

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingeniería

**Oscilador armónico y no localidad en el
contexto del cálculo fraccionario**

Pablo Sebastian Andagana Rios

Física

Trabajo de titulación presentado como requisito
para la obtención del título de

Físico

7 de diciembre de 2023

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingeniería

**HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE FIN DE
CARRERA**

Pablo Sebastian Andagana Rios

Nombre del profesor, Título académico: Ernesto Contreras, PhD

7 de diciembre de 2023

© Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombres y apellidos: Pablo Sebastian Andagana Rios

Código: 00202304

Cédula de Identidad: 1805288139

Lugar y fecha: 7 de diciembre de 2023

ACLARACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>

UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>

Agradecimientos

A mis padres por siempre apoyarme, a mi hermana por ser el motor de mi vida, a mi familia en general por estar en las buenas y en las malas, a todos esos docentes que siempre supieron guiarme y a todas las personas que me acompañaron en este camino.

Resumen

En este trabajo, se realiza una comparativa entre el oscilador armónico forzado con amortiguamiento clásico y un oscilador fraccionario sin termino de amortiguamiento explícito. Para el planteamiento de la ecuación dinámica fraccionaria se emplea la derivada de Caputo, misma que aporta propiedades de no localidad y memoria al sistema. Estas propiedades permiten que el sistema a pesar de no poseer un amortiguamiento clásico presente características similares. Las soluciones encontradas al sistema en términos de la función de Mittag-Leffler, se analizan de forma numérica con el fin de realizar la comparativa con el caso de derivada clásica.

Palabras clave: *Oscilador fraccionario; función de Mittag-Leffler; no localidad.*

Abstract

In this work, a comparison is made between the forced harmonic oscillator with classical damping and a fractional oscillator without explicit damping term. For the fractional dynamic equation, the Caputo derivative is used, which provides properties of nonlocality and memory to the system. These properties allow the system to present similar characteristics in spite of not having a classical damping. The solutions found to the system in terms of the Mittag-Leffler function are analyzed numerically in order to make a comparison with the classical derivative case.

Keywords: *Fractional Oscillator; Mittag-Leffler function; nonlocality*

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Oscilador armónico amortiguado clásico	15
1.2. Oscilador armónico forzado con amortiguamiento clásico	18
1.3. Oscilador armónico fraccionario	20
1.3.1. Dimensionalidad	21
2. Métodos	23
2.1. Cálculo fraccionario	23
2.1.1. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville	23
2.1.2. Derivada fraccionaria de Caputo	25
2.1.3. Función de Mittag-Leffler	26

	8
2.2. Aproximación en derivada de Caputo	28
3. Resultados	31
3.1. Solución oscilador armónico amortiguado fraccionario	31
3.2. Solución oscilador armónico fraccionario forzado con amortiguamiento	36
4. Conclusiones	42
Bibliografía	45

Índice de figuras

1.1. Oscilador sobre amortiguado con $\beta = 0,3$ y $\omega_0 = 0,075$	16
1.2. Oscilador con amortiguamiento débil $\beta = 0,3$ y $\omega_0 = 0,4$	17
1.3. Oscilador con amortiguamiento crítico	17
1.4. Amplitud [m] en relación con la frecuencia ω con $F_0 = 2[N]$, $m =$ $10[kg]$, $\omega_0 = 1,6[rad/s]$	20
2.1. Comportamiento de la función de Mittag Leffler con parámetro $\beta =$ 1 y $\alpha = 0,9, 1,5, 1,9$	27
3.1. Solución del oscilador armónico fraccionario sin termino de amorti- guamiento para $\alpha = 1,3$	34
3.2. Solución del oscilador armónico fraccionario sin termino de amorti- guamiento para $\alpha = 1,1$	35

3.3. Solución del oscilador armónico fraccionario sin termino de amortiguamiento para $\alpha = 1,9$	35
3.4. Gráfico de la amplitud en función de ω para una frecuencia natural del sistema de $\varpi = 5$ y $F_0 = 10$	38
3.5. Solución para el oscilador armónico forzado fraccionario con $\alpha = 1,1$	39
3.6. Solución para el oscilador armónico forzado fraccionario con $\alpha = 1,5$	40
3.7. Solución para el oscilador armónico forzado fraccionario con $\alpha = 1,9$	41

Capítulo 1

Introducción

Durante toda la historia de la ciencia, la física se ha caracterizado por ser interdisciplinaria. La necesidad de la física en apoyarse de otras ciencias como la ingeniería o matemáticas, es evidente. Se considera que al ser una ciencia exacta no da lugar a especulación pues todo aquello que se proponga tendrá que ser demostrado en posteridad por un experimento.

Sin embargo, toda teoría nace de la necesidad del ser humano de explicar un fenómeno. Muchas veces este fenómeno puede ser algo muy cotidiano, es decir problemas que vemos día a día y muchas veces son problemáticas mucho mas profundas a las cuales la tecnología humana todavía no ha podido crear experimentos capaces de explorarlas. Es entonces cuando el intelecto y la creatividad de los científicos tiene que salir a flote, quienes en conjunto con herramientas matemáticas poderosas sean capaces de dar una descripción de las propiedades que estos fenómenos engloban.

Es válido preguntarnos entonces, cómo la creatividad de los científicos juega con la física teórica, y esta creatividad es la que permite el desarrollo, abriendo la perspectiva a nuevos conceptos. Revisando la historia notamos que ideas revolucionarias como la relatividad general de Einstein se construye al darle una interpretación física a herramientas matemáticas, en este caso el cálculo tensorial de Riemann. O la misma mecánica Newtoniana, nace a partir del ingenio de Isaac Newton al construir el cálculo diferencial e integral y darle a este una interpretación física.

La importancia de la derivada en la descripción de fenómenos físicos radica en su capacidad para capturar las tasas de cambio o variación en diversas magnitudes. Este concepto es fundamental para comprender fenómenos dinámicos. Sin embargo, en muchas ocasiones, las ecuaciones basadas únicamente en derivadas clásicas pueden resultar limitadas para describir fenómenos complejos [1].

Las derivadas clásicas, como las que se encuentran en el cálculo diferencial, utilizan conceptos como continuidad y localidad, es decir, en la idea de que un cambio en una variable en un punto particular solo depende de los valores cercanos a ese punto en el espacio. Este enfoque de localidad ha sido utilizado para describir la gran mayoría fenómenos físicos.

Sin embargo, hay fenómenos en la naturaleza que muestran comportamientos no locales, es decir, eventos en los cuales las interacciones o efectos no se limitan a una región específica o a valores cercanos en el espacio.

Debido a la importancia que las derivadas tienen dentro de la física, nos hemos

preguntado durante muchos años si; ¿Tiene algún sentido un valor no entero de derivada?. Esta pregunta, planteada en el siglo XVII [2], fue olvidada durante mucho tiempo y no se busco darle aplicaciones prácticas.

Durante los últimos años los físicos se han enfocado en la búsqueda de teorías de campos no locales, esto se debe a que se espera que puedan dar soluciones más elegantes y efectivas en física de altas energías de lo que las teorías de campos locales ha podido dar[3].

En un dominio temporal en el cual pasamos de localidad a no localidad se evidencian efectos de memoria en el sistema, pues los eventos que afectan a un determinado suceso no serán únicamente aquellos que se encuentren en su presente, también serán aquellos que sucedieron en el pasado.

Una de las herramientas que nos permite encontrar efectos de no localidad o memoria es el cálculo fraccionario. Podemos analizar una derivada ordinaria cuyo parámetro es un entero. Pero, ¿qué sucede si este es un valor fraccionario, complejo o incluso una función $\alpha(x, t)$?

$$\frac{d^n}{dx^n} \rightarrow \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}.$$

Necesitaremos así de nuevas definiciones, conceptos y herramientas que nos permitan trabajar bajo estos parámetros y será el objetivo fundamental de este trabajo el no únicamente hallar soluciones matemáticas a problemas del cálculo fraccionario sino también darle una naturaleza física la cual pueda tener una interpretación en nuestra realidad.

Aunque este tratamiento matemático se relativamente nuevo, los conceptos del cálculo fraccionario han encontrado aplicaciones prácticas en una variedad de campos, desde la ingeniería de control hasta la medicina. En el control de sistemas dinámicos, la automatización y el diseño de sistemas más eficientes y adaptables [4]. En medicina, se están explorando las aplicaciones del cálculo fraccionario en la propagación de enfermedades, la dinámica de los tejidos y la comprensión de fenómenos neurológicos complejos [5],[6].

En estas áreas de estudio, las oscilaciones son un fenómeno recurrente, el estudio de estas es de suma importancia ya que este movimiento oscilatorio se encuentran en diversos fenómenos como los péndulos y sistemas de resortes [7], las vibraciones estructurales en ingeniería mecánica, los circuitos oscilantes en electrónica [8], las ondas en distintos medios, por lo que su estudio permite comprender la naturaleza del sistema y posibles aplicaciones. El cálculo fraccionario proporciona una herramienta matemática poderosa para abordar oscilaciones no lineales y no locales que se encuentran en diversos sistemas físicos [3]. Su capacidad para describir fenómenos con memoria es crucial para capturar con precisión las oscilaciones en sistemas dinámicos. Estudiar las oscilaciones desde la perspectiva del cálculo fraccionario no solo amplía nuestro conocimiento teórico, sino que también ofrece oportunidades significativas para avanzar en la comprensión y la aplicación práctica de estos fenómenos en múltiples campos científicos y tecnológicos.

1.1. Oscilador armónico amortiguado clásico

Para plantear el problema fraccionario partiremos del bien estudiado oscilador armónico con amortiguamiento. Para este oscilador se tiene que la dinámica del sistema es descrita por la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \gamma \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (1.1)$$

La modificación con el oscilador armónico libre se manifiesta en el término $\gamma \frac{d}{dt}x(t)$ el cual representa una fuerza de restauración a velocidades bajas, donde γ es una constante.

Al escribir la ecuación 1.1 se ha extraído el término de la masa. Cabe destacar que ω_0 es la frecuencia natural del sistema. Para dar solución a esta ecuación se analiza el caso complejo de forma que podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) + \gamma \frac{d}{dt}z(t) + \omega_0^2 z(t) = 0, \quad (1.2)$$

se propone soluciones de la forma

$$z(t) = e^{\lambda t}. \quad (1.3)$$

Al reemplazar esta solución en la ecuación 1.2 se obtiene

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0. \quad (1.4)$$

Debido a que la exponencial no puede ser 0 se obtiene que el término entre paréntesis, también conocido como polinomio característico de la ecuación diferencial, tiene que ser 0. Por tanto las soluciones son

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (1.5)$$

A partir de esta solución se obtienen los diferentes casos para oscilaciones amortiguadas. Para $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ se tiene oscilaciones sobre amortiguadas, $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ amortiguamiento débil y finalmente $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ se denomina amortiguamiento crítico.

Se toma el caso en el cual el sistema tiene un sobre amortiguamiento. En la figura 1.1 se evidencia que el sistema al estar sobre amortiguado decae con rapidez por lo cual no hay presencia de oscilaciones. Por otro lado, como se puede observar

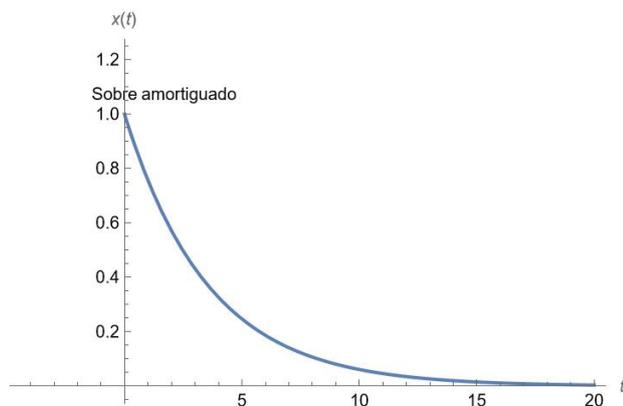


Figura 1.1: Oscilador sobre amortiguado con $\beta = 0,3$ y $\omega_0 = 0,075$

en la figura 1.2, si el sistema tiene un amortiguamiento débil $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ presenta oscilaciones en el decaimiento. Para el caso de amortiguamiento crítico, figura 1.3, el comportamiento es similar a un caso sobre amortiguado sin embargo, este amortiguamiento se caracteriza por tener el decaimiento más rápido posible.

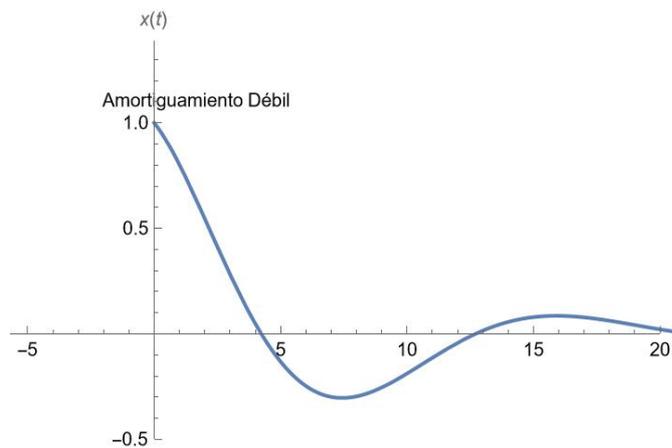


Figura 1.2: Oscilador con amortiguamiento débil $\beta = 0,3$ y $\omega_0 = 0,4$

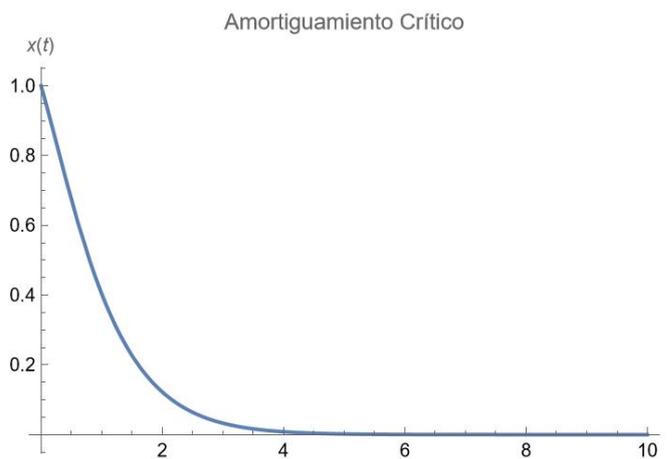


Figura 1.3: Oscilador con amortiguamiento crítico

Para realizar el cambio a un oscilador fraccionario se tiene que modificar el parámetro de derivación a un valor α el cual estará definido en distintos intervalos según el caso que se esté evaluando.

1.2. Oscilador armónico forzado con amortiguamiento clásico

Un fenómeno físico de relevancia es el caso en cual tenemos oscilaciones generadas por una fuerza externa al sistema. La ecuación que caracteriza este movimiento, siempre y cuando tengamos un término de amortiguamiento en el sistema es

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \gamma \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} g(\omega t), \quad (1.6)$$

donde F_0 es la magnitud de la fuerza que se aplica y $g(\omega t)$ es la función que determina el comportamiento de la frecuencia con la cual esta fuerza es aplicada. Generalmente para esta función se emplea funciones trigonométricas o de forma más general una exponencial compleja.

Si se analiza el caso en el cual esta fuerza tiene el comportamiento de exponencial compleja, se obtiene

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \gamma \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (1.7)$$

Se propone una solución de la forma

$$x(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)}, \quad (1.8)$$

reemplazando en la ecuación 1.7 se obtiene

$$-\omega^2 A + i\gamma\omega A + \omega_0^2 A = \frac{F_0}{m} e^{-i\phi}. \quad (1.9)$$

Esta ecuación se puede separar en parte compleja y parte real por lo cual se tiene dos ecuaciones

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos(\phi) \quad (1.10)$$

$$\gamma\omega A = -\frac{F_0}{m} \sin(\phi). \quad (1.11)$$

A partir de estas ecuaciones podemos obtener relaciones para la amplitud A . De forma que

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}. \quad (1.12)$$

En la figura 1.4 podemos ver que la amplitud inicialmente crece, llega un máximo cerca de la frecuencia natural del sistema ω_0 , denotada por una línea vertical, y luego decae hasta llegar al 0 lo cual representaría que ya no hay movimiento del sistema.

Similarmente se tiene que para la fase se debe cumplir

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right). \quad (1.13)$$

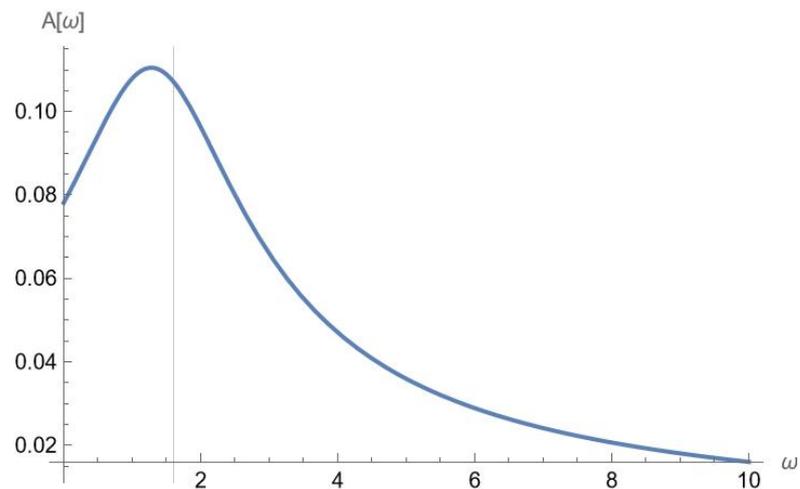


Figura 1.4: Amplitud [m] en relación con la frecuencia ω con $F_0 = 2[N]$, $m = 10[kg]$, $\omega_0 = 1,6[rad/s]$

Estas relaciones permiten obtener valores en los cuales se tiene amortiguamiento crítico, débil y un sistema sobre-amortiguado. Ahora bien lo que se busca es hallar soluciones para un sistema fraccionario que permita describir el fenómeno.

1.3. Oscilador armónico fraccionario

El paso de tener parámetros clásicos en la derivada a tener una característica fraccionaria engloba varios aspectos. Uno de los más importantes a resaltar es que la derivada fraccionaria no es única, por lo cual este trabajo se enfoca únicamente en la derivada de Caputo misma que se definirá en el capítulo 2. Otro aspecto importante a destacar es la dimensión que poseen estas derivada ya que están caracterizadas por un parámetro variable.

1.3.1. Dimensionalidad

Una característica fundamental a destacar cuando se emplean derivadas fraccionarias para problemas físicos, es la dimensionalidad de las variables. Tradicionalmente podemos definir una variable de posición $x(t)$ y la primer derivada clásica de esta en función del tiempo será la velocidad, es decir

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = v(t). \quad (1.14)$$

De forma similar podemos definir la aceleración de un cuerpo como la segunda derivada de su posición. Ahora bien, si tomamos la definición planteada para el cambio a derivada fraccionaria como

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, \quad (1.15)$$

se evidencia que la derivada clásica tiene unidades de s^{-1} mientras que la derivada fraccionaria tendrá unidades de $s^{-\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$. Para ser consistentes se toma una constante de corrección [9], de forma que la derivada fraccionaria toma la forma

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}. \quad (1.16)$$

Por tanto este parámetro representaría la denominada componente *temporal fraccionaria del sistema*.

Otra alternativa que se puede utilizar para evitar el problema con las unidades de la derivada es convertir nuestro problema a un caso adimensional [10]. Por ejemplo, partimos que la ecuación clásica para el oscilador armónico amortiguado 1.1 y definimos un parámetro adimensional $\tau = \omega_0 t$ de forma que la ecuación la podemos escribir como:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \beta \frac{dx}{d\tau} + x = 0, \quad (1.17)$$

donde $\beta = \gamma/\omega_0$. Finalmente, otra alternativa será la definición de una variable no física adimensional cualquiera ξ , escribir esta ecuación en términos de esta variable adimensional, hallar las soluciones de esta ecuación y en base al comportamiento de solución y la relación con el fenómeno clásico interpretar la dimensionalidad de estas variables propuestas [11]. En este trabajo se definirán variables adimensionales con las cuales se hallarán soluciones a la ecuación en derivadas fraccionarias y se podrá dar interpretación en relación a parámetros físicos.

Capítulo 2

Métodos

2.1. Cálculo fraccionario

En esta sección se detallará todas las herramientas y definiciones del cálculo fraccionario necesarias para el planteamiento y resolución del problema:

2.1.1. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Para tener un entendimiento completo de las derivadas fraccionarias se introduce en primer lugar el concepto de integral fraccionaria de Riemann Liouville.

Definición 2.1.1. Para un α tal que, $Re(\alpha) > 0$, la integral fraccionaria de

Riemann-Liouville se encuentra definida como

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (2.1)$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma. Esta integral también puede ser entendida como una convolución, de una función f y la función de Gel'fand-Shilov[12]. Con el concepto de integral fraccionaria se define la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Definición 2.1.2. Sea α un número complejo y n el entero más pequeño mayor que $Re(\alpha)$, de forma $n - 1 < Re(\alpha) \leq n$, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función f se define como

$${}^R D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (2.2)$$

Una propiedad importante a destacar de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el caso particular en el cual se tome $f(t) = K$, donde K es una constante. Al realizar la derivación se obtiene que el resultado es un valor diferente de 0. De hecho, se obtiene que en el intervalo $0 < Re(\alpha) \leq 1$

$${}^R D^\alpha K = \frac{K}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha}, \quad (2.3)$$

lo cual puede ser “solucionado” con otra definición de constante, es decir definir una constante tal que la derivada de Riemann-Liouville de la misma sea cero o por otro lado, la implementación de otra derivada fraccionaria.

2.1.2. Derivada fraccionaria de Caputo

La derivada de Caputo se entiende como una inversión en la aplicación de los operadores de la ecuación 2.2, de forma que se define como

Definición 2.1.3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \min\{k \in \mathbb{N}/k \geq \alpha\}$, la derivada fraccionaria de Caputo por la izquierda se encuentra definida como

$${}^C D_{0^+}^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n \end{cases} \quad (2.4)$$

En la derivada de Caputo a diferencia de la derivada RL se cumple que al tomar una función $f(t) = K$ con K una constante se obtiene:

$${}^C D_{0^+}^\alpha K = 0. \quad (2.5)$$

Por otro lado, se puede observar que la derivada fraccionaria de Caputo tiene la estructura de una convolución, de forma

$${}^C D_t^\alpha f(t) = k_C(\alpha, t) * f^{(n)}(t), \quad (2.6)$$

donde $k_C(\alpha, t)$ es el kernel de la derivada:

$$k_C(\alpha, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{t^{\alpha-n+1}}. \quad (2.7)$$

El hecho que la derivada fraccionaria de Caputo se pueda escribir de la forma 2.6, permite definir su respectiva transformada de Laplace como

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{k_C(\alpha, t) * f^{(n)}(t)\} \quad (2.8)$$

$$= \mathcal{L}\{k_C(\alpha, t)\} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t^{\alpha-n+1}}\right\} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{q^{n-\alpha}} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}. \quad (2.11)$$

Por lo discutido anteriormente, se evidencia que la transformada de Laplace para la derivada fraccionaria de Caputo está únicamente relacionada con la derivada ordinaria de la función $f(t)$, cuyo orden dependerá del rango en el cual se defina el parámetro fraccionario. Esta forma que toma la transformada de Laplace convierte a la derivada de Caputo en una gran opción para la resolución de ecuaciones en derivadas fraccionarias.

2.1.3. Función de Mittag-Leffler

Al rededor de 100 años atrás, el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler introduciría la función $E_{\alpha,\beta}(z)$ [13], la cual en recientes años sería estudiada a profundidad ya que se encuentra constantemente como resultado en problemas de ecuaciones diferenciales con parámetro fraccionario. Esta función está definida como

Definición 2.1.4. Sea $z \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, la función de Mittag-Leffler está definida

como

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.12)$$

Algunos casos particulares que se pueden destacar son

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.13)$$

$$E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cos(z) \quad (2.14)$$

$$E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sin(z)}{z} \quad (2.15)$$

Por ejemplo, para ilustrar el comportamiento de esta función, en la figura 2.1 se establece el parámetro $\beta = 1$ y se varía el parámetro $\alpha = 0,9, 1,5, 1,9$.

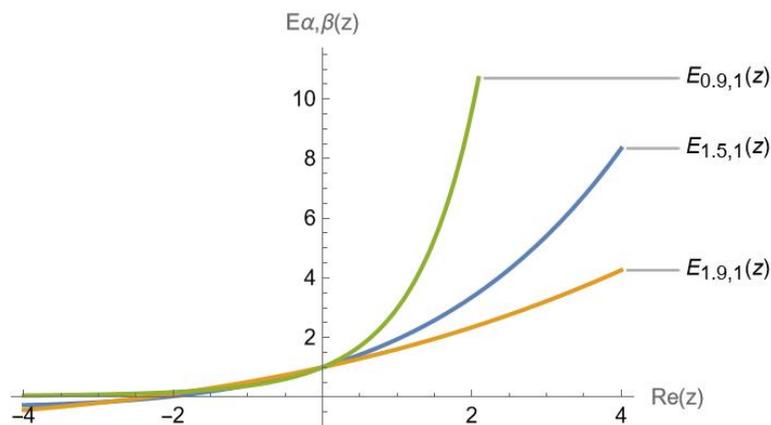


Figura 2.1: Comportamiento de la función de Mittag Leffler con parámetro $\beta = 1$ y $\alpha = 0,9, 1,5, 1,9$.

En [14]-[13] se puede encontrar la transformada de Laplace para una función

tipo Mittag-Leffler la cual será ampliamente utilizada en este trabajo. Esta transformada se construye de forma:

Definición 2.1.5. Sea $t \in \mathbb{R}$ y a una constante real, la transformación inversa de Laplace de una función del tipo Mittag-Leffler se define como

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\beta} \frac{s^\alpha}{(s^\alpha \mp a)} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha). \quad (2.16)$$

Con las definiciones planteadas de funciones importantes, sus propiedades y adicional las derivadas fraccionarias, se puede iniciar con el planteamiento del problema a estudiar.

Para caracterizar el fenómeno de oscilación amortiguada fraccionaria se trabajará en base a la ecuación 1.1 buscando darle un parámetro fraccionario y cuyas soluciones se encuentren con el método de Transformada de Laplace. De igual forma se propondrá una solución para el caso en que exista una fuerza aplicada al sistema.

2.2. Aproximación en derivada de Caputo

El problema del oscilador con parámetro fraccionario en este trabajo se analizará a través de la derivada de Caputo. Sin embargo, ya que la representación de oscilador armónico amortiguado, no es única en cuanto a derivadas fraccionarias. Se puede contemplar otras posibilidades para la ecuación que describan este movimiento [15],[16], [17].

Una primera aproximación será

$${}^C D_{0+}^{\beta} \xi(t) + \gamma {}^C D_{0+}^{\alpha} \xi(t) + \omega_0^2 \xi(t) = 0. \quad (2.17)$$

Para esta aproximación se toma los parámetro $1 < \beta < 2$ y $0 < \alpha < 1$ por lo cual se puede escribir la ecuación de forma integral como

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\xi''(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau + \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\xi'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau + \omega_0^2 \xi(t) = 0. \quad (2.18)$$

La ecuación 2.18 representa un sistema con no localidad temporal. Para resolver la ecuación 2.18 se utiliza el método de Transformada de Laplace mismo que debido a la estructura que tienen las derivadas fraccionarias facilitan el cálculo.

La solución en términos de funciones generalizadas para la ecuación 2.18 se puede encontrar en [10]. Estas soluciones presentan un comportamiento similar al esperado en el caso clásico al utilizar la derivada de Caputo.

Sin embargo, se busca proponer un planteamiento distinto para la ecuación 2.17 y se comparará las soluciones del caso planteado con el esperado dentro del caso clásico.

Para realizar esta comparación se propone una ecuación de la forma

$${}^C D_{0+}^{\alpha} \xi(\tau) + \varpi^2 \xi(\tau) = 0, \quad (2.19)$$

donde $1 < \alpha < 2$. Lo primero que se observa en 2.19 es el hecho que no posee un

término clásico de amortiguamiento y de igual forma los parámetros ξ, τ, ϖ son adimensionales.

Será entonces la ecuación 2.19 con la que se trabajará y buscaremos la interpretación de los parámetros que conforman la ecuación en relación a los parámetros físicos del oscilador armónico amortiguado clásico.

Para hallar esta relación se tiene que resolver la ecuación que caracteriza el fenómeno y en base al comportamiento de las soluciones buscar la relación que esta tiene con la solución esperada clásicamente.

Capítulo 3

Resultados

3.1. Solución oscilador armónico amortiguado fraccionario

Para hallar la solución tomamos la ecuación que caracteriza el sistema:

$${}^C D_{0+}^{\alpha} \xi(\tau) + \varpi^2 \xi(\tau) = 0,$$

con $1 < \alpha < 2$. A partir de esta ecuación se puede aplicar una transformación de Laplace de forma

$$\mathcal{L} \{ {}^C D_{0+}^{\alpha} \xi(\tau) \} + \varpi^2 \mathcal{L} \{ \xi(\tau) \} = 0. \quad (3.1)$$

Definimos $\mathcal{L}\{\xi(\tau)\} = \bar{\xi}(q)$. De forma que, tomando en cuenta 2.11 se obtiene

$$q^\alpha \bar{\xi}(q) - q^{\alpha-1} \xi(0) - q^{\alpha-2} \dot{\xi}(0) + \varpi^2 \bar{\xi}(q) = 0. \quad (3.2)$$

Se observa la necesidad de condiciones iniciales para $\xi(0), \dot{\xi}(0)$. Reescribiendo la ecuación

$$\bar{\xi}(q) = \frac{\xi(0)q^{-1}}{1 + \varpi^2 q^{-\alpha}} + \frac{\dot{\xi}(0)q^{-2}}{1 + \varpi^2 q^{-\alpha}}, \quad (3.3)$$

tomando el primer término del lado derecho de la ecuación 3.3 y al aplicar la transformada inversa de Laplace 2.16 se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{q^{-1}}{1 + \varpi^2 q^{-\alpha}} \right\} = E_{\alpha,1}(-\varpi^2 \tau^\alpha). \quad (3.4)$$

Similarmente para el segundo término

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{q^{-2}}{1 + \varpi^2 q^{-\alpha}} \right\} = \tau E_{\alpha,2}(-\varpi^2 \tau^\alpha). \quad (3.5)$$

De forma que la solución para la ecuación en derivadas fraccionarias será

$$\xi(\tau) = \xi(0)E_{\alpha,1}(-\varpi^2 \tau^\alpha) + \dot{\xi}(0)\tau E_{\alpha,2}(-\varpi^2 \tau^\alpha). \quad (3.6)$$

A partir de 3.6 podemos ver que este problema necesita de condiciones iniciales

las cuales pueden ser tomadas de forma arbitraria dependiendo de cual sea el sistema que se busque caracterizar. Por otro lado se observa que el parámetro libre α , el cual puede tomar valores $1 < \alpha < 2$, determina el comportamiento característico del sistema.

Recordamos que todas las variables que hemos utilizado son adimensionales. Sin embargo, por simple inspección, se puede destacar similitudes de estas variables con las esperadas en el caso clásico. Las condiciones iniciales $\xi(0)$ y $\dot{\xi}(0)$ cumplen un rol similar a la posición inicial y velocidad inicial del sistema clásico respectivamente. De igual forma al parámetro ϖ lo podemos relacionar con la frecuencia natural del sistema oscilante.

Ahora bien, para explorar de una mejor forma el comportamiento que este sistema posee, se grafica numéricamente la solución para este dando diferentes valores al parámetro α . Ya que este parámetro se encuentra definido en un intervalo específico un buen primer acercamiento será tomar un valor que se encuentre cerca del punto medio del intervalo de forma que la solución que se obtiene será de la forma

$$\xi(\tau) = \xi(0)E_{1,3,1}(-\varpi^2\tau^{1,3}) + \dot{\xi}(0)\tau E_{1,3,2}(-\varpi^2\tau^{1,3}). \quad (3.7)$$

Las condicionales iniciales al ser arbitrarias, sin pérdida de generalidad se pueden tomar $\xi(0) = 1$ y $\dot{\xi}(0) = 1$. Esto al relacionar con el caso clásico lo veríamos como un sistema con una posición inicial específica y una velocidad inicial dada.

En la figura 3.1 se asigna el valor de $\varpi = 2$ y el parámetro $\alpha = 1,3$, esto

permite caracterizar el sistema fraccionario mismo que presenta similitudes con un oscilador armónico sobre amortiguado.

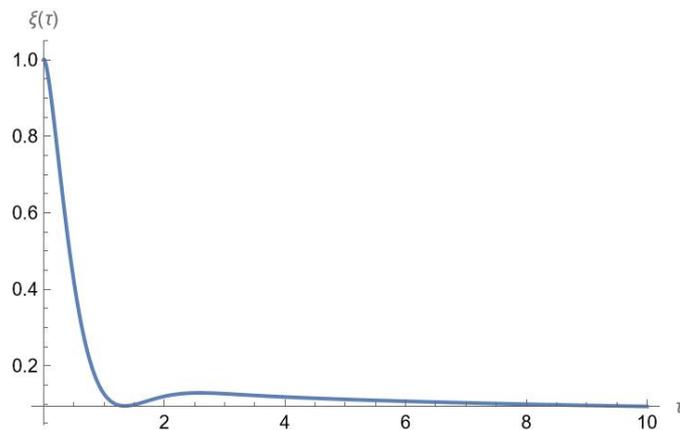


Figura 3.1: Solución del oscilador armónico fraccionario sin termino de amortiguamiento para $\alpha = 1,3$

Se evidencia que el comportamiento que tiene la función es similar al caso en el cual tenemos un oscilador sobre amortiguado. Sin embargo, para tener una idea más amplia del fenómeno tomaremos valores cercanos a los límites del intervalo para entender el comportamiento de la solución.

En la figura 3.2 se toma valores cercanos a $\alpha = 1$ donde podemos notar que el decaimiento de la función es rápido, de hecho la función decae según nos vayamos acercando a 1. Esto permite entender que en valores cercanos a 1 el comportamiento del sistema es similar a un caso con amortiguamiento crítico, figura 3.2.

Ahora se puede ver en la figura 3.3 que al tomar valores cercanos al límite superior del intervalo, el comportamiento de la función simula el caso de un sistema con amortiguamiento débil 3.3.

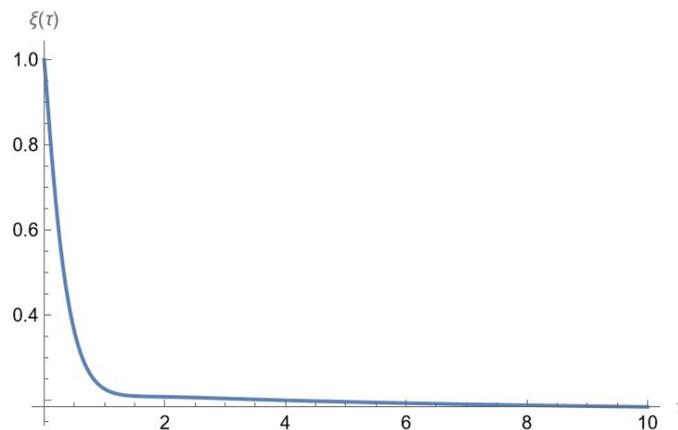


Figura 3.2: Solución del oscilador armónico fraccionario sin termino de amortiguamiento para $\alpha = 1,1$

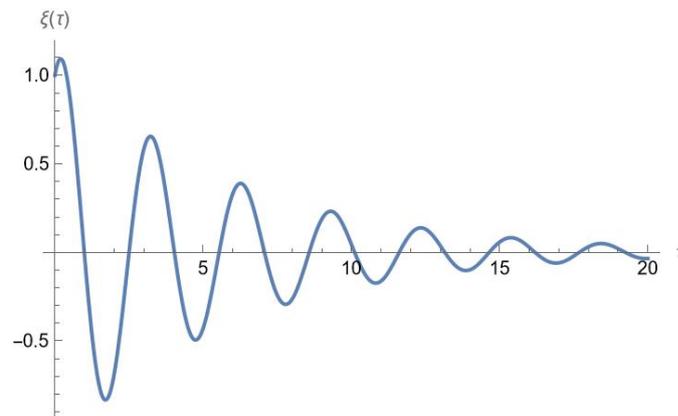


Figura 3.3: Solución del oscilador armónico fraccionario sin termino de amortiguamiento para $\alpha = 1,9$

Este caso es de particular atención ya que si retomamos la ecuación 2.17 notamos que no existe un termino de amortiguamiento, es decir el sistema no debería disipar energía. Sin embargo debido a la incorporación de la derivada fraccionaria, dentro del parámetro de la misma se evidencia la presencia de la característica disipativa del sistema. Esto nos quiere decir que al tomar un sistema en el cual se tiene una no localidad temporal la presencia de un termino de amortiguamiento encargado de disipar la energía no es necesario. Puesto que, al tomar este sistema

no local es una característica intrínseca del mismo.

Ahora sabiendo cual es el comportamiento para un oscilador fraccionario libre, se puede analizar el caso en el cual hay presencia de una fuerza impulsora la cual cause las oscilaciones del sistema.

3.2. Solución oscilador armónico fraccionario forzado con amortiguamiento

Para analizar el fenómeno de oscilaciones forzadas con amortiguamiento, partimos de la ecuación 2.19 de la cual el lado derecho se encuentra igualada a cero. Sin embargo, ya que ahora se tomará en cuenta una fuerza encargada de impulsar el sistema la nueva ecuación será de la forma

$${}^C D_{0+}^{\alpha} \xi(\tau) + \varpi^2 \xi(\tau) = F_0 g(\omega\tau), \quad (3.8)$$

donde F_0 será un valor de *fuerza* inicial y $g(\omega\tau)$ la función encargada de encapsular la información de la frecuencia.

Debido al comportamiento característico de la función de Mittag-Leffler, teniendo en si misma funciones como la exponencial y funciones trigonométricas, además de sus propiedades estudiadas en el capítulo 2, es la función que se tomará para encapsular la información de la frecuencia de la fuerza aplicada.

De forma que la ecuación que describirá el movimiento será

$${}^C D_{0+}^{\alpha} \xi(\tau) + \varpi^2 \xi(\tau) = F_0 E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 \tau^{\alpha}). \quad (3.9)$$

A partir de la solución encontrada para 2.19 se puede plantear una posible solución para este sistema de la forma

$$\xi(\tau) = A E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 \tau^{\alpha}), \quad (3.10)$$

reemplazando en 3.9 tenemos

$${}^C D_{0+}^{\alpha} (A E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 t^{\alpha}))(\tau) + \varpi^2 A E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 \tau^{\alpha}) = F_0 E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 \tau^{\alpha}). \quad (3.11)$$

Es necesario entonces hallar la derivada de Caputo para la función de Mittag-Leffler. En [14] se puede hallar que esta derivada será de la forma

$${}^C D_{a+}^{\alpha} (E_{\alpha, \beta}(\lambda(t-a)^{\alpha}))(\tau) = \lambda E_{\alpha, \beta}(\lambda(\tau-a)^{\alpha}), \quad (3.12)$$

de forma que la ecuación 3.11 será:

$$A(\varpi^2 - \omega^2) E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 \tau^{\alpha}) = F_0 E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 \tau^{\alpha}). \quad (3.13)$$

Para satisfacer la ecuación se debe cumplir que:

$$A = \frac{F_0}{(\varpi^2 - \omega^2)}. \quad (3.14)$$

En la figura 3.4 podemos observar el comportamiento de la amplitud de oscilación del sistema, se observa que en el valor $\omega = \varpi$, correspondiente a la frecuencia natural del sistema, la amplitud tiene una divergencia.

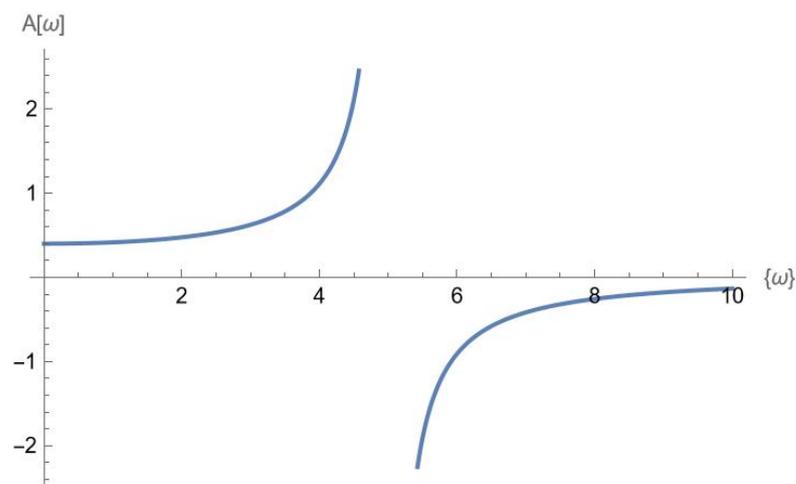


Figura 3.4: Gráfico de la amplitud en función de ω para una frecuencia natural del sistema de $\varpi = 5$ y $F_0 = 10$

Al tener el valor de A podemos reemplazar este en la solución planteada de forma que:

$$\xi(\tau) = \frac{F_0}{(\varpi^2 - \omega^2)} E_{\alpha, \beta}(-\omega^2 \tau^\alpha). \quad (3.15)$$

Se observa que en esta solución se tiene dos parámetros libres, α que se encuentra definida en el intervalo $1 < \alpha < 2$ y β el cual puede tomar cualquier valor

real.

Para analizar el comportamiento de esta solución al igual que en el caso en que no hay presencia de una fuerza, se varía los parámetros de la función de Mittag-Leffler y en base al comportamiento que toma la solución podemos extrapolar la información correspondiente de esta y relacionarla con el caso clásico.

Tomando primero valores de α cercanos a su límite inferior y variando β se obtiene

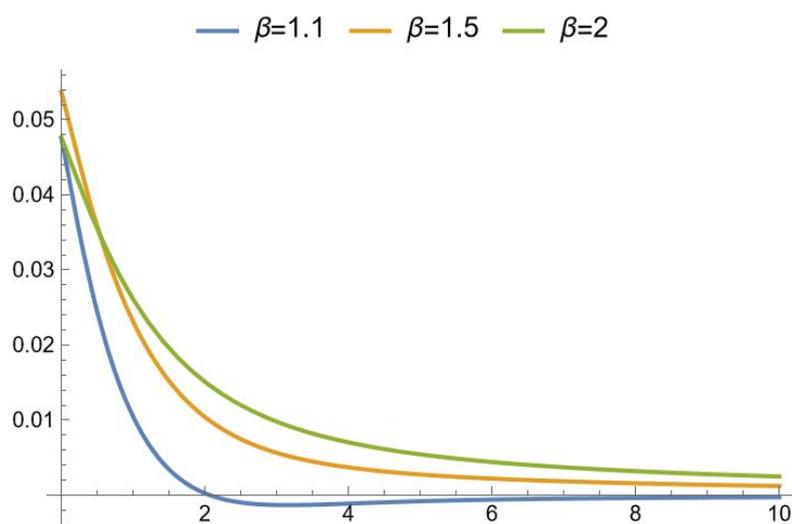


Figura 3.5: Solución para el oscilador armónico forzado fraccionario con $\alpha = 1,1$

En la figura 3.5, se observa que al tener valores de α cercanos a uno, el comportamiento de la solución es similar a un oscilador con amortiguamiento crítico, por otro lado evidenciamos que el modificar el parámetro β provoca que el decaimiento de la función sea más lento. Es decir que al modificar ambos parámetros el amortiguamiento del sistema cambia, a pesar que no exista como tal un término de amortiguamiento en la ecuación fraccionaria.

En la figura 3.6 se modifica ahora el valor de α para un valor mas cercano al punto medio del intervalo de forma que se obtiene:

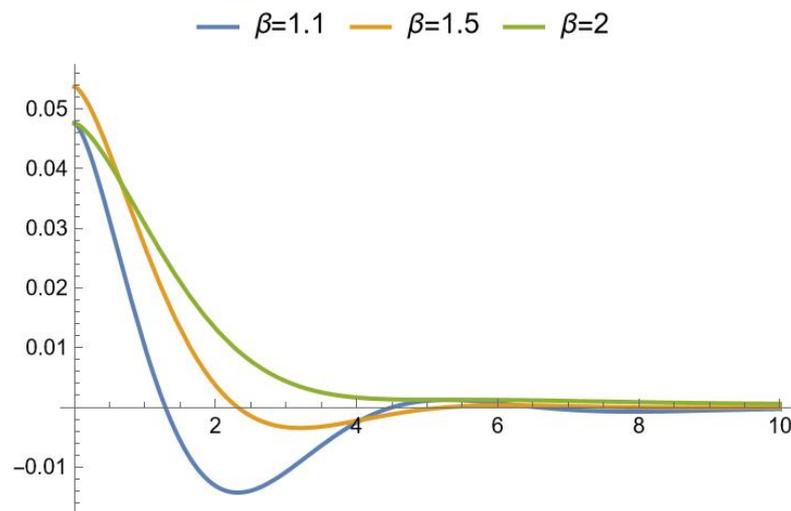


Figura 3.6: Solución para el oscilador armónico forzado fraccionario con $\alpha = 1,5$

Al tomar el valor de α en un punto medio del intervalo pero modificando el valor de β se puede observar una transición del oscilador, entre un sistema sobre amortiguado y según como este parámetro disminuye, el sistema se convierte en un sistema con amortiguamiento débil. Es decir, al dejar ambos parámetros libres, la combinación de estos parámetros son los que determinan el amortiguamiento que tiene el sistema. A diferencia del caso en el que no existe una fuerza en el cual el único parámetro libre es α mismo que determina el amortiguamiento, en el caso de la presencia de una fuerza de la forma de una función de Mittag-Leffler es la combinación de ambos.

Basado en las observaciones anteriores, se esperaría que al aumentar el parámetro α y tomar variaciones de β nos encontramos en el caso de un amortiguamiento débil la modificación del segundo parámetro determinará que tan fuerte es el amor-

tiguamiento. En la figura 3.7 tomamos valores de α cercanos a 2 donde se tiene que

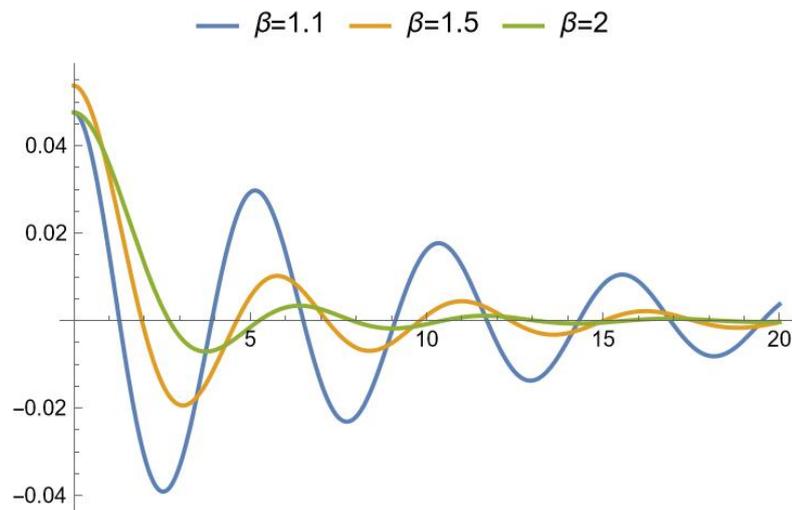


Figura 3.7: Solución para el oscilador armónico forzado fraccionario con $\alpha = 1,9$

En la figura 3.7 se observa que al aumentar el parámetro α a valores cercanos a su límite superior se obtiene una caracterización de un oscilador con amortiguamiento débil. Cabe recalcar una vez más que la ecuación planteada para el movimiento de este sistema carece de un término de amortiguamiento y son los parámetros intrínsecos a la función de Mittag-Leffler aquellos que le dan el amortiguamiento. Si el parámetro α se encuentra lo suficientemente cerca de su cota superior este oscilador se comportará como un oscilador clásico libre.

Capítulo 4

Conclusiones

El propósito de este trabajo consistió en explorar y contrastar el comportamiento característico entre un oscilador armónico clásico con amortiguamiento 1.1 y el oscilador fraccionario sin un término de amortiguamiento explícito 2.17. El enfoque principal fue examinar de qué manera la derivada de Caputo 2.4 en el oscilador fraccionario, genera amortiguamiento en el sistema debido a efectos de no localidad y memoria.

La comparación demostró que la naturaleza no local introducida por la derivada de Caputo en el oscilador fraccionario, junto con los efectos de memoria, conlleva a la aparición de características de amortiguamiento. Esta comparativa representa un resultado significativo al contraponerse a las ecuaciones clásicas que requieren la presencia evidente de un término amortiguador para inducir dicho efecto en sistemas oscilatorios.

Se observó que la caracterización del amortiguamiento en el sistema está ligada al parámetro α y su valor dentro de un intervalo específico. Valores aproximados a uno denotan amortiguamiento crítico, el punto medio del intervalo muestra sobre-amortiguamiento, mientras que valores cercanos a dos exhiben un amortiguamiento más débil. Esta correlación directa entre α y el amortiguamiento del sistema, proporciona una comprensión de cómo los parámetros fraccionarios influyen en la dinámica del sistema.

La presencia de la función de Mittag-Leffler en la solución del oscilador fraccionario la hace el componente que almacena información sobre el movimiento y el nivel de amortiguamiento del sistema. Esta función, comúnmente empleada en el cálculo fraccionario, desempeña un rol significativo en la descripción matemática de fenómenos complejos, brindando una herramienta poderosa para comprender sistemas fraccionarios.

La interpretación física precisa del parámetro alpha sigue siendo algo por explorar a profundidad. Sin embargo, su prominente influencia en la dinámica del amortiguamiento plantea la necesidad de investigaciones futuras, especialmente en áreas como la relajación de materiales y sistemas con memoria. La exploración más detallada de este parámetro podría aportar con información para interpretar y modelar fenómenos físicos relevantes.

La propuesta de solución para oscilaciones forzadas en el contexto del oscilador fraccionario puede ser generalizada para diversas fuerzas características. Esta ampliación permitiría un análisis más diverso de sistemas oscilatorios.

Los resultados obtenidos a partir de esta comparación entre el oscilador armónico clásico con amortiguamiento y su versión fraccionaria resaltan la significativa influencia de la no localidad y los efectos de memoria en la dinámica de sistemas físicos. Esto no solo presenta una alternativa a las ecuaciones clásicas de caracterización del amortiguamiento y disipación de un sistema, sino que también ofrecen un camino para un análisis más profundo de sistemas complejos, abriendo así investigaciones futuras en el campo del cálculo fraccionario y la dinámica de sistemas oscilatorios.

Bibliografía

- [1] J. Rosales M. Guía-Calderon. The differential and integral fractional calculus and its applications. *Acta Universitaria*, 2015.
- [2] B. Ross. The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica*, 1977.
- [3] R. Herrmann. *Fractional Calculus an introduction for physicist*. World Scientific Publishing, 2011.
- [4] R. Matušů. Application of fractional order calculus to control theory. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2011.
- [5] J. Singh D. Kumar. *Fractional Calculus in Medical and Health Science*. CRC Press, 2020.
- [6] P. Sopasakis. Fractional calculus in pharmacokinetics. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 2018.
- [7] H. Georgi. *The physics of waves*. Prentice Hall, 1993.

- [8] A. French. *Vibrations and Waves*. MIT, 1971.
- [9] J.J. Rosales J.F. Gómez-Aguilar. Fractional mechanical oscillators. *Revista Mexicana de Física*, 2012.
- [10] G. Kundra A. Ali Zafar. A comparative study of fractional oscillators. *Alexandria Engineering Journal*, 2020.
- [11] V. Rodrigues L. Álvés da Silva. Fractional order determination for harmonic oscillator damping factor. *Chinese Journal of Physics*, 2020.
- [12] I. M. Gel'Fand. *Generalized Functions*. AMS Chelsea Publishing, 2016.
- [13] H. J. Haubold. Mittag-leffler function and their applications. *Journal of Applied Mathematics*, 2011.
- [14] A. Kilbas. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [15] J.W. Hanneken B. N. Narahari. Dynamics of fractional oscillator. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2001.
- [16] E. Capelas de Oliveira S. Cavalcanti. A study of forced oscillations via hilfer fractional derivative. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2022.
- [17] S. K. Ntouyas A. Aphitana. Forced oscillation of fractional differential equations via conformable derivatives with damping term. *Boundary Value Problems Springer Open*, 2019.