Universidad San Francisco de Quito USFQ
Colegio de Ciencias e Ingenierías

Teorema de Hopf-Rinow: completitud, convexidad y conectividad sobre variedades riemannianas

Guillermo David Sánchez Paladines
Matemáticas

Trabajo de fin de carrera presentado como requisito para la obtención del título de matemático

Quito, 20 de diciembre del 2021

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE FIN DE CARRERA

TEOREMA DE HOPF-RINOW: COMPLETITUD, CONVEXIDAD Y CONECTIVIDAD SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS

GUILLERMO DAVID SÁNCHEZ PALADINES

PhD. Oihane F. Blanco

QUITO, 20 DE DICIEMBRE DEL 2021

Derechos de Autor

Nombre completo: Guillermo David Sánchez Paladines

Código: 00203778

Cédula de indentidad: 1720777620

Lugar y fecha: Quito, 20 de diciembre del 2021

Aclaración para publicación

Unpublished Document

Resumen

La geometría riemanniana nace de una extensión de la geometría diferencial o analítica clásica. En la geometría riemanniana se trabaja de forma local sobre variedades al inducir métricas. Estas métricas permiten medir distancias y ángulos, por lo que pueden generalizar la idea de líneas rectas sobre la variedad. En este trabajo se busca encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que estas líneas rectas, conocidas como geodésicas, se extiendan hasta el infinito, lo que llamamos completitud geodésica. Para ellos analizaremos el teorema de Hopf-Rinow y sus implicaciones en tres aspectos geométricos de la variedad: conectividad, convexidad y completitud. A través de este teorema encontraremos que una variedad es geodésicamente completa si y solo si es métricamente completa. Esto demuestra que muchas de las propiedades de los espacios topologíca completamente metrizables se extienden a las variedades geodésicamente completas de manera directa.

Palabras clave: Geometría riemanniana, geometría diferencial, Hopf-Rinow, geodésica, completitud, métrica, conectividad, convexidad.

Abstract

Riemannian geometry arises from an extension of classical differential or analytic geometry. In Riemannian geometry we works locally on varieties by inducing metrics. These metrics allow us to measure distances and angles, so they can generalize the idea of straight lines on the manifold. In this paper we seek to find the necessary and sufficient conditions for these straight lines, known as geodesics, to extend to infinity, which we call geodesic completeness. On this purpose, we will analyze the Hopf-Rinow theorem and its implications in three geometric aspects of the variety: connectivity, convexity and completeness. Through this theorem we will find that a manifold is geodesically complete if and only if it is metrically complete. This shows that many of the properties of compeltely metrizable topological spaces extend to geodesically complete manifolds in a straightforward manner.

Key words: Riemannian geometry, Differential geometry, Hopf-Rinow, geodesic, completness, metric, conectivity, convexity.

Índice

Índice de figuras

Introducción

El primer registro que encontramos de geometría de alguna civilización se encuentra en tabletas de arcilla pertenecientes a la civilización del valle del Indo. Se cree que este artefacto mostraba la clasificación de triángulos análoga a la clasificación contemporánea según sus ángulos, esto es; águdo, recto u obtuso. No se sabe si es que era un estudio sistemático de la geometría, pues las tabletas que se pudieron rescatar y restaurar están "escritas" con símbolos que no podemos descifrar. De hecho, la comunidad científica no está segura de que la civilización del valle del Indo hubiera tenido un sistema de escritura. Por lo que, lo poco que se puede concluir acerca de este sistema geométrico es, en el mejor de los casos, hipotético.

Por otro lado, el consenso occidental es que la geometría, tal y como la conocemos, comenzó hace casi 3000 años, con Tales de Mileto. A pesar de que no existen registros escritos por Tales mismo, la escuela helenística preservó este conocimiento. Es por esto que se le atribuye la formulación del primer teorema con algún grado de formalidad. Según la tradición helenística, este teorema fue deducido por Tales de forma original. Aunque, ciertamente, existe debate sobre la autenticidad de la autoría de muchos pensadores griegos.

Durante este periodo, casi 100 años después de Tales de Mileto, nace Platón, para quien la geometría tenía aplicaciones metafísicas. Ciertamente no fue el primero en llegar a esta clase de conclusiones acerca de la geometría. Sin embargo, es de los pocos cuyo pensamiento aun sigue influenciando el pensamiento contemporáneo. Hoy en día, parte del currículum estándar de cualquier escuela primera contiene el estudio de los sólidos platónicos desde un punto de vista contemporáneo. Pero, para Platón y su escuela, los elementos clásicos eran proyecciones de los sólidos platónicos. Es decir, para esta escuela, estas figuras geométricas habitaban en un espacio ajeno al espacio donde habitamos los humanos. Estas figuras eran perfectas y su refejo en nuestro plano material daba paso a la realidad como la percibimos. Construyendo sobre estas ideas metafísicas, Euclides escribe tratados en los que formaliza el estudio de la geometría con un objetivo claro, formalizando la geometría de tal forma que fuera posible estudiarla de forma más clara y tangible a lo divino.

Con los años se fueron sofisticando las ideas, a través de las cuales nacieron formalismos y maquinaria matemática nueva. Secciones cónicas, teselaciones, curvas cuadráticas, cúbicas y quínticas, etc. Sin embargo, el método más importante, al menos en el ámbito de este trabajo, fueron los trabajos de Newton y Leibniz, entre otros, con respecto al cálculo diferencial e integral. Del estudio de los gráficos de curvas diferenciables nace la idea de la geometría analítica, y posteriormente la geometría diferencial, la cual está especialmente interesada en estudiar lo que ahora llamaríamos subvariedades del espacio euclídeo tridimensional. Muchos matemáticos prolíficos estudiaron estas superficies diferenciables con el afán de determinar sus propiedades. Como en casi todas las áreas de las matemáticas de la época, las propiedades más importantes fueron derivadas por Carl Friedrich Gauss. Su *Teorema Egregium* es indiscutiblemente, la joya de la geometría diferencial, e históricamente el interés en la geometría diferencial aumenta a partir este descubrimiento.

Por otra parte, una de las mentes brillantes contemporáneas a Gauss fue Bernhard Riemann, quien deseaba extender las ideas de la geometría diferencial a otro tipo de figuras geométricas, generalizaciones de las superficies diferenciables que hoy en día llamaríamos variedades diferenciables. El acercamiento de Riemann a estudiar estas variedades diferenciables fue tratando de embeberlas en el espacio euclídeo. Muchas de estas variedades diferenciables tenían embebimientos sencillos en el espacio euclídeo. Sin embargo, con el paso del tiempo se fueron construyendo variedades diferenciables más exóticas para las cuales no era trabajo sencillo encontrar estos embebimientos. Esto marca el comienzo de lo que ahora llamamos teoría local de la geometría riemanniana, en la cual no se buscan embebimientos sino que difeomorfismos locales, pues usualmente esto es lo mejor que se puede encontrar. De cualquier manera, no sería hasta 200 años después de Riemann que John Forbes Nash Jr. terminaría con la idea de encontrar embebimientos de estas variedades diferenciables en espacio euclídeo (curiosamente Nash quería comprobar que toda variedad puede ser embebida de una manera buena en un espacio euclídeo y, a pesar de que la conclusión fue positiva, también se determinó que encontrar estos embebimientos podía ser una tarea demasiado complicada), de tal forma que la comunidad de geómetras diferenciables pre-riemannianos se resignarían, para bien o para mal, a estudiar las propiedades de estas variedades diferenciables sobre una estructura nativa y, en la gran parte del tiempo, local.

Si bien en este recuento histórico utilizamos lenguaje como variedades diferenciables y diferomorfismos, estos conceptos eran desconocidos para Riemann y fueron desarrollados más adelante. El desarrollo de los formalismos de la geometría riemanniana clásica terminaría con la aparición de figuras modernas como Tullio Levi-Civita y Gregorio Ricci-Curbastro, quienes desarrollarían el lenguaje sobre el cual se expresa esta estructura nativa de la geometría riemanniana: el cálculo tensorial.

Además es extremadamente importante considerar los aportes de matemáticos prolíficos como Heinz Hopf y su estudiante doctoral Willi Rinow, matemáticos modernos de finales del siglo XX. Hopf especialmente siempre mostró interés en los espacios métricos y su conexión con las variedades. En su tesis doctoral Hopf daría grandes avances en el estudio de variedades diferenciables, al encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que una variedad sea difeomorfa a los espacios modelos eculideanos, los cuales son: el espacio euclídeo, la esfera y el plano hiperbólico. Si bien Hopf fue un matemático que consiguió innumerables avances en lo que respecta a este trabajo, salta a la fama de nuevo con la tesis doctoral de su estudiante Willi Rinow, los cuales en conjunción publican el trabajo títulado *Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Großen und im Kleinen*. Con un título a simple vista inocuo, que se puede traducir al español como *Sobre las conexiones entre la geometría diferencial a gran y pequeña escala*, ellos publican la primera demostración de un teorema que ahora conocemos como el teorema de Hopf-Rinow. Este teorema revoluciona la geometría riemanniana pues demuestra una relación de equivalencia entre una variedad riemanniana y un espacio métrico, de tal forma, que dadas ciertas condiciones sobre una variedad riemanniana, sus propiedades pueden ser estudiadas como un espacio métrico, y viceversa. Este trabajo se centrará específicamente en este teorema y sus implicaciones superficiales en la geometría de las variedades riemannianas.

En el primer capítulo comenzamos tratando de definir los objetos geométricos en los que estamos interesados. Estos objetos geométricos, conocidos como variedades topológicas, conforman un universo por si mismas, es decir, no estarán contenidas en un espacio más grande o general. Por lo cual, para el estudio diferenciable de estas variedades es imperativo primero definir una estructura diferenciables sobre ellas. Esta estructura diferenciable nos permitirá extender la idea de diferenciabilidad sobre una aplicación entre dos variedades y localizarla a vecindades de las variedades. En este capítulo pondremos especial interés en los espacios tangentes. Primero analizaremos sus propiedades identificandolos con los espacio afines $\mathbb{R}^m_p$. Posteriormente, encontraremos cómo los miembros de este espacio afín están relacionados de forma biunívoca con objetos geométricos conocidos como derivadas covariantes (que a su vez son derivaciones), y a través de estas derivaciones, definiremos la idea de vector y de espacio tangente en un punto de una variedad en general. La discusión de espacios tangentes nos llevará a encontrar una base para este espacio vectorial. Con esta estructura diferenciable y la base del espacio tangente, además, podremos definir las apliaciones diferenciales (esto es, aplicaciones lineales que aproximan a una aplicación entre variedades) de forma global y local, con los cuales construiremos isomorfismos y/o aplicaciones inyectivas que, mediante el teorema de la función inversa generalizada a una variedad diferenciable, crearán difeomorfismos importantes (véase por ejemplo la Definición 2.16). Así mismo, estudiaremos la definición de campo tensorial sobre una variedad diferenciable, lo que nos permitirá crear estructuras sobre una variedad diferenciable, como por ejemplo campos de vectores, o campos métricos. Estos últimos proporcionarán un producto punto sobre cada espacio tangente de la variedad (véase la Definición 2.1). En el Capítulo 2 expandiremos sobre la idea de campos tensoriales. Definiremos un campo $(2, 0)$-tensorial al que llamaremos tensor métrico o métrica riemanniana. Este tensor, en conjunto con la variedad diferenciable será conocido como una variedad riemanniana, el objeto central de estudio de este trabajo. Nuevamente, observaremos que este campo tensorial es, en esencia, local. Pues solo actuará entre vectores miembros del mismo espacio tangente. Por lo que, por si solo, no podrá comparar cualidades de vectores cuyo punto de origen sea diferente. Es por eso que definiremos la idea de conexiones afines como una forma de definir la idea de transportar vectores entre espacios tangentes. De tal forma, definiremos la derivada covariante que será la forma con la que nos moveremos entre espacios tangentes. Además, con ayuda de esta derivadas definiremos la idea de una geodésica (la cual generaliza la idea del camino más corto entre dos puntos, al menos locamente) sobre una variedad y encontraremos una forma explícita de calcularlas. Curiosamente, en el proceso de encontrar una conexión compatible y simétrica encontraremos la idea de los símbolos de Christoffel, los cuales, de una forma no tan intuitiva, se puede decir que codifican la relación entre la métrica y la variedad diferenciable. La importancia de estos símbolos será observada cuando demostremos el Teorema Fundamental de la geometría riemanniana. Para finalizar el capítulo estudiaremos los mapas exponenciales, que son aplicaciones entre el fibrado tangencial y la variedad. A través de ellos construiremos coordenadas con propiedades especiales. Finalmente, en el capítulo 3 pondremos a trabajar los conceptos definidos en el anterior capítulo para poder concluir hechos sobre la completitud, conectividad y convexidad de las variedades riemannianas. Para ello primero veremos como interpretar una variedad riemanniana como espacio métrico. A pesar de que llamamos al tensor de métrica riemanniana una "métrica", no es trivial comprobar que efectivamente conforma un espacio métrico en conjunción con la variedad. Especialmente porque el tensor métrico actua sobre vectores del espacio tangente, por lo que primero necesitamos definir un métrica inducida (topológica) sobre la variedad. Además, veremos el sorprendente resultado de que, independientemente del tensor métrico que escojamos, este tensor inducirá una métrica tal que la topología inducida sobre la variedad sea idéntica a la topología de la variedad, es decir observaremos que las variedades riemannianas siempre son espacios metrizables. Posteriormente trabajaremos para demostrar el teorema de Hopf-Rinow, un teorema que muestra la especial conexión entre las variedades riemannianas y los espacios métricos. Entre los resultados de este teorema, observaremos que las variedades riemannianas no son solo espacios metrizables, sino que si asumimos completitud geodésica entonces implicará que sean espacios completamente metrizables. Observaremos que esta relación es tan fuerte, que la completitud métrica será equivalente a la completitud geodésica sobre variedades riemannianas. Además el teorema de Hopf-Rinow nos entregará las condiciones necesarias y suficientes para cuando una geodésica se comporta globalmente como dentro de una vecindad normal (es decir, como una línea "recta", significando esto la ruta más corta entre dos puntos). Así mismo, con la ayuda del teorema de Hopf-Rinow observaremos que estas variedades completas necesariamente son conexas por caminos globalmente. Y si es que no consideramos completitud, siempre podemos concluir, al menos, conexidad por caminos localmente, con la ayuda del mapa exponencial. Para concluir, en esta sección también estudiaremos las propiedades de convexidad de una variedad riemanniana. Esta propiedad será un poco más elusiva pues no es una implicación directa de lo visto en este trabajo.

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος, καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὸν θεόν, καὶ θεὸς ἦν ὁ λόγος.

1. Preliminares: Variedades Diferenciables

En este trabajo comenzaremos estudiando de manera formal a qué nos referimos con variedades topológicas. Después definiremos cómo comenzar a construir estructuras diferenciables sobre estas variedades topológicas. En este capítulo también comenzamos a definir las ideas de diferenciabilidad de una aplicación en un punto, su diferencial en el punto, el cálculo tensorial, y cómo éste generaliza la idea de los espacios tangentes de la geometría diferencial. Es decir, el capítulo 1 consta de los preámbulos necesarios para poder comenzar a trabajar sobre variedades riemannianas, objeto sobre el que se desarrolla todo el estudio matemático de este trabajo y que será definido en el capítulo 2.

1.1. Variedades topológicas

Definición 1.1 *Sea M un conjunto universo. Se dice que M es una* variedad topológica de dimensión m *si verifica las siguientes condiciones:*

1. *M admite una topología τ_M, tal que (M, τ_M) es un espacio topológico.*

2. *(M, τ_M) es Hausdorff, esto es,*

$$\forall p, q \in M, p \neq q, \exists U_p, U_q \in \tau_M : p \in U_p \wedge q \in U_q \wedge U_p \cap U_q = \emptyset,$$

3. *(M, τ_M) es segundo numerable, esto es, τ_M admite una base numerable.*

4. *$(M\tau_M)$ es localmente euclideo, esto es, existe un $m \in \mathbb{N}$ fijo tal que para cualquier punto $p \in M$ existe un homeomorfismo ϕ_p entre un abierto $U_p \subseteq M$ que contiene a p, y un abierto W de $\mathbb{R}^m$:*

$$\begin{aligned} \exists m \in \mathbb{N} : \quad & \forall p \in M,\ \exists U_p \in \tau_M \text{ que verifica que } p \in U_p \\ & \wedge\ \exists \phi_p : U_p \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^m \text{ tal que } \phi_p \text{ es un homeomorfismo entre abiertos.} \end{aligned}$$

La propiedad de localmente euclidea nos permite definir el concepto de coordenadas de un punto p:

Definición 1.2 *Sea M una variedad topológica de dimensión m, consideremos un punto $p \in M$. Sabemos que existe $\phi_p : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un homeomorfismo local en p. Entonces:*

1. *El (U_p, ϕ_p) será conocido como* entorno coordenado de *p;*

2. *El punto $\phi_p(q) = (x^1(q), \ldots, x^m(q))$ será conocido como* las coordenadas locales de *$q \in U_p$;*

3. *Cada mapa ϕ_p será conocido como una* parametrización local *o* carta local de coordenadas para *U_p.*

Obsérvese que por el literal 3. de la Definición 1.2 , (U_p, ϕ_p) también es un entorno coordenado de algún otro punto q si es que se verifica que $q \in U_p$, por lo que, por esta hiperlocalidad, podemos obviar el punto p y escribir (U, ϕ). De hecho, cada ϕ es un homeomorfismo local entre M y $\mathbb{R}^m$ en un punto cualquiera $q \in U \subset M$, por lo que la variedad topológica (M, τ_M) es localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^m$, y es por eso que se dice que es de dimensión m.

Ahora, el hecho de que sea Hausdorff nos previene de que exista más de un resultado a la hora de calcular un límite, y el que sea segundo numerable nos va a permitir construir un recubrimiento numerable por abiertos de M, lo cual permitirá la definición de atlas más adelante. Sin embargo, estas restricciones pueden ser relajadas [4].

Además, si (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son dos entornos coordenados de un mismo punto $p \in M$, los abiertos $W_\alpha \triangleq \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $W_\beta \triangleq \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son homeomorfos con la topología usual de $\mathbb{R}^m$ mediante el homeomorfismo $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$, por lo que tienen la misma estructura topológica:

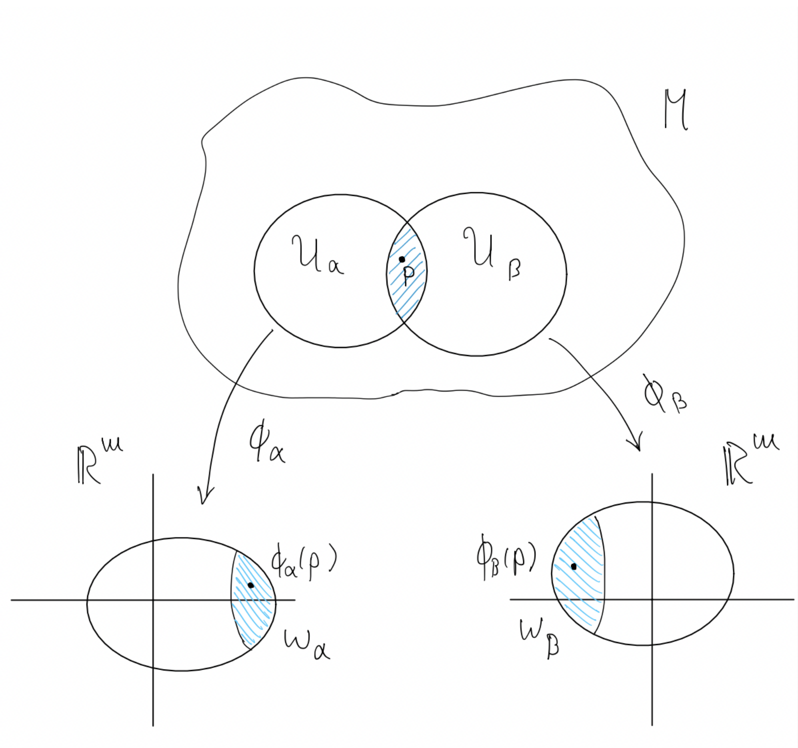


Figura 1: Variedad diferenciable enfatizando en la intersección de vecindades abiertas

1.2. Variedades diferenciables

Ahora vamos a crear la estructura diferenciable sobre una variedad topológica. Para ello definimos primero la idea de un atlas, el cual será un conjunto de entornos coordenados que recubren a M:

Definición 1.3 *Se define al* atlas de una variedad topológica M *como:*

$$\mathcal{A} = \left\{ (U_\alpha, \phi_\alpha) : M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \right\},$$

y Λ *es un conjunto numerable.*

De esta forma:

Definición 1.4 *Se dice que dos entornos coordenados* (U_α, ϕ_α) *y* (U_β, ϕ_β) *pertenecientes al atlas* $\mathcal{A}$ *de una variedad topológica son* compatibles*, y se denota como* $(U_\alpha, \phi_\alpha) \sim (U_\beta, \phi_\beta)$ *si se verifica que:*

1. U_α *y* U_β *son abiertos;*
2. $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ *y* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ *son funciones diferenciables en su dominio de definición.*

Si $(U_\alpha, \phi_\alpha) \sim (U_\beta, \phi_\beta)$*, entonces los mapas compuestos* $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$ *y* $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$ *son conocidos como* cambios locales de coordenadas *y definen difeomorfismos (locales) entre abiertos de* $\mathbb{R}^m$*.*

Obsérvese que si $U_\alpha \cap U\beta = \emptyset$, entonces los entornos coordenados (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son trivialmente compatibles. Además, en las variedades topológicas $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\phi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$ son homeomorfos, pero si además los entornos coordenados son compatibles, entonces también son difeomorfos, esto es, tienen la misma estructura diferenciable.

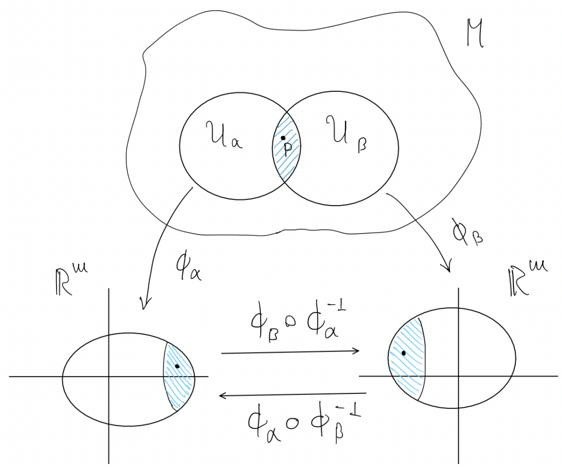


Figura 2: Variedad diferenciable enfatizando en los cambios de coordenadas en la intersección de dos vecindades abiertas

Definición 1.5 *Se define un* atlas diferenciable $\mathcal{A}_M$ *sobre una variedad topológica* (M, τ_M) *que otorga* estructura diferenciable a M *como aquel atlas tal que sus entornos coordenados son compatibles en pares, es decir, si* Λ *es un conjunto de indices numerable y:*

$$\mathcal{A}_M = \left\{ (U_\alpha, \phi_\alpha) : \forall \alpha, \beta \in \Lambda, (U_\alpha, \phi_\alpha) \sim (U_\beta, \phi_\beta) \wedge M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \right\}.$$

Ejemplo 1.6 *Sea* M *una variedad topológica y* $\mathcal{A}_M = \{(U, \phi)\}$ *un atlas de un sólo sistema coordenado. Entonces,* $\mathcal{A}_M$ *proporciona de forma trivial una estructura diferenciable sobre* M*.*

Ahora que ya tenemos un atlas diferenciable, podemos inducir una estructura diferenciable sobre una variedad topológica, para así poder hacer cálculos analíticos:

Definición 1.7 *Se dice que* $(M, \mathcal{A}_M)$ *es una* variedad diferenciable*, si* M *es una variedad topológica y* $\mathcal{A}_M$ *es un atlas diferenciable asociado a* M*.*

Es importante demostrar que $\mathbb{R}^m$ es una variedad diferenciable pues más adelante utilizaremos este hecho para encontrar el representante local de una curva en M:

Ejemplo 1.8 *Consideremos el conjunto* $\mathbb{R}^m$ *con su topología usual* τ*. Es un hecho topológico fundamental que* $\mathbb{R}^m$ *es un espacio de Hausdorff [11]. Si consideramos la base para la topología de* $\mathbb{R}^m$*,* $B = \{B_p(r) : r > 0, p \in \mathbb{R}^m\}$ *donde* $B_p(r)$ *es la bola abierta con radio* r *centrada en* p *usando la distancia euclidea, podemos definir un subconjunto* $B' = \{B_{p'}(r') : r \in \mathbb{Q} > 0, p \in \mathbb{Q}^m \subset \mathbb{R}^m\}$ *y este conjunto es una base numerable para* $\mathbb{R}^m$*. Por lo que* $\mathbb{R}^m$ *es un espacio segundo numerable. Finalmente, consideremos el endomorfismo trivial* $id(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^m$*. Entonces* $\mathbb{R}^m$ *es globalmente euclideo de forma trivial. Por lo que* $\mathbb{R}^m$ *es una variedad topológica de dimensión* m*.*

Utilizando el mismo endomorfismo trivial, podemos definir un único entorno coordenado $(\mathbb{R}^m, id)$ *que recubre a todo* $\mathbb{R}^m$ *y que proporciona un sistema global de coordenadas para todo punto* $p \in \mathbb{R}^m$*. Además id es compatible consigo mismo. Es decir que podemos definir un atlas diferenciable* $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, id)\}$ *para* $\mathbb{R}^m$*, y por lo tanto* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{A})$ *es una variedad diferenciable.*

Normalmente se comienza con un conjunto M que no tiene una topología asociada. La topología se contruye una vez que encontramos un conjunto de funciones inyectivas entre M y $\mathbb{R}^n$. La topología que se contruye recae en una sola restricción, que las cartas de coordenadas ϕ_α sean homeomorfismos locales entre M y $\mathbb{R}^n$. Dicho de otra manera, a través de las cartas locales ϕ_α se induce una topología sobre la variedad M heredada de $\mathbb{R}^m$ la cual nos permite definir la idea de diferenciabilidad sobre la variedad M, exigiendo que los cambios de coordenadas sean diferenciables. Es decir, nuestra elección de atlas $\mathcal{A}$ induce una topología sobre M. Esta topología inducida por el atlas está relacionada de forma biunívoca con el atlas, es decir que es única para cada atlas [6]. A través de estos conceptos, es posible construir la caracterización formal de las variedades diferenciables según la siguiente proposición:

Proposición 1.9 (Caracterización para variedades diferenciables) *Sea* $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ *tal que* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es un recubrimiento de* M*, y* $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *son inyectivas, para un* $m \in \mathbb{N}$ *fijo. Entonces, si se verifican las siguientes condiciones,* $(M, \mathcal{A})$ *será una variedad diferenciable de dimensión* m*:*

(1) $\phi_\alpha(U_\alpha)$ *es un abierto de* $\mathbb{R}^m$ *con la topología usual,* $\forall\alpha \in \Lambda$*;*

(2) si $U \triangleq U_\alpha \cap U_\beta$*, entonces* $W_\alpha \triangleq \phi_\alpha(U)$ *y* $W_\beta \triangleq \phi_\beta(U)$ *son abiertos de* $\mathbb{R}^m$ *con la topología usual,* $\forall\alpha, \beta \in \Lambda$*;*

(3) si $U \neq \emptyset$*, entonces* $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : W_\beta \longrightarrow W_\alpha$ *y* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : W_\alpha \longrightarrow W_\beta$ *son funciones diferenciables en el sentido tradicional;*

(4) existe una familia finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *que recubre a* M*;*

(5) $\forall p, q \in M, p \neq q, \exists U_p, U_q \in \tau_M : p \in U_p \wedge q \in U_q \wedge U_p \cap U_q = \emptyset$.

Además, la topología para la cual $(M, \mathcal{A})$ *es una variedad diferenciable es:*

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{U \subseteq M : \forall(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}, \phi_\alpha(U \cap U_\alpha) \in \tau_{\mathbb{R}^m}\},$$

Y la base para esta topología es el conjunto:

$$B_{\mathcal{A}} = \{\phi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in \Lambda, U \in \tau_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Con todas las condiciones dadas y conocimientos básicos de topología y cálculo analítico, es sencillo comprobar esta proposición, por lo que dejamos al lector que, siguiendo los pasos dados, pueda redactar la demostración estricta:

Pasos para la demostración. Para demostrar esta proposición, estos son los pasos a seguir:

(a) verificar que τ_A es una topología, esto es (se demuestra con las condiciones (1), (2)):

- $M, \emptyset \in \tau_{\mathcal{A}}$;
- Si $\{U_1, \ldots, U_k, \ldots\} \in \tau_{\mathcal{A}}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \tau_{\mathcal{A}}$;
- Si $U_1, U_2 \in \tau_{\mathcal{A}}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathcal{A}}$.

(b) verificar que (M, τ_A) es una variedad topológica, cuyo atlas topológico es $\mathcal{A}$, esto es (se verifica con las condiciones (1),(4), (5) y la definición de $\tau_{\mathcal{A}}$):

- $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ definen homeomorfismos locales [3];
- $\tau_{\mathcal{A}}$ es CII y Hausdorff;
- Construimos el atlas topológico usando $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$ la familia finita en la condición (4).

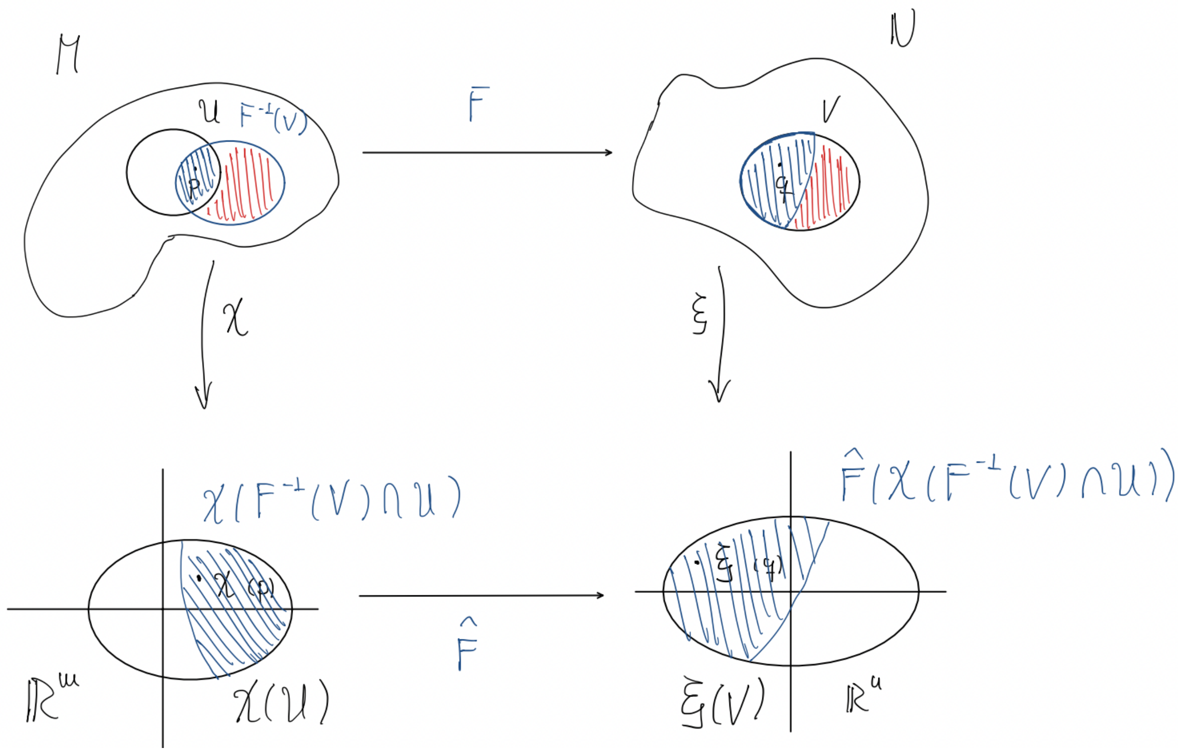
(c) verificar que $\mathcal{A}$ es una atlas diferenciable (se demuestra con la condición (3)).

Para poder demostrar que $\beta_{\mathcal{A}}$ es una topología, úsese [11][3].

1.3. Aplicaciones diferenciables y curvas sobre una variedad diferenciable

Sobre estas variedades diferenciables es posible definir construcciones análogas a los objetos analíticos tradicionales sobre el espacio euclideo. La construcción más importante, al menos en el marco de este trabajo, es la construcción de curvas sobre una variedad, dado que muchos de los objetos geométricos se definen con curvas: un vector tangente a un punto $p \in M$, la diferencial df de una función f, las curvas geodésicas, el mapa exponencial, etc. Para esto comenzamos definiendo al representante local de una aplicación entre dos variedades diferenciables.

Definición 1.10 *Consideremos dos variedades diferenciables M y N de dimensión m y n respectivamente, y una aplicación $F : M \longrightarrow N$ entre estas dos variedades. Sea $p \in M$, $q = F(p) \in N$, y dos cartas locales (U, χ) y (V, ξ) asociadas a cada uno de estos dos puntos, respectivamente. Entonces, se define el* representante local de F en el punto p *como el mapa $\hat{F} \triangleq \xi \circ F \circ \chi^{-1}$, de tal forma que el siguiente diagrama commuta:*



Obsérvese que el dominio de definición de $\hat{F}$ es $D = \chi^{-1}(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m$. Además, el representante local es una función con dominio un abierto de $\mathbb{R}^m$ y rango un abierto de $\mathbb{R}^n$, por lo que se puede estudiar su diferenciabilidad de forma tradicional. Ahora, por la commutatividad del anterior diagrama podemos definir el concepto de diferenciabilidad sobre variedades.

Definición 1.11 *Se dice que una función $F : M \longrightarrow N$ es* diferenciable en el punto p *si y solo si, su representante local $\hat{F}$ es diferenciable en el sentido tradicional en $\chi(p) \in \mathbb{R}^m$, las coordenadas locales de p.*

Podemos observar que esta definición corresponde con la intuición clásica. Una composición de funciones reales es diferenciable si y solo si todos sus componentes son diferenciables. Por lo que esta definición es una extensión natural del caso clásico. Por definición los mapas ξ y χ son difeomorfismos, por lo cual si requerimos que F sea diferenciable, dado que $\hat{F} \triangleq \xi \circ F \circ \chi^{-1}$ se puede pensar que F es diferenciables si y solo si $\hat{F}$ es diferenciable.

Ejemplo 1.12 *Sea $(M, \mathcal{A}_M)$ una variedad diferenciable, y sea $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}_M$ un entorno coordenado cualquiera. Entonces, ϕ_α es una aplicación diferenciable entre M y la variedad diferenciable $\mathbb{R}^m$ con su estructura diferenciable trivial asociada (véase el Ejemplo 1.8), para cualquier punto de U_α, dado que su representante local es la función identidad en $\mathbb{R}^m$ restringida al abierto $\phi_\alpha(U_\alpha)$.*

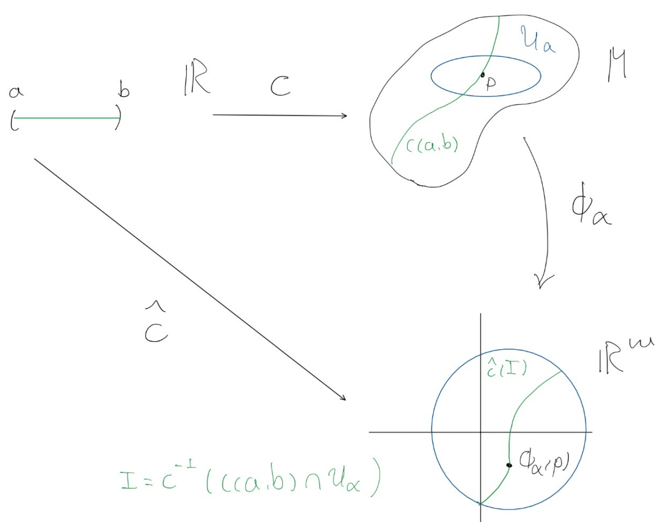
Ahora, de forma más general:

Definición 1.13 *Se dice que una aplicación $F : M \to N$ es* diferenciable en un abierto $A \in \tau_M$ *si y solo si F es diferenciable en p, $\forall p \in A$.*

De la misma forma, podemos estudiar la diferenciabilidad de funciones $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ para $k \in \mathbb{N}$ utilizando el concepto de diferenciabilidad entre variedades. A continuación trabajaremos el caso para $k = 1$, que corresponde a $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ en cuyo caso $c = f^{-1}$ es conocida como una *curva paramétrica sobre la variedad M*. Las curvas diferenciables en todo punto de su dominio de definición nos permitirán construir la idea de espacios tangenciales a una variedad diferenciable en un punto.

Definición 1.14 *Definimos a una* curva sobre M *como un mapa continuo $c : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$. Si consideramos un entorno coordenado (U_α, ϕ_α) de $p = c(t) \in C(I)$, entonces la curva se dice que es* diferenciable en un punto $t \in I$ *si y solo si su representante local $\hat{c} \triangleq \phi_\alpha \circ c$ es diferenciable en el punto t.*

El representante local de una curva corresponde con el siguiente diagrama commutativo:



Como ya hemos comentado, esta construcción nos permite definir uno de los conceptos mas importantes para la geometría riemanniana, el concepto de espacio tangente a M en un punto.

1.4. El espacio tangente T_pM y su cotangente T_p^*M

Comenzamos considerando los vectores tangentes a un punto p en el espacio $\mathbb{R}^m$, los cuales nos ayudarán a desarollar la intuición que después será generalizada a variedades diferenciables.

1.4.1. Vectores en $\mathbb{R}_p^m$ y su relación con las derivadas direccionales

Definición 1.15 *Consideremos un punto $p \in \mathbb{R}^m$. Entonces, se dice que un vector $v_p \in \mathbb{R}^m$ es* tangente en el punto $p \in \mathbb{R}^m$ *si es que existe alguna curva diferenciable $c : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ tal que $c(t) = (c^1(t) \ldots, c^m(t))$, y se verifican dos cosas:*

1. *$c(0) = p$, esto es, $(c^1(0) \ldots, c^m(0)) = (p^1, \ldots, p^m) = p$;*
2. *$\dot{c}(0) = v_p$, esto es, $(\dot{c}^1(0) \ldots, \dot{c}^m(0)) = (v^1, \ldots, v^m) = v_p$.*

donde $\dot{c}$ indica la derivada de c

Además el conjunto de todos aquellos vectores tangentes en el punto $p \in \mathbb{R}^m$ es llamado el *espacio tangente* $\mathbb{R}^m_p$. Es fácil comprobar que este espacio tangente es, efectivamente, un espacio vectorial de dimensión m [10].

Ahora, recordemos la definición de una derivada direccional sobre el espacio euclideo:

Definición 1.16 *Consideremos una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ y una curva diferenciable $c : 0 \in (a, b) \to \mathbb{R}^m$ tal que $c(0) = p$. Entonces definimos a* la derivada direccional de la función f en el punto p en dirección de la curva c *como*

$$(D_c f)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ c)_{t=0}$$

Asumamos que v_p es un vector tangente en el punto $p \in \mathbb{R}^m$ y que c_{v_p} es la curva que cumple con las resctrcciones en la Definición 1.15 para el vector v_p. Entonces, podemos considerar cuál es el resultado de la derivada direccional en dirección de la curva c_{v_p} para una funcion $f \in C^\infty$ arbitraria si consideramos a $v_p \in \mathbb{R}^m_p$, es decir, si consideramos a v_p como un miembro del espacio afín $\mathbb{R}^m_p$ centrado en el punto p, e isomorfo con $\mathbb{R}^m$ como espacio vectorial:

$$(D_{c_{v_p}} f)(p) = \frac{d}{dt}\left(f \circ c_{v_p}\right)_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}\left(c^i\right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}(f)_{c(0)}$$

Si utilizamos las propiedades de c_{v_p} expuestas en la Definición 1.15, entonces esta derivada direccional puede ser reducida a

$$(D_{c_{v_p}} f)(p) = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f)_p = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}_{|p} \tag{1}$$

Definición 1.17 *Se dice que un operador $D_p : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una* derivación en p *si es que se verifican dos condiciones:*

1. *Es un operador lineal, es decir si $a \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ entonces $D_p(af) = aD_p(f) \wedge D(a + b) = D(a) + D(b)$.*
2. *Es un operador de Leibniz, es decir si $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ entonces $D_p(fg) = f(p) \cdot D_p(g) + D_p(f) \cdot g(p)$.*

Ahora, $(D_{c_{v_p}} f)(p)$ en (1) está compuesto de dos partes, un operador de derivación $D_{c_{v_p}|p}$ en un punto $p \in M$ y su argumento f:

$$D_{c_{v_p}|p} : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

de tal forma que

$$D_{c_{v_p}|p}(f) = \sum_{i=1}^{m} v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f),$$

por lo que podemos escribir $D_{c_{v_p}|p} \triangleq \sum_{i=1}^m v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, y es fácil demostrar que $D_{c_{v_p}|p}$ cumple las propiedades para ser una derivación en el punto p. Es más, si definimos $T_p\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todas las derivadas direccionales dadas por un vector $v_p \in \mathbb{R}^m_p$, se puede demostrar que éste tiene estructura de espacio vectorial, y además es isomorfo con $\mathbb{R}^m_p$ de tal forma que el operador de derivación $D_{c_{v_p}(p)}$ es un “vector” [5] y está completamente determinado solo por el vector v_p [4]. Es decir, encontramos una relación biunívoca entre vectores tangentes de $\mathbb{R}^m_p$ y los operadores de derivación de T_pM.

Esta relación es la que nos permitirá generalizar la definición de vectores tangentes a un punto sobre variedades diferenciables más adelante.

1.4.2. Vectores en el punto p sobre una variedad diferenciable M

Recordemos que en la sección anterior encontramos una relación biunívoca entre vectores tangentes en $\mathbb{R}^m_p$ y las derivadas direcciones en el punto p, $T_p(\mathbb{R}^m)$. Esto es, hemos encontrado un isomorfismo de espacios vectoriales entre ellos, por lo que es natural extender esta identificación para otra variedades diferenciables no triviales. Para ello, identificamos a los vectores tangentes a una variedad diferenciable M en un punto p como derivadas direccionales de forma análoga:

Definición 1.18 *Consideremos una variedad diferenciable M de dimensión m. Además, consideremos una curva $c : (a, b) \to M$ tal que $c(0) = p$. Entonces definimos al* vector tangente v_c a la curva c en el punto p *como:*

$$v_c(p) \triangleq D_c(p)$$

donde definimos la derivada de f en dirección de la curva c_v en el punto p *como:*

$$D_{c_v} f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ c)_{t=0}.$$

Es decir, ahora tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

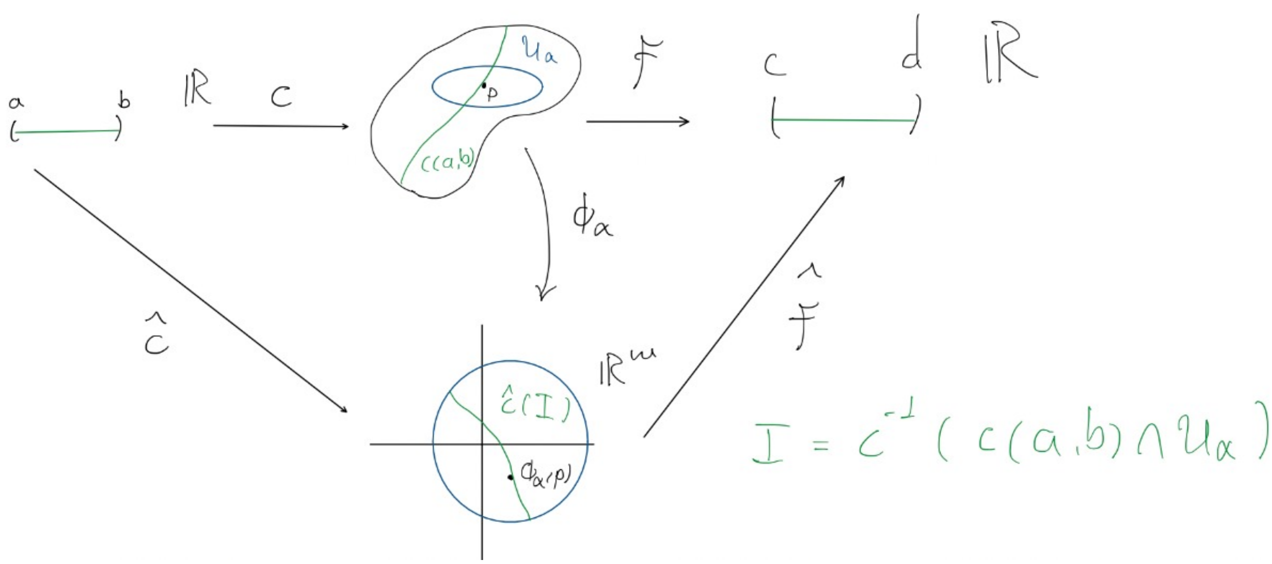


Figura 3: Diagrama conmutativo para el representante local de curvas sobre variedades

Obsérvese que $f \circ c = f \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ c$, y si agrupamos $f \circ c = (f \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ (\phi_\alpha \circ c) = \hat{f} \circ \hat{c}$. Es decir que:

$$D_c f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ c)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\hat{f} \circ \hat{c})_{t=0}$$

De esta forma, es posible calcular de forma explícita la forma del vector tangente sobre un punto $p \in M$ sin necesidad de saber diferenciar sobre la variedad, dado que, dado un entorno coordenado (U, ϕ_α) de p, se tiene que $(D_c f)(p)$ queda totalmente definido por la derivada direccional $D_{\hat{c}}(\hat{f})(\phi_\alpha(p))$ definida en $\mathbb{R}^m$ del representante local de f en la dirección de la velocidad de la curva que es la representante local de c. Además, es fácil comprobar que esta definición no depende del entorno coordenado escogido, porque los cambios de base son diferenciables, dado que las cartas locales de coordenadas son difeomorfismos locales.

Definición 1.19 *Al conjunto de todos los vectores tangentes en el punto $p \in M$ se lo conoce como espacio tangente en p y se lo denota T_pM y es un espacio vectorial de dimensión finita igual a $dim(M) = m$ [8].*

Definamos ahora el espacio dual de un espacio vectorial arbitrario V:

Definición 1.20 *Sea V espacio vectorial cualquiera. Se define su* espacio dual *como el conjunto de todas las aplicaciones lineales definidas de V a $\mathbb{R}$:*

$$V^* = \{T : V \to \mathbb{R} |\ T \text{ es una transformación lineal } \},$$

el cual es un espacio vectorial [10] y sus elementos son conocidos como covectores.

Podemos calcular una base para este espacio dual a través de la base del espacio vectorial asociado. Si $B = \{e_i\}$ es una base para el espacio V donde $i = 1, ..., n$ entonces podemos definir un conjunto de n covectores ε^i tal que

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$$

donde δ^i_j es la delta de Kronecker definida como:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Este conjunto de covectores es único, linealmente independiente y genera a V^* [10], esta base es conocida como la base natural para el espacio dual.

De esta forma:

Definición 1.21 *Si consideramos el espacio tangente T_pM de una variedad diferenciable M en un punto p, podemos definir su espacio dual T^*_pM conocido como el* espacio cotangente *y que está conformado por todas las transformaciones lineales de T_pM a $\mathbb{R}$.*

Más adelante, en la Sección 1.6 veremos como, usando $d\phi_p$ la aplicación diferencial en p asociada a una carta local de coordenadas ϕ de p, podremos encontrar una base para estos dos espacios vectoriales. Pero para ello, necesitamos antes la definición de la función diferencial de una aplicación entre dos variedades diferenciables.

1.5. Diferencial de una aplicación entre variedades

Ahora obtendremos una expresión para la función diferencial en un punto p de una aplicación entre variedades, que a su vez es diferenciable en ese punto p. Esto es, queremos definir una aproximación lineal en un punto p de una aplicación entre variedades. Recuérdese que, cuándo tenemos una aplicación entre espacios euclideos $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, se sabe que su diferencial en el punto p dada por $df_p : R^m_p \to R^n_{f(p)}$ es una transformación lineal, satisface la regla del producto para derivadas, y además $df_p(v_p) = Jac_p(f)(v_p)$ $\forall v_p \in \mathbb{R}^m_p$, donde $Jac_p(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(f^j)\right)^{j=1,\ldots,n}_{i=1,\ldots,m}$ es una matriz de $n \times m$ llamada el jacobiano de f en p [4]. De tal manera, requerimos que nuestra definición del diferencial de una aplicación entre variedades en general, cumpla con estas propiedades.

Definición 1.22 *Sea M y N dos variedades de dimensión m y n respectivamente. Consideremos una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$. Entonces, definimos el* diferencial de f en el punto $p \in M$ *como la aplicación lineal $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ tal que $df_p(v_p) = \left(\frac{d}{dt}(f \circ c)\right)_{t=0}$, donde c es una curva tal que en el instante inicial pasa por p con vector tangente $v_p \in T_pM$.*

Se puede observar que esta definición es independiente de la curva c que tomemos mientras cumpla con las condiciones iniciales. Por eso, si (U, ϕ) es un entorno coordenado de p, podemos tomar a $c = \phi^{-1} \circ \hat{c}$ como la curva definida en M tal que su representante local es $\hat{c}_v = p + tv$, donde $v \in \mathbb{R}^m_p$. Además, obsérvese que $df_p(v_p) = \left(\frac{d}{dt}(f \circ c)\right)_{t=0} = (D_cf)(p)$, siendo en este caso la curva c la que cambia en función del vector v_p escogido, por lo que, como es una derivación, de forma trivial se puede comprobar que es una transformación lineal y satisface con la regla del producto para derivadas. Para poder encontrar la matriz jacobiana asociada a df_p, necesitaremos antes definir una base sobre T_pM y su dual (véase sección 1.6).

Ejemplo 1.23 *Sea M una variedad diferenciable y (U, ϕ) un entorno coordenado de un punto $p \in M$. Entonces, como ϕ es diferenciable en p, podemos definir su diferencial $d\phi_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^m_{\phi(p)}$, tal que:*

$$d\phi_p(v_p) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\hat{c})_{t=0} = v_{\phi(p)},\ \forall v_p \in T_pM.$$

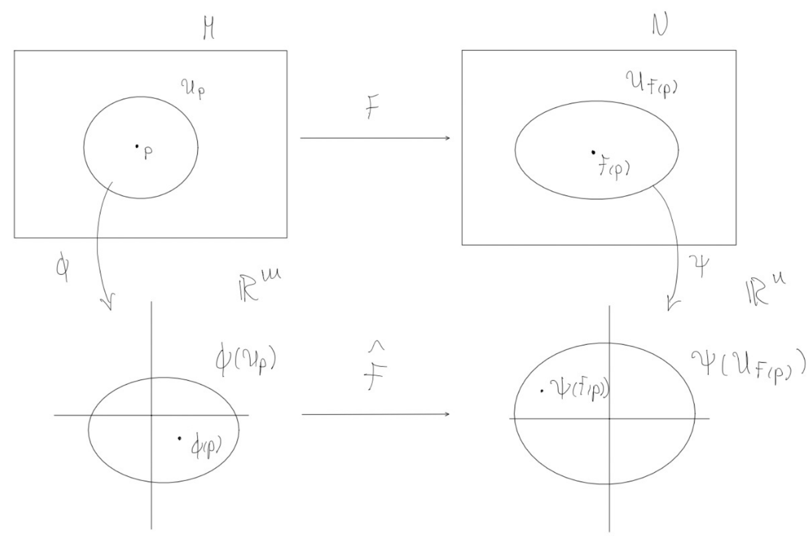
donde c es una curva en M que en el instante inicial pasa por p con dirección v_p, y $\hat{c} = \phi \circ c$ es su representante local, que en el instante inicial pasa por $\phi(p)$ con velocidad $v_{\phi(p)}$. Esto es, la diferencial de ϕ en p relaciona cada $v_p \in T_pM$ con "su representante local" $v_{\phi(p)} \in \mathbb{R}^m_p$. Es más, como ϕ es un difeomorfismo en p, entonces su diferencial es un isomorfismo en p. Además, ϕ^{-1} es diferenciable en $\phi(p)$, por lo que también existe su diferencial $d\phi^{-1}_{\phi(p)}$. Por último, $d\phi^{-1}_{\phi(p)} = (d\phi_p)^{-1}$ por construcción. En la Sección 1.6 trabajaremos con el isomorfismo $d\phi^{-1}_{\phi(p)}$ para encontrar una base de T_pM.

Usando el hecho de que $d\phi_p$ y $d\phi^{-1}_{\phi(p)}$ son isomorfismos, para cualquier carta coordenada ϕ de p, es posible generalizar a variedades diferenciables uno de los teoremas más importantes del cálculo vectorial:

Teorema 1.24 (Teorema de la función inversa sobre variedades diferenciables) *Consideremos dos variedades diferenciables M y N, ambas de dimensión m. Consideremos una aplicación diferenciable $f : M \to N$. Entonces, si el diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una isomorfismo entre espacios vectoriales, la aplicación f es un difeomorfismo local para alguna vecindad de p.*

Demostración. Para demostrar este teorema, consideremos dos entornos locales (U_p, ϕ) y $(U_{f(p)}, \psi)$ para $p \in M$ y $f(p) \in N$ respectivamente. Consideremos entonces el representante local de f: $\hat{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Dado que f es diferenciable en p, $\hat{f}$ también tiene que ser diferenciable en $\phi(p)$, por lo que podemos considerar su diferencial $d\hat{f}_{\phi(p)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.Además, recordemos que ϕ y ψ son difeomorfismos locales en p y $f(p)$, respectivamente, por lo que sus diferenciales en el punto dado son isomorfismos.

Ahora, como la definición del representante local de f proviene de un diagrama commutativo compatible con la estructura diferencial de la variedad,



[h!]

Figura 4: Diagrama conmutativo del representante local de una aplicación entre variedades

podemos definir el diferencial df_p en terminos del representante local también: [7]

$$df_p = d\psi^{-1}_{\psi(f(p))} \circ d\hat{f}_{\phi(p)} \circ d\phi_p$$

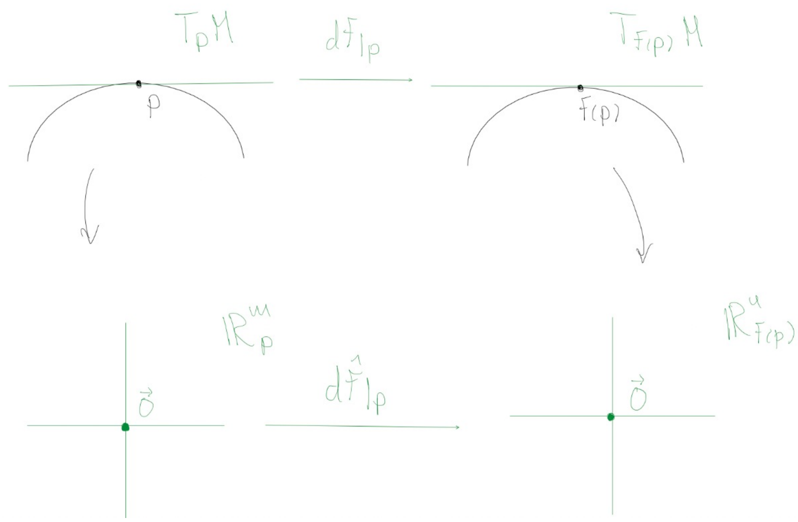


Figura 5: Diagrama conmutativo del representante local de una aplicación entre variedades enfatizando en su diferencial

De nuevo, como tenemos que ϕ y ψ son difeomorfismos en p y en $f(p)$ respectivamente, entonces $d\phi_p$ y $d\psi^{-1}_{\psi(f(p))}$ son necesariamente isomorfismos entre espacios vectoriales [7] y por hipótesis tenemos que df_p es un isomorfismo entre espacios vectoriales. Por lo tanto $d\hat{f}_{\phi(p)}$ también es necesariamente un isomorfismo entre espacios vectoriales, y como $\hat{f}$ es una función $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, podemos aplicar el teorema de la función inversa clásico y concluir que $\hat{f}$ es también es un difeomorfismo local. En conclusión, siendo f una composición entre difeomorfismos locales, es a su vez un difeomorfismo local [7].

$\blacksquare$

Este teorema nos será útil mas adelante en el capítulo de mapas exponenciales. Por el momento necesitamos introducir mas objetos para poder comenzar un tratamiento formal de la geometría riemanniana.

1.6. Base para el espacio tangente y su dual

Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$ y (U, ϕ) un entorno coordenado de M. Obsérvese que, como ϕ^{-1} es un difeomorfosmo local en $\phi(p)$, podemos usar su diferencial en $\phi(p)$ dado por $d\phi^{-1}_{\phi(p)}$ para mandar la base de los vectores canónicos $\left\{\vec{e}_{1|\phi(p)}\right\}$ de $R^m_{\phi(p)}$ a T_pM, manteniendo su estructura de base, dado que su diferencial será a su vez un isomorfismo. Esto es, si $\left\{\vec{e}_{i|\phi(p)}\right\}$ es base de $R^m_{\phi(p)}$, entonces $\left\{d\phi^{-1}_{\phi(p)}(e_{i|\phi(p)})\right\}$ es base de T_pM. Por tanto, sólo queda determinar quién es $d\phi^{-1}_{\phi(p)}(e_{i|\phi(p)}),\ \forall i = 1, \ldots, m$. Si $\hat{c}(t) = \phi(p) + te_{i|\phi(p)}$ es la curva que en el instante inicial pasa por $\phi(p)$ con velocidad $e_{i|\phi(p)}$, usando la definición de diferencial se tiene que:

$$d\phi^{-1}_{\phi(p)}(e_{i|\phi(p)}) = \frac{d}{dt}(\phi^{-1} \circ c)_{t=0} = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}_{\phi(p)}$$

Para mejorar la notación, si $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}_{\phi(p)}\right\}$ es la base canónica de $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m$, entonces abusaremos de notación y escribiremos $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}_p\right\}$ para indicar la base en T_pM:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}_p \triangleq \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x^i}(\phi(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}_{\phi(p)}.$$

Encontremos las componentes de un vector $v_p \in T_pM$ dado en la definición 1.18. Obsérvese que, si c es una curva que en instante inicial pasa por p, entonces:

$$v_p(f) = D_c f(p) = \frac{d}{dt}\left(f \circ c\right)_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\hat{f} \circ \hat{c}\right)_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}\left(\hat{c}^i\right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\hat{f}\right)_{\phi(p)}$$

Pero como $\hat{f} = f \circ \phi^{-1}$, entonces:

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}\left(\hat{c}^i\right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi^{-1}\right)_{\left(\phi_\alpha(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(f)_p\right.}$$

Usando la base canónica de T_pM, esta expresión puede ser reducida a:

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^{m} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi_\alpha^{-1}\right)_{\phi(p)} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(f\right)_p$$

Por lo tanto, la expresión de v_p el vector tangente a $p \in M$ dada en la Definición 1.18 en términos de un operador direccional sobre la variedad M acaba siendo:

$$v_p = \sum_{i=1}^{m} v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p \in M}$$

donde v^i son las componentes del vector velocidad inicial de $\hat{c} = \phi \circ c$. Nótese que la forma es idéntica que en el caso para $\mathbb{R}^m$, sin embargo, ahora los vectores y los puntos están sobre la variedad M. Además, bajo esta demostración se puede ver cómo la diferencial no depende de la curva c tomada, sino que depende exclusivamente de la velocidad inicial $v_{\phi(p)}$ de su representante local $\hat{c}$.

Para encontrar una base para el espacio dual de T_pM, definimos el covector dx_p^i como el único covector tal que $dx_p^i(\frac{\partial}{\partial x^j}{}_p) = \delta_j^i$. Entonces $\{\left(dx^i\right)_p\}$ es la base natural para el espacio cotangente T_p^*M. Es decir, cualquier vector cotangente $w_p \in T_p^*M$ puede ser escrito como:

$$w_p = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(dx^i\right)_p$$

1.7. Cálculo tensorial en una variedad

De aquí en adelante, muchas de las definiciones necesitarán de la definición de un nuevo objeto geométrico, la idea de tensores. Primero se introduce el concepto de tensor sobre un espacio vectorial V, y una vez tomado $V = T_pM$, se generaliza la definición a campos tensoriales definidos sobre el fibrado tangente y su dual:

Definición 1.25 *Consideremos un espacio vectorial V real y su espacio dual V^*. Entonces definimos un* (r, s)-tensor *(r veces covariante y s veces contravariante) como un mapa multilineal*

$$T_s^r : \prod^r V \times \prod^s V^* \to \mathbb{R}$$

Ahora, si consideramos que el espacio vectorial V tiene una base $e_i, i = 1, ..., n$, su base dual tendrá una base $\epsilon^j, = 1, ..., n$, entonces cualquier (r, s)-tensor sobre V puede ser escrito como (usando la notación de Einstein):

$$T_s^r = T_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_s} \epsilon^{j_1} \otimes ... \otimes \epsilon^{j_r} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \tag{2}$$

tal que sus coeficientes están dados por $T_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_s} = T(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_s}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$ y se utiliza un producto $\otimes$ conocido como producto tensorial, cuyas propiedades y definición dejamos implícitas, pues no son más que una formalidad en el ámbito de este trabajo [8].

Definición 1.26 *El conjunto de todos los (r,s)-tensores definidos sobre un espacio vectorial V es conocido como el* espacio (r,s)-tensorial sobre V *y se denota como* $\mathfrak{T}^r_s(V)$.

En especial, estamos interesados en los tensores que pueden ser definidos sobre el espacio tangente $V = T_pM$. Más aún, lo que se desea es definir una aplicación diferenciable tal que a cada punto $p \in M$ le asigna un tensor (r,s) en T_pM, de tal forma que podemos movernos de un tensor en T_pM a otro definido en T_qM de forma diferenciable. Para poder definir esto, definimos un tipo de aplicación desde M hasta $\mathfrak{T}^r_s(T_pM)$:

Definición 1.27 *Una aplicación $\mathscr{T} : M \longrightarrow \mathfrak{T}^r_s(T_pM)$ es un* campo (r,s)-tensorial definido sobre la variedad *M si es que se verifica que es una aplicación diferenciable en todo punto p.*

Localmente si (U,ϕ) es un entorno coordenado del atlas de M, podemos escribir a este campo tensorial como:

$$T^r_s(q) = T^{i_1,\ldots,i_s}_{j_1,\ldots,j_s}(q)dx^{j_1}_q \otimes \ldots \otimes dx^{j_r}_q \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}_q \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}_q, \forall q \in U.$$

Para que un campo tensorial sea diferenciable como aplicación, el único requisito es que sus componentes $T^{i_1,\ldots,i_s}_{j_1,\ldots,j_s}$ sean diferenciables en q, $\forall q \in U$[12]. Especialmente utilizaremos dos de estos campos tensoriales. Un caso muy especial es cuando consideramos una aplicación que solo asigna $(0,1)$-tensores:

Definición 1.28 *Un campo $(0,1)$-tensorial definido sobre una variedad M en T_pM se conoce como un* campo vectorial sobre M. *Al conjunto de todos los campos vectoriales $\mathfrak{T}^0_1(T_pM))$ lo denotaremos por $\boldsymbol{\mathfrak{X}}(M)$.*

Notablemente, podemos considerar solo la restricción de estos campos tensoriales a curvas. Por ejemplo:

Definición 1.29 un campo tensorial definido a lo largo de una curva *c es simplemente un campo tensorial $\mathscr{T} : c(I) \to \mathfrak{T}^r_s(T_pM)$ tal que se verifique que es una aplicación diferenciable.*

En esta figura se puede observar cómo sería un campo vectorial a lo largo de una curva:

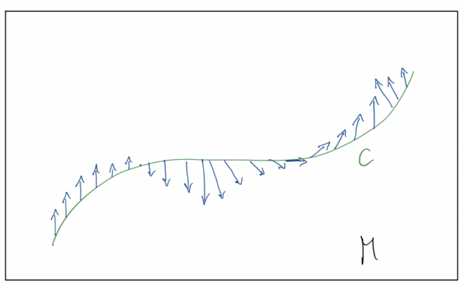


Figura 6: Ejemplificación de un campo vectorial definido a lo largo de una curva sobre una variedad

Finalmente, la última construcción que necesitamos con tensores es la idea de un fibrado tensorial:

Definición 1.30 *Un* fibrado tensorial sobre la variedad M*, usualmente denotado T^r_sM se define como*

$$T^r_sM = \bigcup_{p\in M}(p, \mathfrak{T}^r_s(T_pM))$$

Es decir, es una relación que acopla cada punto p de M con su espacio (r,s)-tensorial en T_pM. Notablemente el fibrado tensorial $T^0_1M = \bigcup_{p\in M}(p, \mathfrak{T}^0_1(T_pM))$ es conocido como el *fibrado tangencial de la variedad M* , pues a cada punto $p \in M$ lo identifica con su espacio tangencial T_pM.

2. Variedades riemannianas

En este capítulo 2 estudiaremos las siguientes construcciones sobre esta estructura nativa (la variedad diferenciable), que da paso a las variedades riemannianas: el tensor métrico, la conexión afín y el mapa exponencial, conceptos absolutamente necesarios para demostrar el teorema de Hopf-Rinow del capítulo 3.

2.1. Métrica riemanniana

En ánimos de continuar, es necesario definir una forma de medir distancias y ángulos sobre una variedad M. Se podría proponer medir las distancias con la métrica euclidea canónica embebiendo la variedad en $\mathbb{R}^n$. En 1954, John Nash comprobó que ciertamente, es posible estudiar cualquier variedad al estudiar la variedad embebida en $\mathbb{R}^n$, sin embargo, en la mayoría de casos se requiere $n \in \mathbb{N}$ demasiado grandes para que los computos sean fáctibles [4]. En general, Nash comprobó que cualquier variedad compacta de dimensión m, puede ser estudiada al embeberla en $\mathbb{R}^n$ con $n = \frac{m(m+11)}{2}$. Sin embargo, Gromov comprobó que en realidad solo se necesita $n = \frac{(m+2)(m+3)}{2}$[4], si bien esto mejora el panorama, según Gromov, aún se necesita $n = 10$ para embeber cualquier variedad de dimensión $m = 2$.

Debido a esta complejidad, se introduce una forma de medir distancias de forma local sobre las variedades, conocida como métrica riemanniana.

Definición 2.1 *Una* métrica riemanniana g definida sobre una variedad diferenciable M *es un campo* $(2,0)$*-tensorial tal que, para cualquier* $p \in M$*, se verifica que:*

1. *es simétrico, es decir* $\forall X_p, Y_p \in TpM, g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$*;*
2. *es positivo definido, esto es*
$$\forall X_p, Y_p \in TpM, X_p \neq Y_p, g_p(X_p, Y_p) \geq 0,$$
o equivalentemente,
$$g_p(X_p, Y_p) = 0 \iff X_p = 0 = Y_p;$$
3. *es no-degenerada, esto es, si existe* $X_p \in TpM$ *tal que* $g_p(X_p, Y_p) = 0, \forall Y_p \in TpM$*, entonces* $X_p = 0$.

Recordemos que como la métrica es un campo $(2,0)$-tensorial, g se puede ver desde dos puntos de vista: o bien como el producto $g(X,Y)$ de dos campos vectoriales, tal que en cada punto p proporciona un producto punto entre X_p y Y_p, o como una aplicación que a cada punto p le asocia las propiedades de un producto punto sobre un espacio vectorial (simétrico, definido positivo y no-degenerado).

Resumiendo, g_p la métrica riemanniana evaluada en un punto p está definida sobre dos vectores X_p, Y_p del espacio tangencial de la variedad M y solo está definida para miembros de un mismo espacio tangencial. Es de esta forma que la métrica riemanniana nos define una forma local de medir distancias, moviendo esta estructura de forma diferenciable de punto a punto de la variedad. Esto es, el tensor métrico define un producto interno en cada uno de los espacios vectoriales sobre los cuales está definido [5], por lo tanto a más de medir distancias, el tensor métrico nos ayuda a definir la norma de un vector y el ángulo entre vectores, de la siguiente manera:

Definición 2.2 *Consideremos un vector* $X_p \in T_pM$*, entonces su* norma *se define como*

$$|X| \triangleq g_p(X_p, X_p)^{1/2}$$

Si consideramos dos vectores $X_p, Y_p \in T_pM$*, no necesariamente diferentes, entonces el* ángulo θ_p entre X_p y Y_p *cumple con la siguiente ecuación:*

$$\cos\theta_p = \frac{g_p(X_p, Y_p)}{|X_p||Y_p|}$$

Obsérvese que aunque la definición es local, como g es diferenciable, esta definición se puede extender a dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, de tal forma que, por ejemplo, $\cos\theta = \frac{g(X,Y)}{|X||Y|}$ es una función diferenciable tal que en cada punto p, proporciona el ángulo entre los dos campos en ese punto.

Ahora, localmente, sea $p \in M$ y $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ un entorno coordenado de p. Podemos utilizar las bases del espacio tangente T_pM y cotangente T_p^*M para encontrar una expresión local para el tensor métrico según la expresión (2):

$$g_p = G_{ij}(p)dx_p^i \otimes dx_p^j$$

Podemos notar que, dada la definición de g, los coeficientes $G_{ij}(p) = g_p(\partial_{i|p}, \partial_{j|p})$ tienen la forma de una matriz simétrica, con determinante estrictamente positivo, y sus entradas son funciones diferenciables definidas en $U \subset M$.

Por lo tanto, a consecuencia de su naturaleza local, el tensor métrico por si mismo es incompatible para vectores que pertenezcan a diferentes espacios tangenciales. De hecho, podemos observar en la definición de la longitud de una curva, que para cada punto a lo largo de la curva tenemos que tomar una norma diferente dada por la métrica riemanniana en ese punto. De esta forma, es necesario definir una forma de conectar vectores entre espacios tangenciales del fibrado. Es de esta forma que se introduce la necesidad de la conexión afín.

Pero antes, definamos la longitud de curvas sobre una variedad usando su métrica riemanianna:

Definición 2.3 *Sea $c : (a, b) \to M$ una curva diferenciable en todo su dominio. Entonces, definimos la* longitud de la curva c inducida por g entre$x = a$ y $x = b$ *como*

$$\mathcal{L}_g(c, a, b) = \int_a^b |\dot{c}(t)|_{c(t)} dt$$

y $\dot{}$ representa a la derivada usual con respecto a t.

2.2. La conexión de Levi-Civita y el transporte paralelo

Consideremos M una variedad diferenciable y $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales definidos sobre M.

Definición 2.4 *Podemos definir una conexión afín como un mapa bilinear $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que:*

- $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X(fY) = (X \cdot f)Y + f\nabla_X Y$

Si tomamos un entorno coordenado (U, ϕ) donde $\phi(p) = (x_1(p), ..., x_m(p))$, entonces podemos calcular una forma local para cualquier punto $q \in U$ de una conexión afín, utilizando las propiedades de su Definición 2.4. Para ello, consideremos dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que, en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ del fibrado tangente proporcionada por el entorno coordenado (U, ϕ) pueden ser escritos como:

$$X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Como $\nabla_X Y$ también es un campo vectorial, entonces existen unas funciones diferenciables $A^i(X, Y), i = 1, \ldots, m$ (las componentes de $\nabla_X Y$) para cada X, Y tal que:

$$\nabla_X Y = \nabla_{\left(\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)} \left(\sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^m A^i(X, Y) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

El objetivo es encontrar $A^i(X,Y)$ en esta base coordenada. Para una mejor visualización, usaremos la notación de Einstein, de tal forma que podamos omitir los símbolos de sumatorio:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Entonces, omitiendo los sumatorios y usando las propiedades de la derivada afín, tenemos que:

$$\nabla_X Y = \nabla_{\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

En conclusión:

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^{m} \left(X(Y^j) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} X^i Y^j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tag{3}$$

Para poder encontrar las funciones $A^i(X,Y)$, se definen a los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^kcomo las componentes del tensor $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{4}$$

Entonces, podemos reescribir (3) como:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{m} \left(X(Y^k) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} X^i Y^j \left(\sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

obteniendo al fin:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{m} \left(X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{5}$$

Los símbolos de Christoffel son notablemente importantes para la conexión afín. Se puede notar que la acción de la conexión está completamente caracterizada por su símbolos de Christoffel asociados, dado que X, Y^i, X^j están dados a la hora de calcular $\nabla_X Y$, y por lo tanto sólo es necesario conocer a los valores de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, para poder hacer la derivada afín de Y a lo largo de X [8]. De hecho, existe una relación inyectiva entre los símbolos de Christoffel que pueden ser definidos sobre una variedad M y el número de conexiones que ésta admite. Por lo que, siempre es posible definir al menos una conexión sobre cualquier variedad diferenciable [8].

A través de esta conexión, definimos el concepto de una derivada direccional o covariante:

Definición 2.5 *Sea $c : I = (a,b) \to \mathbb{R}^m$ una curva regular $\dot{c}(t) \neq 0)$, y V un campo vectorial definido sobre la curva: $V = V(t) \in T_{c(t)}M$, $\forall t \in I$. Se define la* derivada covariante del campo vectorial a lo largo de la curva *c como:*

$$\frac{DV}{dt}(t) \triangleq \left(\nabla_{\frac{dc}{dt}} V \right)_{c(t)}$$

Esta definición puede ser localizada si consideramos un entorno coordenado (U, ϕ) del punto en el que inicia nuestra curva $c(t_0) \in M$. Entonces, podemos escribir al campo vectorial V como:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{m} V^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)}, \forall c(t) \in U.$$

Utilizando la ecuación (5) obtenemos que:

$$\frac{DV}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{dV^i}{dt} \right)_t + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^i(c(t)) \left(\frac{dc^j}{dt} \right)_t V^k(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)}.$$

De esta manera, ahora podemos realizar comparaciones geométricas entre curvas que habitan diferentes espacios vectoriales, especialmente podemos comenzar a definir la idea de paralelismo sobre una variedad diferenciable.

Definición 2.6 *Dada un campo vectorial V definido sobre una curva, decimos que el campo vectorial es* paralelo a la curva *si*

$$\frac{DV}{dt} = 0$$

Y, construyendo sobre esta idea,

Definición 2.7 *Decimos que la curva $c(t)$ es una* geodésica*, si está parametrizada por el parámetro longitud de arco y si también se verifica que:*

$$\frac{D}{dt}\dot{c} = 0.$$

Definición 2.8 *Una geodésica $c(t) : I \to M$ se dice que es* maximal *si es que su dominio I no puede ser extendido a ningún otro $I' \supset I$. Usualmente una geodésica maximal es simplemente llamada* geodésica con punto inicial $c(0) = p$ y velocidad $\dot{c}(0) = v_p$.

Nuevamente, si escogemos una carta local de coordenadas, podemos reescribirlo en en una expresión local. Si en estas coordenadas locales, $V(t) = (V^1(t), ..., V^m(t))$ y $c(t) = (c^1(t), ..., c^m(t))$, entonces la condición de paralelismo está dada por:

$$\dot{V}^i + \sum_{j,k=1}^{m} \Gamma^i_{jk} \dot{c}^j V^k = 0, \forall i = 1, \ldots, m$$

Y la condición geodésica está dada por:

$$\ddot{c}^i + \sum_{j,k=1}^{m} \Gamma^i_{jk} \dot{c}^j \dot{c}^k = 0, \forall i = 1, \ldots, m$$

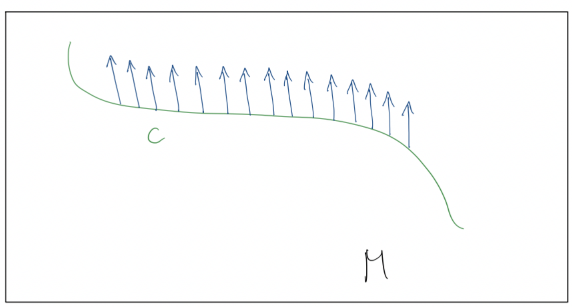


Figura 7: Diagrama ejemplificando el transporte paralelo a lo largo de una curva sobre una variedad

En esta forma, se puede observar que son ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, respectivamente. Además, como asumimos que las curvas eran diferenciables, se concluye que también son continuas, por lo tanto la existencia y unicidad puede estar dada por el teorema de Picard-Lindelöf [4].

Una vez definida una conexión, es natural realizar la pregunta si es que la conexión es compatible en algún sentido con la métrica de nuestra variedad riemanniana. En general, se espera que la métrica y la conexion sean compatibles en el sentido de que la métrica sea invariante con respecto al transporte paralelo inducido por la conexión. Si consideramos la variedad riemanniana $(\mathbb{R}^m, d)$ con la métrica euclidea d, entonces podemos observar que $\nabla d = 0$. De tal forma que buscamos aquella conexión sobre una variedad M cualquiera tal que cumpla con esta propiedad. Por lo tanto:

Definición 2.9 *Se dice que una métrica riemanniana g y una conexión son compatibles si es que $\nabla g = 0$.*

En general, existen varias condiciones necesarias y suficientes para decir que una conexión es compatible con una métrica:

Theorem 2.10 *Consideremos una variedad riemanniana (M, g). Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes*

- $\nabla g = 0$;
- *Si X, Y son dos campos vectoriales definidos sobre la curva c, entonces $\frac{d}{dt}(g(X,Y)) = g_p(\frac{DX}{dt}, Y) + g_p(X, \frac{DY}{dt})$;*
- *Si X, Y son paralelos con respecto a la curva $c : I \to M$, entonces $g(X,Y) = const$;*
- *$\forall X, Y, Z$ espacios vectoriales definidos sobre M, $\nabla_X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g_p(Y, \nabla_X Z)$.*

A pesar de que este requerimiento es suficiente para garantizar existencia de una métrica y una conexión compatibles [5], no es suficiente para garantizar la unicidad [8][2]. Por lo que se introduce un requerimiento más:

Definición 2.11 *Definimos la* torsión de la conexión ∇, *para cualquier par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ como el $(2,1)$-tensor $\tau(X,Y)$*

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \text{ donde } [X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Definición 2.12 *Se dice que una conexión es* simétrica *si es que se verifica que, para cualquier par de campos vectoriales X, Y definidos sobre M:*

$$\tau(X,Y) = 0$$

Esto es, una conexión es *simétrica* si y solo si, para cualquier par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Theorem 2.13 (Teorema Fundamental de la Geometría riemanniana) *Sobre una variedad riemaniana (M, g) siempre existe una única conexión afín tal que es simétrica y compatible [2][4][8], y a esta conexión se la conoce como* conexión de Levi-Civita.

Demostración Es fácil comprobar la unicidad de esta conexión ∇: si consideramos tres campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, a través de la condición de compatibilidad conseguimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Yg(Z,X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Zg(X,Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Y si aplicamos la condición de simetría, se obtiene que:

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X,Z]) \\ Yg(Z,X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y,X]) \\ Zg(X,Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Z,Y]) \end{aligned}$$

Si sumamos la primera y la segunda ecuación de arriba, y después restamos la tercera obtenemos que:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(&Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &- g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y])). \end{aligned} \tag{6}$$

Podemos observar que el lado derecho es independiente de la conexión ∇, por lo que si consideramos dos conexiones ∇^1 y ∇^2 tal que sean simétricas y compatibles, entonces necesariamente $g\left(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z\right) = 0$ y esto solo es posible si $\nabla^1 = \nabla^2$. Es decir que esta conexión es única.

Para probar la existencia, notemos que, por la condición de unicidad, si comprobamos la existencia en un entorno coordenado, esta conexión tiene que ser compatible con respecto a los cambios de coordenadas, lo que asegura que esta conexión exista en el resto de entornos coordenados de la variedad.

Consideremos un entorno coordenado (U, ϕ). Entonces, podemos expresar los campos vectoriales en terminos de la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ del fibrado tangente. Evaluando las bases coordenadas en la ecuación (6), obtenemos:

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^l} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)$$

Finalmente, si recordamos que $g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = G_{ij}$ y además la definicion (4), entonces esto se reduce a:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} G^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(G_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(G_{il}) - \frac{\partial}{\partial x^l}(G_{ij})\right), \tag{7}$$

lo que por (5) determina de forma única a la conexión de Levi-Civita. Por lo tanto, hemos encontrado una construcción de los símbolos de Christoffel, que a su vez contruyen la conexión de Levi-Civita.

Por lo tanto, se comprueba la existencia y unicidad de tal conexión.

$\blacksquare$

Una consecuencia importante de estas comprobaciones es que se puede verificar que cualquier geodésica definida con respecto a una conexión de Levi-Civita tiene velocidad constante y por lo tanto están parametrizadas por el parámetro longitud de arco [8].

De aquí en adelante trabajaremos con la conexión de Levi-Civita en todos los casos.

2.3. El mapa exponencial

La última estructura que necesitamos definir es la de mapas exponenciales. Para poder entender esta definición, son necesarios ciertos lemas previos [8]:

Lema 2.14 (Homogeneidad de las geódesicas) *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Si una geodésica $\alpha(t) = \alpha(q, v_q; t)$ que en el instante inicial pasa por q con velocidad $v_q \in T_qM$ está definida en un intervalo $(-\delta, \delta)$, entonces la geodésica $\beta(t) = \beta(q, av_q; t)$ que en el instante inicial pasa por q con velocidad $av_q \in T_qM$ con $a > 0$ está definida en el intervalo $(-\delta/a, \delta/a)$, y además $\beta(t, q, av_q) = \alpha(at, q, v)$.*

En conclusión, el intervalo de definición de una geodésica se puede expandir o contraer, de tal forma que se puede homogeneizar su dominio de definición:

Lema 2.15 *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Por cada $p \in M$ siempre existe un entorno V de p, un número $\epsilon > 0$ y una aplicación diferenciable $\gamma : (-2, 2) \times U \subset TM \longrightarrow M$ definida como $\gamma(t, q, v)$ con*

$$U = \{(q, w) \in TM : q \in V, w \in T_qM, |w| < \epsilon\},$$

tal que la trayectoria $\alpha(t) = \gamma(t, q, v)$ definida en $t \in (2-, 2)$ es la única geodésica en M que en el instante inicial $t = 0$ pasa por el punto q con velocidad v, para cada $(q, v) \in TM$, con $|v| < \epsilon$.

Obsérvese que para cualquier punto (q, w) en U, siempre vamos a poder encontrar una única geodésica definida en $(-2, 2)$ tal que en el instante inicial pasa por q con velocidad w. Esta unicidad permite definir el mapa exponencial de manera única, de la siguiente manera:

Definición 2.16 *Sea (M, g) una variedad riemanniana y el conjunto $U \subseteq TM$ definido como*

$$U = \{(q, w) \in TM : q \in M, w \in T_qM, |w| < \epsilon\}.$$

Decimos que este conjunto U es el dominio de un mapa diferenciable $exp : E \to M$ llamado el mapa exponencial *, que está definido como:*

$$exp(q,w) \triangleq \gamma_{(q,w)}(1) = \gamma(q,w;1),$$

tal que $\gamma_{(q,w)}(t)$ es la (única) geodésica que en el instante inicial pasa por p con dirección v.

Primeramente, necesitamos que exista la curva γ_{T_pM} y que esté definida en $t = 1$, lo cual se consigue con el Lema 2.15. Además, usando el Lema 2.14 podemos ver que

$$\gamma_{(q,v)}(1) = \gamma(q,v;1) = \gamma(q,v/|v|;|v|),$$

por lo que $\gamma_{(T_pM)q,v}(1)$ se puede interpretar como el punto que se obtiene al recorrer la curva geodésica con instante inicial q y velocidad inicial $v/|v|$ una distancia de $|v|$. Equivalentemente, si reparametrizamos la curva para que su velocida inicial tenga longitud 1, podemos decir que $\gamma_{(q,v)}(1)$ es avanzar a lo largo de la geodésica $\gamma_{(q,v)}$ una distancia igual a la longitud de su velocidad inicial v. Además, U se demuestra que es un abierto de TM que contiene a la sección $M \times \{\vec{0}\}$.

Es decir, el mapa exp proyecta un elemento del fibrado tangencial (p, T_pM) en el punto $\gamma(1) \in M$, tal que $\gamma_{(p,v)}$ es la geodésica con punto inicial p y velocidad $v, \forall v \in T_pM$.

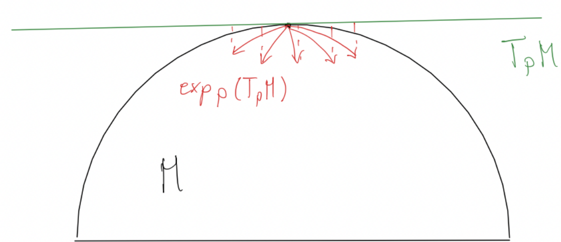


Figura 8: Ejemplificación de la proyección de vectores tangenciales en curvas sobre la variedad, a través del mapa exponencial

A través de esta definición, se puede observar que el mapa exponencial es un mapa diferenciable en todo punto el que esté definido. Por lo cual, es natural preguntarnos si, para cada $q \in M$, define un difeomorfismo entre el espacio tangente y la variedad riemanniana. Definimos la función exponencial, como el mapa exponencial con $q \in M$ fijo, de la siguiente manera:

Definición 2.17 *Sea M una variedad diferenciable, $q \in M$ y W un abierto de T_qM. Entonces, se define* la función exponencial en el punto q *como $exp_q : W \longrightarrow M$ tal que $exp_q(v) = exp(q,v)$, donde exp es el mapa exponencial de la Definición 2.16.*

Por definición, esta función es diferenciable y además $\exp_q(\vec{0}) = q$. Es más:

Proposición 2.18 *Para cada $q \in M$, la función exponencial exp_q es un difeomorfismo local en $\vec{0}$, esto es, exp_q es un difeomorfismo entre un entorno abierto de $\vec{0} \in T_qM$ y U un abierto de M.*

Demostración. Usando el teorema de la función inversa Teorema 1.24 , vamos a calculamos el diferencial de la función exponencial exp_q en el punto $\vec{0}$, y comprobaremos que es un isomorfismo, y demostrando así la tesis.

Recuérdese que T_qM es una aproximación lineal de M, y mediante el isomorfismo $d\phi_q$, conseguimos que T_qM sea isomorfo a $R^m_{\phi(q)}$. Por lo tanto podemos concluir que el espacio tangente a T_qM en $\vec{0}$ es el mismo T_qM, que a su vez es isomorfo con $R^m_{\phi(q)}$:

$$T_{\vec{0}}(T_qM) = T_qM.$$

Así, dado que $exp_q(\vec{0}) = q$, tenemos que $d(exp_q)_{\vec{0}} : T_qM \longrightarrow T_qM$. Calculemos ahora el valor de $d(\exp_q)_{\vec{0}}(v)$, para $v \in T_{\vec{0}}(T_qM) = T_qM$. Por definición:

$$d(\exp_q)_{\vec{0}}(v) = \left(\frac{d}{dt}(\exp_q \circ c)\right)_{t=0}$$

tal que c es una curva sobre T_qM tal que en el instante inicial pasa por $\vec{0}$ con velocidad inicial v. Tomando en específico la curva $c(t) = tv, v \in T_qM$, se tiene que:

$$d(\exp_q)_{\vec{0}}(v) = \left(\frac{d}{dt}\exp_q \circ c\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\exp_q(tv)\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\gamma_{(q,tv)}(1)\right)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_{q,v}(t)) = \frac{d\gamma_{q,v}}{dt}(t=0) = v.$$

Por lo que trivialmente $d(\exp_q)_{\vec{0}} = I_{T_qM}$ es la función identidad, y por tanto es un isomorfismo entre espacios vectoriales. Entonces, por el teorema de la función inversa, existe una vecindad del punto $0 \in T_qM$ tal que exp_q es un difeomorfismo local entre abiertos.

■

En conclusión, alrededor del vector $\vec{0} \in T_qM$ siempre existe un abierto que se puede tomar como una bola de radio ϵ, dado que T_qM es un espacio métrico trivialmente (véase el Cap. 3), de tal forma que al proyectar la bola mediante exp_q conseguimos un entorno abierto U difeomorfo a esta bola. Estos conjuntos son de especial interés y los llamamos vecindades normales.

Definición 2.19 *Se dice que un abierto $U \subseteq M$ es* una vecindad normal alrededor del punto $p \in M$ *si existe otra vecindad $V \subset T_pM$ alrededor de 0 tal que el mapa exponencial $\exp_p : V \to U$ es un difeomorfismo.*

Por tanto, si restringimos a V como una bola abierta de radio ϵ centrada en $\vec{0}$ suficientemente pequeña, esto es, $V = B_\epsilon(\vec{0})$, su imagen $U = exp_q(V)$ en M se convierte en una una "bola geodésica" sujeta a la métrica g. A esta bola la llamamos una *bola normal geodésica centrada en $p \in U \subseteq M$* . Por último, $q \in U = exp_q(V)$ y $\forall p \in U$ se verifica que p y q se pueden unir mediante una única geodésica que parte de q, por definición.

Además, como V es un isomorfo a $\mathbb{R}^m_{\phi(q)}$ por construcción, la función exponencial $\exp_q^{-1}$ se puede usar como una carta local de coordenadas sobre la vecindad normal U, lo cual es muy interesante, ya que usamos todas las geodésicas que parten de q para definir coordenadas en un entorno suficientemente pequeño de M. Esto es, son coordenadas adaptadas a los entornos normales, que simplifican los cálculos aunque a veces es pesado de por si calcular estas coordenadas explícitamente:

Definición 2.20 *Sea $p \in M$ y U un entorno normal de p, esto es, $U = exp_p(V)$ tal que $exp_{p|V}$ es un difeomorfismo, y V un entorno de $\vec{0} \in T_pM$. Tomemos $\{E^i\}_{i=1,\ldots,m}$ una base normal de T_pM. Definimos el isomorfismo:*

$$E : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_pM$$

tal que $E(p_1, \ldots, p_m) = p_1E^1 + \ldots + p_mE^m$. Definimos el isomorfismo $\phi \triangleq E^{-1}_{|V} \circ exp^{-1}_{p|U}$, de tal forma que $\phi(q) \in \mathbb{R}^m$, y como ϕ es un difeomorfimo entre U un abierto de M y $\hat{U} = E^{-1}(V)$ un abierto de $\mathbb{R}^m$, se concluye que ϕ es un entorno coordenado de M, llamado sistema de coordenadas normales en $p \in M$.

Finalmente, para la demostración del teorema de Hopf-Rinow, necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.21 *Un subconjunto abierto $U \subset M$ se dice que es* uniformemente normal *si es que existe un $\delta > 0$ tal que U está contenido en una bola geodésica de radio δ alrededor de cada uno de sus puntos.*

Esto es, un conjunto es uniformemente normal, si es un entorno o vecindad normal para cada uno de sus puntos.

Curiosamente, las geodésicas tienen comportamientos interesantes dentro de vecindades normales. Especialmente, si consideramos una vecindad normal V_p de un punto $p \in M$, si $c : I \to M$ es una geodésica para $[a, b] \subseteq I$, tal que $c(a) = p$ y $c(b) = q$ para algún $q \in V_p$ y $c_1 : I' \to V_p$, donde $[a, b] \subseteq I'$, es cualquier otra curva diferenciable tal que $c_1(a) = p$ y $c_2 = q$ entonces necesariamente las longitudes verifican lo siguiente:

$$\mathcal{L}_g(c, a, b) \leq \mathcal{L}_g(c_1, a, b)$$

y se da la igualdad si y solo si c_1 es una reparametrización de c. Es decir, dentro de estas vecindades, las geodésicas tienen la propiedad de ser el camino más corto entre los puntos p, q [10] [8] [2] utilizando la métrica g. Y finalmente, dentro de las vecindades uniformemente normales, se asegura la existencia de la geodésica para todo punto (y conectando cualquier par de puntos dentro de la vecindad) [4] [8].

3. Completitud, convexidad y conectividad

En este capítulo, ejemplificaremos cómo la estructura que construimos en el capítulo 2 nos permite aseverar hechos geométricos. Realizaremos una analogía formal entre variedades riemannianas y espacios métricos, y con esto comprobaremos el teorema de Hopf-Rinow, con el cual discutiremos, aunque solo de forma breve, 3 aspectos geométricos de las variedades riemannianas: la completitud, la conectividad y la convexidad.

3.1. Variedades riemannianas como espacios métricos

Para poder seguir estudiando las propiedades de las geodésicas y de la métrica riemanniana sobre variedades es necesario que nos desviemos un poco hacia el área de la topología, pues el resultado que queremos comprobar más adelante es un resultado cuyo centro es un argumento topológico. Especialmente estamos interesados en espacios métricos, ya que queremos estudiar cómo la métrica riemanniana induce una métrica sobre una variedad tal que se puede estudiar como un espacio métrico.

Para ello comenzamos definiendo la idea de un espacio métrico dentro de la topología,

Definición 3.1 *Consideremos un conjunto $X \neq \emptyset$ y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Si se verifica que*

1. *d es una función positivo definida, es decir $d(a, b) \geq 0$, donde $d(a, b) = 0 \iff a = b$;*
2. *d es simétrica, $d(a, b) = d(b, a)$;*
3. *y respeta la desigualdad triangular $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ para cualquier trío de puntos $a, b, c \in X$,*

entonces se dice que d es una métrica sobre X *y se dice que el conjunto (X, d) es un* espacio métrico .

Al ser un espacio métrico, se puede definir una topología "métrica", de la siguiente manera: Ahora, introduciremos el concepto de topología inducida sobre un conjunto por la métrica, en ánimos de estudiar cual es la topología que induce la distancia riemanniana sobre M:

Definición 3.2 *Consideremos un espacio métrico (X, d), entonces definimos a la* bola abierta de radio r centrada en $a \in X$ *como el conjunto*

$$B_a(r) = \{p \in M : L_g(a, p) < r, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

El conjunto de bolas abiertas $B = \{B_a(r)\}$ es una base para una topología conocida como la topología inducida por la métrica d sobre M [11].

Si consideramos la métrica riemanniana g, entonces observamos que a pesar de su nombre, no es una métrica topológica por si misma sobre la variedad M. Lo que ocurre en realidad es que podemos usar el producto punto g_p para definir una métrica sobre T_pM y demostrar que T_pM es un espacio métrico[1]. Además, la métrica riamnniana induce una forma de medir distancias entre puntos a través de su propiedad de medir longitud de curvas, lo cuál va a permitir definir una métrica en M, llamada la distancia riemanniana, que le dará estructura de espacio métrico a una variedad riemanniana:

Definición 3.3 *Consideremos una variedad riemanniana (M, g) y dos puntos $a, b \in M$. Entonces, definimos la* distancia riemanniana entre los puntos a y b *como:*

$$L_g(a, b) = inf\,\{\mathcal{L}_g(c, a, b)\}$$

donde $c : (0, 1) \to M$ es una curva diferenciable a trozos, tal que $c(0) = a$ y $c(1) = b$.

Con esta definición, se tiene que:

Proposición 3.4 *Sea (M, g) variedad riemanniana, y L_g su distancia riemanniana asociada. Entonces, (M, L_g) es un espacio métrico.*

Demostración.

Las propiedades de simetría y de ser positivo definida provienen directamente de la definición de la métrica riemanniana, por lo que para ser una métrica topológica solo tenemos que comprobar que cumpla con la desigualdad triangular. Para ello, tomemos $p, q, r \in M$ y demostremos que $L_g(p, q) \leq L_g(p, r) + L_g(r, q)$. Para esto consideremos dos curvas cualesquiera $c_1 : [a, b] \to M$ y $c_2 : [a', b']$ tal que $c(a) = p$, $r = c_1(b) = c_2(a')$ y $c_2(b') = q$. Entonces podemos definir una tercera curva por partes:

$$c_3(t) = \begin{cases} c_1(t + a) & : \quad 0 \leq t \leq b - a \\ c_2(t + a - b + a') & : \quad b - a \leq t \leq b + b' - a - a' = b'' \end{cases}$$

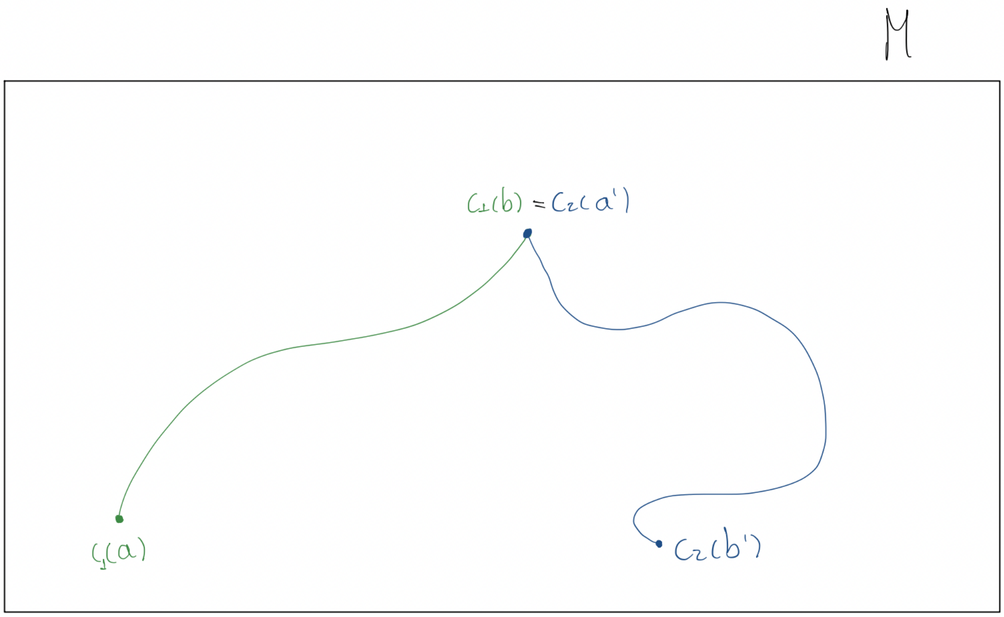


Figura 9: Construcción de curva utilizada en la comprobación

Entonces, la longitud de la curva c_3 es:

$$\mathcal{L}_g(c_3, 0, b'') = \mathcal{L}_g(c_1, a, b) + L_g(c_2, a', b')$$

Ahora, la curva c_3 es una curva que va desde el punto $c_1(a) = p$ hasta $c_2(b') = q$ y además pasa por el punto $r = c_1(b) = c_2(a')$ y por la Definición 3.3 tenemos necesariamente que:

$$L_g(p, q) \leq \mathcal{L}_g(c_3, 0, b'').$$

Además,

$$\mathcal{L}_g(c_3, 0, b'') = \mathcal{L}_g(c_1, a, b) + \mathcal{L}_g(c_2, a', b'),$$

Por lo que:

$$L_g(p, q) \leq \mathcal{L}_g(c_1, a, b) + \mathcal{L}_g(c_2, a', b').$$

Obsérvese que esto se debe verificar para cualesquiera dos curvas c_1 y c_2 que unan a p con r y r con q respectivamente, por lo que también se debe verificar para el ínfimo de estas longitudes, obteniendo así que:

$$L_g(p, q) \leq L_g(p, r) + L_g(r, q)$$

■

Ahora ya podemos enunciar y comprobar un resultado importante dentro de la geometría riemanniana (veáse Definición 3.2 y Proposición 1.9):

Teorema 3.5 *Consideremos una variedad riemanniana (M, g). Entonces la topología inducida por L_g sobre la variedad topológica M coincide con la topología de M como variedad topológica.*

Antes de poder demostrar este teorema, necesitamos introducir un lemma que será utilizado en la comprobación:

Lema 3.6 *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Entonces, para cualquier entorno coordenado (U, ϕ) alrededor de un punto $p \in M$ podemos tomar un $\rho > 0$ de tal forma que $\overline{B_{\phi(p)}(\rho)} \subset \phi(U)$ y $\overline{\phi^{-1}(B_{\phi(p)}(\rho))} \subset U$. Además, existen constantes $k_1, k_2 > 0$ tal que $\forall q \in \overline{U}$*

$$k_1 L_g(p, q) \leq L(\phi(p), \phi(q)) \leq k_2 L_g(p, q),$$

donde L es la longitud euclidiana en $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Primero vamos a ver que la topología métrica es más fina que la topología de la variedad, demostrando que dado un punto p y un abierto U cualesquiera, tal que $p \in U$, siempre se puede encontrar un $\epsilon > 0$ tal que la bola métrica $B_p(\epsilon)$ verifica que $p \in B_p(\epsilon) \subset U$. Para ello, supongamos que $U \subset M$ es un abierto en la topología de M como variedad. Ahora, sea $p \in U$ y $V = \phi^{-1}(B_{\phi(p)}(r))$ donde escogemos r de tal forma que la clausura $\overline{V}$ sea una subconjunto propio de U. Escogemos un $\varepsilon > 0$ tal que, si $q \notin \overline{V}$,

$$L_g(p, q) \geq \varepsilon$$

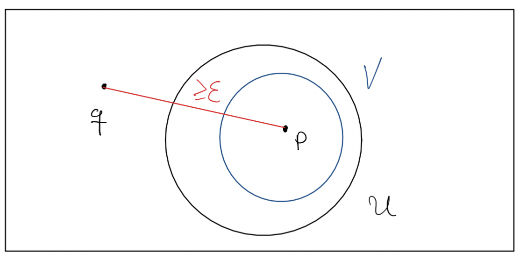


Figura 10: Ejemplificación de que q está fuera de V

Pero esto es equivalente a decir que

$$L_g(p, q) < \varepsilon \implies q \in \overline{V}$$

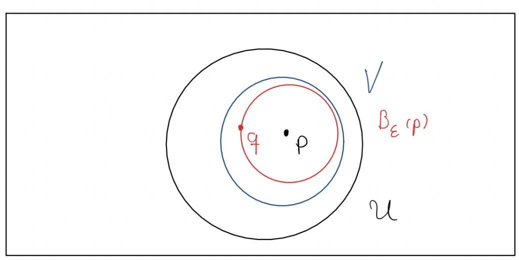


Figura 11: Ejemplificación de que q ahora se encuentra dentro de V

Es decir, la bola métrica $B_p(\epsilon)$ es un subconjunto propio de U que contiene a p (para demostrar que U es un abierto de la topología métrica, basta con recubrir a U con estos abiertos.)

Demostremos ahora que la topología de la variedad es más fina que la topología métrica. Para ello, supongamos que W es un abierto en la topología métrica. Demostremos que para cualquier $p \in W$ existe

$V = \phi^{-1}(B_{\phi(p)}(r))$ para algún $r > 0$ tal que $p \in V \subset W$. Obsérvese que como $B_{\phi(p)}(r)$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$ y ϕ es un difeomorfismo, entonces V es un abierto de M.

Como W es un abierto en la topología métrica de M, si tomamos $p \in W$ arbitrario sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $p \in B = B_p(\epsilon) \subset W$. Entonces, por el lema 3.6, podemos tomar dos constantes positivas k_1 y k_2 tal que para $q \in W$ se verifica que:

$$k_1 L_g(p,q) \leq L(\phi(p), \phi(q)) \leq k_2 L_g(p,q)$$

Como $q \in B$ si y sólo si $L_q(p,q) < \epsilon$, podemos conseguir un conjunto V' como el conjunto de todos los puntos q sobre lW, tal que la distancia euclidea entre $\phi(p)$ y $\phi(q)$ sea menor o igual a un $r = k_1 \cdot \epsilon > 0$:

$$V' = \{q \mid L(\phi(p), \phi(q)) \leq r\} = \phi^{-1}(B_{\phi(p)}(r)) \cap W,$$

y así, nuevamente por el lema 3.6,tenemos que $p \in V' \subseteq B_p(r/k_1) \cap W \subset W$. Y como$\phi^{-1}(B_{\phi(p)}(r))$ y W son abiertos en M, la intersección también lo es, por lo para cualquier $p \in W$ y W cualquier bola abierta W definida por la distancia euclidea, que hemos encontrado V' un abierto tal que $p \in V' \subset W$.

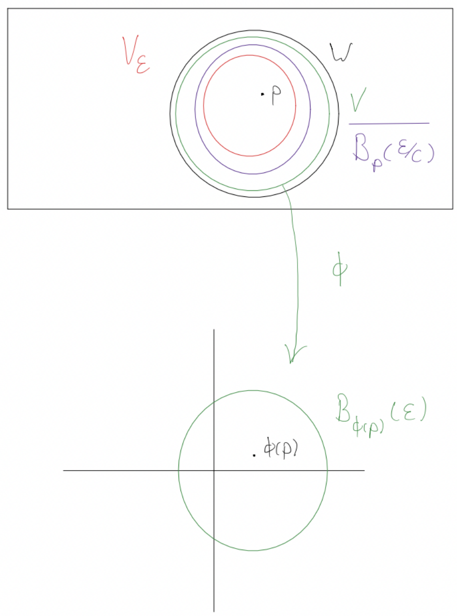


Figura 12: Ejemplificación de la localización de las vecindades definidas en la comprobación

■

Es por esta relación que se habla de las variedades riemannianas como espacios métricos y se pueden estudiar sus propiedades, como la de completitud métrica o convexidad métrica [7], los conceptos que estudiaremos en esta sección.

Por el momento, definimos la idea de completitud sobre un espacio métrico. Para eso comenzamos definiendo un tipo especial de secuencias:

Definición 3.7 *Si consideramos un espacio métrico* (X, d)*, entonces una secuencia de puntos* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$*, indexados por un conjunto a lo mucho numerable* A*, se dice que es una* secuencia de Cauchy *si es que* $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\forall n_1, n_2 \geq n, \quad d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$$

Intuitivamente, una secuencia de puntos se dice que es de Cauchy si es que pasan algún punto, sus puntos se acercan arbitrariamente con respecto a la métrica del espacio.

Ahora,

Definición 3.8 *Una secuencia de Cauchy* $\{x_\alpha\}$ *se dice que* está completa dentro de M *si es que* $\{x_\alpha\} \to x$ *entonces necesariamente tenemos que* $x \in M$

Finalmente,

Definición 3.9 *Un espacio métrico* (X, d) *se dice* completo métricamente *si es que todas sus secuencias de Cauchy son completas dentro de* M*.*

3.2. Teorema de Hopf-Rinow

Lo que nos lleva a la pregunta central de este trabajo. ¿Cuales son las condiciones, en general, para poder asegurar la existencia de una geodésica entre cualquier par de puntos dentro de la variedad y que se comporte como dentro de una vecindad normal?

Definición 3.10 *Consideremos una variedad riemanniana* (M, g)*, entonces decimos que es* geodésicamente completa *si es que el dominio de cualquier geodésica es* $\mathbb{R}$*.*

Por lo que podemos refinar la pregunta a: ¿cuáles son las condiciones para que una variedad Riemanniana sea geodésicamente completa?

Theorem 3.11 *Consideremos* (M, g) *una variedad Riemanniana conexa. El teorema de Hopf-Rinow establece que las siguientes condiciones son equivalentes [2] [14]:*

1. (M, L_g) *es un espacio métrico completo.*
2. (M, g) *es una variedad geodésicamente completa.*
3. $\exists p \in M$ *tal que* $\exp_p$ *está definido sobre todo* T_pM*.*
4. *Todo subconjunto* $U \subset M$ *cerrado y acotado es compacto (propiedad de Heine-Borel)*

   Y todas las anteriores implican lo siguiente:

5. $\exists p \in M, \forall q \in M, q \neq p$ *tal que* q *está conectado a* p *a través de una geodésica con longitud* $d_g(p, q)$*.*

3.2.1. Demostración del Teorema de Hopf-Rinow

Nuestra comprobación estará dividida en partes. Éste es el camino que se va a seguir para demostrar todas las equivalencias:

$$4 \implies 1 \implies 2 \implies 3 \implies 4$$

Una vez demostrado esto, demostraremos que $3 \implies 5$, para demostrar que todas ellas implican a 5.

La primera no se discutirá en este trabajo, pues es un resultado fundamental en la topología que $4 \implies 1$.

$1 \implies 2$

Consideremos primero un variedad riemanniana (M, d_g) tal que es un espacio métrico completo. Por reducción al absurdo, supongamos que M no es un espacio geodésicamente completo. Esto es, existe una geodésica maximal tal que su dominio de definición no es todo $\mathbb{R}$. Equivalentemente, $\exists c : [0, b] \to M$ tal que c es una geodésica maximal, y $c : [0, b + \epsilon], \epsilon > 0$ ya no es una geódesica.

Ahora, consideremos una secuencia $\{x_i\} \to b^-$ en $[0, b]$, si $i \to \infty$. Como estamos en $\mathbb{R}^m$, sabemos que podemos encontrar una subsecuencia de Cauchy, por lo que sin pérdida de generalidad asumimos que $\{x_i\}$ es una secuencia de Cauchy.

Si asumimos que c es una geodésica norma y como la geodésica c está parametrizada por el parámetro longitud de arco por definición,

$$L_g(c(x_{i+1}), c(x_i)) \leq |x_{i+1} - x_i|$$

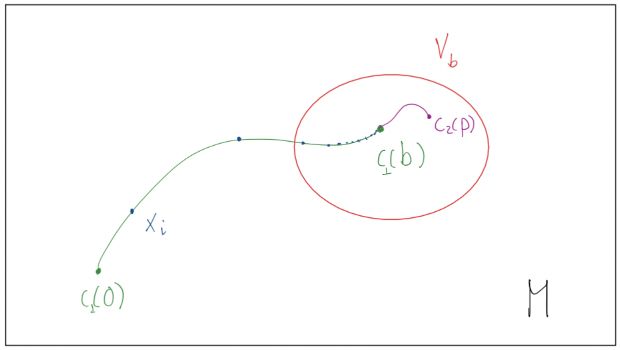


Figura 13: Ejemplificación de como encontramos una extensión geodésica

Por lo tanto $\{c(x_i)\} \to c(b) \in M$ es una secuencia de Cauchy, y además es completa por hipótesis.

Ahora, consideremos una vecindad normal V_q alrededor del punto $b \in M$. De tal forma que existe una geodésica conectando el punto $q \in V_b$ con cualquier otro punto $p \in V_b$, debido a las propiedades de una vecindad normal. Especialmente, existe una geodésica c_1 que pasa por los puntos definidos por la secuencia $c\{x_i\}$ y que termina en $c(b)$. Sin embargo, podemos encontrar una geodésica c_2 que comienza en $c(b)$ y termina en cualquier otro punto de V_q diferente a los puntos de c_1. Por unicidad esta geodésica c_2 tiene que ser una extensión de c_1 y por ende una extensión de c, por lo que c no es maximal. Lo que nos lleva a una contradicción y necesariamente tenemos que concluir que M es un espacio geodésicamente completo.

$3 \implies 5$

Supongamos por hipótesis que existe un punto $p \in M$ cualquiera tal que $\exp_p$ está definido sobre todo T_pM. Entonces M es una vecindad normal de p y por lo tanto, cualquier punto $q \in M$ está conectado por una geodésica con p. Sean ahora dos puntos q, r. Sabemos que existe una geodésica c_1 que conecta a q con p, y otra geodésica c_2 que conecta a p con r. Por tanto, $c = c_2 \circ c_1$ conecta a q con r, es una geodésica, y minimiza la distancia entre esos dos puntos, por lo que la longitud de la geódesica desde p a q es exactamente la distancia riemanniana entre p y q.

$3 \implies 4$

Consideremos un subconjunto $K \subset M$ tal que sea cerrado y acotado. Es decir, existe un C tal que $L_g(r, s) < C$ para cualquier par de puntos $r, s \in K$. Nuevamente si asumimos que existe un punto $p \in M$ tal que $\exp_p$ está definido sobre todo T_pM podemos observar que $K \subset \exp_p(B)$, donde B es una bola geodésica cerrada, la cual es compacta en T_pM. Como $\exp_p$ es un difeomorfismo en todo M, también es un homeomorfismo en todo M y por lo tanto $\exp_p(B)$ es compacto en M. Por lo tanto K es un subconjunto cerrado de un subespacio compacto, por lo que también tiene que ser compacto.

$2 \implies 3$

Asumamos que M es una variedad riemanniana geodésicamente completa. Es decir, que toda geodésica tiene como dominio $\mathbb{R}$.

Consideremos un punto $p \in M$. Con el mapa $\exp_p$, fijando el punto p fijamos un elemento del fibrado (p, T_pM). El mapa exponencial está definido para todos aquellos vectores $v \in T_pM$ tal que la geodésica con punto inicial p y velocidad v esté definida en algún intervalo que contenga $[0, 1]$. Además, las geodésicas verifican que:

$$\gamma(p, av; t) = \gamma(p, v, at),$$

y con esta propiedad podemos no sólo restringir o aumentar el dominio de una geodésica, sino que también podemos encontrar el valor de $exp_q(v')$ para $v' = av$, siempre que la geodésica esté definida en esos valores. En este caso, por hipótesis M es un espacio geodésicamente completo, esto es, el dominio de definición de cualquier geodésica es todo $\mathbb{R}$, por lo que eso nos hace darnos cuenta que el mapa exponencial estará definido para todos los vectores $v \in T_pM$. Por lo tanto hemos encontrado que $(4 \implies 1 \implies 2 \implies 3 \implies 4) \implies 5$ como requeríamos.

3.3. Conectividad y convexidad

Por el momento ya hemos demostrado que la completitud geodésica y la completitud métrica son equivalentes. Ahora podríamos tratar de encontrar relaciones en conectividad y convexidad, y ver cómo estos conceptos son extendidos a variedades riemannianas.

3.3.1. Conectividad

Comenzamos con el concepto de conectividad, que resulta provenir directo del concepto de completitud.

Definición 3.12 *Una variedad topológica se dice que es* conexa *si es que no puede ser representada como la unión de dos (o más) subconjuntos propios tal que son separados.*

En esta definición, dos espacios X, Y son separados si es que $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$. Es decir, un espacio es conexo si es que, de forma intuitiva, no está compuesto de subespacios "separados"(es decir que no se tocan). Esta definición coincide con la intuición de que algo sea conexo (es decir, que pertenezca a un solo objeto).

Existen tipos de conectividad mas fuertes que la conectividad general. Por ejemplo:

Definición 3.13 *Se dice que una variedad topológica es* conexa por caminos *si es que se verifica que para cualquier dos puntos $x, y \in M$, existe un camino continuo que los une.*

De esta forma, se puede ver que trivialmente, cualquier variedad riemanniana que sea geodésicamente completa, es conexa por caminos. Pues, en una variedad riemanniana completa, cualquier dos puntos están unidos por un camino diferenciable (la geodésica), que de hecho es un requerimiento mas fuerte que un camino continuo.

Es mas, en general, si es que no se asume que M es una variedad geodésicamente completa, aún se puede asegurar que M localmente conexo por caminos. Pues las vecindades normales nos aseguran la existencia de estos caminos localmente.

3.3.2. Convexidad

El concepto de convexidad es un poco mas dificil de estudiar sobre variedades riemannianas. Para esto comenzamos definiendo una nueva característica de los espacios exponenciales:

Definición 3.14 *Definimos el* radio de inyectividad de la variedad riemanniana (M, g) en el punto $p \in M$ *como*

$$inj_p(M, g) = \sup\{r > 0 : \exp_p : B_0(r) \to M \text{ es un difeomorfismo } \}$$

Con la ayuda de este radio de inyectividad definiremos la idea de una *vecindad totalmente normal*

Definición 3.15 *Una vecindad normal W del punto p se dice que es* totalmente normal *si es que se verifica que* $\exists \delta > 0, \forall q \in W : inj_p(M, g) \geq \delta \wedge B_q(\delta) \supset W$

Ahora, sobre estas vecindades totalmente normales tenemos que cualquier par de puntos están conectados por una única geodésica [9].

Recordemos que

Definición 3.16 *Una variedad topológica se dice convexa si es que el camino continuo mas corto entre cualesquiera dos puntos es un subconjunto propio de la variedad*

Es decir, una variedad topológica es convexa si es que se verifica que todos los caminos mas cortos se encuentran dentro de la variedad.

Por lo que podríamos extender esta idea a estas vecindades totalmente normales

Definición 3.17 *Decimos que una vecindad totalmente normal es* geodésicamente convexa *si es que todas sus geodésicas son subconjuntos propios de la vecindad*

Además

Definición 3.18 *Decimos que una variedad es* geodésicamente convexa *si es que todas las geodésicas son subonconjuntos propios de algún conjunto de vecindades totalmente normales*

Sin embargo, a pesar de que la idea de convexidad puede ser definida sin añadir nuevos teoremas, para poder realizar conclusiones sobre la convexidad de una variedad riemanniana, aunque sea solo convexidad local, necesitamos estudiar otros resultados. Como por ejemplo, el Teorema de Whitehead, el cual en conjunto con completitud geodésica asegura que una variedad riemanniana sea globalmente convexa [13]. Además, por si solo asegura la existencia de una vecindad convexa para cualquier punto de una variedad riemanniana [9] o lo que llamaríamos convexidad local. Adicionalmente, el estudio de convexidad usualmente se lo hace distinguiendo entre dos tipos de convexidades; una fuerte y una débil.

Referencias

[1] Marcel Berger. *A panoramic view of Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, 2007. ISBN: 9-783-54065317-2.

[2] Manfredo do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, 1992. ISBN: 3-764-33490-8.

[3] Oscar García. *Variedades Diferenciables.* URL: https://www.uv.es/majuanos/variedades.html.

[4] Leonor Godinho. *An Introduction to Riemannian Geometry with Applications to Mechanics and Relativity.* Springer-Verlag, 2004. ISBN: 3-319-08665-0.

[5] Ivan Kolar. *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer-Verlag, 1991. ISBN: 0-387-56235-4.

[6] Javier Lafuente. *Variedades Diferenciales.* URL: http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/manuales.htm.

[7] John Lee. *An introduction to smooth manifolds.* Springer-Verlag, 2012. ISBN: 978-1-44199982-5.

[8] John M. Lee. *Riemannian Geometry: An introduction to curvature.* Springer-Verlag, 1997. ISBN: 0-387-98322-8.

[9] Tu Wang Liang. *Lengths and Distances in differential Geometry.* URL: https://idv.sinica.edu.tw/ftliang/diff_geom/*diff_geometry(I)/11.27/riemetric3.pdf.

[10] Andrew McInerney. *First Steps in Differential Geometry: Riemannian, Contact, Symplectic.* Springer-Verlag, 2013. ISBN: 9-781-46147732-7.

[11] Sidney Morris. *Topology without tears.* 2014. URL: https://www.topologywithouttears.net/.

[12] Boaz Porat. *A Gentle Introduction to Tensors.* Israel Institute of Technology Press, 2014.

[13] Constantine Udriste. *Convex functions and optimization methods on riemannian manifolds.* Springer-Verlag CMCS Amsterdam Press, 1994. ISBN: 978-94-015-8390-9.

[14] Zuoqin Wang. *Riemannian geometry.* URL: http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/16S-RiemGeom/.