UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

Cálculo Fraccionario para Ecuaciones Diferenciales.

Joel Rodrigo Maldonado Aguas

Matemáticas

Trabajo de fin de carrera presentado como requisito
para la obtención del título de
Matemático

Quito, 3 de julio de 2020

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

HOJA DE CALIFICACIÓN
DE TRABAJO DE FIN DE CARRERA

Cálculo Fraccionario para Ecuaciones Diferenciales.

Joel Rodrigo Maldonado Aguas

Nombre del profesor, Título académico: Antonio Di Teodoro, Ph.D.

Quito, 3 de julio de 2020

DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Nombres y apellidos:	Joel Rodrigo Maldonado Aguas
Código:	00122275
Cédula de Identidad:	172224682
Lugar y fecha:	Quito, Junio 2020

ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en http://bit.ly/COPETheses.

UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on http://bit.ly/COPETheses.

A todos los que me conocen.

A toda esa gente que no.

A mi familia y amigos.

A mí

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi agradecimiento a mi familia, por darme la oportunidad de estudiar Matemáticas, algo que en algún momento fue impensable. A mis padres, Elena Aguas y Rodrigo Maldonado, por darme ese apoyo incondicional y permitirme crecer personal y profesionalmente en estos años de universidad. Al departamento de Matemática de la USFQ que me abrió las puertas y me brindó la oportunidad de encontrar el campo que realmente me apasionaba.

De forma muy especial al Dr. Antonio Di Teodoro por permitirme participar en este proyecto y sobre todo por guiarme y apoyarme en los ultimos semestres de universidad en los cuales me sentí más perdido de nunca. De igual forma al Dr. David Hervas, que durante todos estos años en la USFQ me mostró que la belleza de las matemáticas esta en las ideas de esta.

A todos mis amigos de la carrera de física y matemática que, de una u otra forma me han ayudado a crecer como estudiante y persona y se han vuelto como hermanos mayores para mi. En especial a Nícolas Zapata, José Solano y Roberto Avalos, los cuales siempre vieron luz en mi, me aconsejaron y apoyaron aún después de egresar de la USFQ. Finalmente, quiero agradecer todos los integrantes de Ñucanchi Allpa, los cuales me brindaron la oportunidad de compartir experiencias inolvidables junto a ellos y me ayudaron a manejar las cosas negativas que pasaban por mi vida de una mejor manera.

RESUMEN

En el presente trabajo se estudian dos metodologías distintas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias. La primera metodología consiste en usar la transformada de Laplace mediante la proposición de una solución de tipo producto de funciones. Por otro lado, la segunda metodología nos permite integrar directamente sobre la ecuación diferencial parcial fraccionaria. Para finalizar el trabajo, se realiza una discución sobre las limitaciones y libertades de ambos métodos.

Palabras Clave: Derivada Fraccionaria de Rieman-Liouville, Transformada de Laplace, Ecuaciones Diferenciales, Fraccionaria, Ecuaciones Integrales, Derivada sumable Ecuación integral de Volterra.

ABSTRACT

In the present work two methodologies to find solutions to fractional partial differential equations are studied. The first methodology consist in the use of the Laplace transform throught the employment of a product type solution. On the other hand, the second methodology allow us to integrate the partial fractional differential equation. Finally, a discussion about the freedoms and restrictions of two methods is made.

Key Words: Fractional differential equation,Riemann-Liouville fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Laplace Transform, Integral Ecuation, Summable Derivative, Volterra Integral equation.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I
INTRODUCCION

El modelado matemático consiste en traducir problemas del mundo externo a problemas matemáticos mediante procedimientos teóricos o numéricos [6]. En particular, el modelado de fenómenos físicos y químicos muchas veces nos llevan al planteamiento de ecuaciones diferenciales, que pueden ser descritos mediante una función de una o más variables [8]. La idea del modelado es poder predecir y analizar el comportamiento del sistema, sin embargo el modelado no describe en su plenitud el fenómeno que deseamos estudiar y una mejor descripción del fenómeno involucra un incremento en la complejidad del modelo [23].

En los últimos años la implementación de derivadas de orden no entero ha tenido un gran impacto en la descripción de sistemas relacionados con interacciones de largo alcance y sistemas con memoria descrita por una potencia [14]. En particular, el cálculo fraccionario ha descrito con gran exactitud fenómenos relacionados al amortiguamiento [24]. Como consecuencia este nos ha permitido investigar la elasticidad en materiales desde una nueva perspectiva. Para esto se utiliza modelos fraccionarios no locales de materiales elásticos, en los cuales el kernel de las integrales fraccionarias describen un nuevo comportamiento mecánico del material [12] . En el caso de sistemas viscoelásticos, como las arterias, la potencia del kernel de la derivada fraccionaria permite pasar de sistemas completamente elásticos a sistemas viscosos [13].

La version fraccionaria del operador de Laplace también ha tenido una gran aplicación en distintas áreas como mecánica y electrostática, inclusive el marco de la probabilidad, donde actúa como generador de procesos de Levi estable [7]. En el área económica, las derivadas de orden no entero se han usado en procesos económicos dinámicos, en el cual el orden fraccionario de la derivada modela la memoria del sistema; parámetro que suele ser olvidado en la mayoria de los modelos [25] .

Las derivadas fraccionarias, cuentan con propiedades inusuales, como la violación de la regla de Leibniz (ley del producto) y de la ley de la cadena (derivada de composición de dos funciones) [25]. Si bien es cierto que estas propiedades nos ayudan a describir características complejas de sistemas dinámicos, estas llegan a presentar mucha más dificultad en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, por lo cual se han utilizado diferentes enfoques para intentar hallar una la solución analítica de estas como por ejemplo: la aplicación directa de la transformada de Laplace, el uso de operadores y el método de análisis con homotopía [2].

En este trabajo, se presentan dos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias. En el primero método, se estudia la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Posteriormente, mediante la proposición de una solución de tipo producto de funciones, se separa la ecuación diferencial parcial fraccionaria en dos ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias las cuales son resueltas mediante el uso de la transformada de Laplace de tal forma que la solución de la ecuación diferencial parcial fraccionaria original pueda ser expresada como producto de estas. En la segunda metodología, se asume que nuestra ecuación admite derivadas sumables, por lo cual integrando en ambos lados de la ecuación diferencial parcial fraccionaria y utilizando las relaciones entre la derivada e integral fraccionaria de Riemann-Liouville se llega a una ecuación Laplace transformable. Tomando la transformada de Laplace de esta y reorganizando los términos se llega a una ecuación de Volterra de segunda especie, la cual nos garantiza una única solución.

CAPÍTULO II
PRELIMINARES

En este capítulo se introducirá los objetos necesarios y se desarrollara una notación adecuada para un mejor entendimiento del trabajo.

2.1 Desarrollo Histórico del Cálculo fraccionario en $\mathbb{R}$

El origen del cálculo fraccionario data de 1695, año en el que el marques de L'Höpital mediante una carta preguntó a Leibniz cual seria el resultado de $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ con $f(x) = x$ y con $n = \frac{1}{2}$. A lo que Leibniz respondió que "esto conduciría aparentemente a una paradoja de la cual algún día serán extraídas consecuencias muy útiles". En estas palabras nació el cálculo fraccionario [11]. A partir de ese momento, muchos matemáticos contribuyeron al desarollo del cálculo de orden no entero. En 1730, Euler desarrolló trabajos sobre la interpolación entre derivadas de orden entero. En 1812, Laplace definió la derivada fraccionaria en base a integrales. Posteriormente en 1819, el matemático francés Lacroix discutió por primera vez la derivada fraccionaria en un libro de cálculo [4]. A partir de

$$f(x) = x$$

Lacroix determinó que la n-esima derivada de $f(x) = x^m$ estaría dada por

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Con la cual, para $n = \frac{1}{2}$ y $m = 1$ se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

De forma similar, si tomamos, $n = 1/2$ y $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ se obtiene

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} = 1,$$

de lo cual se concluye que

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{dx}{dx} = 1.$$

En 1822, Fourier fue el siguiente en dar una definición de derivada de orden arbitrario, sin embargo no se le dio utilidad a esta. El primer uso de derivadas de orden fraccionario fue dado en 1823 por Abel [1, 4], en el cual aplicó cálculo fraccionario para solucionar la ecuación integral que surge en la formulación del problema de la tautocrona. Posteriormente, Liouville publicó tres memorias sobre el tema en 1832 [17] junto con algunos trabajos de investigación. En estos trabajos, Liouville definió a las derivadas fraccionarias mediante el uso de series infinitas, sin embargo estas estaban limitadas al intervalo de convergencia de la serie. Finalmente, mediante el uso de integrales Liouville llego a construir una mejor definición de derivada fraccionaria, la cual incluso le permitía tomar potencias negativas [4, 17].

2.2 Funciones Especiales para Cálculo Fraccionario

Existen funciones que juegan un papel importante en el desarrollo y entendimiento del cálculo fraccionario, como la función: Gamma, Beta y la de Mittage-Leffler, las cuales también juegan un papel importante al momento de buscar soluciones explicitas de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias. Por ende, en las siguientes subsecciones se definirán y se mencionarán algunas propiedades relevantes de estas.

2.2.1 Función Gamma

La función Gamma aparece en problemas relacionados con la normalización de funciones de onda de Coulomb o en el calculo de probabilidades en mecánica estadística [8] y juega un papel importante en el cálculo fraccionario. La función Gamma esta definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad Re(z) > 0, \tag{1}$$

donde $Re(z)$ denota la parte real de un número complejo $z = a+bi$, es decir $Re(z) = a$. La restricción $Re(z) > 0$ es una condición necesaria para garantizar la convergencia de la integral. La función Gamma puede ser interpretada como la generalización de un factorial, ya que esta permite calcular factoriales de números no enteros debido a que cumple la siguiente relación

$$\Gamma(z) = (z-1)!.$$

Por lo cual $\Gamma(z)$ tambien satisface la siguiente ecuación funcional [20]

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Dada la relación que guarda la función Gamma con los factoriales se puede generalizar la ecuación (1) obtenida por Lacroix de la siguiente manera

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(m-n-1)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Para mas detalles sobre la función Gamma se recomienda ver [8].

2.2.2 Función Beta

Otra función de importancia en este trabajo es la función Beta, ya que su solución es expresada por funciones Gamma . A pesar de que la función beta tenga distintas formas [8], en este trabajo se utilizara la siguiente

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{2}$$

Para mas detalles sobre la función Beta se recomienda ver [8].

2.2.3 Función de Mittage-Leffler

Una de las funciones más importante en el cálculo fraccionario es la función de Mittage-Leffler, ya que a pesar de no ser mencionada en las tablas de la transformada de Laplace, esta surge en el calculo de la transformada inversa de Laplace de funciones de tipo $s^{\alpha}(a+bs^{\beta})$, donde s es el parámetro de la transformada de Laplace y a,b son constantes reales. Por otro lado, esta también aparece en la solución de algunos problemas de valores de frontera que involucran ecuaciones integro-diferenciales de tipo Volterra con parámetro fraccionario[16, 21]. La función de Mittage-Leffler, fue nombrada en honor al matemático sueco Magnus Gustaf Mittag-Leffler, el cual la introdujo en 1903 [4]. Esta definida sobre todo el plano complejo como

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)} \quad \alpha, \beta, z \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0. \tag{3}$$

En base a (3) se puede expresar una gran variedad de funciones como por ejemplo :

$$E_{0,1} = \frac{1}{z-1}, \quad |z| < 1, \quad E_{1,1}(z) = e^z, \quad E_{2,1}(z) = cosh(\sqrt{z}),$$

$$E_{2,1}(-z^2) = cos(z), \quad E_{2,2}(z) = \frac{sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}, \quad E_{\alpha,\beta}(0) = 1.$$

La función de Mittage-Leffler suele ser vista como una generalización de la función exponencial, por lo cual muchas de la soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias son expresadas en términos de la función de Mittage-Leffler al igual que las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias son expresadas en función de senos y cosenos [4].

2.3 Cálculo Fraccionario en $\mathbb{R}$

A lo largo de la historia han existido varias definiciones para la derivada fraccionaria como lo son la derivada de Reimann-Liouville, Hadamard, Erdélyi-Kober, Caputo y Marchaud [3, 21]. Sin embargo, la definición que ha tomado fuerza en los últimos años ha sido la de Riemann-Liouville, debido a que esta no se anula al ser aplicada a una constante y cuenta con un kernel de potencia fraccionaria. En esta sección vamos a introducir la definición de la derivada e integral fraccionaria de Riemann-Liouville, al igual que sus propiedades de semi-grupo y de reciprocidad.

2.3.1 Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville

Definición 1 (Integral Fraccionaria Derecha de Riemann-Liouville)**.** *Sea $\phi(x) \in L_1(a,b)$*[1]*, entonces la integral fraccionaria derecha de Riemman-Liouville $(I_{b^-}^{\alpha}\phi)(x)$, de orden $\alpha > 0$ esta definida como*

$$(I_{b^-}^{\alpha}\phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b.$$

La cual suele ser denotada como $(D_{b^-}^{-\alpha}\phi)(x)$.

Definición 2 (Integral Fraccionaria Izquierda de Riemann-Liouville)**.** *Sea $\phi(x) \in L_1(a,b)$, entonces la integral fraccionaria izquierda de Riemman-Liouville $(I_{a^+}^{\alpha}\phi)(x)$, de orden $\alpha > 0$ esta definida como*

$$(I_{a^+}^{\alpha}\phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a. \tag{4}$$

La cual suele ser denotada como $(D_{a^+}^{-\alpha}\phi)(x)$.

Para nuestro trabajo vamos a utilizar la definición 2, por lo cual para ilustrar como

[1] $L_1(a,b)$ es el conjunto de funciones f, tal que $\int_a^b |f(x)|dx$ es convergente.

funciona la integral fraccionaria izquierda de Reimann-Liouville vamos a considerar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. *Evaluemos* $I^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta}$*, donde* $\beta > -1$ *y* $\alpha > 0$*.*
Considerando la integral fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville enunciada en la definición 2 tenemos

$$I^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{(t-a)^{\beta}}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Mediante el cambio de variable $z = t-a$*, tenemos que* $dz = dt$*, por lo cual*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} z^{\beta}(x-a-z)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} z^{\beta}(x-a)^{\alpha-1}(1-\frac{z}{x-a})^{\alpha-1}dt \end{aligned}$$

Realizando otro cambio de variable $y = \frac{z}{x-a}$*, tenemos que* $(x-a)dy = dt$*, por lo tanto*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\beta+\alpha}y^{\beta}(1-y)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 y^{\beta}(1-y)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Finalmente, concluimos que

$$I^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}. \tag{5}$$

Notemos que si en la ecuación (5) tomamos $\beta = 0$, entonces $(x-a)^{\beta} = (x-a)^0 = 1$ por lo cual la integral fraccionaria de una constante k de orden α es

$$I^{\alpha}_{a^+}k = \frac{k}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\alpha}. \tag{6}$$

2.3.2 Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville

Definición 3 (Derivada Fraccionaria Derecha de Riemann-Liouville). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces la derivada fraccionaria derecha de Riemman-Liouville $(D^{\alpha}_{b^-} f)(x)$, de orden $\alpha > 0$ esta definida como*

$$(D^{\alpha}_{b^-} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad b < x,$$

donde $n = [\alpha] + 1$ y $[\alpha]$ es la parte entera de α.

Definición 4 (Derivada Fraccionaria Izquierda de Riemann-Liouville). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces la derivada fraccionaria izquierda de Riemman-Liouville $(D^{\alpha}_{a^+} f)(x)$, de orden $\alpha > 0$ esta definida como*

$$(D^{\alpha}_{a^+} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x > a, \tag{7}$$

donde $n = [\alpha] + 1$ y $[\alpha]$ es la parte entera de α.

Por lo cual, tomando en cuenta la integral fraccionaria de Riemann-Liouville se tiene que la derivada fraccionaria derecha e izquierda de Riemann-Liouville pueden ser reescritas como $D^{\alpha}_{b^-} = \frac{d}{dx} I^{1-\alpha}_{b^-}$ y $D^{\alpha}_{a^+} = \frac{d}{dx} I^{1-\alpha}_{a^+}$ respectivamente. Notemos que cuando $0 < \alpha < 1$ entonces la derivada fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville esta dada por la siguiente identidad

$$(D^{\alpha}_{a^+} f)(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad x > a. \tag{8}$$

De tal forma que cuando $\alpha \to 1$, la derivada fraccionaria $D^{\alpha}_{a^+} f(x)$ se aproxima a la derivada clásica $\frac{d}{dx} f(x)$ en $x = a$.

En este trabajo analizaremos ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionarias cuyo limite cuando $\alpha \to 1$ sean derivadas clásicas de orden dos, es decir

$$\lim_{\alpha\to 1}(D^{2\alpha}_{a^+}f)(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

$$\lim_{\alpha\to 1}(D^{\alpha+1}_{a^+}f)(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x).$$

Por lo cual, sin perdida de generalidad utilizaremos la ecuación (8) para todos los cálculos posteriores. Para ilustrar como funciona la derivada fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville vamos a considerar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. *Evaluemos $D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta}$, donde $\beta > -1$ y $\alpha > 0$.*
Considerando la derivada fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville enunciada en la definición 4, en particular considerando la ecuación (8) *se tiene*

$$D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{(t-a)^{\beta}}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Mediante el cambio de variable $z = t - a$, tenemos que $dz = dt$, por lo cual

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x-a} z^{\beta}(x-a-z)^{-\alpha}dz \\ &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x-a} z^{\beta}(x-a)^{-\alpha}(1-\frac{z}{x-a})^{-\alpha}dz. \end{aligned}$$

Realizando otro cambio de variable $y = \frac{z}{x-a}$, tenemos que $(x-a)dy = dt$, por lo tanto

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\beta-\alpha+1}y^{\beta}(1-y)^{-\alpha}dy \\ &= \frac{d}{dx}\frac{(x-a)^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)}B(\beta+1, 1-\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Finalmente, concluimos que

$$D_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{9}$$

Notemos que si en la ecuación (9) tomamos $\beta = 0$, entonces $(x-a)^{\beta} = (x-a)^{0} = 1$, y así la derivada fraccionaria de una constante k de orden α es

$$D_{a^+}^{\alpha}k = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{10}$$

2.3.3 Relaciones Entre la Derivada e Integral Fraccionaria

De la subsección anterior se pudo observar que tanto la definición de derivada e integral fraccionaria incluyen integrales. Estas integrales pueden llegar a diverger, por lo cual es importante considerar el espacio de funciones sobre el cual deseamos trabajar. Durante toda esta tesis vamos a denotar como $I_{a^+}^{\alpha}(L_1)$ a la clase funciones f representadas por la ecuación (4) de función integrable, es decir $f = I_{a^+}^{\alpha}\phi$ tal que $\phi \in L_1(a,b)$. Una vez aclarada la notación a usar, procedemos a mencionar las propiedades de semi-grupo y de reciprocidad de la derivada e integral fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville.

Proposición 1. *(Propiedad de Semi-grupo de la Integral Fraccionaria)*
Sea $I_{a^+}^{\alpha}\phi(x)$ *y* $I_{a^+}^{\beta}\phi(x)$ *, entonces*

$$I_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\beta}\phi(x) = I_{a^+}^{\beta}I_{a^+}^{\alpha}\phi(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta}\phi(x), \quad \forall\alpha,\beta > 0. \tag{11}$$

La ecuación (11) *se satisface en todo punto para* $\phi(x) \in C([a,b])$[2] *y en casi todo punto*[3] *para* $\phi(x) \in L_1(a,b)$. *Ver la prueba en [21].*

[2] C([a,b]) es el conjunto de todas las funciones continuas en [a,b]

[3] Una propiedad se mantiene en casi todo punto si esta se cumple para todos los elementos de un conjunto, sin embargo, esta no se puede cumplir en un subconjunto de medida cero. Ver [20]

Para estudiar la relación entre la derivada e integral fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville vamos a tomar en cuenta la relación entre la derivada e integral en cálculo tradicional. En este tenemos que la derivada e integral son reciprocas si $\frac{d}{dx}\int_a^x \phi(t)dt = \phi(x)$, sin embargo $\int_a^x \frac{d\phi(t)}{dx}dt \neq \phi(x)$, ya que en este aparece la constante $-\phi(a)$. De igual forma, en cálculo fraccionario tenemos que $(D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+}\phi)(x) \equiv \phi(x)$, pero $(I^{\alpha}_{a^+} D^{\alpha}_{a^+}\phi)(x) \neq \phi$, ya que este se diferencia de ϕ por un polinomio de orden $n-1$, debido a la función $(x-a)^{\alpha-k}$, donde $k = 1, \cdots, [\alpha]+1$. Por lo tanto para aclarar la relación de reciprocidad entre la derivada e integral fraccionaria vamos a tomar en cuenta las siguientes definiciones y proposiciones

Definición 5. *Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $[a,b]$ tales que $\sum_{k=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Teorema 1. *Sea $\alpha > 0$, entonces $f \in I^{\alpha}_{a^+}(L_1)$, si y solo si $I^{n-\alpha}_{a^+} f \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha]+1$ y $(I^{n-\alpha}_{a^+} f)^k(a) = 0$, $k = 0, .., n-1$. Ver la prueba en [21].*

Observación 1. *AC^n denota la clase de funciones f, tal que f es $n-1$ veces diferenciable en $[a,b]$ y $f^{(n-1)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$.*

Cabe mencionar que las funciones pertenecientes a $I^{\alpha}_{a^+}(L_1)$ enfatizan que la representación de una función f mediante una integral fraccionaria de orden α y la existencia de la derivada fraccionaria de orden α de f son dos cosas distintas [21]. Concentrémonos por un momento en la existencia de la derivada fraccionaria. Sin perdida de generalidad vamos a tomar a $\alpha \in (0,1)$. Si decimos que $(D^{\alpha}_{a^+} f)(x) = \frac{d}{dx} I^{1-\alpha}_{a^+}$ existe en casi todo lado, entonces debemos tomar en cuenta que incluso si se conoce la existencia de una derivada integrable $\frac{dg(x)}{dx}$ de una función $g(x)$, esta no garantiza la restauranción de $g(x)$ por su primitiva [21], es decir, $\int_a^x \frac{dg(t)}{dx}dt \neq g(x)$. Dichos problemas pueden evitarse si se trabaja con funciones absolutamente continuas. Cabe mencionar que la teoría de Lebesgue nos permite integrar por partes solo si las funciones son absolutamente continuas. Debido a esto, es natural encontrar que la suposición de integrabilidad y existencia en casi todo lado de las derivadas fraccionarias $(D^{\alpha}_{a^+}f)(x)$ no es suficiente para nuestro estudio, ya que esta no garantiza la representación de f mediante integrales fraccionarias. Por estas razones, para estudiar la reciprocidad entre la derivada e integral fraccionaria es necesario imponer una condición más fuerte sobre f, por lo cual se da paso a la siguiente definición

Definición 6. *Sea $\alpha > 0$. Una función $f \in L_1(a,b)$ tiene una derivada integrable $D^{\alpha}_{a^+}f$ si $I^{n-\alpha}_{a^+}f(x) \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha] + 1$.*

Observación 2. *La definición (6) nos permite caracterizar a las funciones pertenecientes a $I^{\alpha}_{a^+}(L_1)$.*

Una vez entendido la integrabilidad de la derivada fraccionaria se puede discutir la relación de reciprocidad entre la integral y derivada fraccionaria a partir del siguiente teorema

Teorema 2. *Sea $\alpha > 0$. Entonces la ecuación*

$$(D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}\phi)(x) = \phi(x) \tag{12}$$

se mantiene para cualquier función integrable $\phi(x)$. Sin embargo,

$$(I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}f)(x) \tag{13}$$

solo se satisface si

$$f(x) \in I^{\alpha}_{a^+}(L_1). \tag{14}$$

Si asumimos que $f \in L_1(a,b)$ tiene una derivada integrable $(D^{\alpha}_{a^+}f)(x)$ respecto a la definición 6, entonces la identidad (13) no se cumple, de hecho es remplazada por el *siguiente resultado*

$$(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f)(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} (I_{a^+}^{n-\alpha} f)^{(n-k-1)}(a), \tag{15}$$

con $n = [\alpha] + 1$. *Ver la prueba en [21].*

Observación 3. *El teorema 2 es una consecuencia de una propiedad mas general [15, 19]*

$$D_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} f)(x) = D_{a^+}^{\alpha-\beta} f(x), \quad \alpha \geq \beta > 0.$$

Proposición 2. *Sea* $\alpha > 0$ *y* $\beta > 0$ *tal que* $n-1 < \alpha \leq n$ *y* $m-1 < \beta \leq m$ *y* $\alpha+\beta \leq 1$ *y sea* $f \in L_1(a,b)$ *y* $I^{m-\alpha} \in AC^m([a,b])$. *Entonces se cumple la siguiente relación*

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = (D_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^{m} (D_{a^+}^{\beta-j})(a^+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}.$$

Ver prueba en [19, 21].

2.4 Transformada de Laplace

La idea principal de la transformada de Laplace es convertir una ecuación que involucra derivadas e integrales en una expresión algebraica [22]. Esto permite resolver ecuaciónes diferenciales de una forma más sencilla, en especial si se cuenta con condiciones de iniciales [4]. A continuación se presenta la definición de la transformada de Laplace, algunas de sus propiedades y la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

2.4.1 Definición de la Transformada de Laplace

Definición 7 (Transformada de Laplace)**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *entonces la transformada de Laplace de* f *se define como*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \tag{16}$$

Un requerimiento para la existencia de la transformada de Laplace es que $f(t) < e^{-st}$ para todo $t \in [0, \infty]$, de tal forma que la integral en la ecuación (16) sea convergente. Cuando esto sucede, decimos que $f(t)$ es Laplace transformable.

Para ilustrar el funcionamiento de la transformada de Laplace, consideremos las siguientes proposiciones que muestran como la transformada de Laplace guarda relación con funciones importantes del cálculo fraccionario, como son la función Gamma y la función de Mittage-Liffler

Proposición 3. *Sea $t > 0$, $t_0 = 0$ y $\alpha \geq -1$ entonces la transformada de Laplace de $f(t) = t^\alpha$ existe, y esta dada por la siguiente ecuación*

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}. \tag{17}$$

Demostración. Sea $t > 0$, $t_0 = 0$ y $\alpha \geq -1$ entonces la transformada de Laplace de $f(t) = t^\alpha$ esta definida de la siguiente forma

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt,$$

utilizando el cambio de variable $t = \frac{y}{s}$, tenemos $dt = \frac{dy}{s}$, por lo cual (18) se reescribe de la siguiente forma

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty \frac{y^\alpha}{s^{\alpha+1}} e^{-y} dt,$$

sacando $\frac{1}{s^{\alpha+1}}$ de la integral y dado que $\alpha \geq -1$, se obtiene una función Gamma, con $z = \alpha + 1$ de tal forma que

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}.$$

■

Proposición 4. *Sea $t > 0$, $t_0 = 0$ y $s^\alpha > a \quad a \in \mathbb{R}$, entonces la transformada de Laplace de $f(t) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$ existe, y esta dada por la siguiente ecuación*

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}. \tag{18}$$

Demostración. Sea $t > 0$, $t_0 = 0$ y $s^\alpha > a$, $\quad a \in \mathbb{R}$, entonces la transformada de Laplace de $f(t) = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$ esta definida de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(at^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}dt \\
&= \frac{a^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} t^{\alpha n+\beta-1}e^{-st}dt.
\end{aligned}$$

Dada la convergencia de la integral y de la serie podemos intercambiar estas [20]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\int_0^\infty t^{\alpha n+\beta-1}e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\mathcal{L}\{t^{\alpha n+\beta-1}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha n+\beta)}{s^{\alpha n+\beta}} \\
&= \frac{1}{s^\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n \qquad (19)
\end{aligned}$$

dado que $s^\alpha > a$, la serie en la ecuación (19) converge, por lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} &= \frac{1}{s^\beta}\frac{1}{\left(-\frac{a}{s^\alpha}\right)} \\
&= \frac{1}{s^{\beta-\alpha}\left(s^\alpha+a\right)} \\
&= \frac{s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha+a)}.
\end{aligned}$$

■

2.4.2 Propiedades de la Transformada de Laplace

En la siguiente subsección se muestran las propiedades más importantes de la transformada de Laplace. Las demostraciones de estas pueden ser encontradas en [22, 26].

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones Laplace transformables, entonces

- $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$.
- $\mathcal{L}cf(t) = c\mathcal{L}f(t)$.
- Si $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$ respectivamente, entonces
$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s),$$
donde el operador $*$ es el producto de convolución y esta definido de la siguiente forma
$$f(t) * g(t) = \int_{t_0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$
- La transformada de Laplace de las la n-ésima derivada de una función $f(t)$ esta dada por
$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(t)|_{t=0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Donde $n \in \mathbb{N}$ y $f^k(t)|_{t=0}$, $k = 0, \cdots, n-1$ son condiciones iniciales.

2.4.3 Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria

A partir de esta subsección vamos a denotar a las funciones evaluadas en 0, es decir $f(0)$, como $f(t)|_{t=0}$.

Proposición 5. *Sea f una función Laplace transformable, entonces la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de orden α de Riemann-Lioville esta dada por*

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha} f(t)\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t)\} - D^{-(1-\alpha)} f(t)|_{t=0}. \tag{20}$$

Demostración. consideremos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

$$(D^{\alpha}_{a^+} f)(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt,$$

la cual puede ser reescrita como

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}G'(t), \tag{21}$$

donde $G(t) = \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)d\tau$. Tomando la transformada de laplace de (21) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}\mathcal{L}\{G'(t)\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}\left(s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(t)|_{t=0}\right) \\
&= \frac{s}{\Gamma(-\alpha+1)}\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)d\tau\right\} - \frac{G(t)|_{t=0}}{\Gamma(-\alpha+1)} \\
&= \frac{s}{\Gamma(-\alpha+1)}\mathcal{L}\{t^{-\alpha} * f(t)\} - \frac{G(t)|_{t=0}}{\Gamma(-\alpha+1)} \\
&= \frac{s}{\Gamma(-\alpha+1)}\mathcal{L}\{t^{-\alpha}\}\mathcal{L}\{f(t)\} - \frac{G(t)|_{t=0}}{\Gamma(-\alpha+1)} \\
&= \frac{s}{\Gamma(-\alpha+1)}\frac{\Gamma(-\alpha+1)}{s^{1-\alpha}}\mathcal{L}\{f(t)\} - \frac{G(t)|_{t=0}}{\Gamma(-\alpha+1)} \\
&= s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t)\} - \left(\frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)d\tau\right)|_{t=0}
\end{aligned}$$

Cambiando α por $-\alpha+1$ y usando la ecuación (4) obtenemos que

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t)\} - D^{-(1-\alpha)}f(t)|_{t=0}$$

■

Proposición 6. *Sea $\eta(x)$ una función Laplace transformable entonces, la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de orden 2α de Riemann-Liouville es*

$$\mathcal{L}\{D^{2\alpha}\eta(t)\} = s^{2\alpha}\mathcal{L}\{\eta(t)\} - s^{\alpha}D^{-(1-\alpha)}\eta(t)|_{t=0} - D^{-(1-2\alpha)}\eta(t)|_{t=0}. \tag{22}$$

Demostración. Sea $\eta(x)$ una funcoón Laplace transformable, entonces por la Proposición 5 se obtiene

$$\mathcal{L}\{D^{2\alpha}\eta(t)\} = s^{\alpha}\mathcal{L}\{D^{\alpha}\eta(t)\} - D^{-(1-\alpha)}D^{\alpha}\eta(t)|_{t=0}. \tag{23}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{D^{2\alpha}\eta(t)\} &= s^{\alpha}(s^{\alpha}\mathcal{L}\{\eta(t)\} - D^{-(1-\alpha)}\eta(t)|_{t=0}) - D^{-(1-2\alpha)}\eta(t)|_{t=0} \\
&= s^{2\alpha}\mathcal{L}\{\eta(t)\} - s^{\alpha}D^{-(1-\alpha)}\eta(t)|_{t=0} - D^{-(1-2\alpha)}\eta(t)|_{t=0}.
\end{aligned}$$

■

Procediendo de igual forma que en la demostración de la Proposición 5 y utilizando las propiedades de convolución se puede mostrar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad & \left\{I^{\beta}_{t_{0+}}u(x,t)\right\} = s^{-\beta}\mathcal{U}(x,s), \\
\mathcal{L} \quad & \left\{\frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I^{\beta}_{t_0^+}f_i(t)\right\} = \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}s^{-\beta}F_i(s), \\
\mathcal{L} \quad & \left\{I^{\alpha}_{x_0^+}I^{\beta}_{t_0^+}u(x,t)\right\} = \frac{s^{-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^{x}\mathcal{U}(y,s)(x-y)^{\alpha-1}dy, \\
\mathcal{L} \quad & \left\{\frac{(t-t_0)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}I^{\alpha}_{x_0^+}g_o(x)\right\} = e^{-t_0 s}s^{-\beta}I^{\alpha}_{x_0^+}g_o(x).
\end{aligned}$$

Donde $F_i(s) = \mathcal{L}\{f_i(t)\}$.

2.4.4 Espacio de Zemanian

Se conoce al espacio de Zemanian, como el espacio en el cual viven las transformadas de Laplace. Por lo cual, para obtener la transformada inversa de Laplace se necesita tomar en cuenta su forma generalizada[4] en dicho espacio. Por lo cual tenemos

[4]Decimos que una función f tiene una forma generalizada si esta deriva de la función delta de Dirac. Ver [5]

las siguientes relaciones presentadas en el trabajo de Ferreira y Vierira [15]

$$\text{lím}_{r\to\infty} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} s^{n(1+\beta)} e^{st} F_i(s) ds = \left(D_{t_0{}^+}^{n(1+\beta)} f_i\right)(t),$$
$$\text{lím}_{r\to\infty} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} s^{n(1+\beta)} e^{s(t-t_0)} ds = \left(D_{t_0{}^+}^{n(1+\beta)} \delta\right)(t-t_0),$$

donde $i = 0, 1, ..., n \quad n \in \mathbb{N}_0$, δ es la función delta de Dirac, y su convergencia es en $\mathcal{D}'$.

2.5 Ecuaciones Integrales

Las ecuaciones integrales son aquellas que relacionan una función incógnita con una integral de tal manera que esta se encuentre bajo el signo integral. Análogamente a las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones integrales pueden ser de orden lineal y no lineal. En el caso de ecuaciones integrales lineales podemos encontrar las de tipo Fredholm y las de tipo Volterra [10].

1. **Ecuaciones de tipo Fredholm:** Son aquellas ecuaciones integrales con limites de integración fijos, estas pueden ser clasificadas en dos grupos

   - **Primera especie:** La función incógnita solo esta bajo el signo integral.

     $$f(x) = \int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy, \quad 0 \leq x, \quad y \leq 1.$$

     Donde $\phi(x)$ es la función incógnita, $K(x,y)$, $f(x)$ son funciones conocidas y $K(x,y)$ es continuo en el cuadrado $0 \leq x$, $y \leq 1$ [18].

   - **Segunda especie:** La función incógnita aparece bajo el signo integral y fuera de el.

     $$f(x) = \phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy, \quad 0 \leq x, \quad y \leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

     Si $f(x) = 0$, se conoce como ecuación homogénea, mientras que si $f(x) \neq 0$

se conoce como ecuación completa o no homogénea.

2. **Ecuaciones de tipo Volterra:** Son un caso particular de las ecuaciones de tipo Fredholm en el cual se satisface que $K(x,y) > 0$ si $y > x$. Por lo cual, de la misma forma que con las ecuaciones de tipo Fredholm, podemos clasificar las ecuaciones de tipo Volterra en dos grupos

   - **Primera especie:** La función incógnita solo esta bajo el signo integral.

   $$f(x) = \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy, \quad 0 \leq x, \quad y \leq 1.$$

   - **Segunda especie:** La función incógnita aparce tanto bajo el signo integral y fuera de el.

   $$f(x) = \phi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy, \quad 0 \leq x, \quad y \leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Observación 4. *La función $K(x,y)$ se la conoce como el Kernel o núcleo de ecuación.*

A pesar de la complejidad de las ecuaciones integrales, el método de descomposición de Adomian [9, 10] es efectivo al momento de buscar una solución de estas. Dicho método consiste en descomponer la función incognita en una serie infinita de la siguiente forma

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x),$$

donde $\phi_0(x) = f(x)$ y $\phi_i(x)$ son determinados apartir de la siguiente formula recursiva

$$\phi_i(x) = \lambda \int_0^x K(x,y)\phi_{i-1}(y)dy.$$

Ejemplo 3. *Consideremos la siguiente ecuación integral*

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt.$$

Por el método de descomposición de Adomian obtenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) = 1 - \int_0^x \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$$

o equivalentemente

$$u_0(x) + u_1(x) + \cdots = 1 - \int_0^x [u_0(t) + u_1(t) + \cdots]\, dt.$$

Es claro que $u_0(x) = 1$ ya que es el único termino fuera del signo integral. Por lo cual para el resto de $\phi_i(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 1, \\
u_1(x) &= -\int_0^x u_0(t)dt = -\int_0^x dt = -x, \\
u_2(x) &= -\int_0^x u_1(t)dt = -\int_0^x (-t)dt = \frac{1}{2!}x^2, \\
u_3(x) &= -\int_0^x u_2(t)dt = -\int_0^x \frac{1}{2!}t^2 dt = -\frac{1}{3!}x^3, \\
u_4(x) &= -\int_0^x u_3(t)dt = -\int_0^x -\frac{1}{4!}t^4 dt.
\end{aligned}$$

de estos cálculos es fácil notar que el patrón de recurrencia esta dado por $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}x^n$. Por lo tanto

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n = e^{-x}.$$

Utilizando el método de Adomian se puede encontrar una solución para ecuaciones integrales de Volterra de segundo tipo. En particular, dado un kernel $K(x,t) = (x-t)^{\alpha-1}$, se puede enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea $f \in L_1[a,b]), \alpha > 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces la ecuación integral*

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} u(t)dt, \quad x \in [a,b]. \tag{24}$$

Tiene una única solución dada por

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) f(t)dt. \tag{25}$$

Para la demostración del teorema 3 se utiliza el método de Adomian para encontrar una solución de la ecuación (24), en particular se prueba la convergencia de la serie, posteriormente se muestra que la ecuación (25) satisface la ecuación (24). Finalmente se prueba su unicidad utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz. La demostración del teorema esta fuera del alcance de este trabajo y no aporta mucho a la comprención de este. Sin embargo, se puede encontrar la demostración detallada de este teorema en [10].

CAPÍTULO III
CALCULO FRACCIONARIO PARA EDPS

En este capítulo, se propone dos métodos distintos para encontrar soluciones explicitas de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias propuestas por el grupo de de química, física y electrónica de la Universidad San Francisco de Quito. Para esto, se considera el siguiente conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales, las cuales son parte central de los resultados obtenidos por dichos grupos

$$D^{\alpha}_{x_0^+}u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}_{t_0^+}u(x,t), \tag{26}$$

$$D^{f(\alpha)}_{x_0^+}u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}_{t_0^+}u(x,t), \tag{27}$$

$$D^{f(\alpha)}_{x_0^+}u(x,t) + D^{\alpha}_{x_0^+}u(x,t) = D^{\beta}_{t_0^+}u(x,t). \tag{28}$$

Donde $C \in \mathbb{R}$, $f : (0,1) \to (0,2)$, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. De tal manera que cuando $\alpha \to 1$ y $\beta \to 1$, las ecuaciones (26), (27), (28) se comportan de forma clásica como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}u(x,t) + Cu(x,t) &= \frac{d}{dt}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R},\\
\frac{d^2}{dx^2}u(x,t) + Cu(x,t) &= \frac{d}{dt}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R},\\
\frac{d^2}{dx^2}u(x,t) + C\frac{d}{dx}u(x,t) &= \frac{d}{dt}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para el estudio de la version fraccionaria de estas, se toma en cuenta que las derivadas fraccionarias de segundo orden pueden ser escritas utilizando $f(\alpha) = 2\alpha$ y $f(\alpha) = \alpha + 1$.

3.1 Método 1: Producto de funciones y Transformada de Laplace

La metodología usada en esta sección consiste en reducir una ecuación diferencial parcial fraccionaria a dos ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias, que puedan ser resueltas mediante la transformada de Laplace, de tal forma que la solución del problema inicial sea el producto de estas. Para esto, vamos a considerar una solución de tipo producto de funciones $u(x,t) = u(x)u(t)$ tal que $u(x), u(t) \in C[0,b]$ y la derivada de Rieman-Liouville de orden 2α centrada en $a^+ = 0$, $(D^{2\alpha})$, de tal forma que las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias a estudiar son las siguientes

$$D^{\alpha}u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$D^{2\alpha}u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$D^{2\alpha}u(x,t) + CD^{\alpha}u(x,t) = D^{\beta}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Donde, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$.

Proposición 7. *Sea* $u : [0,b] \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $0 < \beta < 1$, *entonces la ecuación diferencial fraccionaria ordinaria*

$$D^{\beta}u(t) = \lambda, \tag{29}$$

tiene como solución

$$u(t) = \frac{\lambda t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}. \tag{30}$$

Demostración. Sea $u : [0,b] \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 < \beta < 1$. Tomando la transformada de Laplace de (29) se tiene

$$\mathcal{L}\{D^{\beta}u(t)\} = \frac{\lambda}{s}$$

$$\Longrightarrow \; s^{\beta}\mathcal{L}\{u(t)\} - D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0} = \frac{\lambda}{s}$$

$$\Longrightarrow \; \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{\lambda}{s^{\beta+1}} + \frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0}}{s^{\beta}}.$$

Finalmente tomando la transformada inversa de Laplace con la ecuación (17) se obtiene como solución

$$u(t) = \frac{\lambda t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

■

Proposición 8. *Sea* $u : [0, b] \to \mathbb{R}$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $0 < \alpha < 1$*, entonces la ecuación diferencial fraccionaria ordinaria*

$$AD^{2\alpha}u(x) + BD^{\alpha}u(x) = \lambda, \quad A, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{31}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{\lambda}{A}x^{2\alpha}E_{\alpha,2\alpha+1}\left(-\frac{B}{A}x^{\alpha}\right) + D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}\left(-\frac{B}{A}x^{\alpha}\right) \\ + \frac{D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Demostración. Sea $u : [0, b] \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces la ecuación (31) puede ser reescrita como

$$D^{2\alpha}u(x) + \gamma D^{\alpha}u(x) = c, \tag{33}$$

donde $\gamma = \frac{B}{A}$ y $c = \frac{\lambda}{A}$. Tomando la transformada de laplace de (33)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^{2\alpha}u(x)\} + \gamma\mathcal{L}\{D^{\alpha}u(x)\} = \mathcal{L}\{c\} \\ \implies s^{2\alpha}\mathcal{L}\{u(x)\} - s^{\alpha}D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0} - D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0} \\ +\gamma\left(s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(x)\} - D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}\right) = \frac{c}{s}. \end{aligned}$$

La cual puede ser escrita de forma reducida como

$$\mathcal{L}\{u(x)\}(s^{2\alpha} + \gamma s^{\alpha}) - \tilde{A}_1(s^{\alpha} + \gamma) - \tilde{A}_2 = \frac{c}{s}, \tag{34}$$

donde $\tilde{A}_1 = D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}$ y $\tilde{A}_2 = D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}$. Ordenando la ecuación (34) y mediante algunos cálculos directos se obtiene

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{c}{s^{\alpha+1}(s^\alpha+\gamma)} + \frac{\tilde{A}_1}{s^\alpha} + \frac{\tilde{A}_2}{s^\alpha(s^\alpha+\gamma)}. \tag{35}$$

Finalmente, con ayuda de la ecuación (18) con $\beta = 2\alpha+1$ y $\beta = 2\alpha$ para el primer y tercer termino respectivamente, mientras que para el segundo termino utilizamos la ecuación (17), se toma la transformada de Laplace del lado derecho de la ecuación (35). Así se obtiene

$$u(x) = cx^{2\alpha}E_{\alpha,2\alpha+1}(-\gamma x^\alpha) + \tilde{A}_2 x^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(-\gamma x^\alpha) + \frac{\tilde{A}_1 x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned} u(x) = &\frac{\lambda}{A}x^{2\alpha}E_{\alpha,2\alpha+1}\left(-\frac{B}{A}x^\alpha\right) + D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}\left(-\frac{B}{A}x^\alpha\right) \\ &+ \frac{D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

■

Proposición 9. *Sea $u : [0, b] \to \mathbb{R}$,$\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces la ecuación diferencial fraccionaria ordinaria*

$$AD^{2\alpha}u(x) + Bu(x) = \lambda, \quad A, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{36}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} u(x) = &\frac{\lambda}{A}x^{2\alpha}E_{2\alpha,2\alpha+1}\left(-\frac{B}{A}x^{2\alpha}\right) + D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}\left(-\frac{B}{A}^2 x^{2\alpha}\right) \\ &+ D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}\left(-\frac{B}{A}x^{2\alpha}\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Demostración. Sea $u : [0, b] \to \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces la ecuación (36) puede ser reescrita como

$$D^{2\alpha}u(x) + \omega^2 u(x) = c, \tag{38}$$

donde $\omega^2 = \frac{B}{A}$ y $c = \frac{\lambda}{A}$. Tomando la transformada de laplace de (38)

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\{D^{2\alpha}u(x)\} + \omega^2\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{c\},\\ \Longrightarrow\ s^{2\alpha}\mathcal{L}\{u(x)\} - s^{\alpha}D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0} - D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0} + \omega^2\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{c}{s}.\end{gathered}$$

La cual puede ser escrita de forma reducida como

$$s^{2\alpha}\mathcal{L}\{u(x)\} - s^{\alpha}\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \omega^2\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{c}{s}, \tag{39}$$

donde $\tilde{A}_1 = D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}$ y $\tilde{A}_2 = D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}$. Ordenando la ecuación (39) y mediante algunos cálculos directos se obtiene

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{c}{s(s^{2\alpha}+\omega^2)} + \frac{\tilde{A}_2}{(s^{2\alpha}+\omega^2)} + \frac{\tilde{A}_1 s^{\alpha}}{(s^{2\alpha}+\omega^2)}. \tag{40}$$

Finalmente, con ayuda de la ecuación (18) con $\beta = 2\alpha + 1$,$\beta = 2\alpha$, $\beta = \alpha$ para el primer , segundo y tercer termino respectivamente, se toma la transformada de Laplace del lado derecho de la ecuación (40). Así obtenemos

$$u(x) = cx^{2\alpha}E_{2\alpha,2\alpha+1}\left(-\omega^2x^{2\alpha}\right) + \tilde{A}_2x^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}\left(-\omega^2x^{2\alpha}\right) + \tilde{A}_1x^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}\left(-\omega^2x^{2\alpha}\right).$$

O equivalentemente

$$\begin{aligned}u(x) = {}& \frac{\lambda}{A}x^{2\alpha}E_{2\alpha,2\alpha+1}\left(-\frac{B}{A}x^{2\alpha}\right) + D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}\left(-\frac{B}{A}^2x^{2\alpha}\right)\\ &+ D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}\left(-\frac{B}{A}x^{2\alpha}\right).\end{aligned}$$

■

Proposición 10. *Sea $u : [0,b] \to \mathbb{R}$,$\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces la ecuación diferencial fraccionaria ordinaria*

$$D^{\alpha}u(x) + Pu(x) = \lambda, \quad P \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

tiene como solución

$$u(x) = \lambda x^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(-Px^{\alpha}\right) + D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-Px^{\alpha}\right). \tag{42}$$

Demostración. Sea $u : [0, b] \to \mathbb{R}$,$\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$, por lo cual tomando la transformada de Laplace de (41) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^{\alpha}u(x)\} + P\mathcal{L}\{u(x)\} &= \frac{\lambda}{s}, \\ \Longrightarrow s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(x)\} - D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0} + P\mathcal{L}\{u(x)\} &= \frac{\lambda}{s}. \end{aligned} \tag{43}$$

Ordenando la ecuación (43) y mediante algunos cálculos directos se tiene nuestra solución

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{\lambda}{s(s^{\alpha} + P)} + \frac{D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}}{(s^{\alpha} + P)}. \tag{44}$$

Finalmente, con ayuda de la ecuación (18) con $\beta = \alpha + 1$,$\beta = \alpha$ para el primer y segundo termino, se toma la transformada inversa de Laplace de la ecuación (44). Así obtenemos

$$u(x) = \lambda x^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(-Px^{\alpha}\right) + D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-Px^{\alpha}\right).$$

■

Teorema 4. *Sea* $u(x,t) = u(x)u(t)$ *tal que* $u(x), u(t) \in C[0, b]$, $(\alpha, \beta) \in]0, 1]^2$, $(x, t) \in \Omega = [0, b] \times [0, b]$, $b < \infty$, *entonces la ecuación diferencial parcial fraccionaria*

$$D^{\alpha}u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}u(x,t), \tag{45}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\left(D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-Cx^{\alpha}\right)\right) \\ &\times \left(\frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0} t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right), \end{aligned} \tag{46}$$

donde $C \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [0,b] \times [0,b]$, $b < \infty$.

Demostración. Considerando $u(x,t) = u(x)u(t)$ tal que $u(x), u(t) \in C[0,b]$, $(\alpha, \beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [0,b] \times [0,b]$, $b < \infty$. Reemplazando $u(x,t)$ en la ecuación (45) y realizando algunos cálculos directos se tiene que

$$\frac{1}{u(x)} \left[D^{\alpha} u(x) + C u(x) \right] = \frac{1}{u(t)} \left[D^{\beta} u(t) \right]. \tag{47}$$

Para que los dos lados de la ecuación (47) sean iguales, estos deben ser igual a una constante por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(x)} \left[D^{\alpha} u(x) + C u(x) \right] = \lambda, \\ \frac{1}{u(t)} \left[D^{\beta} u(t) \right] = \lambda. \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no se anula, la única posibilidad para poder expresar su solución como un producto de funciones es con $\lambda = 0$.Usando las proposiciones 7 y 10 con $\lambda = 0$ obtenemos que la solución de la ecuación diferencial parcial fraccionaria (45) esta dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = \left(+ D^{-(1-\alpha)} u(x)|_{x=0} x^{\alpha - 1} E_{\alpha,\alpha} \left(-P x^{\alpha} \right) \right) \\ \times \left(\frac{D^{-(1-\beta)} u(t)|_{t=0} t^{\beta - 1}}{\Gamma(\beta)} \right). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Teorema 5. *Sea* $u(x,t) = u(x)u(t)$ *tal que* $u(x), u(t) \in C[0,b]$, $(\alpha, \beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [0,b] \times [0,b]$, $b < \infty$, *entonces la ecuación diferencial parcial fraccionaria*

$$D^{2\alpha} u(x,t) + C u(x,t) = D^{\beta} u(x,t), \tag{48}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \big(D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}\left(-Cx^{2\alpha}\right) \\ &\quad +D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}\left(-Cx^{2\alpha}\right)\big) \times \left(\frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right), \end{aligned} \tag{49}$$

donde $C \in \mathbb{R}$, $(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [0,b] \times [0,b]$, $b < \infty$.

Demostración. Considerando $u(x,t) = u(x)u(t)$ tal que $u(x), u(t) \in C[0,b]$, $(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [0,b] \times [0,b]$, $b < \infty$. Reemplazando $u(x,t)$ en la ecuación (45) y realizando algunos cálculos directos se tiene que

$$\frac{1}{u(x)}\left[D^{2\alpha}u(x) + Cu(x)\right] = \frac{1}{u(t)}\left[D^{\beta}u(t)\right]. \tag{50}$$

Para que los dos de la ecuación (50) sean iguales, estos deben ser igual a una constante, por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(x)}\left[D^{2\alpha}u(x) + Cu(x)\right] &= \lambda, \\ \frac{1}{u(t)}\left[D^{\beta}u(t)\right] &= \lambda. \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no se anula, la única posibilidad para poder expresar su solución como un producto de funciones es con $\lambda = 0$. Usando las proposiciones 7 y 9 con $\lambda = 0$ obtenemos que la solución de la ecuación diferencial parcial fraccionaria (48) esta dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \big(D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}\left(-Cx^{2\alpha}\right) \\ &\quad +D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}\left(-Cx^{2\alpha}\right)\big) \times \left(\frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right). \end{aligned} \tag{51}$$

■

Teorema 6. *Sea* $u(x,t) = u(x)u(t)$ *tal que* $u(x), u(t) \in C[0,b]$, $(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in$

$\Omega = [0, b] \times [0, b]$, $b < \infty$, *entonces la ecuación diferencial parcial fraccionaria*

$$D^{2\alpha}u(x,t) + CD^{\alpha}u(x,t) = D^{\beta}u(x,t), \tag{52}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\left(D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}\left(-Cx^{\alpha}\right) + \frac{D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \\ &\times \left(\frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right), \end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \in]0, 1]^2$, $(x, t) \in \Omega = [0, b] \times [0, b]$, $b < \infty$.

Demostración. Considerando $u(x,t) = u(x)u(t)$ tal que $u(x), u(t) \in C[0, b]$, $(\alpha, \beta) \in]0, 1]^2$, $(x, t) \in \Omega = [0, b] \times [0, b]$, $b < \infty$. Remplazando $u(x, t)$ en la ecuación (52)

$$\frac{1}{u(x)}\left[D^{2\alpha}u(x) + CD^{\alpha}u(x)\right] = \frac{1}{u(t)}\left[D^{\beta}u(t)\right]. \tag{53}$$

Para que los dos de la ecuación (53) sean iguales, estos deben ser igual a una constante, por lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(x)}\left[D^{2\alpha}u(x) + CD^{\alpha}u(x)\right] &= \lambda, \\ \frac{1}{u(t)}\left[D^{\beta}u(t)\right] &= \lambda. \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no se anula, la única posibilidad para poder expresar su solución como un producto de funciones es con $\lambda = 0$. Usando las proposiciones 7 y 8 con $\lambda = 0$ obtenemos que la solución de la ecuación diferencial parcial fraccionaria (52) esta dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\left(D^{-(1-2\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}\left(-Cx^{\alpha}\right) + \frac{D^{-(1-\alpha)}u(x)|_{x=0}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \\ &\times \left(\frac{D^{-(1-\beta)}u(t)|_{t=0}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right). \end{aligned}$$

■

3.2 Método 2: Integración Directa con Transformada de Laplace

La metodología usada en esta sección consiste en integrar directamente la ecuación diferencial parcial fraccionaria, de tal forma que tomando en cuenta la relación entre la integral y derivada fraccionaria se encuentra una ecuación cuyos términos son Laplace transformables. Una vez encontrada la ecuación Laplace transformada, se busca una ecuación integral de tipo Volterra de segunda especie la cual nos garantiza una solución única en términos de la función de Mittage-Leffler. Finalmente se toma en cuenta su forma distribucional y se obtiene la solución del problema original. Para esto, vamos a considerar $(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [x_0, X_0] \times [t_0, T_0]$, $x_0, t_0 > 0$, $X_0, T_0 < \infty$, tal que $u(x,t)$ admite derivadas fraccionarias integrables. Bajo estas condiciones, las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias a estudiar son las siguientes

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{x_0+}u(x,t) + Cu(x,t) &= D^{\beta}_{t_0+}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R}, \\ D^{\alpha+1}_{x_0+}u(x,t) + Cu(x,t) &= D^{\beta}_{t_0+}u(x,t), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Teorema 7. *Sea $C \in \mathbb{R}$,$(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [x_0, X_0] \times [t_0, T_0]$, $x_0, t_0 > 0$, $X_0, T_0 < \infty$, tal que $u(x,t)$ admite derivadas fraccionarias integrables $D^{\alpha}_{x_0+}$ y $D^{\beta}_{t_0+}$, entonces la ecuación diferencial parcial fraccionaria*

$$D^{\alpha}_{x_0+}u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}_{t_0+}u(x,t), \tag{54}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} u(x,t) = \ & (x-x_0)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left((D^{\beta}_{t_0+} - C)(x-x_0)^{\alpha}\right) f_0(t) \\ & - \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left((D^{\beta}_{t_0+} - C)(x-y)^{\alpha}\right) \delta(t-t_0) g_0(y)dy, \end{aligned} \tag{55}$$

donde $g_0(x) = I^{1-\beta}_{x_0^+}u(x,t_0)$, $f_0(t) = I^{1-\alpha}_{x_0^+}u(x_0,t)$ y δ es la función delta de Dirac.

Demostración. Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial fraccionaria

$$D_{x_0^+}^{\alpha}u(x,t) + Cu(x,t) = D_{t_0^+}^{\beta}u(x,t), \tag{56}$$

donde $C \in \mathbb{R}$,$(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [x_0, X_0] \times [t_0, T_0]$, $x_0, t_0 > 0$, $X_0, T_0 < \infty$, y $u(x,t)$ admite derivadas fraccionarias sumables $D_{x_0^+}^{\alpha}$ y $D_{t_0^+}^{\beta}$. Aplicando el operador integral $I_{x_0^+}^{\alpha}$ a los dos lados de la ecuación (56) y tomando en cuenta la relación entre la integral y derivada fraccionaria enunciada en el teorema 2 se tiene que

$$u(x,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_{x_0^+}^{1-\alpha}u(x_0,t) + CI_{x_0^+}^{\alpha}u(x,t) = I_{x_0^+}^{\alpha}D_{t_0^+}^{\beta}u(x,t).$$

De forma similar, aplicando el operador integral $I_{t_0^+}^{\beta}$ a los dos lados a la ecuación anterior y utilizando el teorema de Fubini se toma en cuenta la relación entre la integral y derivada fraccionaria enunciada en el teorema 2 de tal forma que se obtiene

$$\begin{aligned} &I_{t_0^+}^{\beta}u(x,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_{t_0^+}^{\beta}I_{x_0^+}^{1-\alpha}u(x_0,t) + CI_{x_0^+}^{\alpha}I_{t_0^+}^{\beta}u(x,t) \\ &= I_{x_0^+}^{\alpha}\left[u(x,t) - \frac{(t-t_0)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I_{t_0^+}^{1-\beta}u(x,t_0)\right]. \end{aligned}$$

La cual es equivalente a

$$I_{t_0^+}^{\beta}u(x,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_{t_0^+}^{\beta}f_0(t) + CI_{x_0^+}^{\alpha}I_{t_0^+}^{\beta}u(x,t) = I_{x_0^+}^{\alpha}u(x,t) - \frac{(t-t_0)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I_{x_0^+}^{\alpha}g_0(x), \tag{57}$$

donde $f_0(t) = I_{x_0^+}^{1-\alpha}u(x_0,t)$ y $g_0(x) = I_{t_0^+}^{1-\beta}u(x,t_0)$. Tomando la transformada de Laplace respecto a t de la ecuación (57) y utilizando sus propiedades de convolución se obtiene

$$\begin{aligned} &s^{-\beta}\mathcal{U}(x,s) - \tfrac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\beta}F_0(s) + \tfrac{Cs^{-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha-1}\mathcal{U}(y,s)dy \\ &\quad = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha-1}\mathcal{U}(y,s)dy - e^{-t_0 s}s^{-\beta}I_{x_0^+}^{\alpha}g_0(x), \end{aligned} \tag{58}$$

multiplicando la ecuación (58) por s^{β} y reorganizando sus términos obtenemos la siguiente ecuación del tipo Volterra

$$\mathcal{U}(x,s) = \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_0(s) - e^{-t_0 s} I^{\alpha}_{x_0+} g_0(x) + \frac{s^{\beta}-C}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha-1} \mathcal{U}(y,s)dy,$$

la cual en virtud del teorema 3 tiene como única solución

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x,s) = {} & \tfrac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_0(s) - e^{-t_0 s} I^{\alpha}_{x_0+} g_0(x) + (s^{\beta}-C) \\ & \times \textstyle\int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((s^{\beta}-C)(x-y)^{\alpha}\right) \\ & \left(\tfrac{(y-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}F_0(s) - e^{-t_0 s} I^{\alpha}_{x_0+} g_0(y)\right) dy. \end{aligned} \tag{59}$$

Dada la convergencia de las integrales y las series en la ecuación (59) podemos intercambiar estas y reescribirla de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x,t) &= (x-x_0)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((s^{\beta}-C)(x-x_0)^{\alpha}\right) F_0(s) \\ & \quad -e^{-t_0 s} \sum_{n=0}^{\infty} (s^{\beta}-C)^n I^{\alpha(n+1)}_{x_0^+} g_0(x). \end{aligned}$$

Finalmente para cancelar la transformada de Laplace tomamos en cuenta su forma distribucional y con ayuda del teorema multimonial y mediante algunos cálculos directos, podemos dejar la solución expresada en términos de la función de Mitage-Leffer

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (x-x_0)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((D^{\beta}_{t_0+}-C)(x-x_0)^{\alpha}\right) f_0(t) \\ & \quad - \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((D^{\beta}_{t_0+}-C)(x-y)^{\alpha}\right) \delta(t-t_0) g_0(y)dy, \end{aligned}$$

donde $g_0(x) = I^{1-\beta}_{x_0^+} u(x,t_0)$, $f_0(t) = I^{1-\alpha}_{x_0^+} u(x_0,t)$ y δ es la función delta de Dirac. ■

Teorema 8. *Sea $C \in \mathbb{R}$,$(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [x_0, X_0] \times [t_0, T_0]$, $x_0, t_0 > 0$, $X_0, T_0 < \infty$, tal que $u(x,t)$ admite derivadas fraccionarias integrables $D^{\alpha+1}_{x_0^+}$ y $D^{\beta}_{t_0^+}$, entonces la ecuación diferencial parcial fraccionaria*

$$D^{\alpha+1}_{x_0^+} u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}_{t_0^+} u(x,t), \tag{60}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (x-x_0)^{\alpha-1}E_{\alpha+1,\alpha}\left((D^{\beta}_{t_0{}^+}-C)(x-x_0)^{\alpha+1}\right)f_0(s) \\ &+ (x-x_0)^{\alpha}E_{\alpha+1,\alpha+1}\left((D^{\beta}_{t_0{}^+}-C)(x-x_0)^{\alpha+1}\right)f_1(s) \\ &- \int_{x_0}^{x}(x-y)^{\alpha}E_{\alpha+1,\alpha+1}\left((D^{\beta}_{t_0{}^+}-C)(x-y)^{\alpha}\right)\delta(t-t_0)g_0(y)dy, \end{aligned} \tag{61}$$

donde $g_0(x) = I^{1-\beta}_{x_0^+}u(x,t_0)$, $f_0(t) = I^{1-\alpha}_{x_0^+}u(x_0,t)$, $f_1(t) = D^{\alpha}_{a^+}u(x_0,t)$ *y* δ *es la función delta de Dirac.*

Demostración. Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial fraccionaria

$$D^{\alpha+1}_{x_0{}^+}u(x,t) + Cu(x,t) = D^{\beta}_{t_0{}^+}u(x,t), \tag{62}$$

donde $C \in \mathbb{R}$,$(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, $(x,t) \in \Omega = [x_0, X_0] \times [t_0, T_0]$, $x_0, t_0 > 0$, $X_0, T_0 < \infty$, y $u(x,t)$ admite derivadas fraccionarias sumables $D^{\alpha+1}_{x_0{}^+}$ y $D^{\beta}_{t_0{}^+}$. Aplicando el operador integral $I^{\alpha+1}_{x_0{}^+}$ a los dos lados de la ecuación (62) y tomando en cuenta la relación entre la integral y derivada fraccionaria enunciada en el teorema 2 se tiene que

$$u(x,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}D^{\alpha}_{x_0{}^+}u(x_0,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I^{1-\alpha}_{x_0{}^+}u(x_0,t) + CI^{\alpha+1}_{x_0{}^+}u(x,t) = I^{\alpha+1}_{x_0{}^+}D^{\beta}_{t_0{}^+}u(x,t).$$

De forma similar, aplicando el operador $I^{\beta}_{t_0{}^+}$ a los dos lados a la ecuación anterior y utilizando el teorema de Fubini se toma en cuenta la relación entre la integral y derivada fraccionaria enunciada en el teorema 2 de tal forma que se obtiene

$$\begin{aligned} I^{\beta}_{t_0{}^+}u(x,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}I^{\beta}_{t_0{}^+}D^{\alpha}_{x_0{}^+}u(x_0,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I^{\beta}_{t_0{}^+}I^{1-\alpha}_{x_0{}^+}u(x_0,t) + CI^{\alpha+1}_{x_0{}^+}I^{\beta}_{t_0{}^+}u(x,t) \\ = I^{\alpha+1}_{x_0{}^+}\left[u(x,t) - \frac{(t-t_0)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}I^{1-\beta}_{t_0{}^+}u(x,t_0)\right]. \end{aligned}$$

La cual es equivalente a

$$
\begin{aligned}
&I^{\beta}_{t_0^+}u(x,t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} I^{\beta}_{t_0^+} f_1(t) - \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{\beta}_{t_0^+} f_0(t) + C I^{\alpha+1}_{x_0^+} I^{\beta}_{t_0^+} u(x,t) \\
&= I^{\alpha+1}_{x_0^+} u(x,t) - \frac{(t-t_0)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I^{\alpha+1}_{x_0^+} g_0(x),
\end{aligned} \tag{63}
$$

donde $f_0(t) = I^{1-\alpha}_{x_0^+} u(x_0,t)$, $f_1(t) = D^{\alpha}_{x_0^+} u(x_0,t)$, y $g_0(x) = I^{1-\beta}_{t_0^+} u(x,t_0)$. Tomando la transformada de Laplace respecto a t de la ecuación (63) y utilizando sus propiedades de convolución se obtiene

$$
\begin{aligned}
&s^{-\beta}\mathcal{U}(x,s) - \frac{(x-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} s^{-\beta} F_1(s) - \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} s^{-\beta} F_0(s) + \frac{C s^{-\beta}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha}\mathcal{U}(y,s)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha}\mathcal{U}(y,s)dy - e^{-t_0 s} s^{-\beta} I^{\alpha+1}_{x_0^+} g_0(x),
\end{aligned} \tag{64}
$$

multiplicando la ecuación (64) por s^{β} y reorganizando sus términos obtenemos la siguiente ecuación de tipo Volterra

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}(x,s) =& \frac{(x-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} F_1(s) + \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F_0(s) - e^{-t_0 s} I^{\alpha+1}_{x_0^+} g_0(x) \\
&+ \frac{(s^{-\beta} - C)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha}\mathcal{U}(y,s)dy,
\end{aligned} \tag{65}
$$

la cual en virtud del teorema 3 tiene como única solución

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}(x,s) &= \frac{(x-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} F_1(s) + \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F_0(s) - e^{-t_0 s} I^{\alpha+1}_{x_0^+} g_0(x) \\
&+ (s^{-\beta} - C) \int_{x_0}^{x} (x-y)^{\alpha} E_{\alpha+1,\alpha+1}\left((s^{\beta} - C)(x-y)^{\alpha}\right) \\
&\left(\frac{(y-x_0)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} F_1(s) + \frac{(y-x_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F_0(s) - e^{-t_0 s} I^{\alpha+1}_{x_0^+} g_0(y)\right) dy.
\end{aligned} \tag{66}
$$

Dada la convergencia de las integrales y las series en la ecuación (66) podemos intercambiar estas y reescribirla de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}(x,t) &= (x-x_0)^{\alpha-1}E_{\alpha+1,\alpha}\left((s^{\beta}-C)(x-x_0)^{\alpha+1}\right)F_0(s) \\
&+ (x-x_0)^{\alpha}E_{\alpha+1,\alpha+1}\left((s^{\beta}-C)(x-x_0)^{\alpha+1}\right)F_1(s) \\
&- e^{t_0 s}\sum_{n=0}^{\infty}(s^{\beta}-C)^n I_{x_0^+}^{(n+1)(\alpha+1)}g_0(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente para cancelar la transformada de Laplace tomamos en cuenta su forma distribucional y con ayuda del teorema multinomial y mediante algunos cálculos directos, podemos dejar la solución expresada en terminos de la funcion de Mittage-Leffer

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= (x-x_0)^{\alpha-1}E_{\alpha+1,\alpha}\left((D_{t_0^+}^{\beta}-C)(x-x_0)^{\alpha+1}\right)f_0(s) \\
&+ (x-x_0)^{\alpha}E_{\alpha+1,\alpha+1}\left((D_{t_0^+}^{\beta}-C)(x-x_0)^{\alpha+1}\right)f_1(s) \\
&- \int_{x_0}^{x}(x-y)^{\alpha}E_{\alpha+1,\alpha+1}\left((D_{t_0^+}^{\beta}-C)(x-y)^{\alpha}\right)\delta(t-t_0)g_0(y)dy.
\end{aligned}
$$

Donde $g_0(x) = I_{x_0^+}^{1-\beta}u(x,t_0)$, $f_0(t) = I_{x_0^+}^{1-\alpha}u(x_0,t)$, $f_1(t) = D_{a^+}^{\alpha}u(x_0,t)$ y δ es la función delta de Dirac. ∎

CAPÍTULO IV
CONCLUSIONES Y FUTURO TRABAJO

En este trabajo, se exploró el uso de la transformada de Laplace y la integración directa para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias. Para ello, se aprovecho el kernel de la derivada e integral fraccionaria, ya que este nos permite plantear un producto de convolución y calcular la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Reimann-Liouville. Por otro lado, el kernel $(x-t)^{\alpha-1}$ nos permite expresar mediante la función de Mittage-Leffler, la solución de ecuaciones de Volterra de segunda especie como se enuncia en el teorema 3.

El uso de la transformada de Laplace, si bien es un gran método para resolver ecuaciones diferenciales, este puede involucrar cálculos extremadamente difíciles. A pesar de que una gran cantidad de transformadas inversas de Laplace de funciones tipo $s^{\alpha}(a + bs^{\beta})$ pueden ser expresadas mediante la función de Mittage-Leffler, el cálculo de transformadas inversas de Laplace esta limitado por el orden de α ya que al este ser variable , es dificil encontrar una factorización adecuada mediante fracciones parciales. Dicho esto, se puede observar que proponiendo una solución de tipo producto de funciones podemos llegar a encontrar de una forma más sencilla la solución de una ecuación diferencial parcial fraccionaria de segundo orden, reduciéndola a dos ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias homogénas. Debido a que la derivada de Riemann-Lioville de una constante no se anula. A pesar de ello, la propiedad de semigrupo de la derivada fraccionaria de Rieman-Liouville nos dice que para derivadas de orden 2α nuestra solución solo es valida para $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Por otro lado, se puede observar que la relación entre la integral y derivada fraccionaria puede llevarnos a encontrar ecuaciones de Volterra de segunda especie. Si bien es cierto que la importancia del orden de integración y derivación depende del espacio en donde se trabaje, el uso de funciones L_1 nos permite llegar a ecuaciones de Volterra de segunda especie, asegurando así una solución única. Sin embargo, para obtener resultados de esta forma se necesita una gran cantidad de cálculos que pueden llegar a ser muy complejos, en especial dependen mucho de la convergencia de la series e integrales. Hay que destacar que la existencia de la ecuacíon de tipo Volterra depende de que todas las derivadas respecto a la misma variable tengan el mismo orden, es decir no se puede tener derivadas de orden $D^{\alpha+1}_{x_0^+}$ y $D^{\alpha}_{x_0^+}$ dentro de una misma ecuación diferencial parcial fraccionaria si se desea aplicar el método 2.

La particularidad de estos métodos es que están limitados a coeficientes constantes por lo cual el siguiente paso a seguir, seria trabajar con ecuaciones diferenciales fraccionarias, parciales y ordinarias , con coeficientes variables. Para esto, se propone en un futuro definir de una manera conveniente la ley de la cadena y expandir al metódo de Frobenious al caso fraccionario, ya que muchas de las ecuaciónes diferenciales que describen fenónmenos físicos son resueltas por estos métodos. En particular el método de Frobenious, nos ayuda a resolver ecuaciones diferenciales cuya solución son funciones especiales, como los polinomios de Hermite o Laguerre [8], de tal forma que extendiendo el método de Frobenoius al caso fraccionario podamos calcular funciones especiales de orden no entero.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abel, N. (1881). Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. *Oeuvres*, *1*, 11-27.

[2] El-Ajou, A., Odibat, Z., Momani, S. & Alawneh, A. (2010). Construction of analytical solutions to fractional differential equations using homotopy analysis method. *International Journal of Applied Mathematics*, *40*(2).

[3] Almeida, R. (2017). A caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *44*, 460-481.

[4] Almusharrf, A. (2011). Development of fractional trigonometry and an application of fractional calculus to pharmacokinetic model.

[5] Andrea, S. & Mendoza, A. (2001). *Gu*
ıa de matemáticas vii. Universidad Simón Bolívar, Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas.

[6] Ansorge, R. & Sonar, T. (2009). *Mathematical models of fluid dynamics*. Wiley Online Library.

[7] Applebaum, D. (2004). Lévy processes-from probability to finance and quantum groups. *Notices of the AMS*, *51*(11), 1336-1347.

[8] Arfken, G. & Weber, H. (1999). Mathematical methods for physicists. American Association of Physics Teachers.

[9] Ballén López, J., León, P. y col. (2017). *Método de descomposición de adomian* (Tesis de maestría, Universidad EAFIT).

[10] Caballero, M. (2019). Una introducción a las ecuaciones integrales lineales. Recuperado desde https://hdl.handle.net/11441/90001

[11] Calderón, M., Rosales, J., Guzmán, R., González, A. & Álvarez, J. (2015). El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta universitaria*, *25*(2), 20-27.

[12] Carpinteri, A., Cornetti, P. & Sapora, A. (2014). Nonlocal elasticity: an approach based on fractional calculus. *Meccanica*, *49*(11), 2551-2569.

[13] Craiem, D., Rojo, F., Atienza, J., Guinea, G. & Armentano, R. (2008). Fractional calculus applied to model arterial viscoelasticity. *Latin American applied research*, *38*(2), 141-145.

[14] Edelman, M. (2013). Fractional dynamical systems. doi:10.1109/ICFDA.2014.6967376. eprint: arXiv:1401.0048

[15] Ferreira, M. & Vieira, N. (2016). Eigenfunctions and fundamental solutions of the fractional laplace and dirac operators: the riemann-liouville case. *Complex Analysis and Operator Theory*, *10*(5), 1081-1100.

[16] Haubold, H., Mathai, A. & Saxena, R. (2011). Mittag-leffler functions and their applications. *Journal of Applied Mathematics*, *2011*.

[17] Liouville, J. (1834). Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *1834*(11), 1-19.

[18] Molano Cabrera, S. A. y col. (s.f.). La alternativa de fredholm.

[19] Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.

[20] Rudin, W. y col. (1964). *Principles of mathematical analysis*. McGraw-hill New York.

[21] Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O. y col. (1993). *Fractional integrals and derivatives*. Gordon y Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland.

[22] Schiff, J. (2013). *The laplace transform: theory and applications.* Springer Science & Business Media.

[23] Spiegelhalter, D., Best, N. & Carlin, B. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, *64*(4), 583-639.

[24] Sumelka, W., Zaera, R. & Fernández-Sáez, J. (2015). A theoretical analysis of the free axial vibration of non-local rods with fractional continuum mechanics. *Meccanica*, *50*(9), 2309-2323.

[25] Tarasova, V. & Tarasov, V. (2016). Elasticity for economic processes with memory: fractional differential calculus approach. *Fractional Differential Calculus*, *6*(2), 219-232.

[26] Zill, D. (2012). *A first course in differential equations with modeling applications.* Cengage Learning.