1. Modelo Heurístico

Este modelo heurístico fue introducido en [23], y ha sido utilizado para modelar polítopos anisótropos relativistas [49], [67]. El procedimiento que se muestra en [23] se puede resumir como sigue. La anisotropía puede ser considerada como

$$\Delta = CF(P, r)(\rho + P)r^n, \quad (2.63)$$

donde  $C$  es una constante a lo largo de la esfera y mide el grado de anisotropía. De hecho si  $C = 0$  se recupera el caso isótropo. La función  $F$  y el número  $n$  son especificados para cada

modelo. Sin embargo, si definimos

$$F(P, r)r^n = \frac{d\nu}{dr}r, \quad (2.64)$$

la ecuación TOV (2.37) adquiere la forma

$$\frac{dP}{dr} = -(1 - 2C)(\rho + P)\frac{d\nu}{dr}. \quad (2.65)$$

Ahora combinando (2.35) con (2.63) obtenemos

$$\Delta = Cr(\rho + P) \left[ \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \right], \quad (2.66)$$

de donde

$$\frac{dP}{dr} = -(1 - 2C) \frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}. \quad (2.67)$$

En términos de las variables politrópicas establecidas en (2.52), (2.67) queda

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -(1 - 2C) \frac{[\eta + \xi^3 \mathcal{P}][1 + \mathcal{P}\psi^{-n}]}{\xi[\xi - 2\Upsilon(1 + n)\eta]} \left[ 1 + \frac{\alpha n}{\Upsilon(1 + n)\psi} \right]^{-1}. \quad (2.68)$$

### 2.6.2. Doble Polítropo maestro

El doble Polítropo es una idea mostrada en [50, 51], que consiste en suponer que las tensiones principales  $P$  y  $P_{\perp}$  tiene la forma de una ecuación de estado de polítropo. En este trabajo suponemos que las tensiones principales tienen la forma de la ecuación de estado del polítropo

maestro, es decir

$$P = K\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta, \quad (2.69)$$

$$P_{\perp} = K_{\perp}\rho^{1+1/n_{\perp}} + \alpha_{\perp}\rho - \beta_{\perp}, \quad (2.70)$$

donde  $K$  y  $K_{\perp}$  son las constantes politrópicas radial y tangencial respectivamente. Mientras que  $\alpha$ ,  $\alpha_{\perp}$ ,  $\beta$  y  $\beta_{\perp}$  son constantes. Note que las constantes  $K$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionadas con el hecho de que la presión radial se anula en la superficie del objeto  $P(R) = 0$  [67]

$$\beta = K\rho_R^{1+1/n} + \alpha\rho_R.$$

Remplazando las ecuaciones (2.69 y 2.70) en la anisotropía obtenemos:

$$\Delta = K_{\perp}\rho^{1+1/n_{\perp}} - K\rho^{1+1/n} + (\alpha_{\perp} - \alpha)\rho - (\beta_{\perp} - \beta). \quad (2.71)$$

Introduciendo la siguiente relación  $\rho = \rho_c\psi^n$  en la ecuación anterior, la anisotropía se escribe como:

$$\Delta = K_{\perp}\rho_c^{1+1/n_{\perp}}\psi^{n+n/n_{\perp}} - K\rho_c^{1+1/n}\psi^{1+n} + (\alpha_{\perp} - \alpha)\rho_c\psi^n - (\beta_{\perp} - \beta). \quad (2.72)$$

Vamos a imponer que en el centro del objeto  $P_c = P_{\perp c}$  con el fin de evitar divergencias dentro del sector material y se cumpla la ecuación TOV (ver condición **C4** en el capítulo 3), es decir  $\Delta(0) = 0$  y  $\psi(0) = 1$ , por lo cual

$$K\rho_c^{1+1/n} - K_{\perp}\rho_{\perp}^{1+1/n_{\perp}} + (\alpha - \alpha_{\perp})\rho_c = -(\beta_{\perp} - \beta), \quad (2.73)$$

de donde

$$\Delta = K_{\perp} \rho_c^{1+1/n_{\perp}} (\psi^{n+n/n_{\perp}} - 1) - K \rho_c^{1+1/n} (\psi^{n+1} - 1) + (\alpha_{\perp} - \alpha) \rho_c (\psi^n - 1). \quad (2.74)$$

Usando  $\Upsilon = K \rho_c$  se obtiene

$$\Delta = K_{\perp} \rho_c^{1+1/n_{\perp}} (\psi^{n+n/n_{\perp}} - 1) - \Upsilon \rho_c (\psi^{n+1} - 1) + (\alpha_{\perp} - \alpha) \rho_c (\psi^n - 1). \quad (2.75)$$

### 2.6.3. Polítropos conformalmente planos

En este caso, con la finalidad de encontrar una relación para la anisotropía y poder integrar las ecuaciones de Lane-Emden, supondremos la anulación del tensor de Weyl o equivalentemente la condición conformemente plana<sup>8</sup> [2, 4]. La motivación de esto se debe al rol que tiene el tensor de Weyl en la evolución y estructura de objetos autogravitantes [52]. En efecto, para distribuciones esféricas y estáticas de materia el tensor de Weyl tiene una sola componente y puede ser escrito como:

$$W \equiv \frac{r}{2} C_{232}^3 = \frac{r^3 e^{-2\lambda}}{6} \left( \frac{e^{2\lambda}}{r^2} + \nu' \lambda' - \frac{1}{r^2} - \nu'^2 - \nu'' - \frac{\lambda' - \nu'}{r} \right). \quad (2.78)$$

---

<sup>8</sup>Una transformación conformemente plana es un cambio de escala donde una métrica  $g_{\mu\nu}$  puede reducirse a la forma

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (2.76)$$

o equivalentemente

$$ds'^2 = \Omega^2(x) ds^2 \quad (2.77)$$

para una función no nula  $\Omega(x)$  y  $\eta_{\mu\nu}$  es una métrica plana. Como condición necesaria y suficiente para que esto suceda es que el tensor de Weyl se anule para la métrica  $g_{\mu\nu}$  [2, 4].

en términos de la densidad y la energía [25, 49]

$$W = \frac{r}{2} C_{232}^3 = \frac{4}{3} \pi \int_0^r r^3 \rho' dr + \frac{4}{3} \pi r^3 (P - P_{\perp}). \quad (2.79)$$

En la ref. [49], se ha demostrado que usando la condición de conformidad plana ( $W = 0$ ) se llega a

$$e^{2\nu} = B^2 r^2 \cosh^2 \left[ \int \frac{e^{\lambda}}{r} dr + C \right], \quad (2.80)$$

siendo  $B$  y  $C$  constantes de integración. Esto demuestra que esta condición puede reducir el número de funciones desconocidas y permitiendo integrar las ecuaciones de Lane-Emden (2.55) - (2.56). Sin embargo se puede proceder de forma diferente. En efecto, combinando las ecuaciones de Einstein (2.25) y (2.26) con  $W = 0$ , se puede demostrar que

$$\Delta = \frac{r}{8\pi} \left( \frac{e^{\lambda} - 1}{r^2} \right)' \quad (2.81)$$

Haciendo el cambio de variable  $r = a\xi$ ,  $\rho = \rho_c \Psi^n$ ,

$$\Delta = \rho_c \left( \frac{3\eta}{\xi^3} - \psi^n \right). \quad (2.82)$$

La reproducción de estos resultados se la puede observar en el anexo B.

En un trabajo anterior [52], usando la anisotropía (2.82) y la ecuación de polítopo “estándar”  $P = K\rho^{1+1/n}$  no se obtuvo modelo físico que cumpla con las condiciones de aceptabilidad. Sin embargo, en este trabajo proponemos modelar la anisotropía como una función proporcional

a la mostrada en la ecuación (2.82), esto es

$$\Delta = C * \rho_c \left( \frac{3\eta}{\xi^3} - \psi^n \right), \quad (2.83)$$

donde  $C$  es la constante de anisotropía. Es entendible que si  $C = 1$  corresponde al caso del polítropo conformemente plano.

## Capítulo 3

# Modelos físicamente aceptables

Las soluciones de las ecuaciones de la estructura interna de las estrellas (2.29) y (2.37), para las variables  $\lambda, \nu, \rho, P, P_{\perp}$  deben cumplir con condiciones de aceptabilidad, de manera que el modelo estelar sea físicamente realista [54, 55]. En este capítulo daremos las condiciones de aceptabilidad para los modelos de objetos compactos anisótropos relativistas utilizados en este trabajo.

### C1: Métrica regular

Los potenciales métricos  $e^{2\lambda}$  y  $e^{2\nu}$  deben ser positivos, finitos y libres de singularidades dentro del sector material, y además se debe verificar que en el centro  $e^{2\lambda(0)} = 1$  y  $e^{2\nu(0)} = \text{const}$  [54].

Para justificar esto, asumamos que  $\rho$  y  $P$  son finitos en el centro, además para un radio  $r$  cercano al centro  $m(r) \approx \frac{4}{3}\pi r^3 \rho(r)$ . De la expresión (2.31) tenemos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{-2\lambda} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( 1 - 2 \frac{m(r)}{r} \right) = 1 - \lim_{r \rightarrow 0} 2 \frac{4\pi \rho(r) r^3}{3r} = 1.$$

De la expresión de masa podemos concluir que cuando  $r \rightarrow 0$ , los cocientes  $\frac{m(r)}{r} = \frac{m(r)}{r^2} = 0$ .

De la ecuación (2.35)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\nu}{dr} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(r) + 4\pi Pr^3}{r(r - 2m(r))} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{m(r)}{r^2} + 4\pi Pr}{1 - 2\frac{m(r)}{r}} = 0,$$

por lo tanto,  $\nu'(0) = 0$ , así  $\nu(0)$  tiene un valor finito.

## C2: Condición de acoplamiento

Las componentes temporal y radial de las métricas también deben ser continuas en  $r = R$ , por lo que en la superficie de la estrella

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 - 2\frac{M}{R}.$$

## C3: Desplazamiento hacia el rojo

El corrimiento hacia el rojo  $Z$ , en el interior del sector material debe disminuir a medida que aumenta el valor de  $r$  [58, 59]. Esta cantidad está relacionada al fenómeno en que las ondas electromagnéticas o fotones que viajan fuera de una fuente gravitatoria pierden energía. Esta pérdida de energía corresponde a una disminución en la frecuencia de la onda y un aumento en la longitud de onda [1–3]. Para verificar esto, consideramos dos observables en reposo, un emisor ( $E$ ) que se encuentra a una distancia  $r_1$  del centro del objeto y un receptor ( $R$ ) ubicado a una posición distante  $r_2$ . Como la luz viaja a lo largo de una geodésica nula ( $ds^2 = 0$ ,  $\theta = const$  y  $\phi = const$ ), se tiene que

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}dr^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dt = \left( \frac{g_{11}}{g_{00}} \right)^{1/2} dr \quad (3.1)$$

Para dos pulsos de luz, la coordenada del tiempo entre dos pulsos sucesivos no cambian, ya que

$$t_2 - t_1 = \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{g_{11}}{g_{00}} \right)^{1/2} dr, \quad (3.2)$$

entonces,  $\Delta t_E = \Delta t_R$ , y como  $\Delta\tau = \sqrt{g_{00}}\Delta t$

$$\frac{\Delta\tau_E}{\sqrt{g_{00_E}}} = \frac{\Delta\tau_R}{\sqrt{g_{00_R}}} \Rightarrow \frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \frac{\sqrt{g_{00_R}}}{\sqrt{g_{00_E}}}.$$

La frecuencia es proporcional a el tiempo propio, es decir  $\nu \sim \frac{1}{\Delta\tau}$

$$\frac{\nu_E}{\nu_R} = \frac{\sqrt{g_{00_R}}}{\sqrt{g_{00_E}}} \Rightarrow \nu_E = \frac{\sqrt{g_{00_R}}}{\sqrt{g_{00_E}}} \nu_R,$$

con esta definición el desplazamiento al rojo esta dado por

$$Z = \frac{\nu_E - \nu_R}{\nu_R} = \frac{\frac{\sqrt{g_{00_R}}}{\sqrt{g_{00_E}}} \nu_R - \nu_R}{\nu_R} = \frac{\sqrt{g_{00_R}}}{\sqrt{g_{00_E}}} - 1. \quad (3.3)$$

Si el receptor esta lejos del emisor,  $g_{00_R} \rightarrow 1$  (tiende a una métrica plana), entonces

$$Z = e^{-2\nu} - 1, \quad (3.4)$$

donde tenemos que  $g_{00_E} = e^{2\nu}$ .

#### **C4: La densidad $\rho$ y las presiones $P$ y $P_{\perp}$ son positivas.**

La densidad y las presiones deben ser positivas dentro de estrella o sector material. Esto en cuestión resulta verdadero, ya que en este estudio consideramos estrellas con materia ordinaria.

Entonces en el centro deben ser finitos para evitar el colapso de la estrella, es decir  $\rho(0) = \rho_0$ ,  $P(0) = P_0$  y  $P_{\perp}(0) = P_{\perp 0}$ . En efecto,  $P_0 = P_{\perp 0}$  en el centro de la estrella [54].

Para justificar esta condición es evidente que la densidad en el centro  $\rho_0$  tiene un valor finito para evitar el colapso gravitacional. Ahora vamos a analizar que sucede con el gradiente de presión  $F_P$  en el centro de la estrella, para ello consideremos la ecuación de equilibrio hidrostático (2.37),

$$\underbrace{\frac{dP}{dr}}_{F_P} + \underbrace{\frac{\nu'}{2}(\rho + P)}_{F_g} - \underbrace{\frac{2}{r}(P_{\perp} - P)}_{F_a} = 0. \quad (3.5)$$

Para el término de la fuerza gravitacional  $F_g$ , ya se demostró que cuando  $r \rightarrow 0$ ,  $\nu' \rightarrow 0$ , por lo tanto  $F_g \rightarrow 0$ . Por otro lado, para que el término de la anisotropía  $F_a$  no diverja,  $(P_{\perp} - P) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ , esto implica que  $P = P_{\perp}$ . Por lo cual se concluye que en el centro de la estrella  $\frac{dP}{dr}(0) = 0$ .

### C5: Perfiles de $\rho$ , $P$ y $P_{\perp}$

Las cantidades físicas de  $\rho$ ,  $P$  y  $P_{\perp}$  deben tener un valor máximo en el centro del sector material es decir  $\rho'(0) = P'(0) = P'_{\perp}(0) = 0$  y deben decrecer monótonamente hacia afuera  $\rho' \leq 0$ ,  $P' \leq 0$  y  $P'_{\perp} \leq 0$  [54].

Para probar esta condición es necesario mostrar que la presión tangencial es mayor que la radial, excepto en el centro, para ello usamos el procedimiento realizado por Ivanov [54]. Partimos de la condición contra el cracking (C.15)

$$-1 + v^2 \leq v_{\perp}^2 \leq v^2, \quad (3.6)$$

entonces,

$$-1 + \frac{dP}{d\rho} \leq \frac{dP_{\perp}}{d\rho} \leq \frac{dP}{d\rho}. \quad (3.7)$$

Combinando con el hecho de que  $0 \leq v^2 < 1$  y  $0 \leq v_{\perp}^2 < 1$ , entonces

$$0 \leq \frac{dP_{\perp}}{dr} \leq \frac{dP}{dr}, \quad (3.8)$$

como  $\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{d\rho} = \frac{P'}{\rho'}$ , entonces

$$0 \leq \frac{P'_{\perp}}{\rho'} \leq \frac{P'}{\rho'}, \quad (3.9)$$

multiplicando por  $\rho'$ , la cual debe ser negativa, resulta en la desigualdad

$$0 \geq P'_{\perp} \geq P', \quad (3.10)$$

tomando la integral  $\int_0^r$ , obtenemos

$$0 \geq P_{\perp} - P_{\perp}(0) \geq P - P(0), \quad (3.11)$$

puesto que  $P_{\perp}(0) = P(0)$ , entonces

$$P(0) \geq P_{\perp} \geq P, \quad (3.12)$$

Con lo cual queda demostrado, que la presión tangencial es mayor que la presión radial excepto en el centro. La desigualdad 3.10 implica que la anisotropía  $\Delta = P_{\perp} - P$  es creciente a lo largo

del sector material de la estrella.

### C6: Condición de causalidad

La velocidad radial  $v^2 = \frac{dP}{d\rho}$  y la tangencial  $v_{\perp}^2 = \frac{dP_{\perp}}{d\rho}$ , dentro de la estrella deben ser menores que la velocidad de la luz en el vacío (tomamos unidades naturales  $c = 1$ ) [56]. Esto con el fin de evitar de que las ondas mecánicas superen la velocidad de la luz dentro del sector material, es decir

$$0 \leq \frac{dP}{d\rho} < 1, \text{ y } 0 \leq \frac{dP_{\perp}}{d\rho} < 1. \quad (3.13)$$

### C7: Condiciones de energía

Las ecuaciones de campo de Einstein permite una gran variedad de tipos de materias dadas por el tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$ . Por lo que admiten soluciones matemáticas que no parecen físicamente factibles. En este sentido, es necesario que las componentes de  $T_{\mu\nu}$  pertenezcan a fuentes físicamente reales [2, 60, 61]. Para ello se introducen las siguientes condiciones de energía:

- **Condición de energía débil o WEC:** establece que la energía no debe ser negativa, es decir:

$$\rho > 0, \quad (3.14)$$

y

$$\rho - P > 0 \text{ y } \rho - P_{\perp} > 0 \quad (3.15)$$

esto indica que la densidad  $\rho$  debe ser positiva para la materia ordinaria, y debe ser mayor que las demás componentes del tensor  $T_{\mu\nu}$ . Al derivar (3.15) respecto a  $\rho$ , se cumple la condición de causalidad (3).

- **Condición de energía nula o NEC:** establece que la densidad de energía debe ser mayor que la presión

$$\rho - P > 0 \quad \text{y} \quad \rho - P_{\perp} > 0 \quad (3.16)$$

- **Condición de energía dominante o DEC:** establece que la densidad de energía debe ser no negativa y mayor o igual que la magnitud de la presión.

$$\rho > |P| \quad \text{y} \quad \rho > |P_{\perp}| \quad (3.17)$$

- **Condición de energía fuerte o SEC:** establece que

$$\rho + P > 0 \quad \text{y} \quad \rho + P + 2P_{\perp} > 0. \quad (3.18)$$

Podemos notar que DEC implica NEC y NEC implica WEC. Por esto, una solución es físicamente aceptable si satisface la condición DEC. Incluso es deseable que se satisfaga la condición de energía fuerte (SEC) [2].

En el siguiente capítulo presentamos los resultados para la solución de la ecuación de Lane-Emden para los tres tipos de anisotropías y se analiza la estabilidad de estos resultados.

## Capítulo 4

### Resultados y discusión

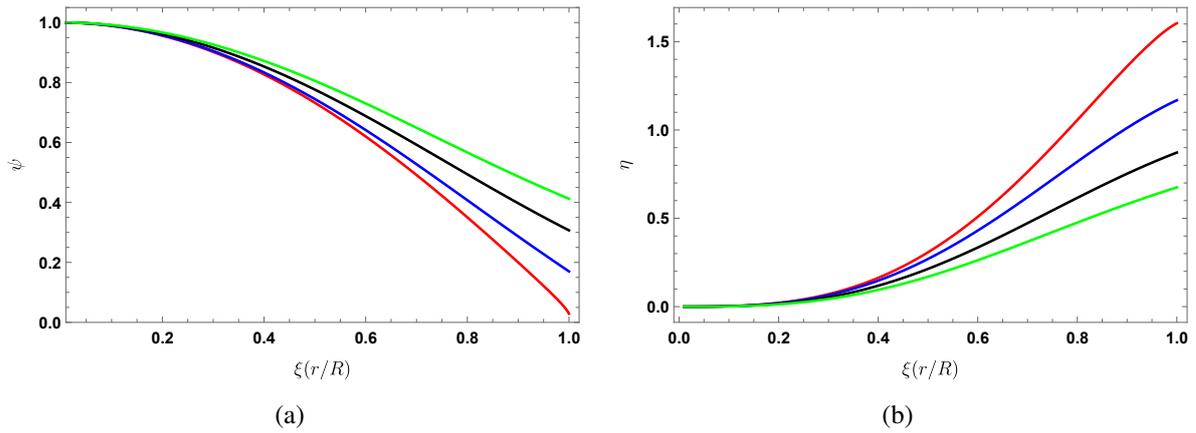
En este capítulo presentaremos los resultados numéricos de la solución de la ecuación de Lane-Emden para las anisotropías: método heurístico, doble polítropo y conformalmente plano, que fueron presentadas en la sección 2.6. Se analiza las condiciones de aceptabilidad para cada uno de los potenciales métricos y variables físicas que intervienen en la solución interior.

La ecuación de Lane-Emden será resuelta para cada una de las tres anisotropías con los siguientes parámetros:  $\alpha = -0.01$ ,  $\chi = 0.17$ ,  $\sigma = 0.175$  y para los índices politrópicos  $n = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$ . Estos valores mostraron evidencia de buen comportamientos en el trabajo de Suárez et al. [67]. En la primera parte de este estudio se consideran anisotropías pequeñas, ya que se ha demostrado que anisotropías bajas comparadas con la presión en el centro  $P_c$  producen modelos más aceptables [25, 67].

#### 4.1. Modelo Heurístico

Los resultados mostrados en esta sección son una reproducción del trabajo mostrado por Suárez, D., et al [67], y servirán para comparar que tan acertados son los resultados obtenidos

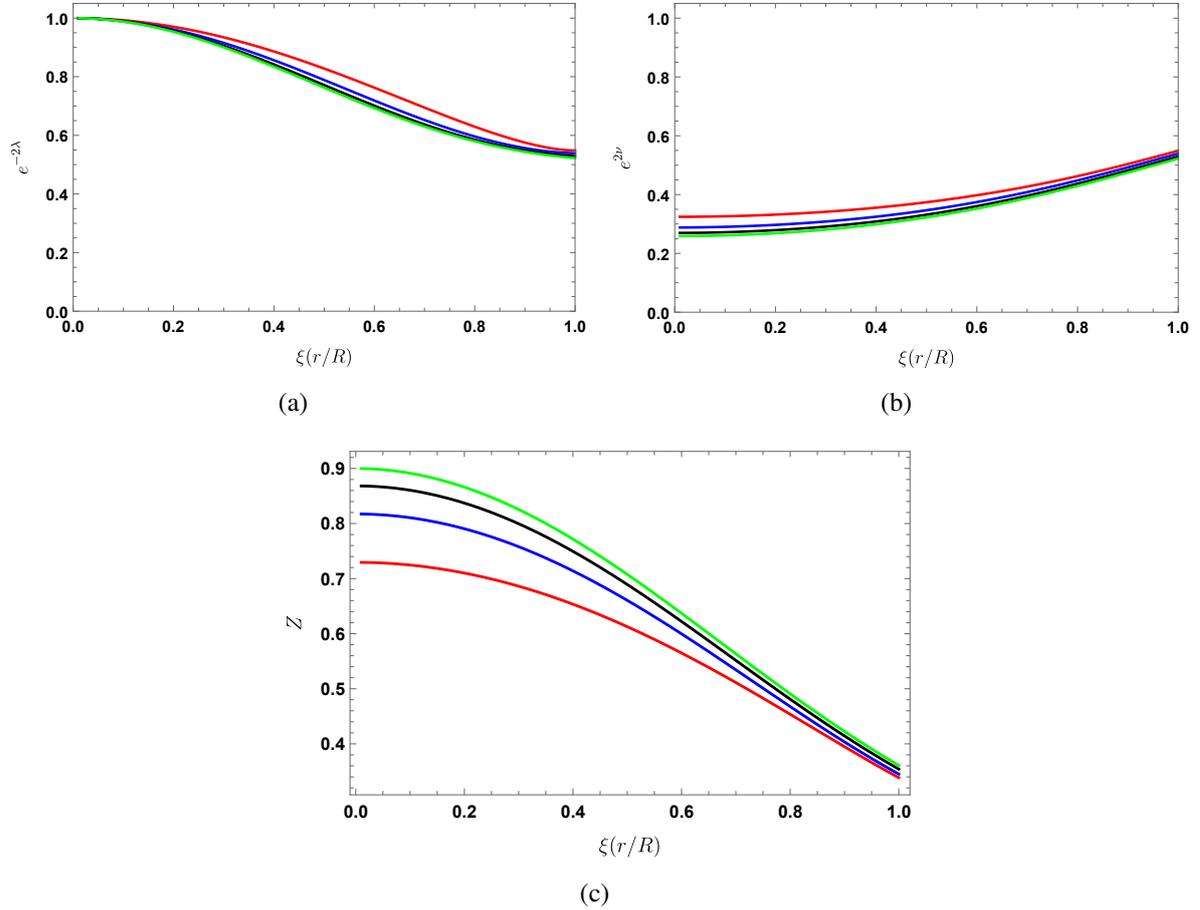
para los modelos de anisotropía del doble polítopo y conformemente plano. Los modelos considerados aquí para la anisotropía heurística son caracterizados por la constante de anisotropía  $C = 0.05$  [67].



**Figura 4.1:** Función  $\psi$  (a) y función  $\eta$  (b), para distintos valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

Empezamos analizando la figura 4.1, donde podemos observar los perfiles de la solución numérica de la ecuación de Lane-Emden de las funciones  $\psi$  y  $\eta$  en función de  $\bar{\xi} = \xi/\xi_R = r/R$ , donde  $\xi_R$  es el radio del objeto compacto en el sistema de unidades adimensionales para los valores del índice politrópico  $n = \{0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$  (ver tabla 4.1). Observamos que la función  $\psi$  es monótonamente decreciente para todos los valores de índice politrópico. Sin embargo, esta función  $\psi$  no se hace cero en la superficie como es el caso de los polítopos con ecuación de estado  $P = K\rho^{1+1/n}$ , debido a los dos términos extras presentes en la ecuación de estado del polítopo maestro (2.47). Además la función  $\psi$  se aleja del cero en la superficie a medida que aumenta el valor de  $n$ . La función de masa  $\eta$  es una función que crece hasta la evaluación numérica en la superficie del objeto compacto.

Los potenciales métricos  $e^{2\lambda}$  y  $e^{2\nu}$  mostrados en la figura 4.2, son positivos, finitos y conti-



**Figura 4.2:** Los potenciales métricos  $e^{-2\lambda}$  (a),  $e^{2\nu}$  (b) y el desplazamiento hacia el rojo (c), para distintos valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

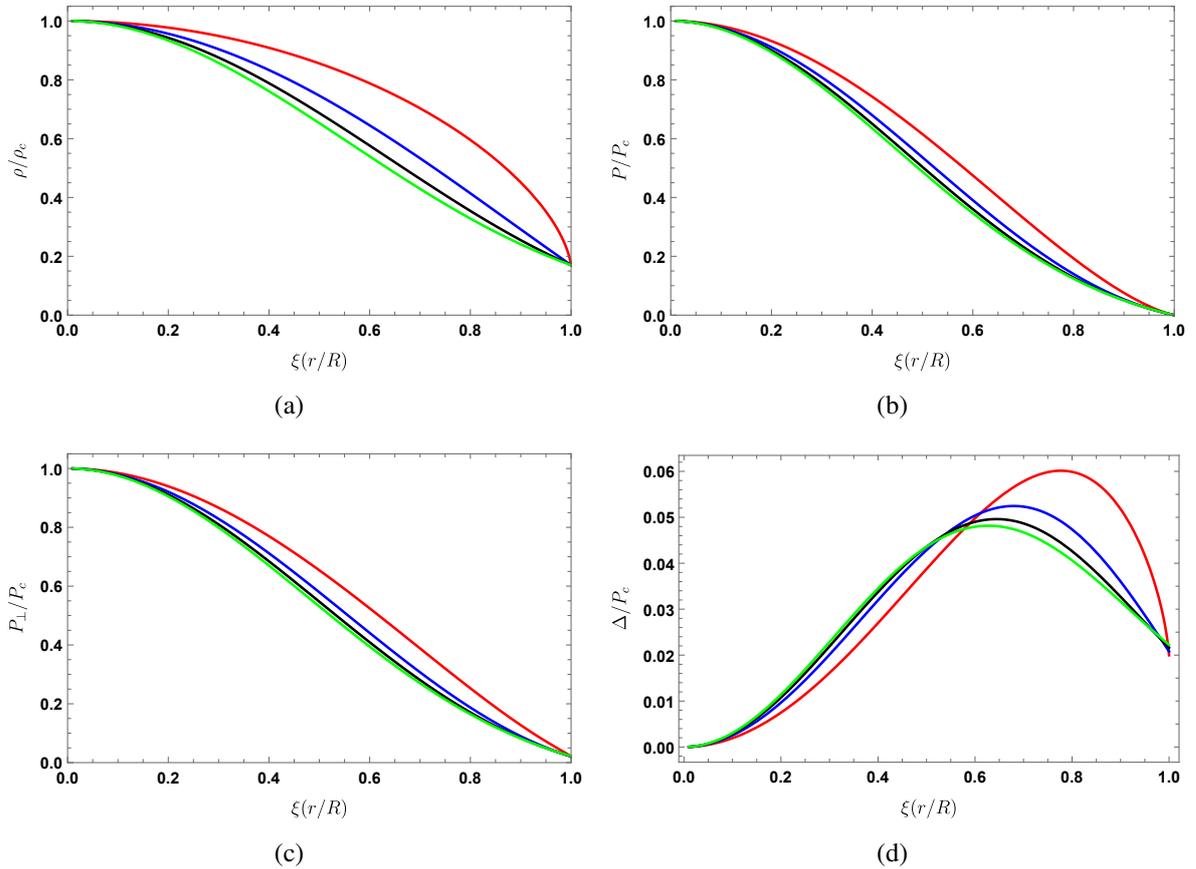
nos dentro del sector material. Además se puede observar que en el centro  $e^{-2\lambda(0)} = 1$  para los distintos valores de  $n$  utilizados y  $e^{2\nu(0)} = \text{const}$ , cumpliendo así la condición **C1**. Las funciones métricas  $e^{-2\lambda}$  son decrecientes, mientras que  $e^{2\nu}$  son crecientes y se acoplan en las superficie del sector material con la solución exterior de Schwarzschild  $e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 - 2M/R$  [54], donde los valores de  $M/R$  para cada valor de  $n$  están dados en la tabla 4.1. Entonces se cumple con la condición **C2**

El desplazamiento hacia el rojo  $Z = e^{-\nu} - 1$  como función de la coordenada  $\xi$  se muestra

n	0.5	1.0	1.5	2.0
$\xi_R$	2.02266	1.99408	1.87841	1.75851
$M/R$	0.22557	0.23060	0.23548	0.23891
$Z_R$	0.349864	0.362356	0.374841	0.383849

**Tabla 4.1:** Radios de superficie, factores de compacidad y corrimiento al rojo para el modelo heurístico.

en la figura 4.2(c). Observamos que  $Z$  decrece hacia afuera en todo el sector material y en la superficie es menor que el valor límite  $Z_l = 5.11$  para la materia anisótropa [59], cumpliendo con la condición **C3**.



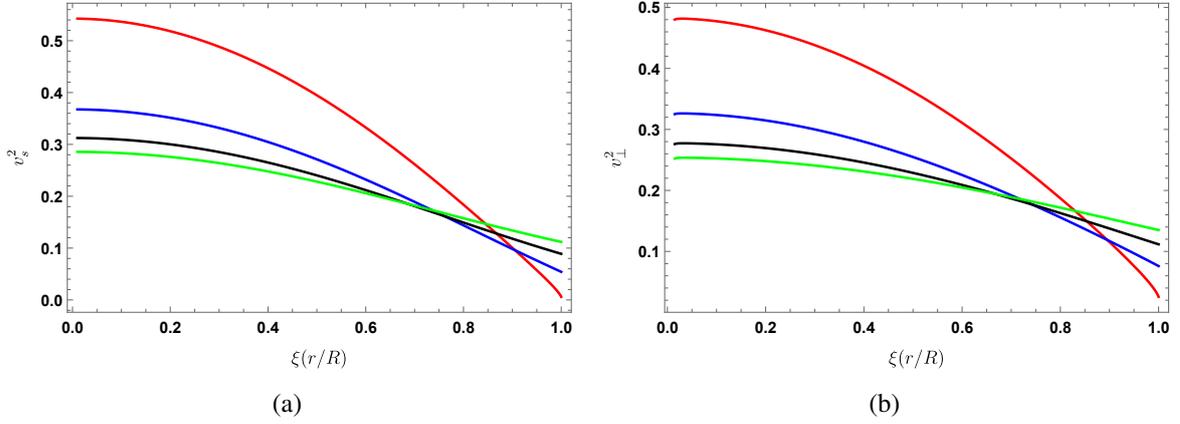
**Figura 4.3:** Densidad (a), presión radial (b), presión tangencial (c) y anisotropía (d), para distintos valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

Las variables físicas de densidad  $\rho$ , presión radial  $P$  y tangencial  $P_{\perp}$  en la figura 4.3 (estas gráficas se encuentran normalizadas), son positivas y finitas dentro del sector material. Además se observa en el gráfico que  $P_0 = P_{\perp 0}$ , por lo cual cumplen con la condición **C4**. Los perfiles de las variables físicas tiene su valor más alto en el centro y decrecen monótonamente dentro del sector material hasta la superficie. Entonces se cumple con la condición **C5**. El resultado también muestra que tienen mayor densidad, presión y anisotropía objetos con menor  $n$  y disminuyen al aumentar el  $n$ . Note que el radio del objeto  $\xi_R$  también disminuye con el aumento de  $n$  (ver tabla 4.1). En la figura 4.3(d), se muestra que la anisotropía no es monótonamente creciente para todos los valores de  $n$ .

En la figura 4.4 observamos los perfiles de la velocidad para los distintos valores de  $n$ . Se cumple la condición de causalidad (**C6**) ya que  $0 \leq v^2 < 1$  y  $0 \leq v_{\perp}^2 < 1$  dentro del sector material. El perfil de las velocidades tiene su valor máximo en el centro y decrece a su valor al mínimo en la superficie, esto se debe a que el centro tiene mayor densidad que la superficie. Se ha determinado que la velocidad del sonido depende de la dureza del material  $\sigma$ . Para valores de  $\sigma > 3/2$ , manteniendo  $\alpha = -0.01$  y  $\chi = 0.17$  presenta regiones donde se viola la condición de causalidad [67].

El sector material debe cumplir con  $\rho + P + 2P_{\perp} > 0$ . La figura 4.5 muestra el cumplimiento de la condición **C7** para los distintos valores de  $n$ .

En las siguientes dos secciones haremos una comparativa de este modelo heurístico con el doble polítopo y el polítopo conformalmente plano.



**Figura 4.4:** Las velocidades del sonido  $v_s^2$  (a) y  $v_\perp^2$  (b), para distintos valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

$n_R$	0.5	1.0	1.5	2.0
$\xi_R$	2.19174	2.10038	1.96342	1.83290
$M/R$	0.27213	0.25432	0.24808	0.245256
$Z_R$	0.481287	0.426585	0.408823	0.400983

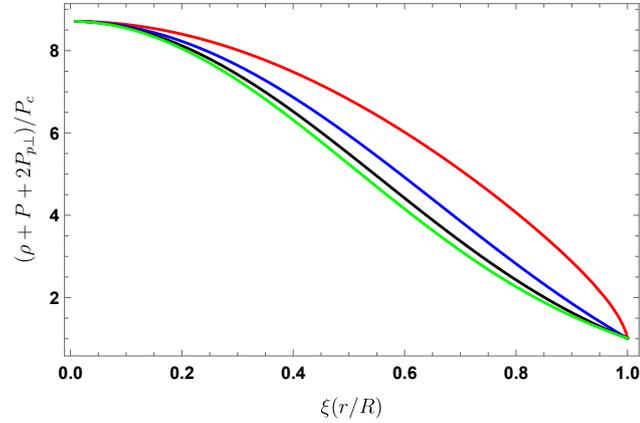
**Tabla 4.2:** Radios de superficie y factores de compacidad para el doble polítropo

## 4.2. Doble Polítropo

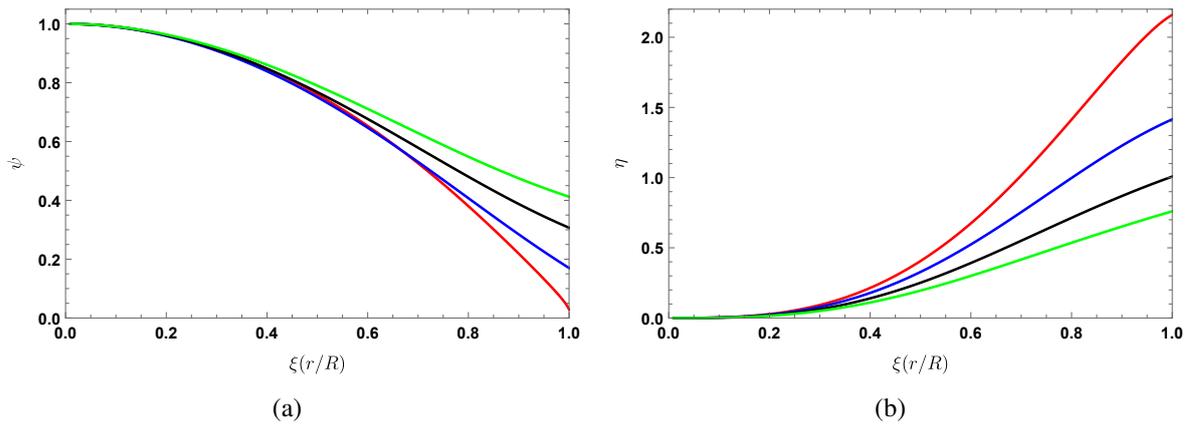
En esta sección analizamos los resultados obtenidos para el doble polítropo. Igual que en el caso anterior usaremos los valores de los parámetros  $\alpha = 0.01$ ,  $\chi = 0.17$ ,  $\sigma = 0.175$ . Sin embargo este modelo requiere los siguientes valores adicionales para los parámetros  $n_\perp = 2.5$ ,  $K_\perp = 0.19$ ,  $\alpha_\perp = -0.017$ , para la función de anisotropía

$$\Delta = K_\perp \rho_c^{1 + \frac{1}{n_\perp}} \left( \Psi^{n + \frac{n}{n_\perp}} - 1 \right) - \Upsilon \rho_c (\psi^{n+1} - 1) + \rho_c (\alpha_\perp - \alpha) (\psi^n - 1).$$

En la figura 4.6(a) se observa el comportamiento de la función  $\psi$  que resulta de la integración de la ecuación de Lane-Emden para el doble polítropo, para distintos valores de índice

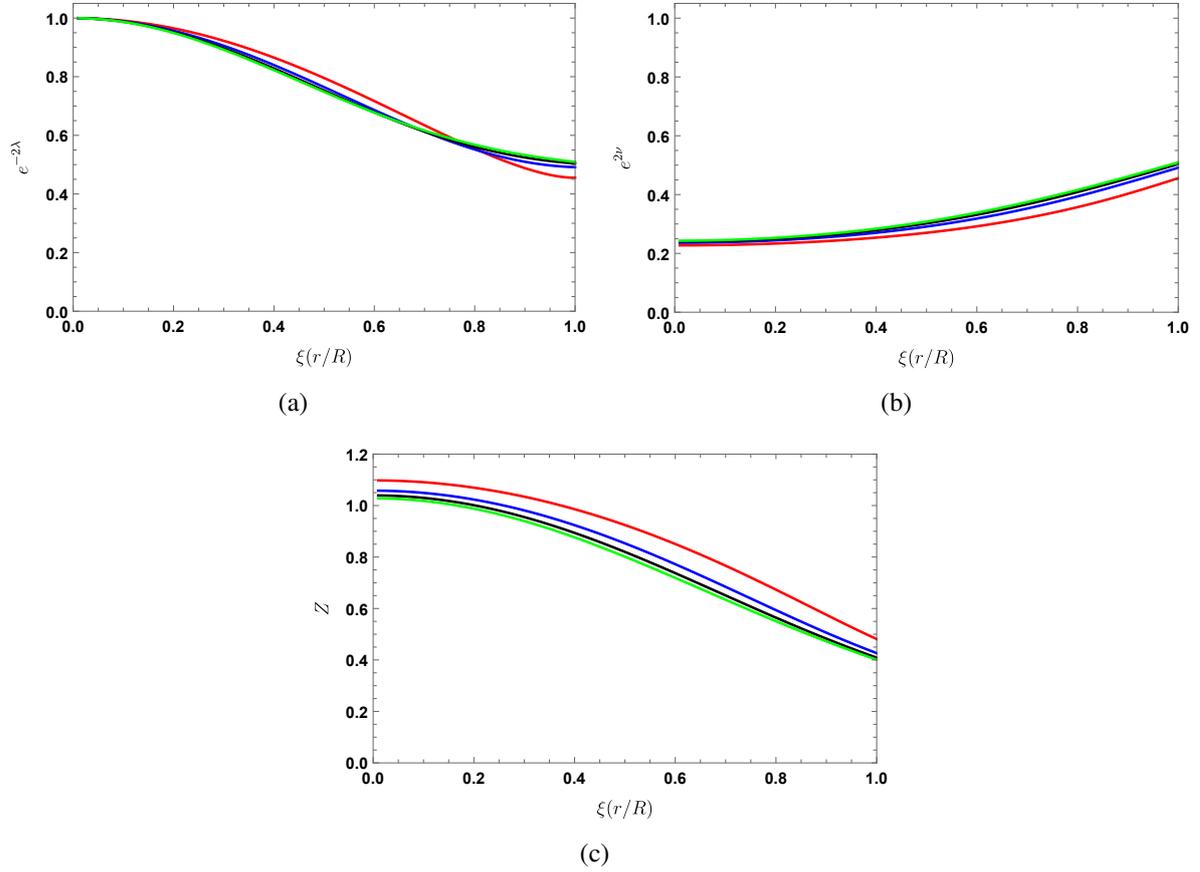


**Figura 4.5:** Condición de energía fuerte, para los valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).



**Figura 4.6:** Función  $\psi$  (a) y función  $\eta$  (b) para el doble polítropo y para distintos valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

politrópico. La función  $\psi$  alcanza su valor máximo en el centro y decrece monótonamente hacia el exterior como se esperaba para cada valor de  $n$ . En la figura 4.6(b) se observa que la función de masa  $\eta$  para los distintos valores de  $n$  crece apropiadamente desde cero hasta su valor límite en  $\xi_R$ . Tanto  $\psi$  y  $\eta$  presentan un comportamiento similar a las funciones mostradas en la figura 4.1. En la tabla 4.2 se muestra los valores para el radio adimensional y el factor de compacidad del objeto.

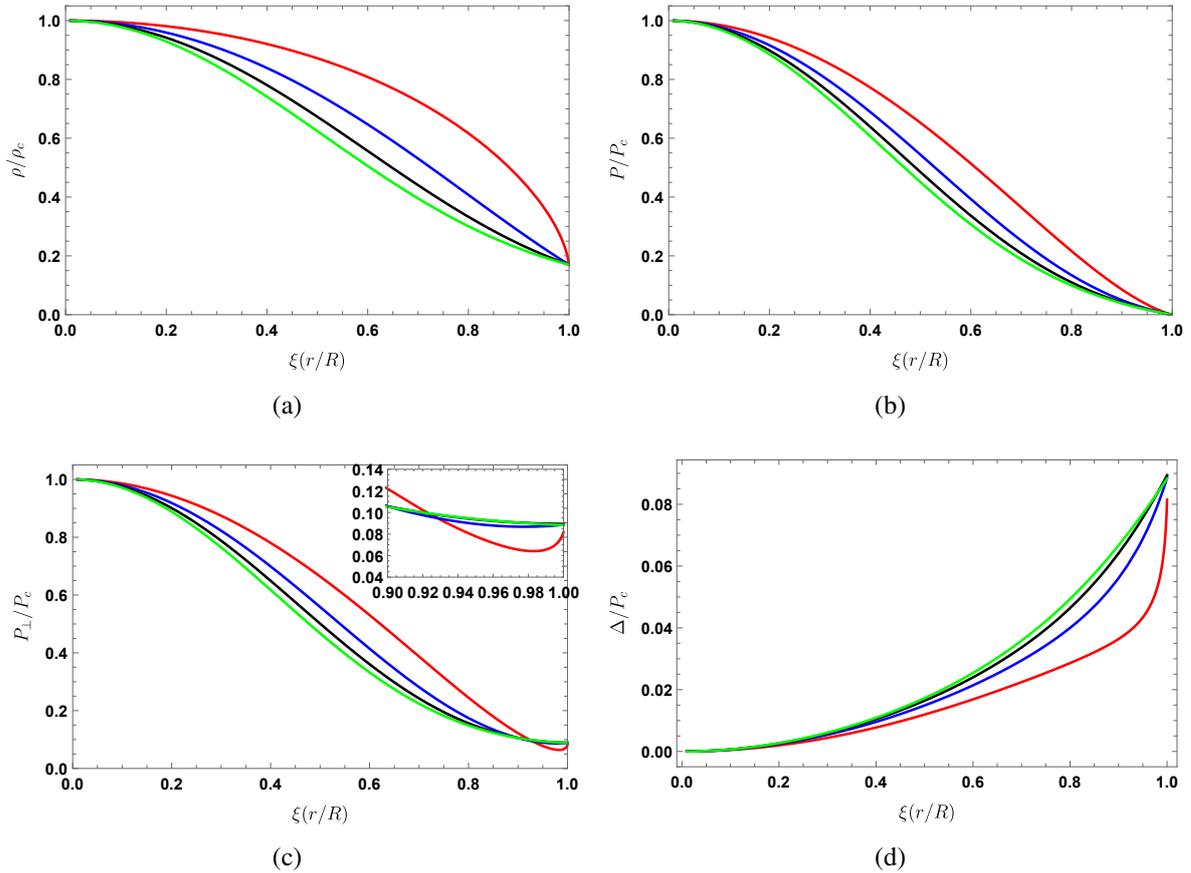


**Figura 4.7:** Los potenciales métricos  $e^{-2\lambda}$  (a),  $e^{2\nu}$  (b) y el desplazamiento hacia el rojo  $Z$  (c) para el doble polítopo, para los valores de índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

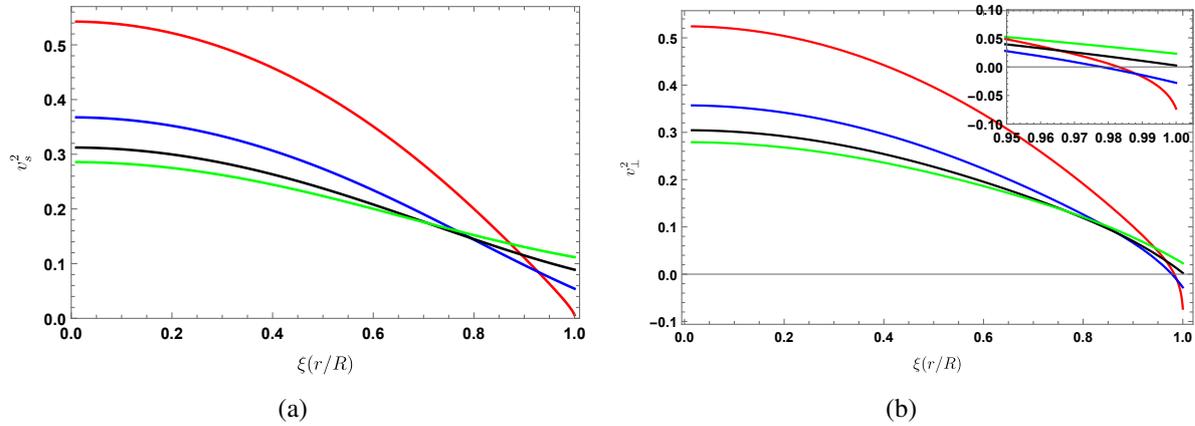
En la figura 4.7 se muestran los potenciales métricos, donde  $e^{-2\lambda}$  es una función decreciente y  $e^{2\nu}$  es una función creciente y se acoplan en la superficie  $e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 - 2M/R$ . Se observan que se cumplen con las condiciones **C1** y **C2**. En la figura 4.7(c), se observa que el desplazamiento hacia el rojo, mantiene el comportamiento típico, tiene el valor máximo en el centro, decrece hacia valor mínimo en la superficie del objeto y es menor que  $Z_i = 5.11$  para todo  $n$  cumpliendo así con la condición **C3**.

Los perfiles de la densidad  $\rho$ , presión radial  $P$  y tangencial  $P_{\perp}$  que se muestran en la figura

4.8, cumplen con las condiciones **C4**. Por otro lado,  $\rho$  y  $P$  tienen su valor máximo en el centro y decrecen monótonamente hacia la superficie para todos los valores de  $n$ . En la figura 4.8(c) la presión tangencial para los valores de  $n = 0.5$  y  $n = 1.0$  no decrecen monótonamente, ya que estos perfiles tienen una concavidad cerca de la superficie, estos valores de  $n$  no cumplen con la condición **C5**. Mientras que la presión tangencial para  $n = 1.5$  y  $n = 2.0$  decrece monótonamente en todo el sector material, por lo cual estos valores de  $n$  cumplen con la condición **C5**. En la figura 4.8(d), la anisotropía es creciente para todos los valores de  $n$ .



**Figura 4.8:** Densidad  $\rho$  (a), presión  $P$  radial (b), presión tangencial  $P_\perp$  (c) y anisotropía  $\Delta$  (d) para el doble politropo, para los valores de índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

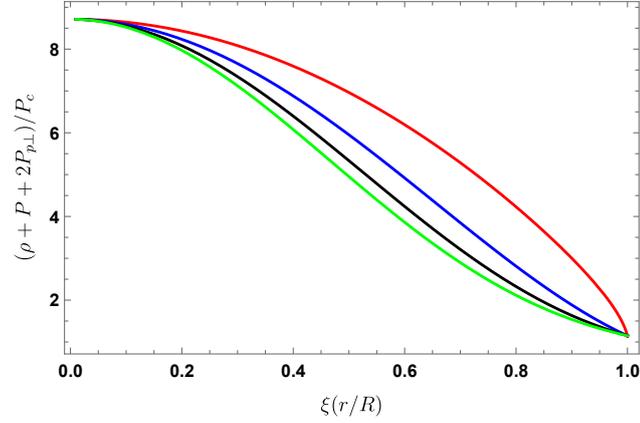


**Figura 4.9:** Las velocidades del sonido  $v_s^2$  (a) y  $v_{\perp}^2$  (b) para el doble polítopo, para los valores de índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

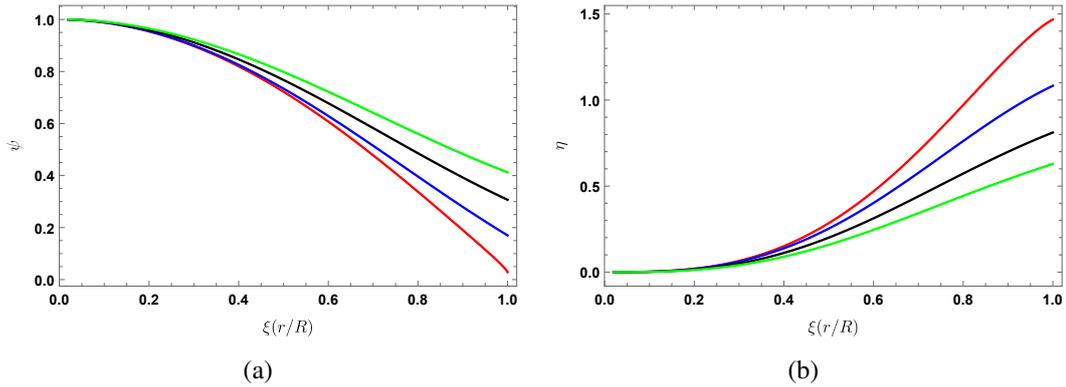
En la Figura 4.9 podemos observar que la velocidad del sonido radial cumple  $0 \leq v_s^2 < 1$  en todo el sector material. En cambio la velocidad tangencial  $v_{\perp}^2$  adquiere valores negativos cerca de la superficie del objeto estelar para  $n = 0.5$  y  $n = 1.0$ . Estos valores de índice politrópico no cumplen la condición **C6**. Mientras que para  $n = 1.5$  y  $n = 2.0$ ,  $v_{\perp}^2$  se encuentra en el rango permitido. Por lo tanto, cumplen con la condición **C6**.

En la figura 4.10, muestra que la condición de energía fuerte (SEC) **C7** se cumple para todos los valores de  $n$ .

Hemos observado que para los parámetros establecidos en esta prueba del doble polítopo, para los valores de  $n = 0.5$  y  $n = 1.0$  no se cumplen las condiciones de aceptabilidad **C5** y **C6** por lo cual esas soluciones son descartadas.



**Figura 4.10:** Condición de energía fuerte para el doble polítopo, para los valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).



**Figura 4.11:** Función  $\psi$  (a) y función  $\eta$  (b) del polítopo conformalmente plano con  $C = 0.01$ , para distintos valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

### 4.3. Polítopo conformalmente plano

En esta ocasión, los resultados mostrados en sección se debe a la integración de la ecuación de Lane-Emden con la función de anisotropía

$$\Delta = C * \rho_c \left( \frac{3\eta}{\xi^3} - \psi^n \right). \quad (4.1)$$

En esta sección analizaremos los resultados para  $C = 0.01$  y  $C = 1.0$ .

$n_r$	0.5	1.0	1.5	2.0
$\xi_R$	1.95680	1.93500	1.82209	1.70479
$M/R$	0.207232	0.211200	0.215253	0.218108
$Z_R$	0.306842	0.315789	0.325120	0.331814

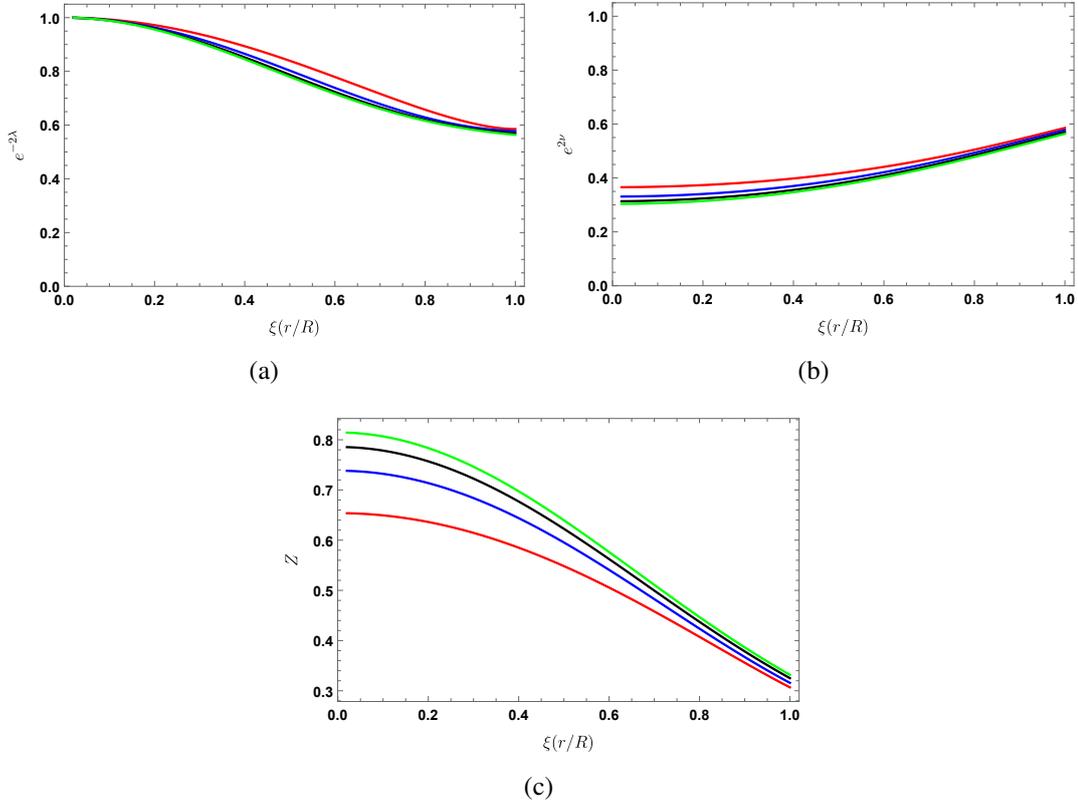
**Tabla 4.3:** Radios de superficie, factores de compacidad y corrimiento al rojo para  $C = 0.01$ .

Para  $C = 0.01$ , en la Figura 4.11 se observa el perfil de la función  $\psi$ , que al igual que en casos anteriores es monótonamente decreciente para cada uno de los valores del índice politrópico. Por otro lado, la función  $\eta$  es creciente hasta la evaluación numérica en la superficie del objeto compacto. En la tabla 4.3 se muestra los valores para el radio adimensional, el factor de compacidad y el corrimiento al rojo para los valores de  $n$  utilizados.

Ahora vamos a analizar las condiciones de aceptabilidad para esta solución. Los potenciales métricos  $e^{2\lambda}$  y  $e^{2\nu}$  mostrados en la figura 4.12, son positivos, finitos y continuos dentro del sector material. En el centro  $e^{-2\lambda(0)} = 1$  para los valores los distintos valores de  $n$  utilizados y  $e^{2\nu(0)} = const$ , cumpliendo así la condición **C1**. Las funciones métricas cumplen con la condición **C2**, ya que  $e^{-2\lambda}$  son decrecientes, mientras que  $e^{2\nu}$  son crecientes y se acoplan en las superficie del sector material con la solución exterior de Schwarzschild  $e^{2\nu} = e^{-2\nu} = 1 - 2M/R$  [54], donde los valores de  $M/R$  están dados en la tabla 4.3.

La figura 4.12(c) muestra que el desplazamiento hacia el rojo  $Z$  para cada valor de  $n$  decrece hacia afuera en todo el sector material. En la tabla 4.3 se observa que los valores de  $Z$  son menores que el límite en la superficie  $Z_l = 5.11$  para la materia anisótropa [59], cumpliendo con la condición **C3**.

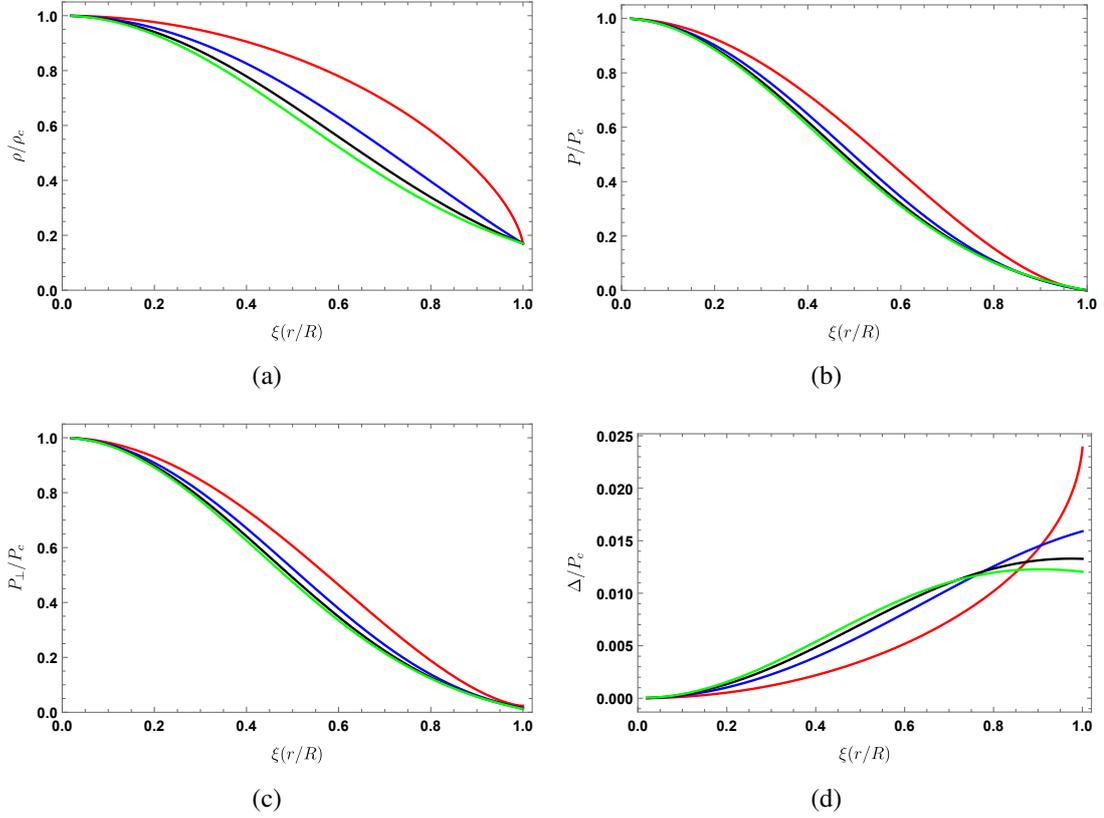
Las variables físicas de densidad  $\rho$ , presión radial  $P$  y tangencial  $P_\perp$  en la figura 4.13, son positivas y finitas dentro del sector material, por lo cual cumplen con la condición **C4**. También cumplen con la **C5** ya que los perfiles de las variables físicas tiene su valor más alto en el centro



**Figura 4.12:** Los potenciales métricos  $e^{-2\lambda}$  (a),  $e^{2\nu}$  (b) y el desplazamiento hacia el rojo (c) del polítopo conformalmente plano con  $C = 0.01$ , para distintos valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

y decrecen monótonamente desde el centro del sector material hasta la superficie. Además la anisotropía es creciente para  $n = \{0.5, 1.0, 1.5\}$ , pero para  $n = 2.0$  la anisotropía tiene una concavidad hacia abajo cerca de la superficie.

En la figura 4.14 observamos que se cumple la condición de casualidad (C6) ya que  $0 \leq v^2 < 1$  y  $0 \leq v_{\perp}^2 < 1$  dentro del sector material. Las velocidades tienen su valor máximo en el centro y decrecen su valor al mínimo en la superficie. Considerando que  $P_{\perp}/P_c = (P + \Delta)/P_c$  y puesto que hemos tomado la constante de anisotropía con un valor de  $C = 0.01$  (ver figura 4.13(d)), resulta en una anisotropía baja comparada con la presión en el centro. Esto implica que

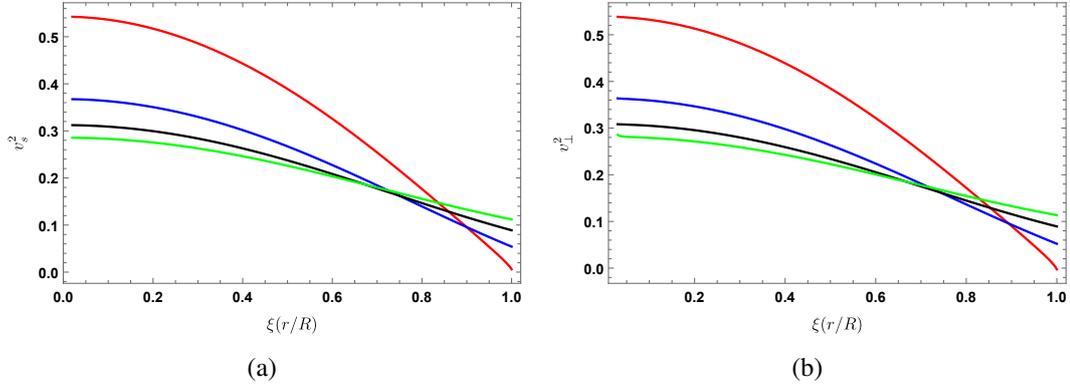


**Figura 4.13:** Densidad (a), presión radial (b), presión tangencial (c) y anisotropía (d) del polítopo conformalmente plano con  $C = 0.01$ , para los valores de índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

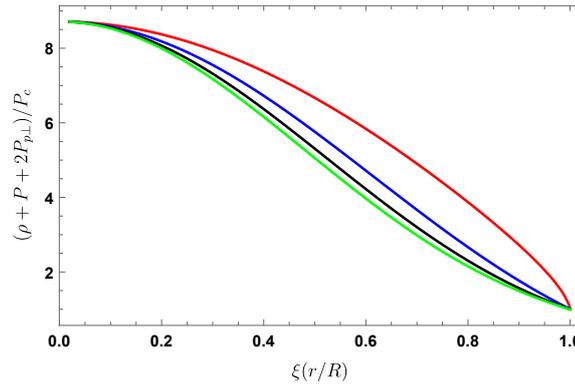
los perfiles de las velocidades del sonido radial y tangencial sean parecidos, como se muestra en la figura 4.14.

La figura 4.15 muestra que la condición de energía fuerte **C7** también se cumple para los diferentes índices politrópicos (desde  $n = 0.5$  hasta  $n = 2.0$ ).

En el anexo D se muestran los resultados para el caso conformalmente plano  $C = 1$ . Consideramos los valores de los parámetros  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi = 0.29$  y  $\sigma = 0.45$  y los índices politrópicos  $n = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ . En las gráficas se puede observar que los potenciales métricos y las variables físicas muestran el comportamiento típico de una solución físicamente aceptable. En la



**Figura 4.14:** Las velocidades del sonido  $v_s^2$  (a) y  $v_\perp^2$  (b) del polítopo conformalmente plano con  $C = 0.01$ , para los valores del índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).



**Figura 4.15:** Condición de energía fuerte para polítopo conformalmente plano con  $C = 0.01$ , para los valores de índice politrópico  $n = 0.5$  (rojo),  $n = 1.0$  (azul),  $n = 1.5$  (negro) y  $n = 2.0$  (verde).

tabla 4.4 se muestran los valores de los radios y los factores de compacidad para los distintos  $n$ .

#### 4.4. Polítopo maestro como modelo de estrella de neutrones

Los modelos de anisotropía que usaron los valores para  $\alpha = -0.01$ ,  $\chi = 0.17$ ,  $\sigma = 0.175$  e índices politrópicos  $n = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$  mostraron resultados gráficos muy parecidos. Cumpliendo con el propósito de comparar el polítopo doble y conformemente plano con el

n	1.0	1.5	2.0	2.5
$\xi_R$	1.62251	1.43725	1.29957	1.19379
$M/R$	0.41549	0.41658	0.41711	0.41742
$Z_R$	1.43242	1.44820	1.45606	1.46068

**Tabla 4.4:** Radios de superficie, factores de compacidad y corrimiento al rojo para  $C = 1.0$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi = 0.29$  y  $\sigma = 0.45$ .

modelo heurístico, estos modelos son candidatos para describir objetos compactos como la estrellas de neutrones. Por ejemplo para una estrella de neutrones con densidad superficial de  $\rho_R \leq 3.0 \times 10^{14} g cm^{-3}$  (densidad del núcleo atómico), el corrimiento al rojo en la superficie no supera al máximo determinado por Lindblom [71]

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/Rc^2}} - 1 \leq 0.863, \quad (4.2)$$

lo cual equivale a  $R \geq 2.83 GM/c^2$  (considerando  $c = G = 1$ ) o la máxima compacidad  $M/R \leq 0.3533$  [70].

Otro resultado que sirve para comparar con nuestros modelos, es el obtenido por Arias et al. [74]. Mediante el factor de complejidad

$$Y_{FT} = 4\pi\Delta + E = 8\pi\Delta - \frac{4\pi}{r^3} \int_0^{r^3} r'^3 \rho' dr, \quad (4.3)$$

donde la cantidad  $E$  esta relacionado con el tensor de Weyl, y es definido por

$$E = -\frac{e^{-\lambda}}{4} \left\{ \nu'' + \frac{\nu'^2 - \lambda'\nu'}{2} - \frac{\nu' - \lambda'}{2} + \frac{2(1 - e^\lambda)}{r^2} \right\}. \quad (4.4)$$

El escalar  $Y_{FT}$  relaciona la densidad de energía con la anisotropía local del objeto gravitacional [74]. Mediante la anulación del factor de complejidad  $Y_{FT}$  se encuentra una relación para la

Heurístico $C = 0.09$	
Parámetros de entrada	$n = 3.0 \quad \sigma = 0.33 \quad \alpha = -0.01 \quad \xi = 0.60$
Resultados	$M/R = 0.32101 \quad Z = 0.671361$
Conformalmente plano $C = 0.1$	
Parámetros de entrada	$n = 3.0 \quad \sigma = 0.40 \quad \alpha = 0.05 \quad \xi = 0.40$
Resultados	$M/R = 0.3215535 \quad Z = 0.673821$

**Tabla 4.5:** Resultados para el modelo heurístico con  $C = 0.09$  y conformemente plano con  $C = 0.1$  que se compara con la anulación del factor de complejidad con ecuación de estado de estado  $P = K\rho^{1+1/n}$  para  $n = 3.0$  y el resultado de Lindblom considerando la densidad superficial  $\rho_R \leq 3.0 \times 10^{14} g/cm^{-3}$ . Para el doble polítopo no se encontró un resultado favorable.

anisotropía, y resuelve la ecuación de Lane-Emden para el polítopo con ecuación de estado  $P = K\rho^{1+1/n}$ . Una discusión más detallada de este modelo se presenta en [73, 74]. Aquí, citamos el resultado que obtuvieron de  $M/R \approx 0.326318$  y  $Z \approx 0.727326$  para  $n = 3$ . En la tabla 4.5 se muestran los parámetros y resultados para el modelo heurístico  $C = 0.09$  y conformalmente plano para  $C = 0.1$  que se comparan con el resultado de Arias [74] y Lindblom [71]. Para el doble polítopo no se encontró un resultado favorable.

## 4.5. Discusión

Es instructivo comparar los tres modelos que hemos utilizado para la anisotropía; heurístico 4.1, doble polítopo 4.2 y conformalmente plano 4.3. Los perfiles para la densidad  $\rho$ , presión radial  $P_r$  y presión tangencial  $P_\perp$ , muestran comportamiento similar (ver figuras 4.3, 4.8 y 4.13). La perfiles con mayor índice politrópico (empezando  $n = 2.0$  de color verde) decaen más rápido que aquellas con menor índice politrópico (terminando con  $n = 0.5$  de color rojo). Esto se debe a que los perfiles con menor índice politrópico soportan objetos más grandes ya que pueden ejercer mayor presión (recodemos la ecuación de estado para la presión radial

$P = K\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta$ ). Pero contradictorio resulta que mientras mas grande es el objeto menos es su capacidad de almacenar masa por unidad de longitud, ya que su relación  $M/R$  también es menor y aumenta a medida que incrementa  $n$  (ver tablas 4.1, 4.2, 4.4 y 4.4).

Cuando  $P_{\perp} > P$ , una fuerza radial anisotrópica repulsiva  $F_a$  aparece en la ecuación de equilibrio hidrostático de TOV (2.37) en dirección opuesta a la fuerza de gravitación. Cuando  $P_{\perp} < P$ , ambas fuerzas  $F_a$  y  $F_g$  tienen la misma dirección [44, 45]. La anisotropía  $\Delta$  en principio tiene permitido ambos signos. Sin embargo, es preferible que  $P_{\perp} > P$  porque hace oposición a la fuerza gravitacional y nos lleva a objetos más masivos [46]. En las figuras 4.3(d), 4.8(d), 4.13(d) y D.2(d) se muestran los perfiles de las anisotropías. Se puede observar que el doble polítopo, el conformalmente plano con  $C = 0.01$  y  $C = 1.0$  presentan anisotropía creciente eso hace que estos modelos sean más estables que el modelo heurístico. Esto lo podemos ver de la ecuación de TOV (2.37), y la condición **C5**. Para que el sistema sea estable los perfiles de la presión deben decrecer monótonamente hacia afuera del sector material, y puesto que elegimos usar configuraciones donde  $P_{\perp} > P$  a lo largo del sector material, esto implica que  $\Delta$  sea creciente hacia afuera [54, 55].

La elección de la constante  $C$  del modelo conformalmente plano (2.83) permite comparar entre modelos que tienen baja compacidad como el modelo heurístico o el doble polítopo, de mediana compacidad como la anulación del factor de complejidad. Ambos casos describen bien las estrellas de neutrones (ver sección anterior 4.4). Pero más importante aún es el hecho que para el polítopo conformalmente plano con  $C = 1.0$ , se obtuvieron modelos validos con ecuación de estado del polítopo maestro  $P = K\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta$ , a diferencia de la ecuación de estado estándar  $P = K\rho^{1+1/n}$  que no obtuvo resultados favorables para las condiciones de aceptabilidad que allí se consideraron [52]. Además, los resultados mostrados en este caso admiten alta compacidad  $M/R \sim 0.43$  y corrimiento al rojo  $Z \sim 1.46$ . Sus valores son cer-

canos al límite de Buchdahl que para la materia isotrópica  $M/R \leq 4/9$  y al que corresponde un corrimiento al rojo en la superficie del objeto  $Z_s \approx 2$  [58]. En el ámbito de la materia anisótropa Arias, et al.(2021) [76], mediante desacoplamiento gravitacional utilizando el método de deformación geométrica mínima (MGD) determinaron que el límite de Buchdahl varía entre  $4/9 \leq M/R < 1/2$ . Por lo cual, nuestros resultados están alejados del extra packing de masa <sup>1</sup>. Por otro lado, mediante un análisis de estabilidad lineal de las estrellas  $\mathcal{C}$  <sup>2</sup> bajo perturbaciones radiales (Raposo, et al. (2019) [75]), encontraron que para configuraciones fuertemente anisotrópicas con  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/M_\odot = 10^6$  son linealmente estables para  $M/R \leq 0.42$ , mientras que se vuelven linealmente inestables para valores más altos de compacidad. Por lo tanto, usar una constante  $C$  en la ecuación de anisotropía (2.83) le permite al modelo conformalmente plano tener versatilidad para que sea comparada con otros modelos.

En resumen, los modelos que hemos presentados aquí satisfacen la mayoría de las condiciones de aceptabilidad física, y son buenos candidatos para representar objetos reales como las estrellas de neutrones u objetos todavía más compactos.

---

<sup>1</sup>La solución anisótropa adquiere un extra packing de masa para  $\mu \geq \frac{4}{9}$  [76].

<sup>2</sup>Las estrellas  $\mathcal{C}$  se caracterizan porque su anisotropía puede ser escrita como  $\Delta = -Cf(\rho)k^\mu \nabla_\mu P$ , donde  $C$  es una constante que mide la desviación de la anisotropía,  $f(\rho) = \rho$ ,  $k^\mu = (k^0, k^1, 0, 0)$ , y la ecuación de estado  $P = K\rho^\gamma$  [75].

## Capítulo 5

### Conclusiones

En este trabajo buscamos generalizar la descripción de objetos compactos anisótropos usando la ecuación de estado del polítrolo maestro  $P = k\rho^{1+1/n} + \alpha\rho - \beta$ . Para esto se han presentado tres modelos para la anisotropía: la anisotropía heurística, doble polítrolo y conformalmente plano, y para cada uno de ellos se ha resuelto la respectiva ecuación de Lane-Emden. En particular debemos mencionar que hemos encontrado soluciones físicamente aceptables para el modelo del polítrolo conformalmente plano para la ecuación de estado maestra, que no fueron posibles con la ecuación de estado estándar  $P = K\rho^{1+1/n}$  [52].

Las soluciones mostradas cumplen con las condiciones de aceptabilidad mencionadas en el capítulo 3, por lo tanto permiten modelar objetos compactos esféricos. Más importante es mencionar que se encontraron soluciones con anisotropía monótonamente creciente para los modelos del doble polítrolo y conformalmente plano mientras que el modelo heurístico no lo presenta. Esto es importante ya que estas soluciones con anisotropía monótonamente creciente son más estables que aquellas soluciones que no la presentan. Además, las soluciones del doble polítrolo presenta baja compacidad  $M/R \sim 0.22$ , en contraste con el modelo heurístico y

conformalmente plano que llegan a los límites de estrellas de neutrones con  $M/R \sim 0.35$  [70], o mas aún el modelo conformalmente plano con  $C = 1.0$  que puede llegar a modelar objetos cercanos al límite de límite de Buchdahl  $M/R \sim 4/9$  [58].

Los Polítropos anisótropos con ecuación de estado maestro y los distintos modelos de anisotropías, han demostrado ser una herramienta eficaz para modelar objetos compactos, que van desde estrellas de neutrones hasta objetos con compacidad  $M/R \sim 0.43$ . Sin embargo, adelantamos nuestro interés en analizar estos objetos por medio de la estabilidad frente al cracking y en extender nuestro estudio a objetos ultracompactos.

## Referencias

- [1] Misner, C., Thorne, K., & Wheeler, J., *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco (1973)
- [2] Carroll, S. M., *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. Addison Wesley, pág. 229-236, (2004).
- [3] Schutz, B., *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd edition, (2009).
- [4] D’Inverno, R., & Vickers, J., *Introducing Einstein’s Relativity* Oxford University Press, 2nd edición, (2022).
- [5] Cheng, Ta-Pei, *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*. Oxford University Press, (2010).
- [6] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. University of Chicago, Chicago, (1939).
- [7] Shapiro, S. L., & Teukolsky, S. A., *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. John Wiley and Sons, New York, (1983).
- [8] Kippenhahn, R., Weigert, A. & Weiss, A. *Stellar structure and evolution*. Springer vol. 192, (1990).

- [9] Horedt, G. P. (2004). *Polytropes. Applications in Astrophysics and Related Fields*, Dordrecht: Kluwer.
- [10] Kovetz, A., *Slowly Rotating Polytropes*. *Astrophysical Journal*, vol. 154, p.999 (1968)
- [11] Goldreich, P., and Weber, S. V., *Homologously collapsing stellar cores*. *Astrophysical Journal*, 238 (1). pp. 991-997 (1980).
- [12] Abramowicz, M. A., *Polytropes in N-dimensional spaces* *Acta Astronomica* vol. 33, (2), p. 313-318 (1983).
- [13] Nouh, M.I., Saad, A.S., Elsanhoury, W.H. et al. *White Dwarf Stars as Polytropic Gas Spheres*. *Astrophysics* 59, 540–547 (2016).
- [14] Kumar, J., & Bharti, P., *Relativistic models for anisotropic compact stars: A review*. *New Astronomy Reviews* Vol. 95 (2022).
- [15] Tooper, R., *General Relativistic Polytropic Fluid Spheres*. *Astrophysical Journal*, vol. 140, p.434, (1964).
- [16] Tooper, R., *Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity*. *Astrophysical Journal*, vol. 142, p.1541, (1965).
- [17] Tooper, R., *The "standard Model" for Massive Stars in General Relativity* *Astrophysical Journal*, vol. 143, p.465, (1966).
- [18] Bludman, S. A., *Stability of General-Relativistic Polytropes* *Astrophysical Journal*, Vol. 183, pp. 637-648 (1973).
- [19] Nilsson, U. S., & Uggla, C., *General Relativistic Stars: Polytropic Equations of State*. *Annals of Physics*, 286(2), 292–319 (2000).

- [20] Maeda, H., Harada, T., Iguchi, H., & Okuyama, N., *No go theorem for kinematic self-similarity with a polytropic equation of state*. Physical Review D, 66(2) (2002).
- [21] Lai, X. Y., & Xu, R. Y., *A Polytropic Model of Quark Stars*. Astropart. Phys. 31:128-134, (2009).
- [22] Thirukkanesh, S., & Ragel, F. C., *Exact anisotropic sphere with polytropic equation of state*. Pramana, 78(5), 687–696, (2012).
- [23] Cosenza, M., Herrera, L., Esculpi, M., and Witten, L., *Some models of anisotropic spheres in general relativity*. J. Math. Phys., 22:118, (1981).
- [24] Herrera, L., *Local anisotropy in self-gravitating systems*. Physics Reports, 286(2), 53–130, (1997).
- [25] Herrera, L., Di Prisco, A., Ospino, J., & Fuenmayor, E. *Conformally flat anisotropic spheres in general relativity*. J. Math. Phys. 42, 2129 (2001).
- [26] Herrera, L., Ospino, J., & Di Prisco, A., *All static spherically symmetric anisotropic solutions of Einstein's equations*. Physical Review D, 77(2) (2008).
- [27] Kemp, J., Swedlund, J., Landstreet, J., & Angel, J. R., *Discovery of Circularly Polarized Light from a White Dwarf*. Astrophysical Journal, vol. 161, p.L77 (1970).
- [28] Schmidt, G., & Smith, P., *A Search for Magnetic Fields among DA White Dwarfs*. Astrophysical Journal v.448, p.305 (1995).
- [29] Martínez, A. P., Felipe, R. G., & Paret, D. M., *Mass-Radius Relation for Magnetized Strange Quarks Stars*. International Journal of Modern Physics D, 19(08n10), 1511–1519 (2010).

- [30] Bordbar, G.H., Karami, M. Anisotropic magnetized neutron star. *Eur. Phys. J. C* 82, 74 (2022).
- [31] Andersson, N., Comer, G. L., & Glampedakis, K., *How viscous is a superfluid neutron star core?* *Nuclear Physics A*, 763, 212–229 (2005).
- [32] Sa'd, B. A., Shovkovy, I. A., & Rischke, D. H., *Bulk viscosity of strange quark matter: Urca versus nonleptonic processes.* *Physical Review D*, 75(12) (2007).
- [33] Alford, M. G., Schmitt, A., Colangelo, P., Creanza, D., De Fazio, F., Fini, R. A., & Nardulli, G., *Bulk viscosity in 2SC and CFL quark matter.* *AIP Conference Proceedings* (2007).
- [34] Drago, A., Lavagno, A., & Pagliara, G. *Bulk viscosity in hybrid stars.* *Physical Review D*, 71(10) (2005).
- [35] Jones, P. B., *Bulk viscosity of neutron-star matter.* *Physical Review D*, 64(8) (2001).
- [36] Van Dalen, E. N. E., & Dieperink, A. E. L. *Bulk viscosity in neutron stars from hyperons.* *Physical Review C*, 69(2) (2004).
- [37] Dong, H., Su, N., & Wang, Q., *Bulk viscosity in nuclear and quark matter* *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 34 S643 (2007).
- [38] Schunck, F. E., & Mielke, E. W. *General relativistic boson stars.* *Classical and Quantum Gravity*, 20(20), R301–R356 (2003).
- [39] Mak M.K. and Harko T., *Anisotropic stars in general relativity.* *Proc. R. Soc. Lond. A.* 459: 393–408, (2003).
- [40] Varela, V., Rahaman, F., Ray, S., Chakraborty, K., & Kalam, M., *Charged anisotropic matter with linear or nonlinear equation of state.* *Physical Review D*, 82(4) (2010).

- [41] Rahaman, F., Maulick, R., Yadav, A.K. et al. *Singularity-free dark energy star*. Gen Relativ Gravit 44, 107–124 (2012).
- [42] Shee, D., Rahaman, F., Guha, B. K., & Ray, S. *Anisotropic stars with non-static conformal symmetry*. Astrophysics and Space Science, 361(5) (2016).
- [43] Maurya, S. K., Gupta, Y. K., Ray, S., & Deb, D. *Generalised model for anisotropic compact stars*. The European Physical Journal C, 76(12) (2016).
- [44] Dev, K. & Gleiser, M. *Anisotropic stars II: Stability*. Gen. Relativ. Gravitation, 35(8):1435-1457, 2003.
- [45] Gokhroo, M. K., & Mehra, A. L. *Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity*. Gen. Rel. Grav., 26(1):75 - 84, 1994.
- [46] Bowers, R. L., & Liang, E. P. T. *Anisotropic Spheres in General Relativity* Astrophysical Journal, Vol. 188, p. 657 (1974).
- [47] Herrera, L., and Barreto W., *Newtonian polytropes for anisotropic matter: General framework and applications* Phys. Rev. D 87, 087303 (2003).
- [48] Herrera, L., & Barreto, W., *Evolution of relativistic polytropes in the post-quasi-static regime*. Gen.Rel.Grav. 36 127-150, (2004).
- [49] Herrera, L., & Barreto, W. *General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications*. Phys. Rev. D 88, 084022 (2013).
- [50] Abellan, G., Fuenmayor, E., & Herrera L., *The double polytrope for anisotropic matter: Newtonian Case* Physics of the Dark Universe. Volume 28, 100549 (2020)

- [51] Abellan, G., Fuenmayor, E., Contreras, E. & Herrera, L. *The general relativistic double polytrope for anisotropic matter* Phys.Dark Univ. 30 100632 (2020).
- [52] Herrera, L., Di Prisco, A., Barreto, W. et al. *Conformally flat polytropes for anisotropic matter*. Gen Relativ Gravit 46, 1827 (2014)
- [53] Ramos, A., Arias, C., Fuenmayor, E. & Contreras, E. *Class I polytropes for anisotropic matter*. Eur. Phys. J. C 81, 203 (2021).
- [54] Ivanov, B. V. *Analytical study of anisotropic compact star models*. Eur. Phys. J. C 77, 738 (2017).
- [55] Ivanov, B. V. *A conformally flat realistic anisotropic model for a compact star*. Eur. Phys. J. C 78, 332 (2018).
- [56] Abreu, H., Hernández, H., & Núñez, L. A. *Sound speeds, cracking and the stability of self-gravitating anisotropic compact objects*. Classical and Quantum Gravity, 24(18), (2007).
- [57] Delgaty, M. S. R., & Lake, K. *Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations*. Computer Physics Communications, 115(2-3), 395–415, (1998).
- [58] Buchdahl, H. A. *General Relativistic Fluid Spheres*. Physical Review, 116(4): 1027-1034, (1959).
- [59] Ivanov, B. V. *Maximum bounds on the surface redshift of anisotropic stars*. Physical Review D, 65(10), (2002).
- [60] Kolassis, C. A., Santos, N. O., & Tsoubelis, D. *Energy conditions for an imperfect fluid*. Classical and Quantum Gravity, 5(10), 1329–1338 (1988).

- [61] Kontou, E. -A., & Sanders, K. *Energy conditions in general relativity and quantum field theory*. Classical and Quantum Gravity, 37(19), (2020).
- [62] Herrera, L. *Cracking of self-gravitating compact objects*. Physics Letters A, 165(3), 206–210 (1992).
- [63] DiPrisco, A., Fuenmayor, E., Herrera, L., and Varela, V. *Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects*. Physics Letters A, 195:23 – 26 (1994).
- [64] DiPrisco, A., Herrera, L., and Varela, V. *Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy*. General Relativity and Gravitation, 29(10):1239–1256, (1997).
- [65] Hernández, H., Núñez, L.A. & Vásquez-Ramírez, A. *Convection and cracking stability of spheres in general relativity*. Eur. Phys. J. C 78, 883 (2018).
- [66] González, G. A., Navarro, A., & Núñez, L. A. *Cracking isotropic and anisotropic relativistic spheres*. Canadian Journal of Physics, 95(11), 1089–1095 (2017).
- [67] Hernández, H., Suárez-Urango, D. & Núñez, L.A. *Acceptability conditions and relativistic barotropic equations of state*. Eur. Phys. J. C 81, 241 (2021).
- [68] Suárez-Urango, D., Ospino, J., Hernández, H. et al. *Acceptability conditions and relativistic anisotropic generalized polytropes*. Eur. Phys. J. C 82, 176 (2022).
- [69] Hartle, J. B. *Bounds on the mass and moment of inertia of non-rotating neutron stars*. Physics Reports, 46(6), 201–247 (1978).
- [70] Lattimer, J., & Prakash, M. *Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints*. Physics Reports, 442(1-6), 109–165. (2007).

- [71] Lindblom, L. *Limits on the gravitational redshift form neutron stars*. *Astrophysical Journal*, Part 1, vol. 278, 364-368. (1984).
- [72] Glendenning, N. K. *Limiting rotational period of neutron stars*. *Physical Review D*, 46(10), 4161–4168. (1992).
- [73] Herrera, L., *New definition of complexity for self-gravitating fluid distributions: The spherically symmetric, static case*. *Physical Review D*, 97(4):044010, 2018.
- [74] Arias, C., Contreras, E., Fuenmayor, E., Ramos, A. *Anisotropic star models in the context of vanishing complexity*. *Annals of Physics*, Vol. 436 (2022).
- [75] Raposo, G., Pani, P., Bezares, M., Palenzuela, C., & Cardoso, V. *Anisotropic stars as ultracompact objects in general relativity*. *Physical Review D*, 99(10). (2019).
- [76] Arias, C., Tello-Ortiz, F., & Contreras, E. *Extra packing of mass of anisotropic interiors induced by MGD*. *The European Physical Journal C*, 80(5). (2020).

## **Anexos**

## Anexos A

# Deducción de la Ecuación “maestra” de Lane-Emden

Vamos a deducir una generalización de la ecuación de Lane-Emden a partir de la ecuación TOV

$$\frac{r(r-2m)}{\rho+P} \frac{dP}{dr} + (m + 4\pi r^3 P) - 2\Delta \frac{(r-2m)}{\rho+P} = 0 \quad (\text{A.1})$$

junto con la ecuación de masa

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (\text{A.2})$$

y la ecuación de estado

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho - \beta. \quad (\text{A.3})$$

Antes de deducir la ecuación maestra de Lane-Emden primero vamos a determinar los parámetros físicos que son necesarios para su obtención. Partimos usando el hecho que la presión radial en la superficie se anula, entonces

$$\beta = k\rho_R^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho_R.$$

Por lo cual la ecuación de estado puede ser escrita como

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho - K\rho_R^{1+\frac{1}{n}} - \alpha\rho_R. \quad (\text{A.4})$$

Se define

- $\sigma = P_c/\rho_c$ , describe la dureza en el centro de la distribución de la materia.
- $\chi = \rho_R/\rho_c$ , bosqueja el descenso de la densidad desde el centro hasta la superficie del objeto compacto.

De la presión en el centro del objeto

$$P_c = K\rho_c^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho_c - K\rho_R^{1+\frac{1}{n}} - \alpha\rho_R,$$

$$\frac{P_c}{\rho_c} = K\rho_c^{\frac{1}{n}} + \alpha - K\frac{\rho_R^{1+\frac{1}{n}}}{\rho_c} - \alpha\frac{\rho_R}{\rho_c},$$

$$\sigma = K\rho_c^{\frac{1}{n}} + \alpha - K\frac{\rho_R^{1+\frac{1}{n}}}{\rho_c} - \alpha\chi,$$

$$K\rho_c^{\frac{1}{n}} \left( 1 - \frac{\rho_R^{1+\frac{1}{n}}}{\rho_c^{1+\frac{1}{n}}} \right) = \sigma - \alpha(1 - \chi),$$

definimos

$$\Upsilon = K\rho_c^{\frac{1}{n}} = \frac{\sigma - \alpha(1 - \chi)}{1 - \chi^{1 + \frac{1}{n}}}. \quad (\text{A.5})$$

Una vez definidos todos los parámetros que se usarán, vamos a utilizar el siguiente cambio de variable para la densidad de energía  $\rho = \rho_c \Psi^n$ , tenemos que

$$P = K\rho_c^{1 + \frac{1}{n}} \Psi^{n+1} + \alpha\rho_c \Psi^n - \beta, \quad (\text{A.6})$$

y

$$\frac{dP}{dr} = K\rho_c^{1 + \frac{1}{n}} (n + 1) \Psi^n \frac{d\Psi}{dr} + \alpha\rho_c n \Psi^{n-1} \frac{d\Psi}{dr}. \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo la densidad de presión, (A.6) y (A.7) en la ecuación TOV (A.1), obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{r(r - 2m)}{\rho_c \Psi^n + K\rho_c^{1 + \frac{1}{n}} \Psi^{n+1} + \alpha\rho_c \Psi^n - \beta} \left[ K\rho_c^{\frac{1}{n}} (n + 1) + \frac{\alpha n}{\Psi} \right] \rho_c \Psi^n \frac{d\Psi}{dr} \\ & + \left[ m + 4\pi \left( K\rho_c^{1 + \frac{1}{n}} \Psi^{n+1} + \alpha\rho_c \Psi^n - \beta \right) r^3 \right] \\ & - 2\Delta \frac{(r - 2m)}{\rho_c \Psi^n + K\rho_c^{1 + \frac{1}{n}} \Psi^{n+1} + \alpha\rho_c \Psi^n - \beta} = 0. \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r(r-2m)}{1 + K\rho_c^{\frac{1}{n}}\Psi + \alpha - \beta/\rho_c\Psi^{-n}} \left[ K\rho_c^{\frac{1}{n}}(n+1) + \frac{\alpha n}{\Psi} \right] \frac{d\Psi}{dr} \\
& + \left[ m + 4\pi \left( K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\Psi^{n+1} + \alpha\rho_c\Psi^n - \beta \right) r^3 \right] \\
& - 2\Delta \frac{(r-2m)}{\rho_c\Psi^n + K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}\Psi^{n+1} + \alpha\rho_c\Psi^n - \beta} = 0. \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

Introduciendo la coordenada radial como  $r = a\xi$ , donde

$$a^2 = \frac{\Upsilon(1+n)}{4\pi\rho_c} \quad \text{con} \quad \Upsilon = k\rho_c^{1/n} = \frac{\sigma - \alpha(1-\chi)}{1 - \chi^{1+1/n}}, \quad (\text{A.10})$$

tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{a\xi(a\xi - 2m)}{1 + \Upsilon\Psi + \alpha - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}} \left[ \Upsilon(n+1) + \frac{\alpha n}{\Psi} \right] \frac{d\Psi}{a d\xi} \\
& + \left[ m + 4\pi a^3 \rho_c (\Upsilon\Psi^{n+1} + \alpha\Psi^n - \beta/\rho_c) \xi^3 \right] \\
& - 2\Delta \frac{(a\xi - 2m)}{\rho_c\Psi^n [1 + \Upsilon\Psi + \alpha - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}]} = 0. \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

Dividiendo para  $4\pi a^3 \rho_c$

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2\xi[\xi - 2m/a]}{(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}} \left[ \Upsilon(n+1) + \frac{\alpha n}{\Psi} \right] \frac{1}{4\pi\rho_c a^4} \frac{d\Psi}{d\xi} \\
& + \left[ \frac{m}{4\pi\rho_c a^3} + \xi^3 (\Upsilon\Psi^{n+1} + \alpha\Psi^n - \beta/\rho_c) \right] \\
& - 2\Delta \frac{(a\xi - 2m)}{(4\pi a^3 \rho_c) \rho_c \Psi^n [(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}]} = 0. \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Ahora, introduciendo la masa adimensional

$$\eta(\xi) = \frac{m}{4\pi a^3 \rho_c}, \quad (\text{A.13})$$

se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\xi[\xi - 2(4\pi\rho_c a^2)\eta]}{(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}} \left[ \Upsilon(n + 1) + \frac{\alpha n}{\Psi} \right] \frac{1}{4\pi\rho_c a^2} \frac{d\Psi}{d\xi} \\ & + [\eta + \xi^3 (\Upsilon\Psi^{n+1} + \alpha\Psi^n - \beta/\rho_c)] \\ & - 2\Delta \frac{\xi - 2(4\pi\rho_c a^2)}{(4\pi a^2 \rho_c)\rho_c \Psi^n [(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}]} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De (A.10), podemos cambiar  $4\pi a^2 \rho_c = \Upsilon(n + 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{\xi[\xi - 2\Upsilon(n + 1)\eta]}{(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}} \left[ \Upsilon(n + 1) + \frac{\alpha n}{\Psi} \right] \frac{1}{\Upsilon(n + 1)} \frac{d\Psi}{d\xi} \\ & + [\eta + \xi^3 (\Upsilon\Psi^{n+1} + \alpha\Psi^n - \beta/\rho_c)] \\ & - 2\Delta \frac{\xi - 2\Upsilon(n + 1)}{\Upsilon(n + 1)\rho_c \Psi^n [(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}]} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

o también

$$\begin{aligned} & \frac{\xi[\xi - 2\Upsilon(n + 1)\eta]}{(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}} \left[ 1 + \frac{\alpha n}{\Upsilon(n + 1)\Psi} \right] \frac{d\Psi}{d\xi} \\ & + [\eta + \xi^3 (\Upsilon\Psi^{n+1} + \alpha\Psi^n - \beta/\rho_c)] \\ & - 2\Delta \frac{\xi - 2\Upsilon(n + 1)}{\Upsilon(n + 1)\rho_c \Psi^n [(1 + \alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}]} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Remplazando  $\beta = K\rho_R^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho_R$  y  $\chi = \rho_R/\rho_c$

$$\begin{aligned} & \frac{\xi[\xi - 2\Upsilon(n+1)\eta]}{(1+\alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}} \left[ 1 + \frac{\alpha n}{\Upsilon(n+1)\Psi} \right] \frac{d\Psi}{d\xi} \\ & + \eta + \xi^3 \left[ \Upsilon(\Psi^{n+1} - \chi^{1+\frac{1}{n}}) + \alpha(\Psi^n - \chi) \right] \\ & + 2\Delta \frac{\xi - 2\Upsilon(n+1)}{\Upsilon(n+1)\rho_c\Psi^n [(1+\alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}]} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Usando (A.3) y  $\chi = \rho_R/\rho_c$ , obtenemos

$$\mathcal{P} = \frac{P}{\rho_c} = \Upsilon(\Psi^{n+1} - \chi^{1+\frac{1}{n}}) + \alpha(\Psi^n - \chi). \quad (\text{A.18})$$

Tomando

$$\begin{aligned} (1+\alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n} &= (1+\alpha) + \Upsilon\Psi - \frac{1}{\rho_c} \left( K\rho_R^{1+\frac{1}{n}} + \alpha\rho_R \right) \Psi^{-n}, \\ &= 1 + \left[ \alpha\Psi^n + \Upsilon\Psi^{1+\frac{1}{n}} - K\rho_c \frac{\rho_R^{1+\frac{1}{n}}}{\rho_c^{1+\frac{1}{n}}} - \alpha\frac{\rho_R}{\rho_c} \right] \Psi^{-n}, \\ &= 1 + \left[ \alpha\Psi^n + \Upsilon\Psi^{1+\frac{1}{n}} - K\rho_c \left( \frac{\rho_R}{\rho_c} \right)^{1+\frac{1}{n}} - \alpha\frac{\rho_R}{\rho_c} \right] \Psi^{-n}, \\ &= 1 + \left[ \alpha\Psi^n + \Upsilon\Psi^{1+\frac{1}{n}} - K\rho_c\chi^{1+\frac{1}{n}} - \alpha\chi \right] \Psi^{-n}, \\ &= 1 + \left[ \Upsilon(\Psi^{n+1} - \chi^{1+\frac{1}{n}}) + \alpha(\Psi^n - \chi) \right] \Psi^{-n}, \\ (1+\alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n} &= 1 + \mathcal{P}\Psi^{-n}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Remplazando (A.18) y (A.19) en (A.17), obtenemos la forma general de la ecuación maestra de

Lane-Emden

$$\frac{\xi[\xi - 2\Upsilon(n+1)\eta]}{1 + \mathcal{P}\Psi^{-n}} \left[ 1 + \frac{\alpha n}{\Upsilon(n+1)\Psi} \right] \frac{d\Psi}{d\xi} + \eta + \xi^3 \mathcal{P} - 2\Delta \frac{\xi - 2\Upsilon(n+1)}{\Upsilon(n+1)\rho_c \Psi^n [(1+\alpha) + \Upsilon\Psi - (\beta/\rho_c)\Psi^{-n}]} = 0, \quad (\text{A.20})$$

despejando  $d\Psi/d\xi$  llegamos finalmente a

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = -\frac{1}{\xi} \left[ \frac{(\eta + \xi^3 \mathcal{P})(1 + \mathcal{P}\Psi^{-n})}{\xi - 2\Upsilon(n+1)\eta} - \frac{2\Delta}{\rho_c \Psi^n \Upsilon(n+1)} \right] \left[ 1 + \frac{\alpha n}{\Upsilon(n+1)\Psi} \right]^{-1}. \quad (\text{A.21})$$

## Anexos B

### Conformalmente plano

En simetría esférica el tensor de Weyl se escribe como

$$W = \frac{r}{2} C_{232}^3 = \frac{r^3 e^{-\lambda}}{6} \left( \frac{e^\lambda}{r^2} + \nu' \lambda' - \frac{1}{r^2} - \nu'^2 - \nu'' - \frac{\lambda' - \nu'}{r} \right). \quad (\text{B.1})$$

Las ecuaciones de campo para  $P$  y  $P_\perp$

$$8\pi P = -\frac{1}{r^2} + e^{-2\lambda} \left( \frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (\text{B.2})$$

$$8\pi P_\perp = e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right). \quad (\text{B.3})$$

Aplicando la condición de que el tensor de Weyl satisfice:

$$\begin{aligned} \frac{r^3 e^{-2\lambda}}{6} \left( \frac{e^{2\lambda}}{r^2} + \nu' \lambda' - \frac{1}{r^2} - \nu'^2 - \nu'' - \frac{\lambda' - \nu'}{r} \right) &= 0, \\ -e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + \frac{\lambda' - \nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} &= 0. \end{aligned}$$

Sumando y restando  $2(\nu' - \lambda')e^{-2\lambda}/r$

$$e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - \frac{\nu' - \lambda'}{r} + \frac{2(\nu' - \lambda')}{r} - \frac{2(\nu' - \lambda')}{r} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} = 0,$$

$$e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) - \frac{2e^{-2\lambda}\nu'}{r} + \frac{2e^{-2\lambda}\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} = 0.$$

Sumando y restando  $\frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2}$

$$e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} - \frac{2e^{-2\lambda}\nu'}{r} + \frac{2e^{-2\lambda}\lambda'}{r} - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{-2\lambda}}{r^2} = 0,$$

$$e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) - \left[ -\frac{1}{r^2} + e^{-2\lambda} \left( \frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] + \frac{2\lambda'e^{-2\lambda}}{r} + \frac{2(e^{-2\lambda} - 1)}{r^2} = 0.$$

Si comparamos con las ecuaciones de campo (B.2) y (B.3), se tiene que

$$\begin{aligned} 8\pi(P_{\perp} - P) &= -\frac{2\lambda'e^{-2\lambda}}{r} - \frac{2(e^{-2\lambda} - 1)}{r^2}, \\ \Delta &= \frac{1}{8\pi} \left[ -\frac{2\lambda'e^{-2\lambda}}{r} - \frac{2(e^{-2\lambda} - 1)}{r^2} \right], \\ \Delta &= \frac{r}{8\pi} \left[ \frac{-2\lambda'r^2e^{-2\lambda} - (e^{-2\lambda} - 1)2r}{r^4} \right]. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\left( \frac{e^{-2\lambda} - 1}{r^2} \right)' = \frac{-2\lambda'r^2e^{-2\lambda} - (e^{-2\lambda} - 1)2r}{r^4},$$

entonces la anisotropía se puede escribir

$$\Delta = \frac{r}{8\pi} \left( \frac{e^{-2\lambda} - 1}{r^2} \right)'. \quad (\text{B.4})$$

Si recordamos la función de masa se había definido como  $m(r) = r(1 - e^{-2\lambda})/2$ , reemplazando en la anisotropía

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{r}{8\pi} \left( -\frac{2m}{r^3} \right)', \\ &= \frac{r}{4\pi} \left( -\frac{m'r^3 - 3mr^2}{r^6} \right), \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3m}{r^3} - \frac{m'}{r^2} \right), \end{aligned}$$

pero  $m' = dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ , entonces

$$\Delta = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3m}{r^3} - 4\pi\rho \right).$$

Haciendo el cambio de variable  $r = a\xi$ ,  $\rho = \rho_c \Psi^n$  y  $m = 4\pi a^3 \rho_c \eta$ ,

$$\Delta = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3(4\pi a^3 \rho_c \eta)}{a^3 \xi^3} - 4\pi \rho_c \Psi^n \right),$$

la anisotropía en unidades adimensionales es

$$\Delta = \rho_c \left( \frac{3\eta}{\xi^3} - \psi^n \right). \quad (\text{B.5})$$

## Anexos C

### Anticracking

El concepto de cracking fue elaborado por Herrera y otros colaboradores [62–64]. Se introdujo para describir el comportamiento de la fuerza radial en la distribución del sector material estelar justo después de la salida de equilibrio inducido por una perturbación local en el perfil de densidad  $\delta\rho(r)$  [66].

Consideremos una vez más la ecuación de equilibrio hidrostático (2.37), la fuerza radial total  $\mathcal{R}$  se desvanece para configuraciones estáticas

$$\mathcal{R} \equiv \frac{dP}{dr} + (\rho + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} - \frac{2}{r} \Delta = 0. \quad (\text{C.1})$$

Las fluctuaciones en la densidad  $\delta\rho$  induce variaciones en las otras cantidades físicas  $m(r)$ ,  $P(r)$ ,  $\Delta(r)$  y sus derivadas. Expandiendo la expresión para la fuerza radial (C.1) para la perturbación de densidad local  $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho$ , obtenemos

$$\delta\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0(\rho, P, m, \Delta, P') + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P}\delta P + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m}\delta m + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\Delta}\delta\Delta + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P'}\delta P', \quad (\text{C.2})$$

donde  $\mathcal{R}_0(\rho, P, m, \Delta, P') = 0$  debido a la configuración inicial que esta en equilibrio, mientras que la fuerza radial  $\delta\mathcal{R} \neq 0$  [66]. Aquí se analiza el cambio de signo que pueda tener  $\delta\mathcal{R}$  a lo largo del radio del objeto compacto. El cracking (agrietamiento) aparece cuando la distribución de la fuerza perturbada cambia de signo,  $\delta\mathcal{R} < 0 \rightarrow \delta\mathcal{R} > 0$ , es decir, en la parte interna de la esfera la fuerza que apunta hacia adentro, invierte su signo para algún valor  $r$  [56]. Por otra parte, overturning (vuelco) ocurre cuando la fuerza neta, dirigida hacia afuera, invierte su signo como  $\delta\mathcal{R} > 0 \rightarrow \delta\mathcal{R} < 0$  para algún valor de  $r$  [56].

Por simplicidad, en este trabajo consideraremos los siguientes puntos. Primero, las perturbaciones tanto en la densidad  $\delta\rho$  y la anisotropía local  $\delta\Delta$  son consideradas como perturbaciones independientes; pero las fluctuaciones en la masa y la presión radial dependen de las perturbaciones de densidad [56]. Segundo, consideramos que las fluctuaciones de la densidad  $\delta\rho$  son constantes, ya que estas no afectan al gradiente de presión.  $\delta P' = 0$  [56]. La ecuación C.2 se reduce a

$$\delta\mathcal{R} \approx \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial P}\delta P + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial m}\delta m + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\Delta}\delta\Delta. \quad (\text{C.3})$$

Las fluctuaciones para la presión radial  $P$  y la masa

$$P(\rho + \delta\rho) \approx P(\rho) + \delta P \approx P(\rho) + \frac{\partial P}{\partial\rho}\delta\rho \quad (\text{C.4})$$

$$m(\rho + \delta\rho) \approx m(\rho) + \delta m \approx m(\rho) + \frac{\partial m}{\partial\rho}\delta\rho \quad (\text{C.5})$$

entonces

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho} \delta \rho, \quad (\text{C.6})$$

$$\delta m = \frac{\partial m}{\partial \rho} \delta \rho. \quad (\text{C.7})$$

De la ecuación de masa 2.30

$$m(\rho + \delta \rho) = 4\pi \int_0^r r'^2 (\rho + \delta \rho) dr' \approx m(\rho) + \frac{4\pi}{3} r^3 \delta \rho,$$

entonces

$$\delta m = \frac{4\pi}{3} r^3 \delta \rho. \quad (\text{C.8})$$

Remplazando (C.6) y (C.8) en (C.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R} &\approx \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} \frac{4\pi}{3} r^3 \delta \rho - \frac{2}{r} \delta \Delta, \\ &\approx \delta \rho \left[ 2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} + \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} - \frac{2}{r} \frac{\delta \Delta}{\delta \rho} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

donde

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \geq 0, \quad (\text{C.10})$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} = \frac{(\rho + P)(1 + 8\pi r^2 P)}{(r - 2m)^2} \geq 0, \quad (\text{C.11})$$

entonces

$$\delta\mathcal{R} = \delta\rho \left[ 2\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} + \frac{4\pi r^2 (\rho + P) (1 + 8\pi r^2 P)}{3(2m - r)^2} - \frac{2}{r} \frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \right]. \quad (\text{C.12})$$

Se puede observar que para tener  $\delta\mathcal{R} = 0$ , y consecuentemente un cambio de signo, se tiene que  $\delta\Delta/\delta\rho > 0$ . Para tener una configuración potencialmente estable  $\delta\mathcal{R}$  nunca debe cambiar de signo, esto sucede si  $\delta\Delta/\delta\rho \leq 0$  [66]. Por otra parte

$$\Delta(\rho + \delta\rho) \approx \Delta(\rho) + \delta\Delta \sim \Delta(\rho) + \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} \delta\rho, \quad (\text{C.13})$$

entonces

$$\delta\Delta = \frac{\partial\Delta}{\partial\rho} \delta\rho = \left[ \frac{\partial P_{\perp}}{\partial\rho} - \frac{\partial P}{\partial\rho} \right] \delta\rho = [v_{\perp}^2 - v^2] \delta\rho. \quad (\text{C.14})$$

Como  $0 \leq v^2 \leq 1$  y  $0 \leq v_{\perp}^2 \leq 1$ , entonces  $|v_{\perp}^2 - v^2| \leq 1$ , y considerando que  $\delta\mathcal{R}$  es estable si  $\delta\Delta/\delta\rho \leq 0$  [66], entonces la condición que brinda estabilidad por fluctuaciones de densidad esta dada por

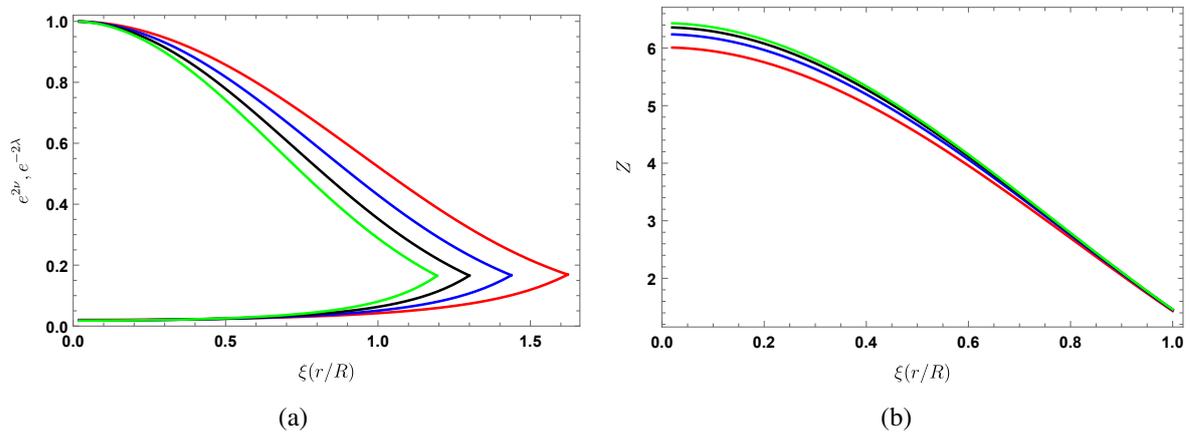
$$-1 \leq v_{\perp}^2 - v^2 \leq 0. \quad (\text{C.15})$$

Esta condición es conocida como estabilidad contra el cracking o anticracking.

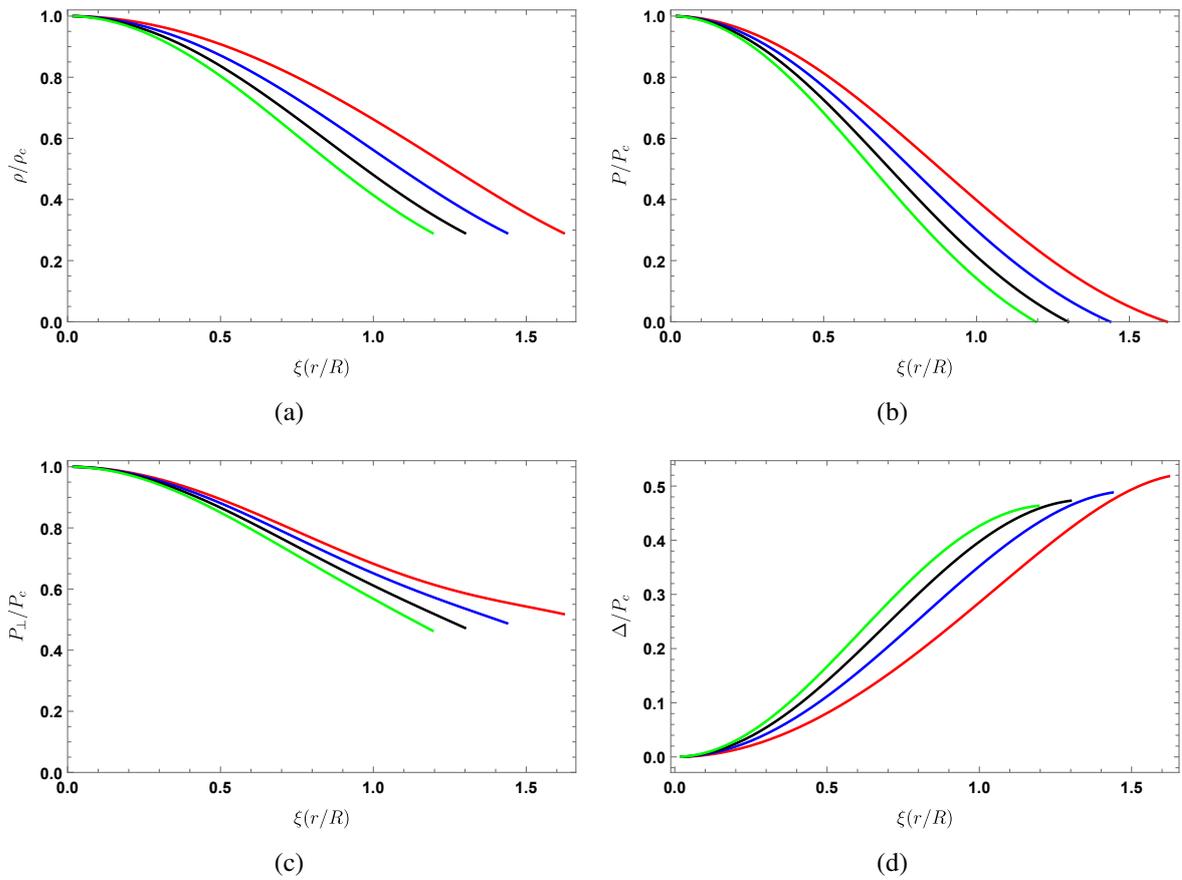
## **Anexos D**

# **Resultados del polítropo conformalmente plano con $C=1$**

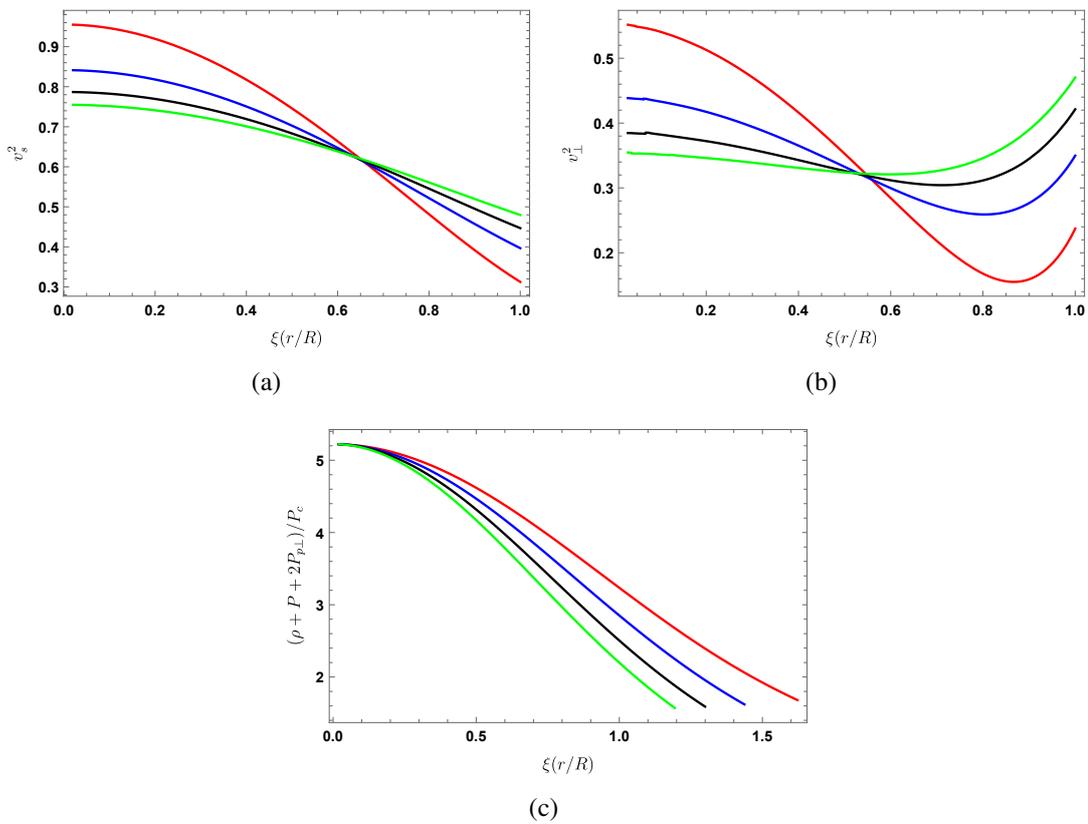
A continuación se presentan los resultados gráficos para el polítropo conformalmente plano, considerando los siguientes valores para los parámetros  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi = 0.29$   $\sigma = 0.45$  y  $C = 1.0$ .



**Figura D.1:** Las funciones métricas  $e^{-2\lambda}$  (decreciente),  $e^{2\nu}$  (creciente) y se unen en la superficie del objeto (a), corrimiento al rojo  $Z$  (b), para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi = 0.29$ ,  $\sigma = 0.45$  y índices politrópicos  $n = 1.0$  (rojo),  $n = 1.5$  (azul),  $n = 2.0$  (negro) y  $n = 2.5$  (verde).



**Figura D.2:** Perfiles para  $\rho$  (a),  $P$  (b),  $P_{\perp}$  (c),  $\Delta$  (d), para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi = 0.29$ ,  $\sigma = 0.45$  y los índices politrópicos  $n = 1.0$  (rojo),  $n = 1.5$  (azul),  $n = 2.0$  (negro) y  $n = 2.5$  (verde).



**Figura D.3:** Velocidad del sonido radial  $v_s^2$  (a), velocidad del sonido tangencial  $v_{\perp}^2$  (b) y condición de energía fuerte (SEC) (c) para los valores de los parámetros  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi = 0.29$ ,  $\sigma = 0.45$  y  $n = 1.0$  (rojo),  $n = 1.5$  (azul),  $n = 2.0$  (negro) y  $n = 2.5$  (verde).