

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Ciencias e Ingenierías**

**Avance del perihelio en sistemas binarios:  
correcciones de orden superior**

**Proyecto de investigación**

**Jorge Iván Poveda Sotomayor**

**Física**

Trabajo de titulación presentado como requisito  
para la obtención del título de Licenciado en Física

Quito, 2 de mayo de 2016

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ  
COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

**HOJA DE CALIFICACIÓN  
DE TRABAJO DE TITULACIÓN**

**Avance del perihelio en sistemas binarios:  
correcciones de orden superior**

**Jorge Iván Poveda Sotomayor**

Calificación:

Nombre del profesor, Título académico: Carlos Marín, Ph.D.

Firma del profesor: \_\_\_\_\_

Quito, 2 de mayo de 2016

## DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante: \_\_\_\_\_

Nombres y apellidos: Jorge Iván Poveda Sotomayor

Código: 00108146

Cédula de identidad: 171999603-3

Lugar y fecha: Quito, 2 de Mayo del 2016

## AGRADECIMIENTOS

*A Carlos Marín por su apoyo, dedicación y asistencia a lo largo de mi carrera y por su confianza al encomendarme la realización de este trabajo.*

*A todos los profesores que me han guiado, en especial, a Dario Niebieskikwiat, Edgar Carrera, Vincent Vlaminck, David Hervas y Eduardo Villacís por su apoyo incondicional a lo largo de mi formación profesional.*

*A mi familia y amigos por estar siempre a mi lado, en general a todos los que me brindaron la oportunidad de estudiar Física, y a quienes me acompañaron a lo largo de mi carrera.*

## **DEDICATORIA**

*A a mis hermanos por llenar mi vida de alegría.*

*A mi abuelita Susana y a mis padres por sus cuidados y apoyo.*

*A Jennifer por su confianza y cariño incondicional.*

## Resumen

El presente trabajo trata acerca de las órbitas de cuerpos celestes alrededor de campos gravitacionales fuertes, como el generado por una estrella o un agujero negro. A partir de la métrica de Schwarzschild, del lagrangiano del movimiento, y la ecuación de la órbita que describe el movimiento alrededor de un objeto masivo, se caracterizaron las diferentes trayectorias que puede tener un cuerpo celeste dependiendo de su energía y momento angular orbital. Se analizó el caso de las órbitas circulares estables alrededor de un agujero negro. Para trayectorias elípticas, se derivó una fórmula para calcular el avance del perihelio al  $n$ -ésimo orden. Finalmente, se analizó la contribución del espín del agujero negro en el cálculo de la precesión del perihelio.

## Abstract

This work treats about the orbits of celestial bodies around strong gravitational sources, like that generated by a star or a black hole. Starting from the Schwarzschild metric, the lagrangian, and the orbit equation that describes the motion around a massive object, the different trajectories of a celestial body were studied depending on the energy and the angular momentum of the same. The stability of circular orbits was analysed. Then, for elliptic trajectories, an equation to calculate the perihelion precession to the  $n^{th}$  order was derived. Finally, the black hole spin contribution was considered at first order calculations in the precession formula.

# Índice de contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Teoría General de la Relatividad . . . . .	12
1.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein y Ecuaciones de las Geodésicas . . .	13
1.1.2. Métrica de Schwarzschild . . . . .	13
1.2. Sistemas binarios de agujeros negros (BBHS) . . . . .	15
<b>2. Movimiento alrededor de un agujero negro de Schwarzschild</b>	<b>18</b>
2.1. Ecuación del movimiento . . . . .	18
2.2. Análisis de las posibles trayectorias . . . . .	21
2.2.1. Órbitas circulares . . . . .	30
<b>3. Corrección al cálculo del Avance del Perihelio para sistemas binarios</b>	<b>33</b>
3.1. Aproximación del Avance del Perihelio hasta el enésimo orden . . . . .	38
3.1.1. Cálculo a segundo orden . . . . .	49
3.2. Contribución del espín al avance del perihelio en un sistema binario . . . . .	50
3.3. Sistema Binario OJ287 . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>



# Índice de Tablas

3.1. Valores de las funciones $Q_n$ . . . . .	48
3.2. Avance del perihelio por siglo para los 5 planetas más cercanos al Sol . . . . .	50
3.3. Información sobre el sistema binario OJ287. . . . .	55
3.4. Cálculo del avance del perihelio para el sistema binario OJ287 para diferentes órdenes. . . . .	56

# Índice de Figuras

1.1.	Imagen de rayos X del núcleo de la galaxia NGC 6240 tomado por el observatorio de rayos-X Chandra . Se pueden observar dos discos de acreción de SMBH. El color rojo corresponde a energías entre 0.5-1.5 keV, el verde a 1.5-5 keV, y el azul a 5-8 keV. . . . .	15
1.2.	Gráfica del historial de emisiones de radiación del sistema OJ 287. La curva de luz muestra una periodicidad de aproximadamente 12 años [15]. . . . .	16
2.1.	Dependencia del potencial efectivo en función de $r/r_s$ : a) clásico, y b) relativista; para el caso en que $J \ll r_s c$ . . . . .	23
2.2.	Dependencia del potencial efectivo en función de $r/r_s$ : a) clásico, y b) relativista; para el caso en que $J < r_s c$ . . . . .	23
2.3.	Dependencia del potencial efectivo en función de $r/r_s$ : a) clásico, y b) relativista; para el caso en que $J > r_s c$ . . . . .	23
2.4.	Gráfica de $\beta_+$ (verde) y $\beta_-$ (rojo) en función de $\alpha$ . . . . .	26
2.5.	Gráfica de $\beta_+$ (verde) y $\beta_-$ (rojo) en función de $\alpha$ . . . . .	29
3.1.	Precesión de una órbita elíptica. $\omega$ es la inclinación inicial y $\delta\omega$ es el ángulo de precesión. . . . .	38
3.2.	Gráfica de $f(\theta) = \frac{1}{(1+e\cos\theta)^n}$ para diferentes valores de n alrededor de $\theta = \pi$ . . .	44
3.3.	Trayectoria del agujero negro secundario para tres periodos orbitales. . . . .	57

# Capítulo 1

## Introducción

A gran escala, el universo visible está formado por cúmulos de galaxias conectados mediante filamentos y separados por un conjunto de huecos intercalados, como una telaraña. A una escala menor se observan las galaxias, las cuales son grandes acumulaciones de estrellas, gas, y todo tipo de cuerpos celestes; además de que contienen grandes cantidades de materia oscura. La principal característica de las galaxias es que en sus centros por lo general, exhiben un inusual brillo a través de la mayoría de bandas de frecuencia de radiación electromagnética, desde ondas de radio a rayos gamma. Estos brillos se presentan en forma de chorros que pueden llegar a expandirse hasta escalas de kiloparsecs.

Actualmente se sabe que estos chorros son muy probablemente causados por la acreción de materia alrededor de agujeros negros supermasivos (SMBH, Super Masive Black Holes) que residen en el núcleo de la mayoría de galaxias.

Estos SMBH son aun objeto de estudio, ya que no se conoce con certeza de donde provienen o como se forman, aunque existen dos hipótesis de esto. La primera dice que un SMBH se pudo haber formado partiendo de un agujero negro de masa estelar, que es el remanente de la explosión de una estrella masiva, y creció después por acreción de materia y la fusión con otros agujeros negros [11]. La segunda hipótesis dice que es posible que el SMBH pueda haber colapsado directamente de la materia dentro del núcleo de una proto-galaxia [1].

Sean ciertas estas teorías o no, es indiscutible que la formación de estos agujeros negros supermasivos es de mucha relevancia en el estudio de la formación de galaxias, y en última instancia, de la misma estructura del universo.

El concepto de agujero negro fue introducido en un artículo enviado en 1783 a la Royal Society por un geólogo inglés llamado John Michell. John Michell llamó a estos cuerpos “Estrellas Oscuras” y los describió como regiones del espacio tan densas que ni la luz podía escapar de ellas, y por lo cual no eran visibles ni detectables. Michell dedujo el tamaño que debían tener estas estrellas mediante las ecuaciones de Newton de la gravitación, encontrando la fórmula:

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.1)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  es la masa de estas estrellas y  $c$  es la velocidad de la luz.

Con la llegada de la Teoría General de la Relatividad en 1915, Einstein probaría que la luz sí es afectada por los campos gravitacionales, y en 1916 Karl Schwarzschild encontraría una solución a las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General que dio luz verde a la existencia de los agujeros negros.

## 1.1. Teoría General de la Relatividad

Después de la publicación en 1905 de la Teoría Especial de la Relatividad (TER), Albert Einstein se dedicó a buscar una teoría de la gravitación que fuera compatible con la misma. La TER concordaba muy bien con las leyes del electromagnetismo y hacía algunas predicciones precisas en cuanto a colisiones de partículas; pero no era compatible con la teoría gravitacional de Newton. Después de darse cuenta de la estrecha relación entre aceleración y campo gravitacional, en 1915, Einstein por fin pudo obtener una teoría de la gravedad relativista, a la cual llamó Teoría General de la Relatividad (TGR).

Einstein fundamentó su teoría principalmente en el principio de equivalencia de masa inercial y masa gravitacional, y también en el principio de covariancia. Este último establece que todos los observadores, ya sea que estén en marcos de referencia inerciales o no, deben observar las mismas leyes de la física [3]. Esto nos permite expresar las leyes de la física por medio de tensores (entes que son invariantes ante transformaciones de coordenadas).

Otros dos principios importantes que sustentan la teoría de Einstein son el principio de Mach que establece que las propiedades inerciales de un objeto están definidas por la presencia de otros cuerpos en el universo; y el principio de mínimo acoplamiento gravitacional: Si una ley es válida en un espacio-tiempo plano, esta debe ser válida también en un espacio-tiempo curvo.

La genialidad de Einstein está en que él no concibió a la gravedad como la propiedad de los cuerpos con masa de generar fuerzas entre sí, sino como la curvatura del espacio-tiempo. Es decir, para Einstein, el espacio tiempo no es plano como se creía, sino que está curvado, y esta curvatura depende de la densidad de energía y materia que existe en el mismo. Como consecuencia, los cuerpos se moverían en trayectorias curvas llamadas geodésicas. Esto implica que no existe una fuerza gravitacional en sí, sino que objetos como manzanas o planetas tratarían de moverse en líneas rectas a través del espacio-tiempo, pero sus caminos parecerían ser doblados por el campo gravitacional debido a que el espacio-tiempo es curvo [5].

Esto cambió la concepción de porqué los planetas realizan órbitas elípticas alrededor del sol, ya que según la TGR los planetas se mueven en trayectorias elípticas no debido a una fuerza gravitacional, sino debido a que el sol curva el espacio-tiempo a su alrededor por su distribución de masa y energía. De esta manera, los planetas recorren una trayectoria lo más parecida a una recta en el espacio-tiempo curvo, una elipse [8].

### 1.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein y Ecuaciones de las Geodésicas

La Teoría General de la Relatividad se expresa en 14 ecuaciones [8]. Estas se dividen en las 10 ecuaciones de campo de Einstein, las cuales son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

donde  $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$  es el escalar de curvatura,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci que es una reducción del tensor de Riemann-Christoffel  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ , y determina la curvatura del espacio-tiempo,  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico que determina las propiedades geométricas del espacio-tiempo.  $G = 6,67384(80) \times 10^{-11} N(m/kg)^2$  es la constante de gravitación universal;  $c = 299792458$  m/s es la velocidad de la luz en el vacío, y  $\lambda$  es la constante cosmológica que Einstein introdujo en 1917 debido a que se oponía a la teoría del Big Bang, y creía en un universo estático. Esta es una medida de la contribución a la densidad de energía del universo debido a fluctuaciones de vacío [8]. Finalmente,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor momento-energía que tiene en cuenta a la materia y la radiación.

Las otras cuatro ecuaciones que completan la TGR son las ecuaciones de las geodésicas:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \left( \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) \left( \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) = 0 \quad (1.3)$$

donde  $x^\mu$  es el cuadvivector posición de la partícula. Los índices  $\mu, \rho, \sigma$ , etc. toman los valores 0, 1, 2 y 3. Al trabajar en coordenadas esféricas tomamos  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  y  $x^3 = \phi$ .  $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$  en cambio son los símbolos de Christoffel de segunda especie dados por:

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha} \{ \partial_\sigma g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho\sigma} \} \quad (1.4)$$

Por último,  $\tau$  es el tiempo propio, el cual está relacionado con el arco de curva por la siguiente relación [8]:

$$(cd\tau)^2 = (ds)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (1.5)$$

Es necesario aclarar que se está usando la convención de suma de Einstein en todas las ecuaciones, es decir, si un índice se repite en un término es porque se está sumando en este índice.

### 1.1.2. Métrica de Schwarzschild

Al resolver las ecuaciones de campo, lo que se espera es encontrar una métrica que gobierne el movimiento de las partículas. Estas ecuaciones son difíciles de resolver ya que son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, y por esta razón Einstein utilizó en un inicio aproximaciones para hacer predicciones. No fue sino hasta 1916 que Karl Schwarzschild en-

contró una solución exacta. Esta solución se denomina métrica de Schwarzschild y la longitud de arco en esta solución está dada por:

$$(ds)^2 = \gamma (cdt)^2 - \gamma^{-1} (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 (\sin \theta d\phi)^2 \quad (1.6)$$

de tal forma que el tensor métrico covariante esta dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

y el contravariante:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

donde  $\gamma = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$ ,  $M$  es la masa del cuerpo que genera el campo gravitacional.  $r$ ,  $\theta$ , y  $\phi$  son las coordenadas esféricas de un punto alrededor de la masa  $M$ ,  $ds$  se denomina intervalo invariante y  $t$  es el tiempo coordenado.

En la métrica (ecuación (1.6)) se puede observar que existen dos singularidades, una en  $r = \frac{2GM}{c^2}$  y otra en  $r = 0$ . La primera es una singularidad matemática que se probó que puede ser removida mediante un cambio de coordenadas por Eddington y Finkelstein en 1958 [8]:

$$\hat{t} = t \pm \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|$$

donde

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.9)$$

se denomina radio de Schwarzschild. Al reemplazar en el intervalo invariante se tiene:

$$(ds)^2 = c^2 \gamma (d\hat{t})^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) (dr)^2 \mp 2c \frac{r_s}{c} d\hat{t} dr - r^2 (d\Omega)^2$$

Aquí ya no hay singularidad en  $r = r_s$ , además  $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2$ .

El punto  $r = 0$  representa una singularidad física y no puede ser removida. En este punto la curvatura del espacio tiempo es infinita y todas las leyes de la física fallan.

## 1.2. Sistemas binarios de agujeros negros (BBHS)

Si se comparan las ecuaciones (1.1) y (1.9) se puede ver que el radio de Schwarzschild es igual al radio de las estrellas oscuras calculado por Michell. Esto produjo que nuevamente se teorice la existencia de regiones, ya no solo del espacio, sino del espacio-tiempo de las cuales nada puede escapar, ni la luz. Estas regiones se denominan agujeros negros.

La TGR permitió encontrar otras características de estos cuerpos. Primero, se puede decir que toda la masa de los agujeros negros está contenida en un único punto, la singularidad  $r = 0$ , por eso en este punto la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita. Esta singularidad está oculta dentro de un volumen esferoidal de radio  $r_s$ , cuyo límite exterior se denomina horizonte de sucesos. En esta superficie dada por  $r_s$ , la aceleración gravitacional hacia el agujero negro se vuelve tan grande que ni siquiera la luz puede escapar de ella. Hasta ahora no se ha encontrado evidencia de la existencia de singularidades desnudas, estas siempre están cubiertas por un horizonte de sucesos [11].

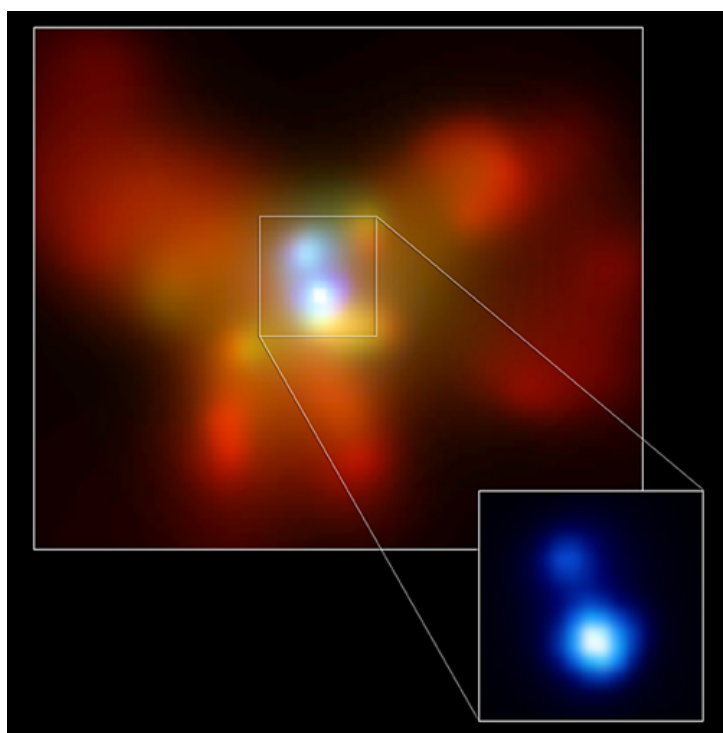


Figura 1.1: Imagen de rayos X del núcleo de la galaxia NGC 6240 tomado por el observatorio de rayos-X Chandra . Se pueden observar dos discos de acreción de SMBH. El color rojo corresponde a energías entre 0.5-1.5 keV, el verde a 1.5-5 keV, y el azul a 5-8 keV.

Otra característica importante de los agujeros negros es el disco de acreción. Un disco de acreción se define como el conjunto de partículas que se mueven alrededor de un objeto central masivo, alimentando el objeto, siendo atraídas por éste y contribuyendo a su aumento de masa. Estos discos se encuentran generalmente alrededor de agujeros negros, o en los núcleos de galaxias activas AGN (donde se teoriza deben existir agujeros negros supermasivos). Como un

agujero negro no puede ser detectado ya que no emite radiación (en términos clásicos), los discos de acreción son muy importantes para la detección de agujeros negros, ya que estos sí pueden ser detectados.

Por otro lado, según los modelos jerárquicos de formación de galaxias, es posible que las mismas en sus centros no presenten solo un SMBH, sino que podrían presentar un sistema binario de agujeros negros BBHS (Binary Black Hole System). Esto corrobora la teoría de que los agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias pueden formarse por la unión de varios agujeros negros, ya que a la final, estos sistemas binarios colapsarían en un solo agujero negro.

Una evidencia de la existencia de estos sistemas es la galaxia NGC6240 formada a partir de la colisión de dos galaxias menores. En la figura (1.1) se puede observar una imagen de rayos X del centro de esta galaxia tomada con el telescopio Chandra, donde claramente hay dos regiones muy brillantes que representan los discos de acreción del sistema binario de agujeros negros.

Otros sistemas que son evidencia directa de la existencia de BBHS son la galaxia espiral NGC 3393 y la galaxia elíptica 0402+379 [11].

Por otro lado, hay sistemas que son evidencia indirecta de BBHS, debido a que no se sabe con certeza qué tipo de cuerpo son. El más importante de estos es el OJ 287, que es catalogado actualmente como un Blazar. Un Blazar es un Quasar cuyas emisiones apuntan hacia la Tierra, y es por eso que su detección se vuelve muy sencilla.

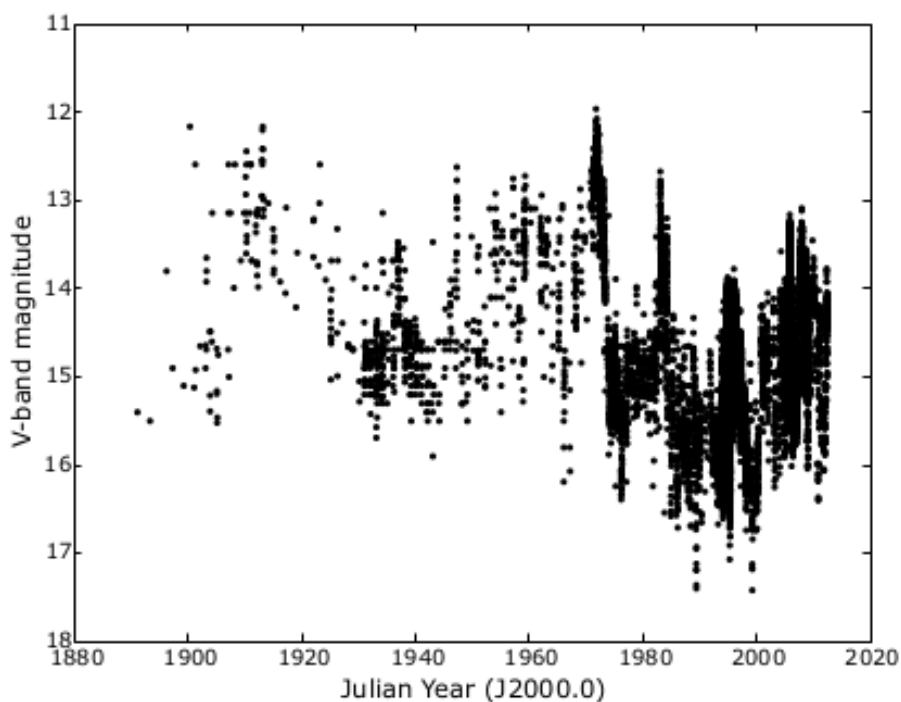


Figura 1.2: Gráfica del historial de emisiones de radiación del sistema OJ 287. La curva de luz muestra una periodicidad de aproximadamente 12 años [15].



En la figura (1.2) se observa el historial de emisiones de radiación de este sistema, y se puede ver claramente una periodicidad que es de aproximadamente 12 años. La hipótesis que se plantea es que este es un sistema binario de agujeros negros con masas de aproximadamente  $1,8 \times 10^{10} M_{\odot}$  y  $1,4 \times 10^8 M_{\odot}$ , y que el agujero negro menos masivo describe una órbita elíptica relativista con una precesión de  $39^{\circ}$  cada 12 años.

Lo que sustenta esta hipótesis es que cuando el agujero negro menos masivo atraviesa el disco de acreción, se crea una fulguración que puede ser detectada. Cada 12 años esta fulguración vuelve a aparecer ya que este tiempo sería precisamente el periodo orbital del sistema. Lo importante es que cada nueva fulguración aparece distante a la anterior, y midiendo este desfase se puede estimar el valor de la precesión de la órbita.

Este es un sistema que se considera no resuelto, ya que no se ha llegado a comprobar analíticamente que el valor del avance del perihelio sea de  $39^{\circ}$ ; lo más cercano que se ha llegado es a  $33,8^{\circ}$ , como lo hizo Mauri Valtonen [15]. En lo que sigue de este trabajo se intentará mejorar el cálculo de Valtonen, pero haciendo primero un análisis del movimiento alrededor de un agujero negro de Schwarzschild.

# Capítulo 2

## Movimiento alrededor de un agujero negro de Schwarzschild

### 2.1. Ecuación del movimiento

Consideremos un agujero negro de masa  $M$  y una partícula masiva que se mueve alrededor del mismo. El movimiento de esta partícula está regido por la métrica de Schwarzschild, dada por la ecuación (1.6):

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \gamma^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

Para hallar las ecuaciones de movimiento referentes a esta métrica se puede recurrir al lagrangiano de la geodésica dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

donde el punto representa la derivada con respecto a  $\tau$ . Calculando este lagrangiano con la métrica de Schwarzschild se tiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \gamma \left( c \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \gamma^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right) \quad (2.1)$$

Con este lagrangiano se pueden obtener los momentos canónicos de la partícula mediante la definición:

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}$$

Calculando esto para  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  se obtiene el siguiente cuadvector momentum:

$$p_\alpha = \left( \gamma c \frac{dt}{d\tau}, -\gamma^{-1} \frac{dr}{d\tau}, -r^2 \frac{d\theta}{d\tau}, -r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

y el correspondiente cuadrivector contravariante:

$$p^\alpha = \left( \gamma c \frac{dt}{d\tau}, \gamma^{-1} \frac{dr}{d\tau}, r^2 \frac{d\theta}{d\tau}, r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

Se sabe que el movimiento orbital de los cuerpos celestes se realiza sobre un solo plano, y esto se debe a que el momento angular orbital debe conservarse. Entonces se puede tomar, sin pérdida de generalidad, y por conveniencia el plano dado por  $\theta = \pi/2$  (es decir, se trabaja en el plano ecuatorial). Tomando en cuenta esto, el cuadrivector momento sería:

$$p^\alpha = \left( \gamma c \frac{dt}{d\tau}, \gamma^{-1} \frac{dr}{d\tau}, 0, r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

y el lagrangiano se reduciría a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \gamma \left( c \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \gamma^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right)$$

Recordemos que el lagrangiano de una partícula debe cumplir la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0$$

Por lo que, aplicando esta ecuación para  $x^0$  y  $x^3$  se tiene:

$$-\frac{d}{d\tau} \left( \gamma c \frac{dt}{d\tau} \right) = 0$$

y

$$-\frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

De lo cual se concluye que los momentos  $p^0 = \gamma c \frac{dt}{d\tau}$  y  $p^3 = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$  se conservan, y son constantes del movimiento. De hecho, la energía por unidad de masa de una partícula está relacionada con  $p^0$  por  $E' = p^0 c$ , por lo que la constante de energía sería:

$$E' = c^2 \gamma \frac{dt}{d\tau} \quad (2.2)$$

Mientras que la otra constante tiene unidades de momento angular por unidad de masa, y

por lo tanto representa el momento angular orbital de la partícula:

$$J = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \quad (2.3)$$

Con las constantes del movimiento encontradas, se puede regresar a la métrica de Schwarzschild y reescribirla tomando en cuenta que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \gamma^{-1}(dr)^2 - r^2(d\phi)^2 \quad (2.4)$$

dividiendo la expresión anterior para  $d\tau$ , se obtiene la ecuación:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\gamma \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \gamma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \gamma c^2 \quad (2.5)$$

Aquí se pueden ya reemplazar los valores de (2.2) y (2.3) en (2.5):

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \gamma \frac{J^2}{r^2} = \frac{E'^2}{c^2} - \gamma c^2 \quad (2.6)$$

recordando que  $\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ :

$$\frac{E'^2}{c^2} - c^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \gamma \frac{J^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} \quad (2.7)$$

Esta es la primera ecuación de movimiento.

Ahora, para hallar una ecuación que relacione las coordenadas  $r$  y  $\phi$ , podemos recurrir a la regla de la cadena en la ecuación 2.7:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \gamma \frac{J^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = \frac{E'^2}{c^2} - c^2$$

Usando la definición de momento angular orbital por unidad de masa:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{J^2}{r^4} + \gamma \frac{J^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = \frac{E'^2}{c^2} - c^2 \quad (2.8)$$

Mediante el cambio de variable  $u = \frac{1}{r}$ , y usando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \quad (2.9)$$

Reemplazando en la ecuación (2.8):

$$J^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \gamma J^2 u^2 - 2GMu = \frac{E'^2}{c^2} - c^2$$

Obtenemos entonces:

$$\frac{E'^2 - c^2}{J^2} = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \gamma u^2 - \frac{2GM}{J^2}u \quad (2.10)$$

Que es la segunda ecuación de movimiento. Derivando la expresión anterior y simplificando:

$$2 \left(\frac{du}{d\phi}\right) \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2\gamma u \left(\frac{du}{d\phi}\right) + \left(\frac{d\gamma}{du}\right) \left(\frac{du}{d\phi}\right) u^2 - \frac{2GM}{J^2} \left(\frac{du}{d\phi}\right) = 0$$

$$2 \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2\gamma u + \left(\frac{d\gamma}{du}\right) u^2 - \frac{2GM}{J^2} = 0$$

pero  $\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - 2 \frac{GM}{c^2} u$  y  $\frac{d\gamma}{du} = -2 \frac{GM}{c^2}$ . Usando esto y simplificando:

$$2 \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u - 4 \frac{GM}{c^2} u^2 - 2 \frac{GM}{c^2} u^2 - \frac{2GM}{J^2} = 0$$

Con esto, se llega finalmente a la ecuación de la órbita en el caso relativista:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2} + 3 \frac{GM}{c^2} u^2 \quad (2.11)$$

Esta ecuación es igual a la ecuación de la órbita que se puede deducir a partir de las leyes de Newton, pero con un término extra dado por  $3 \frac{GM}{c^2} u^2$ .

## 2.2. Análisis de las posibles trayectorias

Antes que nada, es de utilidad analizar cómo es la ecuación de movimiento. Para esto, escribiremos la ecuación (2.7) de la forma:

$$\frac{1}{2} \frac{E'^2}{c^2} - c^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \gamma \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$

Esta ecuación tiene una gran similitud con la ecuación de la conservación de la energía para la teoría newtonianas, donde el primer término representaría la energía total del sistema, el segundo representa la energía cinética radial y los dos últimos términos deberían representar el potencial efectivo:

$$\tilde{V}_{rel} = \gamma \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$

desarrollando  $\gamma$  y escribiendo  $GM$  en función de  $r_s$  y  $c^2$  se tiene:

$$\tilde{V}_{rel} = -\frac{r_s c^2}{2r} + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{r_s J^2}{2r^3} \quad (2.12)$$

Veamos como se comporta este potencial, para lo cual se pueden buscar los puntos críticos del mismo. Derivando (2.12):

$$\frac{d\tilde{V}_{rel}}{dr} = \frac{r_s c^2}{2r^2} - \frac{J^2}{r^3} + \frac{3r_s J^2}{2r^4} = 0$$

Simplificando, se llega a la ecuación cuadrática:

$$r^2 - \frac{2J^2}{r_s c^2} r + \frac{3J^2}{c^2} = 0$$

Cuya solución es:

$$r = \frac{J^2}{r_s c^2} \pm \frac{J^2}{r_s c^2} \sqrt{1 - \frac{3r_s^2 c^2}{J^2}} \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) nos dice que solo existen puntos críticos para  $J \geq \sqrt{3} r_s c$ , y que para  $J = \sqrt{3} r_s c$  solo hay un punto crítico, y para el resto hay dos.

Para seguir con el análisis, recordemos que el potencial efectivo en el caso newtoniano es:

$$\tilde{V}_{clas} = -\frac{r_s c^2}{2r} + \frac{J^2}{2r^2} \quad (2.14)$$

Aquí se observa claramente que la corrección de la T.G.R añade un término  $-\frac{r_s J^2}{2r^3}$ , además, el potencial newtoniano tiene un solo punto crítico. Las figuras (2.1), (2.2), (2.3) muestran como es la dependencia de los dos potenciales efectivos en función de  $\frac{r}{r_s}$  para diferentes valores de  $J$ .

Cuando  $J \ll r_s c$  ambos potenciales se comportan casi sin distinción, esto es claro, en el caso en que las velocidades son bajas. Cuando  $J < r_s c$  ya se empiezan a observar diferencias entre los potenciales, ya que en el caso newtoniano aparece un mínimo, mientras que en la T.G.R este mínimo no está presente todavía. Finalmente, para  $J \geq r_s c$  y con valores pequeños de  $\frac{r}{r_s}$ , el potencial newtoniano tiende a infinito mientras que en el de la T.G.R hay un máximo (el primer punto crítico) y luego decae hacia el infinito negativo. Para  $J > \sqrt{3} r_s c$ , hay un segundo punto crítico que es un mínimo. Estos dos puntos representan respectivamente a las órbitas circulares estables e inestables.

Para el análisis de las posibles trayectorias que puede tener el cuerpo, vamos a partir de la ecuación (2.10). Reescribimos esta ecuación de la forma:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\frac{E'^2}{c^2} - c^2}{J^2} - \gamma u^2 + \frac{2GM}{J^2} u$$

lo cual puede ser escrito en términos del radio de Schwarzschild  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  y la constante  $A = \frac{E'^2}{c^2} - c^2$  como:

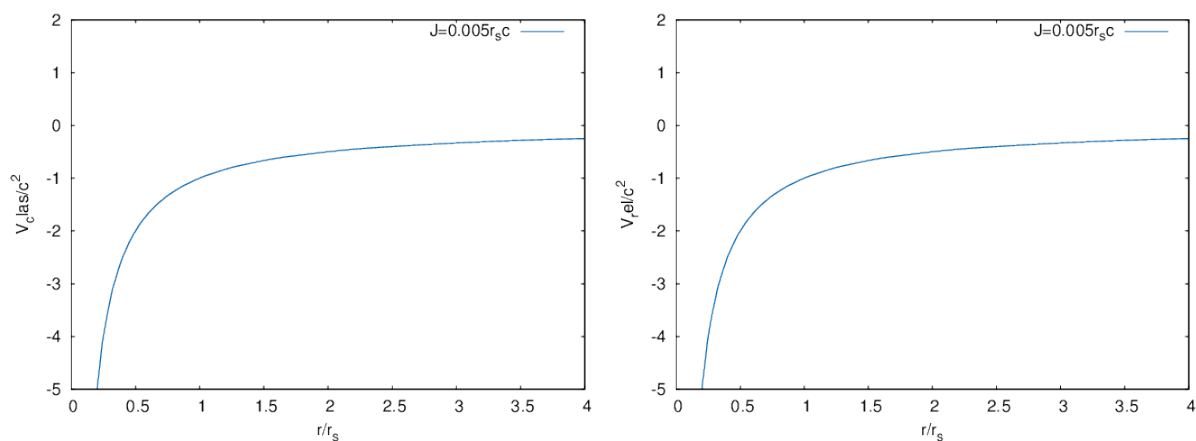


Figura 2.1: Dependencia del potencial efectivo en función de  $r/r_s$ : a) clásico, y b) relativista; para el caso en que  $J \ll r_s c$ .

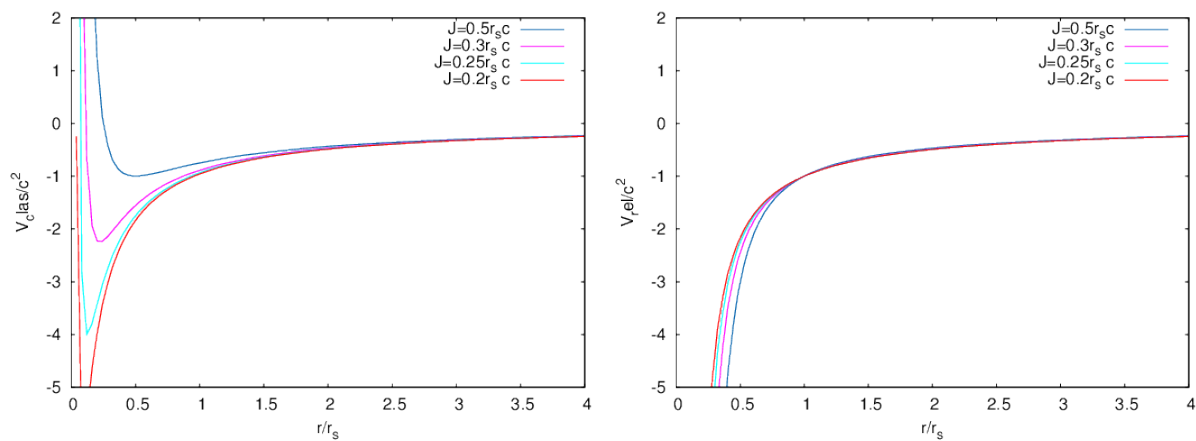


Figura 2.2: Dependencia del potencial efectivo en función de  $r/r_s$ : a) clásico, y b) relativista; para el caso en que  $J < r_s c$ .

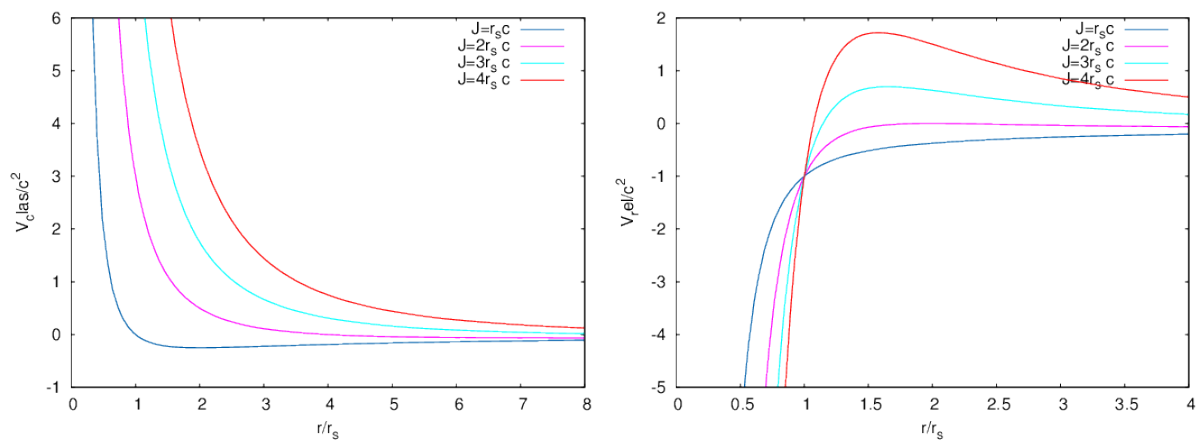


Figura 2.3: Dependencia del potencial efectivo en función de  $r/r_s$ : a) clásico, y b) relativista; para el caso en que  $J > r_s c$ .

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{A}{J^2} - \gamma u^2 + \frac{r_s c^2}{J^2} u$$

desarrollando  $\gamma$ :

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{A}{J^2} - u^2 + r_s u^3 + \frac{r_s c^2}{J^2} u$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = r_s u^3 - u^2 + \frac{r_s c^2}{J^2} u + \frac{A}{J^2} \quad (2.15)$$

Esta ecuación nos puede decir para cuántos y para cuales valores de  $r$  tenemos máximos o mínimos para la ecuación de la trayectoria  $r(\phi)$ . Esta información es esencial, ya que de ello depende el tipo de trayectoria que tendrá el sistema [9]. Esto quiere decir que se deben estudiar las raíces de la ecuación polinómica:

$$r_s u^3 - u^2 + \frac{r_s c^2}{J^2} u + \frac{A}{J^2} = 0 \quad (2.16)$$

Para estudiar las soluciones de esta ecuación, se debe tomar en cuenta el discriminante. Para una ecuación de tercer grado de la forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , el discriminante es:

$$D = -18abcd + 4b^3d - b^2c^2 + 4ac^3 + 27a^2d^2 \quad (2.17)$$

Hay tres casos posibles. Si  $D > 0$ , entonces la ecuación tiene una sola raíz real y dos raíces complejas conjugadas. Si  $D = 0$ , la ecuación tiene tres raíces reales repetidas, o dos repetidas y una diferente. Por último, si  $D < 0$ , la ecuación tiene tres raíces reales distintas.

Aplicando (2.17) a (2.16), se tiene:

$$D = 18r_s \left(\frac{r_s c^2}{J^2}\right) \left(\frac{A}{J^2}\right) - 4 \left(\frac{A}{J^2}\right) - \left(\frac{r_s c^2}{J^2}\right)^2 + 4r_s \left(\frac{r_s c^2}{J^2}\right)^3 + 27r_s^2 \left(\frac{A}{J^2}\right)^2$$

Multiplicar este discriminante por  $r_s^2$  no altera el análisis, ya que  $r_s^2$  es siempre positivo, y solo nos interesa saber el signo de este discriminante. Entonces, multiplicando esto por  $r_s^2$  se tiene:

$$D = 18 \left(\frac{r_s^2 c^2}{J^2}\right) \left(\frac{r_s^2 A}{J^2}\right) - 4 \left(\frac{r_s^2 A}{J^2}\right) - \left(\frac{r_s^2 c^2}{J^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{r_s^2 c^2}{J^2}\right)^3 + 27 \left(\frac{r_s^2 A}{J^2}\right)^2$$

Llamamos  $\alpha = \frac{r_s^2 c^2}{J^2}$ ,  $\beta = \frac{r_s^2 A}{J^2}$ , e igualamos a cero esta ecuación para poder analizarla de forma más sencilla:



$$D = 27\beta^2 - (4 - 18\alpha)\beta - \alpha^2 + 4\alpha^3 = 0 \quad (2.18)$$

Aquí hay que tomar en cuenta que  $\alpha$  solo puede ser una constante positiva ya que  $J$  no puede ser complejo, pero en cambio,  $\beta$  sí puede ser negativa ya que la constante de energía  $A$  no necesariamente es positiva.

Si  $\alpha = \frac{r_s^2 c^2}{J^2} = 0$ , significaría que  $J \rightarrow \infty$ , ya que  $r_s$  no puede ser cero. Esto se cumple en el caso en que el intervalo de tiempo propio sea cero, lo cual solo es cierto para los fotones de luz. Entonces, en el caso de fotones la constante  $\alpha$  se anula y la constante  $\beta$  sería:

$$\beta = \frac{r_s^2 A}{J^2} = \frac{r_s^2 c^2 \left( \gamma^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 \right)}{r^4 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2}$$

$$\beta = \frac{r_s^2 c^2 \left( \gamma^2 (dt)^2 - (d\tau)^2 \right)}{r^4 (d\phi)^2}$$

como  $d\tau \rightarrow 0$  se tiene:

$$\beta = \frac{r_s^2 c^2 \gamma^2}{r^4 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2} \quad (2.19)$$

y la ecuación que rige el movimiento de los fotones de luz en un campo gravitacional de Schwarzschild es:

$$\left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 = r_s u^3 - u^2 + \frac{\beta}{r_s^2}$$

Derivando:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2} r_s u^2 \quad (2.20)$$

Dicho esto, ahora sí pasemos a resolver la ecuación (2.18). Usando la fórmula de la ecuación cuadrática para  $\beta$  se tiene:

$$\beta_{\pm} = \frac{2 - 9\alpha \pm 2\sqrt{1 - 9\alpha + 27\alpha^2 - 27\alpha^3}}{27}$$

La expresión dentro de la raíz se puede factorar:

$$\beta_{\pm} = \frac{2 - 9\alpha \pm 2\sqrt{(9\alpha^2 - 6\alpha + 1)(1 - 3\alpha)}}{27}$$

factorando nuevamente

$$\beta_{\pm} = \frac{2 - 9\alpha \pm 2\sqrt{(1 - 3\alpha)^3}}{27} \quad (2.21)$$

Como  $\beta$  depende de la constante de energía  $A$  y  $\alpha$  solo depende de la constante de momento angular orbital, esta ecuación lo que nos dice es qué relación deben cumplir la energía y el momento angular orbital para tener un tipo de órbita u otra. Volviendo al discriminante, este ahora se puede escribir en función de  $\beta_{\pm}$ :

$$D = (\beta - \beta_+) (\beta - \beta_-) \quad (2.22)$$

En la figura (2.4) se observan las gráficas de  $\beta_{\pm}$  en función de  $\alpha$ . Como se puede ver, hay dos regiones que corresponden a I)  $D > 0$  ( $\beta > \beta_+$  y  $\beta > \beta_-$ , o  $\beta < \beta_+$  y  $\beta < \beta_-$ ) y II)  $D < 0$  ( $\beta > \beta_+$  y  $\beta < \beta_-$ , o  $\beta < \beta_+$  y  $\beta > \beta_-$ ); mientras que el límite entre las dos regiones está dado por las funciones que corresponden a  $D = 0$  ( $\beta = \beta_+$  o  $\beta = \beta_-$ ). En la región I), solo existe una raíz real para la ecuación (2.16).

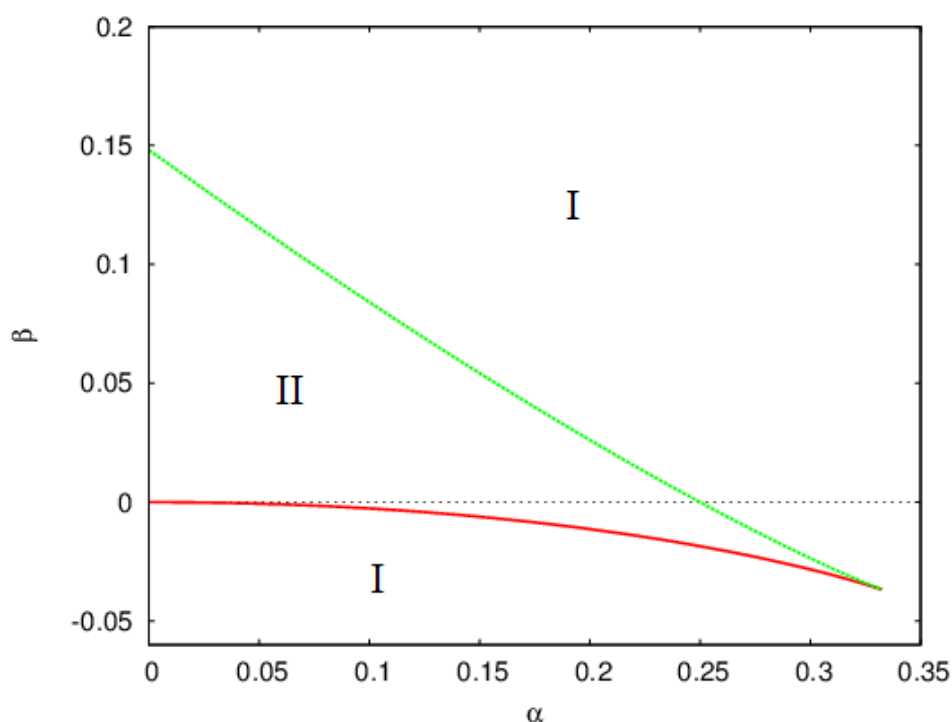


Figura 2.4: Gráfica de  $\beta_+$  (verde) y  $\beta_-$  (rojo) en función de  $\alpha$

En el límite de las regiones (es decir, en  $\beta = \beta_-$  o  $\beta = \beta_+$ ) la ecuación (2.16) tendría dos raíces repetidas, lo cual quiere decir que en esta región los puntos donde la velocidad radial se vuelve cero son iguales, y como consecuencia la trayectoria sería una circunferencia. En este límite hay también otra trayectoria posible que corresponde a la tercera raíz,  $r_o$ . Esta es una trayectoria en la que el cuerpo se dirige hacia  $r_o$  para luego regresar nuevamente. Para que esto

se cumpla  $r_o$  debe ser del orden de  $r_s$ , lo cual se comprobará más adelante.

Las dos curvas  $\beta_+$  y  $\beta_-$  representan órbitas circulares, pero no necesariamente las dos curvas representan órbitas estables. Para saber si alguna de las dos representa estabilidad vamos a calcular el momento angular orbital por unidad de masa para órbitas circulares partiendo de la ecuación (2.11), y tomando en cuenta que el radio  $r$  de una circunferencia no cambia:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{GM}{J^2} + 3\frac{GM}{c^2}u^2 - u = 0$$

con  $u = \frac{1}{r}$ . Entonces:

$$\frac{GM}{J^2}r^2 - r + 3\frac{GM}{c^2} = 0$$

Ahora, recordemos que  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ , lo cual nos lleva a la expresión:

$$\frac{c^2 r_s}{2}r^2 + J^2 \left( \frac{3}{2}r_s - r \right) = 0$$

Despejando  $J$ :

$$J^2 = \frac{c^2 r_s r^2}{2r - 3r_s}$$

Con esto hemos calculado ya el momento angular orbital por unidad de masa:

$$J = cr \left( \frac{r_s}{2r - 3r_s} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

Con esto y utilizando (2.23) se puede calcular el valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{r_s^2 c^2}{J^2} = \frac{r_s}{r^2} (2r - 3r_s)$$

y el valor de  $\beta_{\pm}$  de (2.21):

$$\beta_{\pm} = \frac{2 - 9\frac{r_s}{r^2}(2r - 3r_s) \pm 2\sqrt{\left[1 - 3\frac{r_s}{r^2}(2r - 3r_s)\right]^3}}{27}$$

simplificando:

$$\beta_{\pm} = \frac{2 - 9\frac{r_s}{r^2}(2r - 3r_s) \pm 2\sqrt{\left(1 - 3\frac{r_s}{r}\right)^6}}{27}$$

finalmente se tiene:

$$\beta_{\pm} = \frac{2 - 18\frac{r_s}{r} + 27\frac{r_s^2}{r^2} \pm 2 \left| \left(1 - 3\frac{r_s}{r}\right)^3 \right|}{27}$$

Si nos fijamos en la figura (2.4), podemos ver que hay un punto en que las curvas  $\beta_-$  y  $\beta_+$  se cortan. Este punto se tiene cuando el discriminante de la ecuación cuadrática se anula, es decir en:

$$r = 3r_s$$

Este es el valor que se conoce de la mínima órbita circular estable [7], lo cual claramente nos dice que las dos curvas representan respectivamente órbitas circulares estables e inestables y están separadas por la mínima órbita estable. Por otro lado, en la expresión del momento angular se puede ver que cuando  $r \rightarrow \frac{3}{2}r_s$ ,  $J \rightarrow \infty$ ; como este valor es menor a  $3r_s$ , las órbitas inestables estarían en el intervalo  $\left(\frac{3}{2}r_s, 3r_s\right)$ , y para  $r < \frac{3}{2}r_s$  ya no existen órbitas circulares (esto se cumple para cuerpos masivos, no para fotones). Para poder tener órbitas estables, es necesario que la energía se mantenga en sus valores mínimos, de lo cual se puede deducir fácilmente que la curva  $\beta_-$  representa a las órbitas estables y  $\beta_+$  a las inestables, ya que  $\beta_+ > \beta_-$ .

Por otro lado, hay que tomar en cuenta que las raíces no solo deben ser reales, deben ser positivas también, lo cual nos permite realizar más divisiones y establecer cuatro regiones, las cuales se muestran en la figura (2.5).

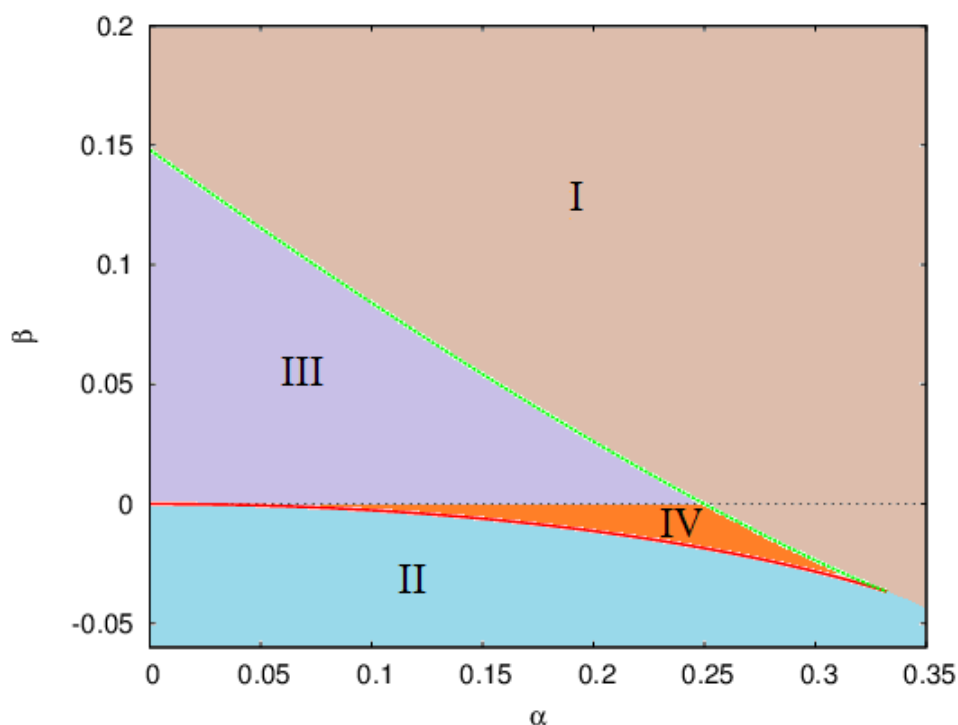


Figura 2.5: Gráfica de  $\beta_+$  (verde) y  $\beta_-$  (rojo) en función de  $\alpha$

A continuación se analiza que tipo de órbita se genera en cada caso:

Región I.- No hay raíces reales positivas.- Cualquier órbita asociada a esta solución se extiende de  $r = 0$  a  $r = \infty$ , sin puntos relevantes en los que cambie la dirección del movimiento. Esto quiere decir que el cuerpo pasa por una región muy alejada del campo gravitacional, y por lo tanto no es afectado por la curvatura causada por el mismo.

Región II.- Existe una raíz real positiva. En este caso hay un punto  $r_o$  donde la trayectoria cambia de sentido. Es decir, el cuerpo se dirige hacia  $r_o$  y regresa a  $r = 0$ .  $r_o$  debe ser del orden de  $r_s$  para que esto suceda.

Región III.- Hay dos raíces reales positivas: la primera es  $r_o$  y la segunda  $r_1$ , con  $r_1 > r_o$ . Hay entonces dos trayectorias posibles, la primera es la misma que se describe en el caso II, y la otra es una trayectoria en la cual el cuerpo se desvía en el punto dado por la segunda raíz  $r_1$ , de tal forma que el resultado es una hipérbola (o parábola).

Región IV.- Existen tres raíces reales positivas. Nuevamente una de las raíces es el punto  $r_o$ , acompañada de otros dos puntos  $r_1$  y  $r_2$ , con  $r_1, r_2 > r_o$ . En este caso, si  $r_1 = r_2$  obtenemos una circunferencia como ya se explicó anteriormente, pero si  $r_1$  y  $r_2$  son diferentes, entonces tenemos una elipse, y estos dos puntos representarían las distancias del perihelio y del afelio respectivamente.

### 2.2.1. Órbitas circulares

Para órbitas circulares, la energía se puede calcular a partir de la ecuación (2.7):

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\gamma\frac{J^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + \frac{E'^2}{c^2} - c^2 = 0$$

para encontrar E es más fácil primero escribir esta ecuación como:

$$\frac{\frac{E'^2}{c^2} - c^2}{J^2} = \gamma\frac{1}{r^2} - \frac{r_s c^2}{J^2 r}$$

Simplificando:

$$\frac{\frac{E'^2}{c^2} - c^2}{J^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{r_s}{r^3} - \frac{r_s c^2}{J^2 r}$$

Reemplazando el valor del momento angular en la parte derecha de la ecuación tenemos:

$$\frac{\frac{E'^2}{c^2} - c^2}{J^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{r_s}{r^3} - \frac{2r - 3r_s}{r^3}$$

$$\frac{\frac{E'^2}{c^2} - c^2}{J^2} = \frac{2r_s - r}{r^3}$$

Ahora sí reemplazamos el valor de  $J^2$ :

$$\frac{E'^2}{c^2} - c^2 = \left(\frac{2r_s - r}{r^3}\right) \frac{c^2 r_s r^2}{2r - 3r_s}$$

y despejando E mediante un poco de álgebra se puede llegar a la expresión:

$$E' = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{2r}{2r - 3r_s}\right)^{1/2} \quad (2.24)$$

Tenemos ya los valores de la energía por unidad de masa y del momento angular orbital por unidad de masa en función del radio  $r$  de la órbita circular y de constantes como el radio de Schwarzschild. Recordemos ahora que la energía se relaciona con el tiempo coordenado por:

$$E' = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

Entonces, a partir de esta expresión, y la encontrada anteriormente para la energía, se calcula la relación entre el tiempo propio y el tiempo coordenado:

$$E' = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{2r}{2r - 3r_s}\right)^{1/2}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{2r}{2r - 3r_s}\right)^{1/2} \quad (2.25)$$

Integrando (2.25), tenemos que la relación entre el intervalo de tiempo propio y el intervalo de tiempo coordinado es:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3r_s}{2r}}} \Delta\tau \quad (2.26)$$

Por otro lado, a partir de la expresión del momento angular orbital se puede encontrar una expresión de la velocidad angular  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau}$ . Esta expresión es:

$$\dot{\phi} = \frac{c}{r} \left(\frac{r_s}{2r - 3r_s}\right)^{1/2}$$

Para el radio de la mínima órbita circular estable ( $r = 3r_s$ ), la relación entre el tiempo propio y el tiempo coordinado es:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3r_s}{6r_s}}} \Delta\tau$$

$$\Delta t = \sqrt{2} \Delta\tau$$

Mientras que la velocidad orbital estaría dada por:

$$r\dot{\phi} = v_\phi = c \left(\frac{r_s}{3r_s}\right)^{1/2}$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Con esta velocidad podemos también calcular el periodo orbital T:

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi(3r_s)}{v_\phi}$$

$$T = \frac{6\sqrt{3}\pi r_s}{c}$$

Este es el periodo medido por un observador dentro del campo gravitacional. En cambio, si se mide el periodo  $T'$  desde un marco de referencia exterior al campo gravitacional, tenemos:

$$T' = \sqrt{2}T$$

$$T' = \frac{6\sqrt{6}\pi r_s}{c}$$

Finalmente, la energía por unidad de masa mínima sería:

$$E'_{min} = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{3r_s}\right) \left(\frac{6r_s}{6r_s - 3r_s}\right)^{1/2}$$

$$E'_{min} = \frac{2\sqrt{2}}{3}c^2$$

Pero la energía en reposo por unidad de masa es  $E'_o = c^2$ , entonces:

$$\frac{E'_{min}}{E'_o} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Tomando porcentajes:

$$\frac{E'_{min}}{E'_o} \times 100 \% = 94,28 \%$$

Este resultado nos indica que para tener la mínima órbita circular estable se necesita el 94,281 % de la energía en reposo de la partícula. Ahora, lo importante es la energía de amarre de la partícula que es:

$$\frac{E'_{am}}{E'_o} \times 100 \% = \left(1 - \frac{E'_{min}}{E'_o}\right) \times 100 \% = 5,72 \%$$

Es decir, la energía de amarre es el 5,72 % de la energía en reposo de la partícula, y representa la energía liberada cuando la partícula cae en espiral desde la mínima órbita estable hacia el horizonte de sucesos.



## Capítulo 3

# Corrección al cálculo del Avance del Perihelio para sistemas binarios

Para las órbitas elípticas, el cálculo aceptado hasta el momento del avance del perihelio se realizó asumiendo un campo gravitacional débil, como el del Sol. Para esto, partimos de la ecuación (2.11) que es la ecuación de la órbita:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2} + 3\frac{GM}{c^2}u^2$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

La solución para esta ecuación es de la forma:

$$u = C_1 \sin\phi + C_2 \cos\phi$$

También se puede escribir esta solución en función de otras dos constantes  $C_o$  y  $\omega$ :

$$u = C_o \cos(\phi - \omega)$$

Para la solución particular, primero tomemos en cuenta solo el término clásico  $\frac{GM}{J^2}$ , para el

cual tenemos la solución:

$$u = \frac{GM}{J^2} [1 + e \cos(\phi - \omega)] \quad (3.1)$$

Donde  $e$  es la excentricidad de la órbita. Para la solución completa, debemos considerar también el término de corrección relativista  $\frac{3GM}{c^2}u^2$ , el cual no es lineal. Veamos entonces cuánto aporta ese término en relación al término clásico:

$$\frac{\frac{3GM}{c^2}u^2}{\frac{GM}{J^2}} = \frac{3r^4 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2}{r^2 c^2} = \frac{3v_\phi^2}{c^2}$$

Aquí hemos tomado  $v_\phi = r \frac{d\phi}{d\tau}$ . En los sistemas físicos reales,  $v_\phi$  siempre es mucho menor que  $c$  [12]. En el caso del sistema  $S_2$ - Sagitario A\*, se evidencia una de las velocidad más altas alcanzadas por una estrella, la cual es del orden de  $0,02c$ . Esto implica que  $\frac{v_\phi}{c} \approx 0,02$ , y que el término de la corrección relativista es muy pequeño comparado con el término clásico. Entonces, podemos reemplazar la primera solución particular en el término relativista y obtener la ecuación:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2} + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} [1 + e \cos(\phi - \omega)]^2 \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2} + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} + 6 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e \cos(\phi - \omega) + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e^2 \cos^2(\phi - \omega)$$

Vamos a despreciar el último término ya que estamos considerando órbitas elípticas para las cuales  $e < 1$ , además que  $e^2 \ll 1$  para la mayoría de los casos. La ecuación a resolver es entonces:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2} + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} + 6 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e \cos(\phi - \omega) \quad (3.3)$$

Encontremos entonces la solución particular para cada término por separado, para luego simplemente sumar las soluciones. Para la ecuación:

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{GM}{J^2} + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2}$$

La solución es simplemente:

$$u_1 = \left( \frac{GM}{J^2} + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} \right) [1 + e \cos(\phi - \omega)]$$

Para el otro término en cambio tenemos la ecuación:

$$\frac{d^2 u_2}{d\phi^2} + u_2 = 6 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e \cos(\phi - \omega)$$

Como  $\omega$  es una constante, proponemos la solución particular para esta ecuación como:

$$u_2 = x(\phi) \sin(\phi - \omega)$$

y entonces hay que determinar la función  $x(\phi)$ . Calculando las derivadas:

$$\frac{du_2}{d\phi} = \frac{dx(\phi)}{d\phi} \sin(\phi - \omega) + x(\phi) \cos(\phi - \omega)$$

$$\frac{d^2 u_2}{d\phi^2} = \frac{d^2 x(\phi)}{d\phi^2} \sin(\phi - \omega) + 2 \frac{dx(\phi)}{d\phi} \cos(\phi - \omega) - x(\phi) \sin(\phi - \omega)$$

aquí podemos imponer la condición:

$$\frac{d^2 x(\phi)}{d\phi^2} = 0$$

y entonces:

$$\frac{d^2 u_2}{d\phi^2} = 2 \frac{dx(\phi)}{d\phi} \cos(\phi - \omega) - u_2(\phi)$$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial:

$$2 \frac{dx(\phi)}{d\phi} \cos(\phi - \omega) - u_2(\phi) + u_2(\phi) = 6 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e \cos(\phi - \omega)$$

$$\frac{dx(\phi)}{d\phi} = 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e$$

Resolviendo esta ecuación se tiene:

$$x(\phi) = 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e \phi$$

Esto implica que la solución particular  $u_2$  es:

$$u_2 = 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e \phi \sin(\phi - \omega) \quad (3.4)$$

Ahora sí ya podemos unir las soluciones 1 y 2:

$$u(\phi) = u_1(\phi) + u_2(\phi) = \left( \frac{GM}{J^2} + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} \right) [1 + e \cos(\phi - \omega)] + 3 \frac{G^3 M^3}{J^4 c^2} e \phi \sin(\phi - \omega)$$

$$u(\phi) = \frac{GM}{J^2} \left( 1 + 3 \frac{G^2 M^2}{J^2 c^2} \right) \left[ 1 + e \cos(\phi - \omega) + \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2 + 3G^2 M^2} e \phi \sin(\phi - \omega) \right] \quad (3.5)$$

para un campo gravitacional débil sabemos que  $G^2 M^2 \ll J^2 c^2$ , por lo que podemos aproximar:

$$u(\phi) = \frac{GM}{J^2} \left( 1 + 3 \frac{G^2 M^2}{J^2 c^2} \right) \left[ 1 + e \cos(\phi - \omega) + \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} e \phi \sin(\phi - \omega) \right] \quad (3.6)$$

como  $\frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi$  es un ángulo muy pequeño, podemos hacer las aproximaciones:

$$\frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi \approx \sin \left( \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi \right)$$

$$1 \approx \cos \left( \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi \right)$$

Esto nos permite hacer otra aproximación:

$$e \cos(\phi - \omega) + \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} e \phi \sin(\phi - \omega) \approx$$

$$e \cos \left( \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi \right) \cos(\phi - \omega) + e \sin \left( \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi \right) \sin(\phi - \omega)$$

$$e \cos(\phi - \omega) + \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} e \phi \sin(\phi - \omega) \approx e \cos \left[ \left( 1 - \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \right) \phi - \omega \right]$$

Con esto llegamos a la solución general dada por:

$$u(\phi) = \frac{GM}{J^2} \left( 1 + 3 \frac{G^2 M^2}{J^2 c^2} \right) \left\{ 1 + e \cos \left[ \phi - \omega - \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi \right] \right\} \quad (3.7)$$

Llamamos  $\delta\omega = \frac{3G^2 M^2}{J^2 c^2} \phi$ , y entonces:

$$u(\phi) = \frac{GM}{J^2} \left( 1 + 3 \frac{G^2 M^2}{J^2 c^2} \right) \{ 1 + e \cos[\phi - \omega - \delta\omega] \} \quad (3.8)$$

Lo primero que podemos ver en esta ecuación es que el periodo de  $\phi$  no es  $2\pi$ , sino:

$$\frac{2\pi}{1 - \frac{3G^2M^2}{J^2c^2}} > 2\pi$$

Esto quiere decir que la trayectoria no es una elipse perfecta, sino que se le puede ver como una elipse que va rotando. A este fenómeno se le denomina avance del perihelio. El ángulo de rotación del perihelio sería simplemente el desfase entre la rotación real y una rotación de  $2\pi$ :

$$\chi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3G^2M^2}{J^2c^2}} - 2\pi$$

donde  $\chi$  se denomina avance del perihelio por ciclo. Como ya se dijo anteriormente  $G^2M^2 \ll J^2c^2$ , por lo que esta expresión se puede aproximar:

$$\begin{aligned} \chi &\approx 2\pi \left( 1 + \frac{3G^2M^2}{J^2c^2} \right) - 2\pi \\ \chi &\approx \frac{6\pi G^2M^2}{J^2c^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para escribir esto de una forma más usual, podemos recurrir a la mecánica clásica. Según la mecánica clásica, la energía por unidad de masa que experimenta una partícula en un campo gravitacional está dada por:

$$E' = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{J^2}{r^2} - \frac{GM}{r} \quad (3.10)$$

donde  $J$  es el momento angular orbital por unidad de masa.

Por otro lado, en una elipse hay dos puntos en los cuales  $\dot{r} = 0$  y estos son el afelio y el perihelio. Si llamamos  $R_a$  a la distancia al afelio y  $R_p$  la distancia al perihelio tenemos que:

$$E' = \frac{1}{2}\frac{J^2}{R_a^2} - \frac{GM}{R_a}$$

y

$$E' = \frac{1}{2}\frac{J^2}{R_p^2} - \frac{GM}{R_p}$$

Restando ambas ecuaciones y despejando  $J$  se tiene:

$$J^2 = 2GM \frac{R_a R_p}{R_a + R_p} \quad (3.11)$$

Recordemos que las distancias al afelio y al perihelio son  $R_a = (1 + e)a$  y  $R_p = (1 - e)a$ , donde  $a$  es la longitud del semieje mayor. Es importante resaltar que la excentricidad de una

elipse es siempre menor a 1. Reemplazando esto en la expresión de J:

$$J^2 = 2GM \frac{(1 - e^2) a^2}{2a}$$

$$J^2 = GM (1 - e^2) a \quad (3.12)$$

Esto implica que el avance del perihelio se puede calcular mediante la ecuación:

$$\chi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} \quad (3.13)$$

En la figura (3.1) se puede ver cómo es una órbita elíptica con el avance del perihelio.

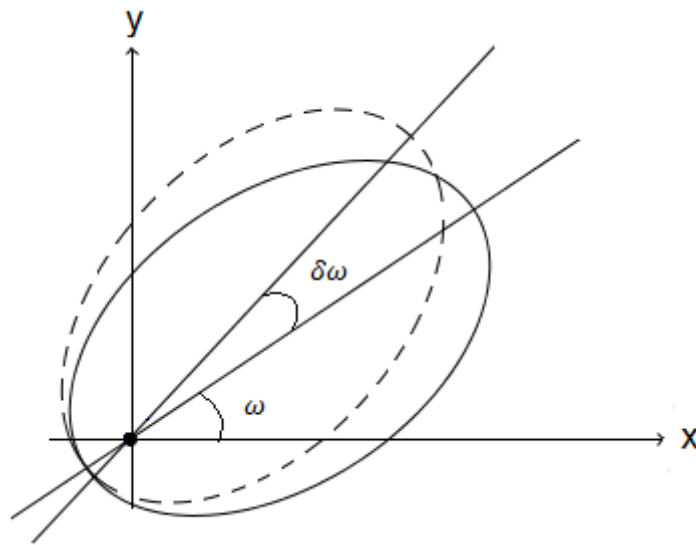


Figura 3.1: Precesión de una órbita elíptica.  $\omega$  es la inclinación inicial y  $\delta\omega$  es el ángulo de precesión.

### 3.1. Aproximación del Avance del Perihelio hasta el enésimo orden

El cálculo anterior es válido para un campo gravitacional débil, pero para un campo gravitacional fuerte, como el generado por un agujero negro supermasivo, la ecuación (3.13) no es válida y una corrección es necesaria. Para esto, se puede partir de la ecuación (2.2) para calcular la energía y el momento angular del sistema.

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = A + \frac{2GM}{r} - \frac{J^2}{r^2}\gamma$$

En una elipse hay dos puntos donde la velocidad radial de la partícula se anula, y estos dos puntos son el afelio (punto más lejano al foco) y el perihelio (punto más cercano al foco). Entonces si  $R_a$  es la distancia al afelio, y  $R_p$  es la distancia al perihelio, se tienen dos ecuaciones:

$$A + \frac{2GM}{R_a} - \frac{J^2}{R_a^2} \gamma_a = 0$$

$$A + \frac{2GM}{R_p} - \frac{J^2}{R_p^2} \gamma_p = 0$$

expandimos  $\gamma_a$  y  $\gamma_p$ :

$$A + \frac{2GM}{R_a} - \frac{J^2}{R_a^2} + \frac{J^2 r_s}{R_a^3} = 0 \quad (3.14)$$

$$A + \frac{2GM}{R_p} - \frac{J^2}{R_p^2} + \frac{J^2 r_s}{R_p^3} = 0 \quad (3.15)$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\frac{2GM}{R_a} - \frac{2GM}{R_p} = J^2 \left( \frac{1}{R_a^2} - \frac{1}{R_p^2} - \frac{r_s}{R_a^3} + \frac{r_s}{R_p^3} \right)$$

simplificando

$$2GM = J^2 \left( \frac{R_p + R_a}{R_a R_p} - r_s \frac{R_p^2 + R_p R_a + R_a^2}{R_a^2 R_p^2} \right)$$

Usando las definiciones  $R_a = (1 + e)a$  y  $R_p = (1 - e)a$ :

$$2GM = J^2 \left( \frac{2a}{(1 - e^2) a^2} - r_s \frac{(1 - e)^2 + 1 - e^2 + (1 + e)^2}{(1 - e^2)^2 a^2} \right)$$

simplificando:

$$2GM (1 - e^2) a^2 = J^2 \left( 2a - r_s \frac{3 + e^2}{1 - e^2} \right)$$

Finalmente, se obtiene el valor del momento angular orbital total:

$$J^2 = \frac{GM (1 - e^2) a}{1 - \frac{r_s (3 + e^2)}{2a (1 - e^2)}} \quad (3.16)$$

En el límite newtoniano deberíamos recuperar el momento angular orbital por unidad de masa clásico. Para este límite se debe cumplir  $r_s \ll a$ , entonces  $\frac{r_s}{2a} \ll 1$ ; además como estamos en el caso de una órbita elíptica  $0 < e < 1$ , por lo que el factor  $\frac{3 + e^2}{1 - e^2}$  es del orden de 3 o 4, pero

igual es un factor muy pequeño como para que  $r_s$  alcance a  $a$ . Esto implica que en el límite clásico el término  $\frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}$  es despreciable, y por ende el momento angular orbital por unidad de masa en este límite sería:

$$J^2 \approx GM (1 - e^2) a$$

que es la expresión del momento angular para el caso clásico, como en la ecuación (3.12).

Para calcular la energía se puede reemplazar el valor del momento angular en la ecuación (3.14):

$$A + \frac{2GM}{R_a} - \frac{GM(1-e^2)a}{R_a^2 \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)} + \frac{GM(1-e^2)ar_s}{R_a^3 \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)} = 0$$

despejando y reemplazando el valor de  $R_a$ :

$$A = -\frac{2GM}{(1+e)a} + \frac{GM(1-e)}{(1+e)a \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)} - \frac{GM(1-e)r_s}{(1+e)^2 a^2 \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)}$$

operando

$$A = \frac{GM}{(1+e)^2 a^2 \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)} \left[ -2(1+e)a \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right) + (1-e^2)a - (1-e)r_s \right]$$

agrupando términos

$$A = \frac{GM}{(1+e)^2 a^2 \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)} \left[ \frac{3+e^2 - (1-e)^2}{1-e} r_s - (1+e)^2 a \right]$$

simplificando

$$A = \frac{GM}{(1+e)^2 a^2 \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)} \left[ \frac{2(1+e)}{1-e} r_s - (1+e)^2 a \right]$$

Finalmente, obtenemos la constante A de energía:

$$A = \frac{GM [2r_s - (1-e^2)a]}{(1-e^2)a^2 \left(1 - \frac{r_s}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}\right)} \quad (3.17)$$

Ya tenemos las dos constantes del movimiento. Para continuar con el cálculo del avance del perihelio, podemos seguir a partir de la ecuación (2.8) y reescribirla como:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 J^2 = Ar^4 - \gamma J^2 r^2 + 2GM r^3$$



expandiendo  $\gamma$  y cambiando  $2GM$  por  $r_s c^2$ :

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r \left( \frac{A}{J^2} r^3 + \frac{r_s c^2}{J^2} r^2 - r + r_s \right) \quad (3.18)$$

Recordemos que en la figura (2.5), las elipses se ubican en la región III donde existen tres raíces reales positivas para el término cúbico. Sabemos que dos de estas raíces son la distancia al afelio  $R_a$  y la distancia al perihelio  $R_p$ , por lo cual la tercera raíz  $R_o$  se puede calcular multiplicando los factores e igualando los coeficientes. Antes de esto es importante recalcar que en esta región la constante  $\beta$  es negativa y por lo tanto  $A$  también debe ser negativa. Entonces  $A$  puede ser escrita como  $A = -|A|$ . Tomando esto en cuenta, pasemos al cálculo de la tercera raíz:

$$-\frac{|A|}{J^2} r^3 + \frac{r_s c^2}{J^2} r^2 - r + r_s = \frac{|A|}{J^2} (R_a - r)(r - R_p)(r - R_o) \quad (3.19)$$

En el primer factor se escribió  $R_a - r$  ya que  $R_a$  es el punto más alejado de la elipse, lo cual significa que  $r$  no puede sobrepasar este valor. Multiplicando y agrupando términos:

$$\begin{aligned} -\frac{|A|}{J^2} r^3 + \frac{r_s c^2}{J^2} r^2 - r + r_s &= \frac{|A|}{J^2} (-r^3 + r^2 R_o + r^2 R_p - r R_p R_o \\ &\quad + R_a r^2 - R_a R_p r - R_a R_o r + R_a R_p R_o) \end{aligned}$$

$$\frac{r_s c^2}{J^2} r^2 - r + r_s = \frac{|A|}{J^2} (R_o + R_a + R_p) r^2 - \frac{|A|}{J^2} (R_p R_o + R_a R_p + R_a R_o) r + \frac{|A|}{J^2} R_a R_p R_o$$

Por independencia lineal, de la ecuación anterior podemos igualar los coeficientes respectivos, obteniendo las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{|A|}{J^2} (R_o + R_a + R_p) = \frac{r_s c^2}{J^2}$$

$$\frac{|A|}{J^2} (R_p R_o + R_a R_p + R_a R_o) = 1$$

$$\frac{|A|}{J^2} R_a R_p R_o = r_s$$

Reemplazando los valores de  $R_a$  y  $R_p$ :

$$R_o + 2a = \frac{r_s c^2}{|A|}$$

$$2aR_o + (1 - e^2) a^2 = \frac{J^2}{|A|}$$

$$(1 - e)^2 a^2 R_o = \frac{r_s J^2}{|A|}$$

Para despejar  $R_o$  lo más fácil es utilizar las dos últimas ecuaciones:

$$(1 - e)^2 a^2 R_o = 2ar_s R_o + (1 - e^2) r_s a^2$$

simplificando

$$(1 - e)^2 a R_o - 2r_s R_o = (1 - e^2) r_s a$$

finalmente

$$R_o = \frac{(1 - e^2) r_s a}{(1 - e)^2 a - 2r_s} \quad (3.20)$$

En la mayoría de sistemas conocidos, el valor de  $a$  es mucho mayor que el valor de  $r_s$ . Si esto se cumple, entonces aproximando:

$$R_o = \frac{1}{a} \frac{(1 - e^2) r_s a}{(1 - e)^2 - 2\frac{r_s}{a}} \approx \frac{(1 - e^2) r_s}{(1 - e)^2} \approx \frac{1 + e}{1 - e} r_s$$

Como  $0 < e < 1$ , se puede concluir que  $R_o$  es del orden de  $r_s$  en este límite y por lo tanto  $R_o \ll R_p < R_a$ .

Ahora que ya tenemos esto, la ecuación de movimiento puede escribirse como:

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{|A|}{J^2} (R_a - r) (r - R_p) (r - R_o) r \quad (3.21)$$

Para hallar el valor del avance del perihelio se puede integrar esta ecuación desde la distancia al perihelio hasta la distancia al afelio. Clásicamente, el valor de ángulo debería ser  $\pi$  ya que se está recorriendo media trayectoria, pero en este caso no es así ya que hay una pequeña desviación en el ángulo, y esa desviación es precisamente el avance del perihelio. Entonces, el ángulo descrito en un recorrido completo de  $R_p$  a  $R_p$  sería el doble del ángulo antes descrito, esto es:

$$\Delta\phi = \frac{2J}{|A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{[(R_a - r) (r - R_p) (r - R_o) r]^{1/2}} \quad (3.22)$$

Ya se demostró que  $R_o$  es pequeño comparado con  $R_p$ , y por lo tanto con  $r$ ; por lo que en la expresión anterior se puede hacer una expansión en series de potencia:

$$\Delta\phi = \frac{2J}{|A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{r^{-1/2} \left(1 - \frac{R_o}{r}\right)^{-1/2} dr}{[(R_a - r)(r - R_p)r]^{1/2}}$$

expandiendo:

$$\Delta\phi = \frac{2J}{|A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{r [(R_a - r)(r - R_p)]^{1/2}} \left(1 + \frac{R_o}{2r} + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \left(\frac{R_o}{r}\right)^k + \dots\right)$$

Entonces, el ángulo recorrido sería

$$\Delta\phi = \frac{2J}{|A|^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} (-1)^{n-1} R_o^{n-1} I_n \quad (3.23)$$

con

$$I_n = \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{r^n [(R_a - r)(r - R_p)]^{1/2}} \quad (3.24)$$

Sustituyendo los valores de  $R_a$  y  $R_p$  se tiene:

$$I_n = \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{r^n [e^2 a^2 - (r - a)^2]^{1/2}} \quad (3.25)$$

Para resolver esta integral apliquemos el cambio de variable:

$$r - a = e \cos\theta$$

$$dr = -e \sin\theta d\theta$$

de tal forma que la integral se convierte en:

$$I_n = - \int_{\pi}^0 \frac{e \sin\theta d\theta}{(e \cos\theta + a)^n e a (1 - \cos^2\theta)^{1/2}}$$

simplificando

$$I_n = \frac{1}{a^n} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos\theta)^n} \quad (3.26)$$

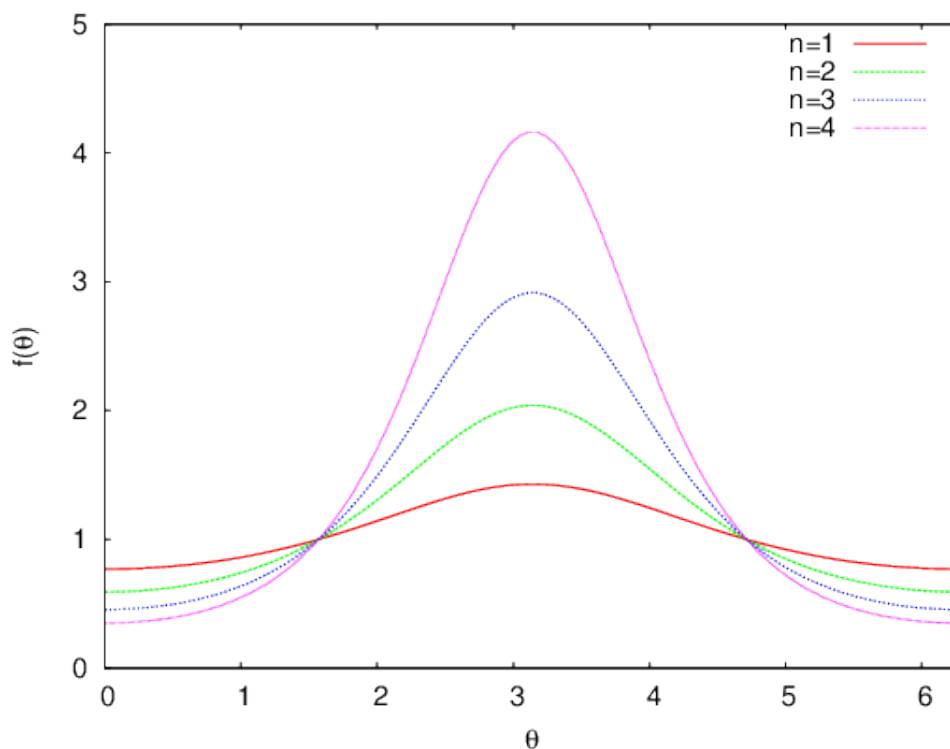


Figura 3.2: Gráfica de  $f(\theta) = \frac{1}{(1+e\cos\theta)^n}$  para diferentes valores de  $n$  alrededor de  $\theta = \pi$ .

Como se puede apreciar en la figura (3.2), esta función es simétrica alrededor de la recta  $\theta = \pi$ , por lo que podemos escribir:

$$I_n = \frac{1}{2a^n} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^n} \quad (3.27)$$

utilizaremos integración compleja realizando la siguiente sustitución

$$\cos\theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (3.28)$$

teniendo en cuenta que  $z = e^{i\theta}$  y recalando que  $|z| = 1$ .

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 + 1}{z} \right) \quad (3.29)$$

Con la sustitución anterior podemos encontrar que

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \quad (3.30)$$

con lo cual

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (3.31)$$

$$I_n = \frac{1}{2ia^n} \oint \frac{2^n z^{n-1} dz}{(2z + e(z^2 + 1))^n}$$

$$I_n = \frac{2^{n-1}}{ia^n e^n} \oint \frac{z^{n-1} dz}{\left(z^2 + \frac{2}{e}z + 1\right)^n} \quad (3.32)$$

Ahora factoramos el denominador para encontrar los polos de la función

$$z^2 + \frac{2}{e}z + 1 = e \left( z + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \right) \left( z + \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} \right) \quad (3.33)$$

Es decir, los polos de la función son

$$z_1 = -\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e} \quad (3.34)$$

y

$$z_2 = -\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} \quad (3.35)$$

Antes de continuar sería bueno listar tres identidades importantes que cumplen estos dos polos:  $z_1 + z_2 = -\frac{2}{e}$ ;  $z_1 - z_2 = -\frac{2\sqrt{1-e^2}}{e}$ ;  $z_1 z_2 = 1$ .

Nuestro camino de integración es la circunferencia unitaria ya que  $|z| = 1$  y es evidente que  $|z_1| \geq 1$  debido a que para una órbita elíptica  $0 < e < 1$ . Por lo tanto  $z_1$  está fuera de nuestra zona de integración, y la expresión de la integral tiene la forma

$$I_n = \frac{2^{n-1}}{ia^n e^n} \oint \frac{z^{n-1} dz}{(z - z_1)^n (z - z_2)^n} = \frac{2^{n-1}}{ia^n e^n} \oint f(z) dz \quad (3.36)$$

siendo

$$f(z) = \frac{z^{n-1}}{(z - z_1)^n (z - z_2)^n} \quad (3.37)$$

Para calcular la integral utilizamos el teorema del residuo de Cauchy, por lo tanto, para nuestro problema en particular

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) \quad (3.38)$$

donde el residuo se puede calcular mediante la fórmula:

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_2)^n f(z))$$

Calculando esto tenemos:

$$Res_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \frac{z^{n-1}}{(z-z_1)^n} \right] \Bigg|_{z=z_2}$$

y entonces el valor de la integral es:

$$I_n = \frac{2^n \pi}{a^n e^n (n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \frac{z^{n-1}}{(z-z_1)^n} \right] \Bigg|_{z=z_2} \quad (3.39)$$

Antes de nada, vamos calculando esto para los primeros órdenes. Primero, para  $n=1$  se tiene:

$$I_1 = \frac{2\pi}{ae} \left[ \frac{1}{(z-z_1)} \right] \Bigg|_{z=z_2}$$

reemplazando los valores de  $z_1$  y  $z_2$ :

$$I_1 = \frac{\pi}{a(1-e^2)^{1/2}} \quad (3.40)$$

Para el segundo orden en cambio se tiene

$$I_2 = \frac{4\pi}{a^2 e^2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{(z-z_1)^2} \right] \Bigg|_{z=z_2}$$

resolviendo esto:

$$I_2 = \frac{4\pi}{a^2 e^2 (z_1 - z_2)^3} [z_1 + z_2]$$

reemplazando los valores de  $z_1$  y  $z_2$ , finalmente llegamos a:

$$I_2 = \frac{\pi}{a^2 (1-e^2)^{3/2}} \quad (3.41)$$

Para tercer orden:

$$I_3 = \frac{2^3 \pi}{2a^3 e^3} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z^2}{(z-z_1)^3} \right] \Bigg|_{z=z_2}$$

derivando

$$I_3 = \frac{4\pi}{a^3 e^3} \frac{d}{dz} \left[ 2z(z-z_1)^{-3} - 3z^2(z-z_1)^{-4} \right] \Bigg|_{z=z_2}$$

derivando nuevamente y simplificando:

$$I_3 = \frac{4\pi}{a^3 e^3} \left[ 2(z-z_1)^{-3} - 12z(z-z_1)^{-4} + 12z^2(z-z_1)^{-5} \right] \Bigg|_{z=z_2}$$

$$I_3 = \frac{8\pi}{a^3 e^3 (-z_1 + z_2)^5} [z_1^2 + 4z_1 z_2 + z_2^2]$$

reemplazando los valores de  $z_1$  y  $z_2$ :

$$I_3 = \frac{\pi}{a^3 (1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \quad (3.42)$$

Para cuarto orden:

$$I_4 = \frac{2^4 \pi}{6a^4 e^4} \frac{d^3}{dz^3} \left[ \frac{z^3}{(z - z_1)^4} \right] \Big|_{z=z_2}$$

derivando

$$I_4 = -\frac{2^4 \pi}{6a^4 e^4} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{z^2(3z_1 + z)}{(z - z_1)^5} \right] \Big|_{z=z_2}$$

derivando nuevamente

$$I_4 = \frac{2^4 \pi}{6a^4 e^4} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2z(z^2 + 6z z_1 + 3z_1^2)}{(z - z_1)^6} \right] \Big|_{z=z_2}$$

derivando por última vez:

$$I_4 = \frac{2^4 \pi}{6a^4 e^4 (z_1 - z_2)^7} \left[ 6(z_1^3 + 9z_1^2 z_2 + 9z_1 z_2^2 + z_2^3) \right]$$

reemplazando los valores de  $z_1$  y  $z_2$  en el denominador y reescribiendo el numerador:

$$I_4 = -\frac{2^4 \pi e^3}{a^4 2^7 (1 - e^2)^{7/2}} \left[ (z_1 + z_2)^3 + 6z_1 z_2 (z_1 + z_2) \right]$$

reemplazando finalmente los valores de  $z_1$  y  $z_2$  y simplificando finalmente se llega a:

$$I_4 = \frac{\pi}{a^4 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) \quad (3.43)$$

Podemos ver que hay un patrón que se repite. Para el tercer orden, tenemos un término de la forma  $z_1^2 + 4z_1 z_2 + z_2^2$  que sería un cuadrado perfecto si no fuera porque el término del medio es  $2^2 z_1 z_2$  y no  $2z_1 z_2$ . Se puede ver que algo parecido sucede en el caso del cuarto orden, donde aparece un término  $3^2 z_1^2 z_2$ , donde debería estar  $3z_1^2 z_2$ . Al calcular para órdenes mayores, el resultado es el mismo, los coeficientes de los términos intermedios están elevados al cuadrado. Por otro lado, se puede ver que al derivar siempre aparece un término  $(n - 1)!$ . Con todas estas observaciones se puede generalizar:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[ \frac{z^{n-1}}{(z-z_1)^n} \right] \Big|_{z=z_2} = \frac{(n-1)!}{(z_1-z_2)^{2n-1}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} z_1^{n-1-k} z_2^k \right) (-1)^n$$

donde  $\binom{n-1}{k}^2$ , representa los coeficientes elevados al cuadrado del binomio de Newton. Reemplazando esto en (3.39) se tiene:

$$I_n = \frac{2^n \pi}{a^n e^n} \frac{1}{(z_1 - z_2)^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 z_1^{n-1-k} z_2^k (-1)^n$$

reemplazando los valores de  $z_1$  y  $z_2$  en el denominador:

$$I_n = \frac{\pi e^{n-1}}{a^n 2^{n-1} (1-e^2)^{n-1/2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 z_1^{n-1-k} z_2^k (-1)^{n+1} \quad (3.44)$$

En este punto, podemos definir las funciones  $Q_{n-1}(z_1, z_2)$  como:

$$Q_{n-1}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 z_1^{n-1-k} z_2^k \quad (3.45)$$

Cuadro 3.1: Valores de las funciones  $Q_n$

Función	Expresión
$Q_0$	1
$Q_1$	$\frac{-2}{e}$
$Q_2$	$\frac{1}{e^2} (4 + 2e^2)$
$Q_3$	$-\frac{1}{e^3} (+8 + 12e^2)$
$Q_4$	$\frac{1}{e^4} (16 + 48e^2 + e^4)$
$Q_5$	$-\frac{1}{e^5} (32 + 160e^2 + 60e^4)$

En la tabla (3.1) se muestran los primeros cinco valores de la función  $Q_n$  para poder contemplar como es la forma de esta función.

Reemplazando el valor de la integral en la ecuación del ángulo recorrido se tiene:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi J}{|A|^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} \frac{R_o^{n-1} e^{n-1}}{a^n 2^{n-1} (1-e^2)^{n-1/2}} Q_{n-1}(z_1, z_2) \quad (3.46)$$

Para calcular el avance del perihelio hasta un orden deseado, es necesario implementar un programa con la ecuación (3.46). Pero antes de esto, se puede calcular fácilmente el valor de este ángulo hasta segundo orden.



### 3.1.1. Cálculo a segundo orden

Aplicando la ecuación (3.46) solo hasta el segundo orden se tiene:

$$\Delta\phi^{(2)} = \frac{2\pi J}{|A|^{1/2}} \left( \frac{1}{a(1-e^2)^{1/2}} Q_0 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{R_o e}{a^2 2(1-e^2)^{3/2}} Q_1 \right)$$

simplificando y reemplazando el valor de  $Q_0$ :

$$\Delta\phi^{(2)} = \frac{2\pi J}{|A|^{1/2}} \left( \frac{1}{a(1-e^2)^{1/2}} + \frac{R_o}{2a^2(1-e^2)^{3/2}} \right)$$

Usando las expresiones de  $J^2$  y  $A$  se puede demostrar que:

$$\frac{J^2}{|A|} = -\frac{(1-e^2)^2 a^2}{\left[2\frac{r_s}{a} - (1-e^2)\right]} \quad (3.47)$$

y esto se puede reemplazar en la expresión de  $\Delta\phi^{(2)}$  para obtener:

$$\Delta\phi^{(2)} = \frac{2\pi(1-e^2)^{1/2}}{\left[(1-e^2) - 2\frac{r_s}{a}\right]^{1/2}} \left( 1 + \frac{r_s}{2a\left((1-e)^2 - 2\frac{r_s}{a}\right)} \right)$$

El avance del perihelio a segundo orden es entonces:

$$\chi^{(2)} = 2\pi \frac{(1-e^2)^{1/2}}{\left[(1-e^2) - \frac{2r_s}{a}\right]^{3/2}} \left[ (1-e^2) - \frac{3r_s}{2a} \right] - 2\pi \quad (3.48)$$

Para saber que este resultado es acertado, esta expresión debe simplificarse a la ecuación (3.13) para el caso de que el campo gravitacional sea débil. Para poder visualizar esto, es mejor escribir la expresión anterior de la forma:

$$\chi^{(2)} = 2\pi \frac{1 - \frac{3r_s}{2(1-e^2)a}}{\left[1 - \frac{2r_s}{(1-e^2)a}\right]^{3/2}} - 2\pi$$

Ahora, aproximamos el denominador tomando solo términos de primer orden en  $\frac{2r_s}{(1-e^2)a}$ :

$$\chi^{(2)} \approx 2\pi \left[ 1 - \frac{3r_s}{2(1-e^2)a} \right] \left[ 1 + \frac{3r_s}{(1-e^2)a} \right] - 2\pi$$

Nuevamente, al hacer la multiplicación, solo tomamos los términos de primer orden en  $\frac{2r_s}{(1-e^2)a}$ ,

$$\chi^{(2)} \approx 2\pi - \frac{6\pi r_s}{2(1-e^2)a} + \frac{6\pi r_s}{(1-e^2)a} - 2\pi$$

$$\chi^{(2)} \approx \frac{3\pi r_s}{(1 - e^2) a}$$

Recordemos que el radio de Schwarzschild es  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ , y entonces:

$$\chi^{(2)} \approx \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2) c^2}$$

Recuperamos la ecuación (3.13).

Para poder comparar la diferencia de la ecuación (3.13) con la aproximación a segundo orden, se calculó el avance del perihelio para los 4 primeros planetas del sistema solar.

Cuadro 3.2: Avance del perihelio por siglo para los 5 planetas más cercanos al Sol

Planeta	Excentricidad	Semieje mayor (UA)	Aproximación(")	Segundo Orden(")
Mercurio	0.20563069	0.387098	42.9307597	42.9307643
Venus	0.00677323	0.723327	8.59734793	8.59734826
Tierra	0.01671123	1.00000261	3.83432636	3.83432651
Marte	0.093315	1.523679	1.34837228	1.34837232

En la tabla (3.2) se puede ver que la corrección de la ecuación (3.48) a la fórmula clásica es mínima. Es claro entonces que para campos gravitacionales débiles, como es el caso del sistema solar, la fórmula clásica es completamente válida y no es necesaria la corrección de segundo orden.

## 3.2. Contribución del espín al avance del perihelio en un sistema binario

La métrica de Schwarzschild considera un cuerpo masivo con simetría esférica y no rotacional. Si tomamos en cuenta que muchos agujeros negros que se han encontrado presentan rotación sobre su propio eje, se podría pensar en que esta rotación debería influir en el avance del perihelio de las órbitas elípticas. La rotación alrededor de su propio eje está dada por el momento angular de espín  $S_z$  del cuerpo masivo M.

Para incluir en el cálculo el espín, se puede recurrir a la métrica de Kerr. La métrica de Kerr es una solución a las ecuaciones de campo en el vacío para un cuerpo de masa M que gira sobre su propio eje con un momento angular  $S_z$ . La métrica de Kerr es [8]:

$$c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \frac{r^2}{\Delta}(dr)^2 - r^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{r_s \alpha^2}{r^3} \right) (d\phi)^2 + \frac{2r_s \alpha}{r} c dt d\phi \quad (3.49)$$

donde  $\alpha = \frac{S_z}{Mc}$ ,  $\Delta = r^2 - r_s r + \alpha^2$  y se ha considerado que  $\theta = \pi/2$ . En este trabajo solo se pretende observar en cuanto podría contribuir el espín y si es relevante al cálculo, por lo cual se tomarán en cuenta solo términos de primer orden en  $\alpha/r$ . Haciendo esto, la métrica se reduce a:

$$c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \frac{1}{\gamma}(dr)^2 - r^2(d\phi)^2 + \frac{2r_s\alpha}{r}cdtd\phi \quad (3.50)$$

y el tensor métrico covariante sería:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{r_s\alpha}{r} \\ 0 & -\gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_s\alpha}{r} & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Nuevamente, se puede plantear el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$$

que para esta métrica sería:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \gamma \left( c \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \gamma^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{2r_s\alpha}{r} c \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \right) \quad (3.52)$$

Si se compara esta ecuación con (2.1), se puede ver que solo hay un término extra que es el que contiene  $\alpha$ . Con este lagrangiano se pueden calcular los momentos canónicos  $p_o$  y  $p_3$ :

$$p_o = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^o} = \gamma c \frac{dt}{d\tau} + \frac{r_s\alpha}{r} \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$p_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^3} = -r^2 \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{r_s\alpha}{r} c \frac{dt}{d\tau}$$

Y sabemos que  $E' = p_o c$ ;  $J = -p_3$ , por lo que:

$$E' = \gamma c^2 \frac{dt}{d\tau} + \frac{r_s\alpha}{r} c \frac{d\phi}{d\tau} \quad (3.53)$$

$$J = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{r_s\alpha}{r} c \frac{dt}{d\tau} \quad (3.54)$$

Estas dos son constantes de movimiento, y esto se puede demostrar usando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0$$

para  $\alpha = 0, 3$ :

$$-\frac{d}{d\tau} \left( \gamma c \frac{dt}{d\tau} + \frac{r_s \alpha}{r} \frac{d\phi}{d\tau} \right) = -\frac{dE'}{d\tau} = 0$$

$$-\frac{d}{d\tau} \left( -r^2 \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{r_s \alpha}{r} c \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{dJ}{d\tau} = 0$$

Estas son entonces las nuevas constantes del movimiento. De las expresiones de estas dos constantes se pueden despejar las expresiones de  $\frac{dt}{d\tau}$  y  $\frac{d\phi}{d\tau}$ :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\gamma c r^2} \left( \frac{r_s \alpha}{r} E' + \gamma c J \right) \quad (3.55)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\gamma c r^2} \left( \frac{r^2}{c} E' - \frac{r_s \alpha}{r} J \right) \quad (3.56)$$

Podemos tomar ahora la ecuación (3.50) y reescribirla como:

$$c^2 = \gamma c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{2r_s \alpha}{r} c \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (3.57)$$

Reemplazando los valores de  $\frac{dt}{d\tau}$  y  $\frac{d\phi}{d\tau}$ :

$$\begin{aligned} \gamma^2 r^4 c^4 = & \gamma c^2 \left( \frac{r^2}{c} E' - \frac{r_s \alpha}{r} J \right)^2 - \gamma c^2 r^4 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{r_s \alpha}{r} E' + \gamma c J \right)^2 \\ & + \frac{2r_s \alpha}{r} \left( r^2 E' - \frac{r_s \alpha}{r} c J \right) \left( \frac{r_s \alpha}{r} E' + \gamma c J \right) \end{aligned}$$

simplificando y tomando solo términos de primer orden en  $\alpha/r$ :

$$\gamma r^4 c^4 = c^2 \left( \frac{r^4}{c^2} E'^2 - \frac{2r r_s \alpha}{c} J E' \right) - c^2 r^4 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( 2c \frac{r_s \alpha}{r} J E' + \gamma c^2 J^2 \right) + \frac{2r_s \alpha}{r} (r^2 c J E')$$

reemplazando el valor de  $\gamma$  en la parte izquierda de la ecuación:

$$c^2 - \frac{r_s c^2}{r} = \frac{1}{c^2} E'^2 - \frac{2r_s \alpha}{c r^3} J E' - \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \gamma \frac{J^2}{r^2}$$

Finalmente llegamos a la ecuación de conservación de la energía, como en el caso de la métrica de Schwarzschild, pero con un término extra que es un término cruzado entre  $J$  y  $E'$ :

$$\frac{E'^2}{c^2} - c^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \gamma \frac{J^2}{r^2} - \frac{r_s c^2}{r} + \frac{2r_s \alpha}{cr^3} J E' \quad (3.58)$$

Para este caso entonces, el potencial efectivo se define como:

$$\tilde{V} = \gamma \frac{J^2}{r^2} - \frac{r_s c^2}{r} + \frac{2r_s \alpha}{cr^3} J E' \quad (3.59)$$

Volvamos ahora a la ecuación de energía, y podemos despejar la energía cinética radial y expandir  $\gamma$ :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = A + \frac{r_s c^2}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{J^2 r_s}{r^3} - \frac{2r_s \alpha}{cr^3} J E' \quad (3.60)$$

Recordemos ahora que como la órbita es una elipse, existen dos puntos en los cuales la derivada temporal se hace cero, y son el afelio y el perihelio. Entonces, de la misma forma que se hizo con la métrica de Schwarzschild, las constantes  $J$  y  $E'$  se pueden calcular a partir de las ecuaciones:

$$A + \frac{r_s c^2}{R_a} - \frac{J^2}{R_a^2} + \frac{J^2 r_s}{R_a^3} - \frac{2r_s \alpha}{cR_a^3} J E' = 0 \quad (3.61)$$

$$A + \frac{r_s c^2}{R_p} - \frac{J^2}{R_p^2} + \frac{J^2 r_s}{R_p^3} - \frac{2r_s \alpha}{cR_p^3} J E' = 0 \quad (3.62)$$

Nuevamente se plantea que deben existir tres raíces reales diferentes,  $R_a$ ,  $R_p$  y una nueva raíz  $R'_o$ . Entonces, para encontrar esta raíz  $R'_o$  se tiene:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \frac{r^3}{J^2} = \frac{A}{J^2} r^3 + \frac{r_s c^2}{J^2} r^2 - r + r_s - \frac{2r_s \alpha E'}{cJ} = 0$$

$$\frac{A}{J^2} r^3 + \frac{r_s c^2}{J^2} r^2 - r + r_s - \frac{2r_s \alpha E'}{cJ} = \frac{A}{J^2} (r - R_a)(r - R_p)(r - R'_o)$$

desarrollando:

$$\frac{r_s c^2}{J^2} r^2 - r + \left(r_s - \frac{2r_s \alpha}{cJ} E'\right) = \frac{|A|}{J^2} (R'_o + R_a + R_p) r^2$$

$$- \frac{|A|}{J^2} (R_p R'_o + R_a R_p + R_a R'_o) r + \frac{|A|}{J^2} R_a R_p R'_o$$

Igualando los términos independientes de cada parte de la ecuación, y reemplazando los valores de  $R_a$  y  $R_p$ :

$$R'_o = \frac{J^2 r_s}{|A| (1 - e^2) a^2} \left( 1 - \frac{2\alpha}{cJ} E' \right) \quad (3.63)$$

Este es el mismo resultado obtenido anteriormente pero con un factor extra dado por  $1 - \frac{2\alpha}{cJ} E'$ .

Volviendo a la ecuación (3.60), se la puede reescribir, utilizar la regla de la cadena y obtener:

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = A + \frac{r_s c^2}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{J^2 r_s}{r^3} - \frac{2r_s \alpha}{c r^3} J E'$$

Aquí reemplazamos la expresión de  $\left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$ :

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2 c^2 r^4} \left( \frac{r_s \alpha}{r} E' + \gamma c J \right)^2 = A + \frac{r_s c^2}{r} - \frac{J^2}{r^2} + \frac{J^2 r_s}{r^3} - \frac{2r_s \alpha}{c r^3} J E'$$

Dejando solo términos de primer orden en  $\alpha/r$  llegamos a la ecuación:

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \left( 1 + \frac{2r_s \alpha E'}{\gamma r c J} \right) = \frac{A}{J^2} r^4 + \frac{r_s c^2}{J^2} r^3 - r^2 + \left( r_s - \frac{2r_s \alpha}{c J} E' \right) r \quad (3.64)$$

Factorando:

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 \left( 1 + \frac{2r_s \alpha E'}{\gamma r c J} \right) = \frac{|A|}{J^2} (R_a - r) (r - R_p) (r - R'_o) r$$

Es importante recordar aquí que  $A$  es negativa ya que la órbita es elíptica. Por esta razón se toma  $A = -|A|$ . Para calcular el avance del perihelio entonces se puede plantear la ecuación:

$$\Delta\phi = \frac{2J}{|A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{\left( 1 + \frac{2r_s \alpha E'}{\gamma r c J} \right)^{1/2} dr}{[(R_a - r) (r - R_p) (r - R'_o) r]^{1/2}} \quad (3.65)$$

Nuevamente tomamos solo términos de primer orden en  $\alpha/r$ :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{kerr} = & \frac{2J}{|A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{[(R_a - r) (r - R_p) (r - R'_o) r]^{1/2}} \\ & + \frac{2r_s \alpha E'}{c |A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{r \gamma [(R_a - r) (r - R_p) (r - R'_o) r]^{1/2}} \end{aligned}$$

Lo cual se puede escribir como:

$$\Delta\phi_{kerr} = \Delta\phi_{sch}(R'_o) + \frac{2r_s\alpha E'}{c|A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{(r-r_s)[(R_a-r)(r-R_p)(r-R'_o)r]^{1/2}} \quad (3.66)$$

El primer término es igual al obtenido mediante la métrica de Schwarzschild, solo que ahora hay que expandir alrededor de la nueva raíz  $R'_o$ . Por otro lado, la segunda integral se puede calcular mediante métodos numéricos, utilizando un programa computacional. El primer término representa el orden cero del avance del perihelio (en  $\alpha$ ) y el segundo es el término de primer orden en  $\alpha$ .

El parámetro  $\alpha$  está relacionado con el espín del agujero negro  $s$ , también conocido como parámetro de Kerr por:

$$\alpha = \frac{GM}{c^2} s$$

De tal forma que el momento angular de espín sea:

$$S_z = \frac{GM^2}{c} s \quad (3.67)$$

$s$  es un parámetro adimensional que puede tomar valores entre 0 y 1. Si  $s$  fuera mayor que 1, no existirían horizontes de sucesos y la singularidad de  $r = 0$  estaría desnuda, lo cual no es permitido (Ver apéndices).

### 3.3. Sistema Binario OJ287

El OJ287 es un objeto que produce estallidos periódicos que han sido detectados desde aproximadamente 100 años. La primera observación que se logró fue a través de una placa fotográfica en el año 1891. Este sistema se encuentra a 3500 millones de años luz de la Tierra y se teoriza que es un sistema binario de agujeros negros, como ya se dijo anteriormente.

Cuadro 3.3: Información sobre el sistema binario OJ287.

Parámetro	Valor
$M$	$(1,88 \pm 0,01) \times 10^{10}$
$m$	$(1,40 \pm 0,03) \times 10^8$
$\phi_o$	$(56,3 \pm 1,0)^\circ$
$e$	$0,658 \pm 0,001$
$a$	$(11500 \pm 8) UA$
$s$	$0,28 \pm 0,08$
$\chi_{exp}$	$(39,1 \pm 0,1)^\circ$

En la tabla (3.3) se especifican los datos obtenidos recientemente por un grupo liderado por

Mauri Valtonen del observatorio Tuorla en Finlandia. Es importante recalcar que estas mediciones han sido puestas a duda debido al limitado número de compañeros orbitales del sistema.

El avance del perihelio por ciclo medido experimentalmente es de  $39^\circ$ . Para el cálculo teórico de este parámetro a diferentes órdenes, se puede recurrir a la ecuación (3.46) y cortar la serie hasta el orden  $k$ :

$$\Delta\phi^{(k)} = \frac{2\pi J}{|A|^{1/2}} \sum_{n=1}^k \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} \frac{R_o^{n-1} e^{n-1}}{a^n 2^{n-1} (1-e^2)^{n-1/2}} Q_{n-1}(z_1, z_2) \quad (3.68)$$

Para calcular el valor de  $\Delta\phi^{(k)}$  se creó un programa en lenguaje  $C^{++}$  que va calculando cada orden por separado para luego sumar todas las contribuciones. Después de esto, el programa calcula el valor:

$$\chi^{(k)} = \Delta\phi^{(k)} - 2\pi \quad (3.69)$$

que es el avance del perihelio. Esto se hace tanto para el caso de un campo gravitacional de Schwarzschild como para el caso con de Kerr, pero en el caso de tomar en cuenta el espín, se calcula también numéricamente la integral:

$$\frac{2r_s \alpha E'}{c |A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{(r-r_s) [(R_a-r)(r-R_p)(r-R'_o)r]^{1/2}}$$

En la tabla (3.4) se muestra el cálculo del avance del perihelio utilizando la ecuación (3.13) que es el cálculo clásico y también utilizando el programa antes mencionado para diferentes órdenes. En esta tabla se puede observar claramente como entre el primer y el segundo orden hay una diferencia significativa de aproximadamente  $10^\circ$ , mientras que para los siguientes órdenes la diferencia es de menos de un grado. Ya para el cuarto orden, el valor del avance del perihelio comienza a estabilizarse alrededor de los  $35^\circ$ .

Cuadro 3.4: Cálculo del avance del perihelio para el sistema binario OJ287 para diferentes órdenes.

$s$	$\chi_{cla}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$
0,000	$30,698^\circ$	$24,395^\circ$	$34,658^\circ$	$35,376^\circ$	$35,433^\circ$
0,280	$30,698^\circ$	$25,813^\circ$	$36,538^\circ$	$37,385^\circ$	$37,452^\circ$

Por otro lado, el espín contribuye aumentando aproximadamente dos grados al avance del perihelio, pero todavía no se logra alcanzar los 39 grados experimentales. Es probable que el segundo orden en  $\alpha$  aumente un poco más el valor de la precesión de la órbita, pero de todos modos no llegaría a los  $39^\circ$ .

En la figura (3.3) se puede observar como es la trayectoria del agujero negro secundario alrededor del primario para tres periodos orbitales, tomando en cuenta la contribución del espín



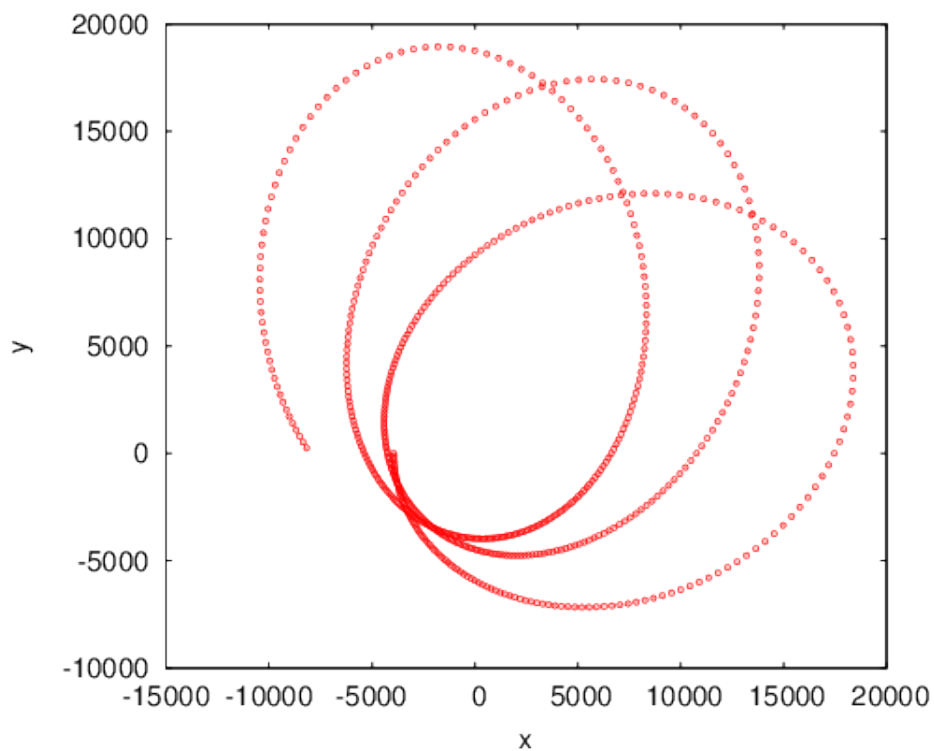


Figura 3.3: Trayectoria del agujero negro secundario para tres periodos orbitales.

y términos de hasta cuarto orden. Como se puede apreciar en la figura, la trayectoria difiere totalmente con respecto a la que se esperaría en el caso clásico.

# Conclusiones

En la sección 2.1 se dedujeron las constantes y las ecuaciones de movimiento a partir de la solución de Schwarzschild. Posteriormente, en la sección 2.2 se analizó el potencial efectivo. De este análisis se puede concluir que el potencial en la T.G.R difiere del potencial newtoniano ya que posee dos puntos de equilibrio, un máximo y un mínimo; mientras que el newtoniano solo posee un mínimo. Estos dos puntos representan tanto órbitas circulares estables como inestables. En esta misma sección, se realizó un análisis a partir de la ecuación (2.15) para poder caracterizar las diferentes órbitas que se podrían tener alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. En la figura (2.5) se muestra la relación que debe cumplir la energía y el momento angular para tener ciertas órbitas. En particular, se concluyó que las diferentes regiones están separadas por las curvas que representan órbitas circulares estables e inestables, y que el punto que une estas dos curvas es en  $r = 3r_s$  que representa el radio de la mínima órbita estable. Después de esto, se calcularon las energías y momentos angulares de las órbitas circulares estables, así como la velocidad del cuerpo y el periodo orbital.

En la sección 3.1, se realiza una revisión del cálculo aproximado del avance del perihelio partiendo de la ecuación (2.11). Esta solución permite escribir el avance del perihelio como:

$$\chi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}$$

En la sección 3.2, se realiza una corrección al cálculo del avance del perihelio. Partiendo de las ecuaciones de movimiento, se calcularon las constantes de energía y momento angular, para lo cual se tomó en cuenta que para que la órbita sea elíptica deben existir tres raíces para la ecuación de movimiento, dos de las cuales son físicas y representan el afelio y el perihelio respectivamente. Los valores obtenidos para la energía y momento angular por unidad de masa se muestran en las ecuaciones (3.16) y (3.17). Con estas dos constantes del movimiento, se calculó la tercera raíz, cuya expresión se muestra en la ecuación (3.20).

Con las tres raíces, se reescribió la ecuación de movimiento y se procedió a su resolución para hallar una expresión del avance del perihelio. Para esto, se realizó una expansión en series de Taylor de la integral en función de  $R_o$ , ya que esta raíz es pequeña comparada con las otras dos raíces  $R_a$  y  $R_p$ . La integral del  $n$ -ésimo término fue calculada utilizando variable compleja, obteniendo finalmente una expresión del avance del perihelio en series dada por:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi J}{|A|^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} \frac{R_o^{n-1} e^{n-1}}{a^n 2^{n-1} (1-e^2)^{n-1/2}} Q_{n-1}(z_1, z_2)$$

A partir de esta ecuación se desarrollaron los primeros dos términos, y se demostró que la expresión encontrada para el avance del perihelio converge a la expresión ya conocida si  $a \gg r_s$ . Para los cuatro planetas más cercanos al sol se calcularon los valores del avance del perihelio por siglo utilizando tanto la fórmula aproximada como la ecuación (3.48). Estos valores se muestran en la tabla (3.2), y se puede ver que la corrección de segundo orden es claramente despreciable. Se concluye por lo tanto, que para campos gravitacionales débiles, como el caso del sistema solar, la corrección puede ser omitida, y la expresión clásica es válida.

Continuando con los cálculos, en la sección 3.3 se introduce la métrica de Kerr, que considera la rotación del agujero negro central mediante el espín del mismo. Con esta métrica se deduce una nueva ecuación de movimiento, tomando solo términos de primer orden en el espín. Nuevamente se resolvió la ecuación de movimiento planteando la existencia de tres raíces. El primer término obtenido es el orden cero, cuya solución es idéntica a la solución de Schwarzschild, y el segundo término representa el primer orden en el espín. Esta solución es:

$$\Delta\phi_{kerr} = \Delta\phi_{sch}(R'_o) + \frac{2r_s \alpha E'}{c|A|^{1/2}} \int_{R_p}^{R_a} \frac{dr}{(r-r_s)[(R_a-r)(r-R_p)(r-R'_o)r]^{1/2}} \quad (3.70)$$

Para el sistema binario OJ287 se calcularon los valores del avance del perihelio a diferentes órdenes, tomando en cuenta las soluciones tanto con espín como sin espín. Los resultados se muestran en la tabla (3.4). Se puede ver claramente que la corrección sí es importante para este caso, ya que entre el valor de la fórmula clásica y el cuarto orden hay una diferencia de  $5^\circ$ . Por otro lado, el espín también es relevante, ya que aumenta el valor del avance del perihelio en aproximadamente dos grados. El valor encontrado finalmente para el avance del perihelio del sistema OJ287 es de  $37,458^\circ$  por ciclo. Todavía no se llega al valor experimental de  $39^\circ$ , pero se logró reducir el error a tan solo  $3,95\%$ . Este error se puede deber en primera instancia a que los valores experimentales no son del todo confiables, ya que el sistema tiene pocos compañeros orbitales como referencia, además que estos pueden también afectar el valor de la precesión de la órbita. Por otro lado, hay que tomar en cuenta que se asumió que  $\theta = \pi/2$ , lo cual provoca que la órbita sea plana. Esto no es del todo cierto ya que existe cierta inclinación entre los dos agujeros negros, lo cual lleva a que la órbita no sea plana, ya que para que el momento angular total se conserve, tomando en cuenta el espín, el plano de la órbita también debe realizar una precesión.

## Apéndice: Métrica de Kerr

La métrica de Kerr es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein que describe un cuerpo de masa  $M$ , que rota sobre su propio eje. Esta métrica está dada por:

$$c^2(d\tau)^2 = \left(1 - \frac{2GMr}{c^2\rho^2}\right) c^2(dt)^2 + \frac{4GM\alpha r \sin^2\theta}{c^2\rho^2} c dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} (dr)^2 - \rho^2 (d\theta)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} \left[ (r^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^2 \Delta^2 \sin^2\theta \right] (d\phi)^2 \quad (3.71)$$

donde

$$\rho^2 = r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + \alpha^2$$

Además  $\alpha = \frac{S_z}{Mc}$  es un parámetro con unidades de longitud y  $S_z$  es el momento angular de espín del agujero negro. Se define al espín del agujero negro  $s$  como:

$$s = \frac{S_z c}{GM^2}$$

y entonces su relación con  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{GM}{c^2} s \quad (3.72)$$

El tensor métrico covariante es entonces:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GMr}{c^2\rho^2} & 0 & 0 & \frac{2GM\alpha r \sin^2\theta}{c^2\rho^2} \\ 0 & -\frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ \frac{2GM\alpha r \sin^2\theta}{c^2\rho^2} & 0 & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} \left[ (r^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^2 \Delta^2 \sin^2\theta \right] \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Además, las coordenadas usadas son las de Boyer-Lindquist, dadas por:

$$x = \sqrt{r^2 + \alpha^2} \sin\theta \cos\phi \quad (3.74)$$

$$y = \sqrt{r^2 + \alpha^2} \sin\theta \sin\phi \quad (3.75)$$

$$z = r \cos\theta \quad (3.76)$$

Estas coordenadas y la métrica en sí, convergen a las de Schwarzschild si  $\alpha \rightarrow 0$ ; es decir, cuando no hay rotación.

La geometría de Kerr es mucho más complicada que la de Schwarzschild ya que depende puramente de este parámetro  $s$ . Existen tres casos:  $|s| < 1$ ,  $|s| = 1$ ,  $|s| > 1$ .

- Si  $|s| < 1$ , se presentan dos superficies con corrimiento hacia el rojo infinito. Estas pueden ser calculadas cuando la componente  $g_{00}$  cambia de signo de positivo a negativo. Se plantea entonces la ecuación:

$$g_{00} = 0$$

$$r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + \alpha^2 \cos^2\theta = 0$$

con soluciones:

$$r_{2,1} = \frac{GM}{c^2} \left\{ 1 \pm \left[ 1 - s^2 \cos^2\theta \right]^{1/2} \right\} \quad (3.77)$$

Adicionalmente, existen dos horizontes de sucesos que se presentan cuando  $\frac{1}{g_{11}} = 0$ , con lo cual:

$$\frac{\Delta}{\rho^2} = 0$$

expandiendo:

$$r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + \alpha^2 = 0$$

Los dos horizontes de sucesos son entonces:

$$r_{2,1} = \frac{GM}{c^2} \left\{ 1 \pm \left[ 1 - s^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (3.78)$$

- Si  $|s| = 1$ , nuevamente se presentan dos superficies con corrimiento hacia el rojo infinito que se calculan igual que antes:

$$g_{00} = 0$$

$$r^2 - \frac{2GM}{c^2}r + \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \cos^2\theta = 0$$

teniendo como resultado:

$$r_{1,2} = \frac{GM}{c^2} (1 \pm \sin\theta) \quad (3.79)$$

Pero en este caso solo hay un horizonte de sucesos:

$$r = \frac{GM}{c^2} \quad (3.80)$$

- Si  $|s| > 1$ , no hay horizonte de sucesos ya que la ecuación (3.78) tendría soluciones complejas, y dependiendo de  $\theta$  pueden o no existir superficies con corrimiento hacia el rojo infinito [8].

Este caso no es permitido según la hipótesis de censura cósmica débil, la cual prohíbe la existencia de singularidades desnudas para un observador situado en el infinito. Las singularidades solo pueden estar ocultas dentro de un horizonte de sucesos.

# Bibliografía

- [1] Begelman M, Volonteri M, Reese M. Formation of Supermassive Black Holes by Direct Collapse in Pregalactic Halos. Cornell University, U.S.A. 2006.
- [2] Carroll, Sean. Spacetime and Geometry. Addison Wesley. University of Chicago. 2004.
- [3] Goldstein, H., Poole, C.J., & Jonh Safko. Classical Mechanics. Reverté, 3ª Edición, 2002.
- [4] Grefa, J. Relatividad General: Cálculo del retardo de señales de radar con aproximación a segundo orden, y radiación gravitacional. Universidad San Francisco de Quito, 2013.
- [5] Hartle, James. Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity. Addison Wesley. University of California. 2003.
- [6] Kenyon, O.R. General Relativity. Oxford University Press, 1996.
- [7] Marín, Carlos. "Cayendo hacia un agujero negro de Schwarzschild". Avances en Ciencias e Ingenierías. 1(1): A1 - A12.
- [8] Marín, Carlos. La Expansión del Universo, una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas. Universidad San Francisco de Quito, 2ª Edición, 2011.
- [9] Martin, J. General Relativity: A Guide to its consequences for Gravity and Cosmology. 1998.
- [10] Misner, Charles W. Thorne, Kip S. & J.A. Wheeler. Gravitation. W.H. Freeman and Company, 1973.
- [11] Pihajoki, Pauli. The Supermassive Binary Black Hole System OJ287. Turun yliopisto, University of Turku. 1973.
- [12] Rindler, Wolfgang. Relativity: Especial, General, and Cosmological. University of Oxford. 2006.
- [13] Schwarzschild, K. Carta de K. Schwarzschild to A. Einstein fechada al 22 de Diciembre 1915, en "The Collected Papers of Albert Einstein", vol.8a, doc 169. <http://www.gsjournal.net/old/eeuro/vankov.pdf> [25/06/2013].

- [14] Shapiro, Irwin. "A Century of Relativity." *Reviews of Modern Physics*, Vol. 71, No. 2, 1999.
- [15] Valtonen, M. Lehto, H. et al. Predicting que next outburst of OJ 287. Department of Phisics and Tuorla Observatory, University of Turku, Finlandia. *The Astronomical Journal*, 2006.
- [16] Will, Clifford M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambrigde University Press, Revised Edition, 1993.
- [17] Will, Clifford M. *Was Einstein Right?: Putting General Relativity to the Test*. Basic Books, New York, U.S.A. 2° Edición, 1993.