

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Ciencias e Ingenierías**

**Polítropos anisótropos relativistas en el contexto del  
Desacople Gravitacional mediante la Deformación  
Geométrica Mínima.**

**Diego Sebastián Santana Alarcón**

**Director de tesis: Dr. Ernesto Contreras  
Codirector de tesis: Dr. Ernesto Fuenmayor**

**Física**

Trabajo de titulación presentado como requisito  
para la obtención del título de Magister en Física

Quito, 3 de diciembre de 2021

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

Hoja de calificación de trabajo de titulación

**Politropos anisótropos relativistas en el contexto del  
Desacople Gravitacional mediante la Deformación  
Geométrica Mínima**

**Diego Sebastián Santana Alarcón**

Nombre del director de tesis, Título académico:

Ernesto Contreras, PhD

Calificación:

\_\_\_\_\_

Firma:

\_\_\_\_\_

Quito, 3 de diciembre de 2021

## Derechos de autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante:

---

Nombres y apellidos:

Diego Sebastián Santana Alarcón

Código:

00320091

Cédula de identidad:

172311481-3

Lugar y fecha:

Quito, 3 de diciembre de 2021

## **ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN**

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETHeses>.

## **UNPUBLISHED DOCUMENT**

Note: The following graduation project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETHeses>.

## **AGRADECIMIENTOS**

Primero quiero agradecer infinitamente a Dios porque nunca me ha abandonado incluso en los momentos más difíciles, agradezco a mis padres Ángel y Fabiolita, en especial a mi madre por nunca rendirse y siempre estar ahí. Agradezco a mis hermanos Santi, Nena y Andrea y a mi novia Diana por todo el apoyo incondicional durante estos años. Agradezco a mi hijo Samuel por estar en mi vida. Finalmente, agradezco mucho a mi director de tesis Ernesto, que sin él no hubiera sido posible todo esto.

## Resumen

En este trabajo se presenta el procedimiento para obtener soluciones anisótropas para polítrpos relativistas utilizando el método de desacople gravitacional mediante la deformación geométrica mínima. Se extienden las soluciones isótropas de tres sectores semillas: Tolman IV, Wyman IIa, Durgapal IV hacia un dominio de soluciones anisótropas. Este método permite reducir los grados de libertad del sistema y permite obtener soluciones más fundamentales sin necesidad de imponer condiciones extras en la métrica o ecuaciones de estado adicionales. Las soluciones numéricas a la ecuación de Lane-Endem obtenidas muestran configuraciones estables y bien comportadas para una serie de parámetros dependientes del sector material y de la naturaleza del polítrpo. Este trabajo ilustra el método de desacople gravitacional como una alternativa novedosa para el modelamiento estelar de objetos ultracompactos donde la anisotropía local es un factor de gran relevancia.

## **Abstract**

In this work the procedure to obtain anisotropic solutions for relativistic polytropes using the gravitational decoupling method by means of minimal geometric deformation is presented. The isotropic solutions of three seed sectors: Tolman IV, Wyman IIa, Durgapal IV are extended into a domain of anisotropic solutions. This method allows reducing the degrees of freedom of the system and allows obtaining more fundamental solutions without the need to impose extra conditions on the metric or additional equations of state. The numerical solutions to the Lane-Emden equation obtained show stable and well-behaved configurations for a series of parameters dependent on the material sector and the nature of the polytrope. This work illustrates the gravitational decoupling method as a novel alternative for stellar modeling of ultracompact objects where local anisotropy is a factor of great relevance.

# ÍNDICE

Resumen . . . . .	6
Abstract . . . . .	7
<b>I Introducción</b>	<b>11</b>
<b>II Marco Teórico</b>	<b>14</b>
2.1 Soluciones Interiores . . . . .	15
2.2 Polítropo . . . . .	18
2.3 Polítropo relativista anisótropo . . . . .	20
2.4 Desacople Gravitacional . . . . .	27
<b>III Polítopos relativistas anisótropos por Desacople Gravitacional</b>	<b>30</b>
3.1 Cálculo de Anisotropía . . . . .	32
3.2 Masa de Tolman . . . . .	35
3.3 Semillas Utilizadas . . . . .	37
<b>IV Resultados Obtenidos</b>	<b>41</b>
4.1 Tolman IV . . . . .	41
4.2 Wyman IIa . . . . .	45
4.3 Durgapal IV . . . . .	49
4.4 Discusión . . . . .	53
<b>V Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Apéndice</b>	<b>68</b>
<b>A Método Alternativo</b>	<b>69</b>



# Índice de figuras

2.1	Corte en el borde de una esfera autogravitante suficientemente pequeña para despreciar la curvatura. $P$ y $P + dP$ corresponde a la presión en $z$ y $z + dz$ respectivamente. . . . .	16
2.2	Cualquier solución isótropa bien comportada puede extenderse constantemente al dominio anisotrópico a través del desacoplamiento MGD. . . . .	28
4.1	$\psi$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	43
4.2	$\eta$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	43
4.3	Potencial de superficie $y$ como función de $n$ para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	44
4.4	Masa de Tolman-Whittaker normalizada $\eta/\eta_{\Sigma_T}$ como función de $x$ para $\alpha = 0.2$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	44
4.5	Anisotropía local $\Delta$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	45
4.6	$\psi$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	47
4.7	$\eta$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	47
4.8	Potencial de superficie $y$ como función de $n$ y diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	48
4.9	Masa de Tolman-Whittaker normalizada $\eta/\eta_{\Sigma_T}$ como función de $x$ para $\alpha = 0.7$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	48
4.10	Anisotropía local $\Delta$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	49

4.11	$\psi$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	51
4.12	$\eta$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	51
4.13	Potencial de superficie $y$ como función de $n$ para diferentes valores de $\alpha$ . . . .	52
4.14	Masa de Tolman-Whittaker normalizada $\eta/\eta_{\Sigma_T}$ como función de $x$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . . . . .	52
4.15	Anisotropía local $\Delta$ como función de $\xi$ para $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $n$ . .	53

# Capítulo I

## Introducción

Los politrópos corresponden a soluciones de interiores estelares cuya ecuación de estado se puede escribir, en el caso de un fluido isotrópico como,

$$P = K\rho_0^\gamma = K\rho_0^{1+1/n}, \quad (1.1)$$

donde  $P$  y  $\rho_0$  denotan la presión isotrópica y la densidad de masa (barionica), respectivamente. Las constantes  $K$ ,  $\gamma$ , y  $n$  son usualmente denominadas constante politrópica, exponente politrópico, e índice politrópico, han sido ampliamente estudiados para modelar objetos estelares ultracompactos como estrellas de neutrones, enanas blancas super Chandrasekhar, etc [1, 2, 3].

Una vez que se asume la ecuación de estado (1.1), todo el modelo estelar se describe mediante la ecuación de Lane-Emden que puede resolverse numéricamente para cualquier conjunto de parámetros de la teoría. Es común asumir isotropía en la presión, sin embargo, es bien conocido que muchos procesos físicos relevantes [4, 5, 6] producen desviaciones a la isotropía que producen cambios significativos en el modelamiento de la estructura estelar. La introducción

de la anisotropía  $\Delta = P_{\perp} - P_r$  al sistema conduce a una subdeterminación del problema, lo cual requiere imponer una condición adicional para cerrar el mismo. En este sentido, históricamente se han impuesto condiciones a las variables métricas [7, 8] que permiten escribir la anisotropía como una variable dada. Alternativamente, otros métodos basados en el concepto de complejidad también han sido estudiados [9, 10, 11] para resolver este problema.

En este trabajo se presenta un método alternativo para integrar la ecuación de Lane-Emden que consiste en considerar interiores estelares soportados por fluidos anisotrópicos cumpliendo con la ecuación de estado politrópica para la presión radial en combinación con el Desacoplamiento Gravitacional (GD) [12] mediante el enfoque de deformación geométrica mínima (MGD, por sus siglas en inglés) extensamente estudiado en [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]. El uso de GD a través de MGD permite extender soluciones bien conocidas al deformar la métrica semilla y agregar una fuente desconocida al sector material. La ventaja de este procedimiento es que en lugar de proporcionar dos condiciones para cerrar el sistema de tres ecuaciones diferenciales en el caso estático y esféricamente simétrico, solo se requiere una condición adicional. Por lo que al integrar la ecuación relativista de Lane-Emden basta con suministrar la ecuación de estado politrópica para que la presión radial cierre el sistema de ecuaciones de campo de Einstein. En este sentido, no es necesario proponer ningún *ansatz* para la anisotropía o dar alguna condición geométrica sino solo una configuración interior estelar conocida.

Este escrito se divide de la siguiente manera, el capítulo II está dedicado a establecer el marco teórico sobre el cual se basa este trabajo, se revisará las ecuaciones básicas de la relatividad general así como la teoría de los polítopos y el método de Desacople Gravitacional. El capítulo III, está dedicado a la aplicación del método de GD a través de la obtención de

la ecuación de Lane-Emden para polítrópos relativistas anisótropos y se ejemplifica el método para tres semillas (Tolman IV, Wyman IIa y Durgapal IV). En el Capítulo IV se presentan los resultados obtenidos y se discute las características encontradas en los modelos. Finalmente, el Capítulo V está dedicado a las conclusiones del trabajo.

## Capítulo II

### Marco Teórico

En 1915, Einstein publica su teoría de la Relatividad General donde describe la relación geométrica del espacio-tiempo con el sector material (energía) presente en el mismo. Esta interacción es descrita a través de las ahora denominadas ecuaciones de campo de Einstein,

$$G_{\nu}^{\mu} = \kappa^2 T_{\nu}^{\mu}. \quad (2.1)$$

donde  $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$ ,  $G_{\nu}^{\mu}$  es el tensor de Einstein,  $T_{\nu}^{\mu}$  el tensor de Energía-Momento (que contiene cantidades como la densidad y presión de la materia) y  $\nu$  y  $\lambda$  son funciones de  $r$  y  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . La métrica de la primera solución exacta en el vacío, realizada por Schwarzschild, está dada por,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2), \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>En este trabajo usaremos unidades naturales tales que  $c = G = 1$

aquí  $M$  representa la energía total del sistema<sup>2</sup>. La solución externa de Schwarzschild [36] ha jugado un papel importante en la Relatividad General ya que esta describe los efectos de la gravitación en el vacío fuera de una distribución de materia esféricamente simétrica independiente del tiempo. Una de las principales razones de su importancia es su generalidad: solo depende de la simetría esférica y de la distribución total de energía/materia. Otra razón, es que se ha demostrado que esta solución sigue siendo válida incluso en situaciones dependientes del tiempo, siempre que la simetría esférica sea preservada [57]. Vale la pena enfatizar que la métrica (2.2) es una métrica estática ya que no se ha mencionado nada acerca de la fuente excepto que sea esféricamente simétrica. Y aún más importante la solución es válida sólo en el vacío, es decir, se espera que sea correcta solamente afuera de un objeto estelar esférico.

Por otro lado, intentar resolver las ecuaciones de campo de Einstein la especificación del tensor de energía-momento  $T_{\nu}^{\mu}$  juega un papel muy importante al momento de modelar sistemas estelares. Si lo que se quiere es modelar el interior de una estrella, esto es  $T_{\mu\nu}$  distinto de cero entonces las soluciones a las ecuaciones de Einstein (2.1) se denominan soluciones interiores. Este tipo de soluciones serán descritas en la siguiente sección.

## 2.1 Soluciones Interiores

Algunas de las soluciones interiores se descubrieron en las primeras etapas del desarrollo de la Relatividad General y en la actualidad se han encontrado un extenso número de soluciones interiores exactas para simetrías esféricas y estáticas realizadas por diferentes métodos, por ejemplo se han obtenido restringiendo la estructura algebraica del tensor de Riemann, agregando ecuaciones de campo para las variables de la materia o imponiendo condiciones iniciales

---

<sup>2</sup>Suponemos unidades naturales  $G = c = 1$

y de contorno. [58, 59, 60].

En este punto es importante repasar las interacciones presentes en el interior de una estrella o un objeto autogravitante. Para esto, de manera ilustrativa, se presenta el caso clásico que puede extenderse al caso relativista como se mostrará en la sección 2.3.

Comenzamos mencionando que una estrella a una buena aproximación se puede modelar como un fluido estático con simetría esférica. Si ampliamos una pequeña porción de una estrella esférica, lo suficientemente pequeña para que la curvatura no sea importante tenemos la Figura 2.1.

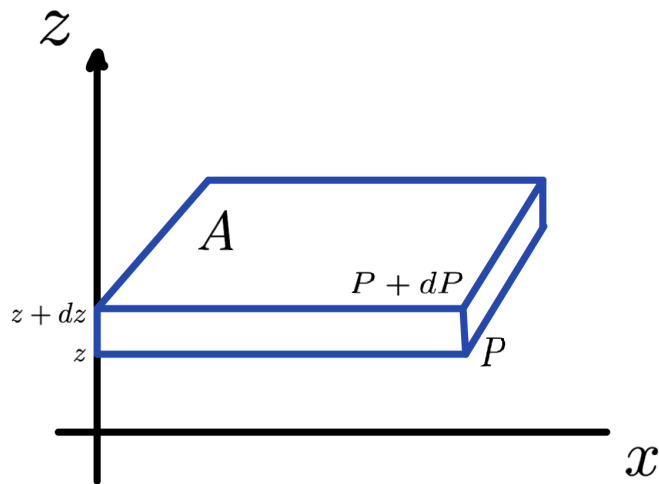


Figura 2.1: Corte en el borde de una esfera autogravitante suficientemente pequeña para despreciar la curvatura.  $P$  y  $P + dP$  corresponde a la presión en  $z$  y  $z + dz$  respectivamente.

En esta situación se puede notar que tenemos tres fuerzas a considerar: la primera en la dirección positiva del eje  $z$  ( $PA$ ), donde  $A$  es el área de la porción de gas. La segunda viene dada por  $(P + dP)A$  en la dirección contraria al eje  $z$ . Y por último tenemos la fuerza de la gravedad  $mg$  que apunta en la dirección negativa de  $z$ . En equilibrio, estas fuerzas deben



cancelarse, por lo que se puede obtener la ecuación de equilibrio,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{mg}{\Delta z A} = -\rho g \quad (2.3)$$

donde  $\rho$  representa la densidad total de la estrella. En una buena aproximación, para simetría esférica la ecuación (2.3) resulta en,

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho, \quad (2.4)$$

donde  $g$  es el campo gravitacional que depende de la distancia radial  $r$ . La ecuación (2.4) se conoce como la ecuación de equilibrio hidrostático y nos dice como cambia la presión con la densidad de materia presente dentro de la estrella. En el centro de la estrella por simetría es claro que el campo gravitacional  $g$  será cero.

En este sencillo ejemplo podemos ver que para modelar el interior de un objeto gravitante dos interacciones principales están en juego: la gravedad y la presión en el interior (causada por interacciones nucleares) que depende de la densidad total de materia  $\rho$ . En el contexto de la Relatividad General la ecuación de equilibrio hidrostático tendrá su equivalente en la ecuación de Tolman–Oppenheimer–Volkoff como se verá en la sección 2.3. Además, cabe recalcar que si se proporciona al sistema la densidad de la estrella a través de una ecuación de estado que en general depende de la presión y la temperatura  $\rho = \rho(P, T)$  se puede resolver (2.4). El caso especial en la que  $\rho$  no depende de la temperatura puede ser introducida para modelar cierto tipo de esferas autogravitantes. Esta relación tiene un nombre propio denominado polítropo que se detalla a continuación.

## 2.2 Polítropo

Los Polítropos<sup>3</sup> cuya ecuación de estado solo depende de la presión,  $\rho = \rho(P)$ , han jugado un papel un extenso y fundamental en la astrofísica [61, 62], y han sido vastamente usados para estudiar la estructura estelar de varios problemas astrofisicos fundamentales. Por ejemplo, objetos como enanas blancas anisotrópicas se han modelado considerando un formalismo general para estudiar los polítropos newtonianos para la materia anisotrópica. [63, 64], mientras que para sistemas más compactos (por ejemplo, estrellas de neutrones, enanas blancas super Chandrasekhar) [1, 2, 3], han sido estudiados en el contexto de la Relatividad General [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75]. La ecuación de estado politrópica para un fluido isotrópico se escribe como,

$$P = K\rho_0^\gamma = K\rho_0^{1+1/n} \quad (2.5)$$

donde  $P$  denota la presión isotrópica, y  $\rho_0$  la densidad de masa (bariónica). Las constantes  $K$ ,  $\gamma$ , y  $n$  son usualmente denominadas constante politrópica, exponente politrópico e índice politrópico, respectivamente. Cuando la constante  $K$  se calcula a partir de constantes naturales, la ecuación de estado politrópica se puede utilizar para modelar un gas de Fermi completamente degenerado no relativista ( $n = 5/3$ ) y en el límite relativista ( $n = 4/3$ ). En este último caso, la ecuación (1.1) proporciona una forma de modelar objetos compactos como las enanas blancas y permite obtener de una manera bastante directa el límite de masa de Chandrasekhar. De lo contrario, si  $K$  es un parámetro libre, los modelos pueden usarse para describir un gas ideal isotérmico o una estrella completamente convectiva. Estos modelos relacionados con el gas ideal isotérmico son relevantes en el llamado límite de Schönberg - Chandrasekhar [62].

Aunque la isotropía de la presión local es una suposición muy común en el estudio de los ob-

---

<sup>3</sup>Derivado del griego definido como un objeto capaz de tomar varios cursos de acción; adaptable, versátil.

jetos estelares, se sabe que muchos procesos físicos pueden producir desviaciones a la isotropía y/o fluctuaciones de la anisotropía local en la presión que pueden ser causados por una gran variedad de fenómenos físicos especialmente en objetos compactos. Se ha encontrado fuerte evidencia que sugiere que para ciertos rangos de densidad, una gran cantidad de fenómenos físicos pueden causar anisotropía local y por lo tanto se debe tener en cuenta para describir modelos realistas. Por ejemplo, una posible fuente de anisotropía está relacionada con los campos magnéticos intensos observados en objetos compactos como la enana blanca, estrellas de neutrones o estrellas de quarks magnetizadas [4, 5, 6].

Otra fuente son los altos índices de viscosidad que se espera estén presentes en las estrellas de neutrones, en la materia de alta densidad producida por la opacidad de la materia a los neutrinos en el colapso de objetos compactos [76, 78], y la superposición de dos fluidos isotrópicos. Cabe destacar que, aunque el grado de anisotropía puede ser pequeño, los efectos producidos sobre objetos estelares compactos pueden ser apreciables [79, 80, 81, 82, 84, 85, 86]. Así, la suposición de una presión isotrópica es una condición muy estricta, especialmente en una situación en la que un objeto compacto se modela como una estructura con alta densidad (como estrellas de neutrones, por ejemplo). Además, la condición de presión isotrópica se vuelve inestable por la presencia de factores físicos como la disipación, la falta de homogeneidad de la densidad de energía y el cizallamiento [90]. Estos hechos motivan el interés en el estudio de fluidos que no satisfacen la condición de presión isotrópica y justifican el interés de extender la teoría de los politrópicos a fluidos compactos anisótropos.

Por lo tanto, una vez se asume que la presión del fluido es anisotrópica, las componentes de la presión del fluido (presión radial  $P_r$  y presión tangencial  $P_{\perp}$ ) son distintas y la ecuación de estado politrópica se reescribe como

$$P_r = K \rho_0^\gamma = K \rho_0^{1+1/n}. \quad (2.6)$$

En este contexto, en la siguiente sección se presenta la teoría para modelar polítropos anisótropos relativistas mediante la resolución de las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuación de estado politrópica (2.6).

## 2.3 Polítropo relativista anisótropo

Consideremos una distribución estática y esféricamente simétrica de materia anisotrópica cuya métrica, en coordenadas tipo Schwarzschild, se parametriza como

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.7)$$

donde  $\nu$  and  $\lambda$  son funciones de  $r$ . La métrica (2.7) debe satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein.

El contenido de materia del sistema (que describe un fluido anisotrópico) está representado por el tensor de Energía - Momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_\perp)u_\mu u_\nu - P_\perp g_{\mu\nu} + (P_r - P_\perp)s_\mu s_\nu, \quad (2.8)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía total,  $u^\mu = (e^{-\nu/2}, 0, 0, 0)$ , es la cuadrivelocidad del fluido y  $s^\mu$  se define como

$$s^\mu = (0, e^{-\lambda}, 0, 0), \quad (2.9)$$

con las propiedades  $s^\mu u_\mu = 0$ ,  $s^\mu s_\mu = -1$ . Para encontrar la forma de las ecuaciones de campo al reemplazar la métrica (2.7) se debe encontrar la forma del tensor de Einstein  $G^\mu_\nu$ . Para este cometido a partir de (2.7) se puede obtener el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ ,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

del cual podemos obtener los símbolos de Christoffel definidos como,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\delta = \frac{1}{2} g^{\delta\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Por lo tanto, al reemplazar las derivadas de la métrica se obtiene,

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \nu' & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' & \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda' & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & & \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda} & \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} & & \\ \Gamma_{33}^1 &= -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta & & \end{aligned} \quad (2.11)$$

Una vez calculados los símbolos de Christoffel se calcula el tensor de Riemann,

$$R_{\sigma\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda, \quad (2.12)$$

que permite construir el tensor de Einstein. Ahora reemplazando (2.8), (2.3) y (2.9) en (2.1), se

obtiene

$$T_0^0 = \rho = -\frac{1}{8\pi} \left[ -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \right], \quad (2.13)$$

$$-T_1^1 = P_r = -\frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \right], \quad (2.14)$$

$$-T_2^2 = P_\perp = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{e^{-\lambda}}{4} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \right], \quad (2.15)$$

donde la prima denota derivada con respecto a  $r$ .

Además, consideraremos que fuera de la distribución de estudio el espacio-tiempo viene dado por la solución de Schwarzschild (2.2). Para hacer coincidir las dos métricas suavemente en la frontera de la superficie  $r = r_\Sigma = \text{constante}$ , se requiere las continuidades de la primera y segunda formas fundamentales a través de esa superficie. Como resultado de este acoplamiento obtenemos el conocido resultado,

$$e^{\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma}, \quad (2.16)$$

$$e^{-\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \quad (2.17)$$

$$P_{r_\Sigma} = 0, \quad (2.18)$$

donde el subíndice  $\Sigma$  indica que la cantidad se evalúa en la frontera.

Ahora de la componente radial de la ley de conservación,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.19)$$

y reemplazando (2.13), (2.14), (2.15) se obtiene la ecuación generalizada de Tolman-Oppenheimer-

Volkoff para materia anisotrópica:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\nu'}{2}(\rho + P_r) + \frac{2}{r}(P_\perp - P_r). \quad (2.20)$$

Esta ecuación (2.20) es una generalización la ecuación (2.4).

Alternativamente, usando

$$\nu' = 2 \frac{m + 4\pi P_r r^3}{r(r - 2m)}, \quad (2.21)$$

donde la función masa  $m$  se define por

$$e^{-\lambda} = 1 - 2m/r, \quad (2.22)$$

podemos reescribir la ecuación (2.20) en la forma

$$P_r' = -\frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)}(\rho + P_r) + \frac{2}{r}\Delta, \quad (2.23)$$

donde

$$\Delta = P_\perp - P_r, \quad (2.24)$$

mide la anisotropía del sistema.

Para las variables físicas que aparecen en (2.23) se aplican las siguientes condiciones de contorno

$$m(0) = 0, \quad m(r_\Sigma) = M, \quad P_r(r_\Sigma) = 0. \quad (2.25)$$

Al considerar la ecuación de estado politrópica dentro del contexto de la relatividad general, surgen dos posibilidades diferentes que conducen a la misma ecuación en el límite newtoniano [1]. El primero, conserva la ecuación de estado politrópica original (1.1) y el segundo permite otra posibilidad (natural) que consiste en asumir que el politrópico relativista está definido por,

$$P_r = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}}. \quad (2.26)$$

En este caso, la densidad bariónica  $\rho_0$  se reemplaza por la densidad de energía total  $\rho$  en la ecuación de estado politrópica. El tratamiento general es muy similar para ambos casos y por tanto, por simplicidad, nos restringiremos aquí al caso descrito por (2.26). Se puede demostrar que la relación entre las dos densidades viene dada por [1],

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 - K\rho_0^{1/n}\right)^n}. \quad (2.27)$$

Como es bien sabido por la teoría general de los polítopos, existe una bifurcación en el valor  $\gamma = 1$ . Por lo tanto, los casos  $\gamma = 1$  y  $\gamma \neq 1$  deben considerarse por separado. En el contexto del presente trabajo, nos centraremos en modelos de estrellas compactas acotadas, por lo que  $\gamma = 1$  no se considerará.

A continuación definamos la variable  $\psi$  por

$$\psi^n = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.28)$$

donde  $\rho_c$  denota la densidad de energía en el centro (de ahora en adelante, el subíndice  $c$  indica que la variable se evalúa en el centro). De esta definición es claro que si  $\rho = \rho_c$  la densidad de energía  $\psi$  para cualquier valor de  $n$  siempre comienza en la unidad y decrece monótonamente



hasta llegar al valor nulo en la superficie de frontera. Ahora, podemos reescribir (2.26) como

$$P_r = K\rho^\gamma = K\rho_c^\gamma\psi^{n+1} = P_{rc}\psi^{n+1}, \quad (2.29)$$

con  $P_{rc} = K\rho_c^\gamma$ . Remplazando (2.26) y (2.28) en (2.23), la TOV se puede escribir como

$$(n+1)\psi' = - \left( \frac{m + 4\pi P_{rc}\psi^{n+1}r^3}{r(r-2m)} \right) \frac{1}{\alpha} (1 + \alpha\psi^n) + \frac{2\Delta}{rP_{rc}}, \quad (2.30)$$

donde  $\alpha = P_{rc}/\rho_c$ . Introduzcamos ahora las siguientes variables adimensionales

$$r = \frac{\xi}{A}, \quad (2.31)$$

$$A^2 = \frac{4\pi\rho_c}{\alpha(n+1)}, \quad (2.32)$$

$$\psi^n = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.33)$$

$$\eta(\xi) = \frac{m(\xi)A^3}{4\pi\rho_c}, \quad (2.34)$$

de donde (2.30) se reescribe como [1, 3],

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[ \frac{1 - 2\alpha(n+1)\frac{\eta}{\xi}}{1 + \alpha\psi} \right] + \eta + \alpha\xi^3\psi^{n+1} - \frac{2\Delta\xi}{P_{rc}\psi^n(n+1)} \left[ \frac{1 - 2\alpha(n+1)\frac{\eta}{\xi}}{1 + \alpha\psi} \right] = 0, \quad (2.35)$$

con

$$\eta' = \xi^2\psi^n. \quad (2.36)$$

La ecuación (2.35) en combinación con (2.36) corresponde a la ecuación generalizada de Lane-Emden para un fluido anisotrópico caracterizado por una ecuación de estado politrópica.

Se puede notar que para integrar la ecuación (2.35) y (2.36), y proseguir con el modelamiento de un objeto compacto se necesita proveer una anisotropía  $\Delta$  específica del problema, es decir se necesita información adicional. Tal información, sin ningún cuestionamiento, depende del problema específico bajo consideración. Por lo tanto, para disminuir el número de grados de libertad, es obligatoria la introducción de una ecuación de estado adicional para proveer la anisotropía. Históricamente se ha impuesto ciertas condiciones a las variables métricas como el valor nulo del tensor de Weyl [7], implementado en [2] para obtener el polítopo plano conforme para la materia anisotrópica. Esta condición tiene su propio interés, ya que se ha visto que se pueden obtener configuraciones muy compactas con la distribución específica de anisotropía creada por tal condición [7]. Otros enfoques como el modelo de Randall-Sundrum [92] o las geometrías deformadas de 5 dimensiones han servido de inspiración para otro tipo de condiciones, relacionando derivadas radiales de las funciones métricas en espaciotiempos esféricamente simétricos, que producen esferas autogravitantes en un espacio-tiempo plano de dimensión cinco. Aún más, los modelos incrustados en espacio-tiempo de cinco dimensiones satisfacen la llamada condición de Karmarkar o clase I [8] (para desarrollos recientes se puede ver en [75, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107]) que permite elegir una de las funciones métricas como generadora de la solución total. Alternativamente, el uso de un nuevo concepto de complejidad basado en el escalar  $Y_{TF}$  que aparece en la descomposición ortogonal del tensor de Riemann ha aumentado en los últimos años [9]. Es importante mencionar que, estudios muy recientes han considerado modelos anisotrópicos estelares con cierta complejidad (o cumpliendo la condición de complejidad nula  $Y_{TF} = 0$ ) y se ha establecido una relación entre familias de soluciones que tienen diferentes complejidades con la posible aparición de fractura [10, 11].

En este trabajo se propone un escenario alternativo; satisfacer el sistema de ecuaciones de

campo de Einstein usando la ecuación de estado politrópica para la presión radial junto con el desacople gravitacional [12], mediante el enfoque de deformación geométrica mínima (una vez dada la solución semilla). En la siguiente sección se presentará este método y en el capítulo III se implementará la ecuación de estado politrópica para construir la ecuación anisotrópica generalizada de Lane-Emden.

## 2.4 Desacople Gravitacional

Encontrar nuevas soluciones de interés físico para las ecuaciones de campo de Einstein no es una tarea fácil debido al comportamiento altamente no lineal de sus ecuaciones. En 2017, se propuso el método de Desacople Gravitacional [12], que representa un algoritmo sencillo para desacoplar fuentes gravitacionales en Relatividad General. Este algoritmo implica una deformación geométrica mínima (MGD) al tensor métrico junto con un desacoplamiento de fuentes. Desde su aparición, este método ha servido para encontrar varias soluciones nuevas de gran interés físico, como por ejemplo soluciones bien comportadas que podrían representar distribuciones estelares [15, 85, 91], soluciones de agujeros negros [87, 88, 89], gravedad  $f(\mathcal{G})$  [83], sistema Einstein Klein Gordon [21], entre otros. A continuación se introduce el Desacople Gravitacional mediante la Deformación Geométrica Mínima .

Comencemos por considerar las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) derivadas de ciertos  $T_{\mu\nu}^{(tot)}$  que se pueden escribir como

$$T_{\mu\nu}^{(tot)} = T_{\mu\nu}^{(s)} + \beta\theta_{\mu\nu} , \quad (2.37)$$

donde  $T_{\mu\nu}^{(s)}$  representa el contenido de materia de una solución conocida (sector semilla), y  $\theta_{\mu\nu}$  describe una fuente adicional acoplada a través del parámetro  $\beta$ . Es esencial señalar que el

término adicional  $\beta\theta_{\mu\nu}$  no se considera una perturbación, es decir, el parámetro de acoplamiento  $\beta$  podría ser mayor que la unidad (dicho acoplamiento se introduce para para controlar el efecto de la fuente anisotrópica desconocida). Además, podemos notar que en el límite  $\beta \rightarrow 0$  se regresa a la solución semilla conocida, esto se representa en la Fig. 2.2.

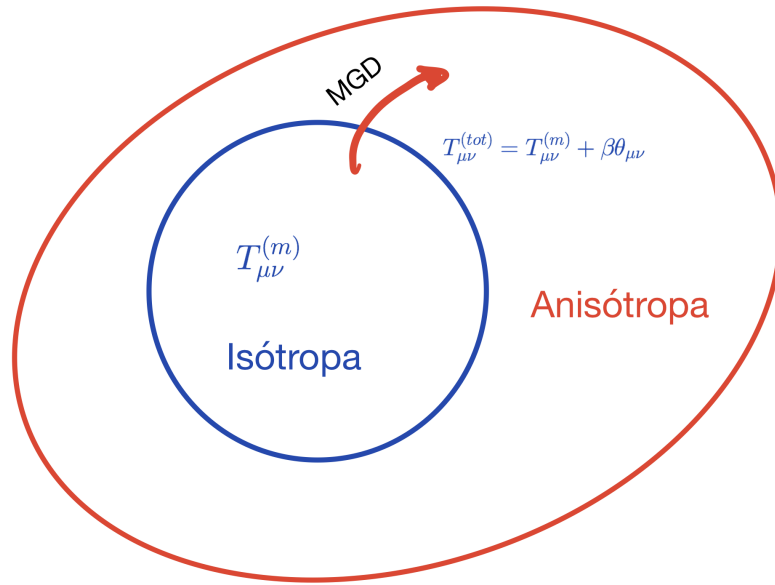


Figura 2.2: Cualquier solución isótropa bien comportada puede extenderse constantemente al dominio anisotrópico a través del desacoplamiento MGD.

Se debe tomar en cuenta que, dado que el tensor de Einstein cumple las identidades de Bianchi, el tensor de energía-momento total satisface la ecuación de conservación

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.38)$$

Por lo tanto, siempre que  $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu(s)} = 0$  se cumpla, la condición

$$\nabla_{\mu} \theta^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.39)$$

se cumplirá automáticamente y, como consecuencia, no hay intercambio de energía-momento entre la solución semilla y la fuente adicional  $\theta^{\mu\nu}$ , es decir, la interacción es completamente gravitacional.

Ahora, como nos estamos restringiendo al caso de fluido anisotrópico estático esféricamente simétrico con métrica interna (en coordenadas de Schwarzschild) dada en (2.7). La fuente se puede expresar como,

$$T_{\nu}^{\mu(s)} = \text{diag}(\rho^{(s)}, -P_r^{(s)}, -P_t^{(s)}, -P_{\perp}^{(s)}), \quad (2.40)$$

$$\theta_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\theta_0^0, \theta_1^1, \theta_2^2, \theta_2^2). \quad (2.41)$$

Entonces, las ecuaciones (2.1), (2.37), (2.40) y (2.41) conducen a que el tensor de energía-momento total ( $T_{\mu\nu}^{(tot)}$ ) satisface el sistema de ecuaciones de campo (2.13), (2.14) y (2.15), donde ahora, en el lado izquierdo viene dado por

$$\rho = \rho^{(s)} + \beta\theta_0^0, \quad (2.42)$$

$$P_r = P_r^{(s)} - \beta\theta_1^1, \quad (2.43)$$

$$P_{\perp} = P_{\perp}^{(s)} - \beta\theta_2^2. \quad (2.44)$$

Debido a que, en general,  $\theta_1^1 \neq \theta_2^2$ , encontramos que el sistema representa un fluido anisotrópico. Está claro que la no linealidad de las ecuaciones de Einstein evita que la descomposición (2.37) conduzca a dos conjuntos de ecuaciones; uno para cada fuente involucrada. No obstante, esto es posible en el contexto del Desacople Gravitacional mediante la deformación geométrica mínima como se demuestra en el siguiente capítulo.

## Capítulo III

# Polítropos relativistas anisótropos por Desacople Gravitacional

El uso del Desacople Gravitacional en el contexto de polítropos relativistas es conveniente porque el sistema queda completamente determinado con solo proveer la ecuación de estado como se demuestra a continuación.

Primero, se introduce la deformación geométrica en las funciones métricas dadas por

$$e^{-\lambda} \longrightarrow e^{-\mu} + \beta f, \quad (3.1)$$

cuya derivada se escribe como,

$$\lambda' = \frac{e^{-\mu}\mu' - \beta f'}{e^{-\mu} + \beta f}, \quad (3.2)$$

donde  $f$  es la llamada función de desacoplamiento y  $\beta$  es el mismo parámetro libre que controla la influencia de  $\theta_{\mu\nu}$  en  $T_{\mu\nu}^{(s)}$ . Cabe mencionar que si bien es posible un tratamiento general considerando la deformación en ambas componentes de la métrica, en este trabajo nos concen-

traremos en el caso particular donde la deformación solo se implementa en la componente  $g^{rr}$ . Ahora, reemplazando (3.1) en el sistema (2.13) -(2.15), podemos dividir el conjunto completo de ecuaciones diferenciales en dos subconjuntos: uno que describe una semilla originada por el tensor de energía-momento conservado  $T_{\mu\nu}^{(s)}$ ,

$$\rho^{(s)} = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{r^2} + e^{-\mu} \left( \frac{\mu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \right], \quad (3.3)$$

$$P_r^{(s)} = \frac{1}{8\pi} \left[ -\frac{1}{r^2} + e^{-\mu} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right], \quad (3.4)$$

$$P_{\perp}^{(s)} = \frac{1}{32\pi} e^{-\mu} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \mu'\nu' + 2\frac{\nu' - \mu'}{r} \right), \quad (3.5)$$

y el otro conjunto correspondiente a las ecuaciones de campo cuasi-Einstein originadas por  $\theta_{\mu\nu}$ ,

$$\rho^{\theta} = -\frac{\beta}{8\pi} \left( \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} \right), \quad (3.6)$$

$$P_r^{\theta} = \frac{\beta f}{8\pi} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (3.7)$$

$$P_{\perp}^{\theta} = \frac{\beta}{8\pi} \left[ \frac{f}{4} \left( 2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r} \right) + \frac{f'}{4} \left( \nu' + \frac{2}{r} \right) \right], \quad (3.8)$$

donde se ha definido  $\rho^{\theta} = \beta\theta_0^0$ ,  $P_r^{\theta} = -\beta\theta_1^1$  y  $P_{\perp}^{\theta} = -\beta\theta_2^2$ . Hay que recordar que para completar el proceso, se necesita satisfacer las condiciones de acoplamiento (2.16), (2.17) y (2.18) en la superficie de frontera  $\Sigma$ .

Como se ha mencionado anteriormente, las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico originado por fluidos anisótropos (2.13) -(2.15), se reduce a tres ecuaciones y cinco incógnitas, a saber  $\{\nu, \lambda, \rho, P_r, P_{\perp}\}$ . En este

sentido, se deben proporcionar dos condiciones auxiliares: condiciones métricas, ecuaciones de estado, complejidad del sistema, etc. Sin embargo, dado que en el contexto de MGD se da una solución semilla, el número de grados de libertad se reduce a cuatro por lo que solo se requiere una condición adicional. En general, esta condición se implementa en el sector desacoplado dado por las Ecs. (3.6), (3.7) y (3.8) por alguna ecuación de estado (o condición) que conduce a una ecuación diferencial para la función de desacoplamiento  $f$ . En este trabajo, tomamos una ruta alternativa para encontrar la función de desacoplamiento; es decir, implementamos la ecuación de estado politrópica para la presión radial de manera que la anisotropía total se pueda escribir en términos del par  $(\eta, \xi)$ , definido en (2.31) y (2.34) y las variables métricas del sector semilla.

### 3.1 Cálculo de Anisotropía

La anisotropía total del sistema está dada por

$$\Delta = P_{\perp} - P_r \quad (3.9)$$

y que se puede escribir en función del sector de materia y sector desacoplado:

$$\Delta = \underbrace{P_{\perp}^{(s)} - P_r^{(s)}}_{\Delta^{(s)}} + \underbrace{P_{\perp\theta} - P_{r\theta}}_{\Delta_{\theta}} \quad (3.10)$$

donde  $\Delta^{(s)}$  está determinado por (3.4) y (3.5):

$$\Delta^{(s)} = \frac{A^2}{4\kappa} \left[ e^{-\mu} (2\nu'' + \nu'^2 - \mu'\nu' - 2\frac{\nu' + \mu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2}) + \frac{4}{\xi^2} \right]. \quad (3.11)$$



Si la semilla es isótropa, esto es  $\Delta^m = p_t^m - p_r^m = 0$ , la anisotropía se calcula con (3.7) y (3.8):

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Delta_\theta \\
&= p_{t\theta} - p_{r\theta} \\
&= \frac{\beta}{\kappa} \left[ \frac{f}{4} \left( 2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r} \right) + \frac{f'}{4} \left( \nu' + \frac{2}{r} \right) - f \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \\
&= \frac{\beta}{4\kappa} \left[ f \left( 2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r} \right) + f' \left( \nu' + \frac{2}{r} \right) - 4f \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \\
&= \frac{\beta}{4\kappa} \left[ f \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{r} - \frac{4}{r^2} \right) + f' \left( \nu' + \frac{2}{r} \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.12}$$

la cual si cambiamos a una variable adimensional  $\xi = rA$ , la anisotropía queda expresada como,

$$\Delta = \frac{\beta}{4\kappa} \left[ fA^2 \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) + f'A \left( \nu' + \frac{2}{\xi} \right) \right] \tag{3.13}$$

La expresión (3.13) nos permite calcular la anisotropía si la semilla es isótropa. En el caso general, donde  $\Delta^{(s)} \neq 0$ , la anisotropía está dada por:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{A^2}{4\kappa} \left[ e^{-\mu} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \mu'\nu' - 2\frac{\nu' + \mu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) + \frac{4}{\xi^2} \right] \\
&+ \frac{\beta}{4\kappa} \left[ fA^2 \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) + f'A \left( \nu' + \frac{2}{\xi} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Nótese que en la expresión anterior todas las derivadas son con respecto a  $\xi$ . Ahora, como la función masa se define como

$$e^{-\lambda} = e^{-\mu} + \beta f = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{3.15}$$

se puede despejar  $f$  en función de  $m$ , obteniendo

$$f = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \frac{2m}{r} - e^{-\mu} \right]. \quad (3.16)$$

A su vez,  $m$  está definida en (2.34) con la función masa adimensional  $\eta(\xi)$ , por lo que reemplazando en (3.16) y utilizando las definiciones (2.31), (2.32) se obtiene,

$$f = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - 2\alpha(n+1) \frac{\eta}{\xi} - e^{-\mu} \right]. \quad (3.17)$$

A continuación, necesitaremos calcular la derivada con respecto a  $r$  de  $f$ , ésta es:

$$f' = \frac{A}{\beta} \left[ \mu' e^{-\mu} + 2\alpha(n+1) \frac{(\eta - \eta' \xi)}{\xi^2} \right] \quad (3.18)$$

El lado derecho de la ecuación (3.18) todas las derivadas son en función de la nueva variable  $\xi$ .

Ahora podemos reemplazar (3.17) y (3.18) en la anisotropía (3.13):

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{A^2}{4\kappa} & \left[ \left( 1 - 2\alpha(n+1) \frac{\eta}{\xi} - e^{-\mu} \right) \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) \right. \\ & \left. + \left( \mu' e^{-\mu} + 2\alpha(n+1) \frac{(\eta - \eta' \xi)}{\xi^2} \right) \left( \nu' + \frac{2}{\xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

y reemplazando  $A^2 = 4\pi\rho_c/\alpha(n+1)$  llegamos a la expresión de la anisotropía en función del sector semilla,

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\pi\rho_c}{\alpha(n+1)\kappa} & \left[ \left( 1 - 2\alpha(n+1) \frac{\eta}{\xi} - e^{-\mu} \right) \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) \right. \\ & \left. + \left( \mu' e^{-\mu} + 2\alpha(n+1) \frac{(\eta - \eta' \xi)}{\xi^2} \right) \left( \nu' + \frac{2}{\xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

En el caso general donde el sector semilla no sea isótropo también se puede calcular la anisotropía

sumando esta contribución, entonces a partir de (3.14) se escribe como,

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\pi \rho_c}{\alpha(n+1)\kappa} & \left[ e^{-\mu} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \mu'\nu' - 2\frac{\nu' + \mu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) + \frac{4}{\xi^2} + \right. \\ & + \left( 1 - 2\alpha(n+1)\frac{\eta}{\xi} - e^{-\mu} \right) \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) \\ & \left. + \left( \mu' e^{-\mu} + 2\alpha(n+1)\frac{(\eta - \eta'\xi)}{\xi^2} \right) \left( \nu' + \frac{2}{\xi} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Una vez que tenemos la anisotropía en el contexto de GD, podemos reemplazar en la ecuación generalizada de Lane Emden (2.35)-(2.36), junto a una solución semilla.

Para completar la discusión en la siguiente sección se procede a calcular la masa de Tolman ( $m_T$ ) [109], que en el contexto de la GD es una tarea no trivial y este hecho en sí mismo refuerza el uso de este método novedoso vinculado al estudio de los polítopos.

## 3.2 Masa de Tolman

Usando la definición de la masa gravitacional activa,

$$m_T = \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)/2} \nu' r^2 \quad (3.22)$$

o alternativamente [65],

$$m_T = e^{(\nu+\lambda)/2} (m + 4\pi r^3 P_r), \quad (3.23)$$

se observa que la única información relevante que debe proporcionarse es la función de masa que está codificada en  $e^{-\lambda}$ . Esto es así, dado que se conoce el componente métrico  $g_{tt}$  ya que

corresponde a la función métrica de la solución semilla. Por lo tanto, reemplazando (2.22) en (3.22) y usando (2.34), llegamos a

$$m_T = \frac{1}{2} \left[ e^\nu \left( 1 - \frac{2\eta\alpha(n+1)}{\xi} \right) \right]^{1/2} \nu' \frac{\xi^2}{A^2}, \quad (3.24)$$

de donde

$$\eta_T = \frac{\xi^2(n+1)\nu'}{2(4\pi\rho_c\alpha)^2} \left[ e^\nu \left( 1 - \frac{2\eta\alpha(n+1)}{\xi} \right) \right]^{1/2}, \quad (3.25)$$

con

$$\eta_T = \frac{m_T}{4\pi\rho_c\alpha^3}. \quad (3.26)$$

En función del grado de compacticidad  $y$ , que se define como

$$y = \alpha(n+1) \frac{\eta}{\eta_\Sigma} \quad (3.27)$$

La masa de Tolman se reescribe como,

$$\eta_T = \frac{\xi^2(n+1)\nu'}{2(4\pi\rho_c\alpha)^2} \left[ e^\nu \left( 1 - \frac{2y\eta}{x\eta_\Sigma} \right) \right]^{1/2} \quad (3.28)$$

donde  $x = \frac{\xi}{\xi_\Sigma}$ .

En la siguiente sección se presentan las semillas utilizadas para ilustrar el método y en el siguiente capítulo se procede a integrar las ecuaciones de Lane Endem para encontrar soluciones.

### 3.3 Semillas Utilizadas

Las semillas utilizadas para el sector material para construir soluciones interiores mediante el desacople gravitacional son Tolman IV, Wyman IIa y Durgapal IV que se detallan a continuación.

#### Tolman IV

La solución Tolman IV [77] está dada por,

$$\begin{aligned} e^\nu &= b^2 \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right) \\ e^{-\mu} &= \frac{(c^2 - r^2)(a^2 + r^2)}{c^2(a^2 + 2r^2)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

con  $a, b, c$  parámetros libres. De (3.29), se pueden derivar las siguientes cantidades útiles,

$$\nu' = \frac{2\xi}{\xi^2 + \frac{4\pi\rho_c a^2}{\alpha(n+1)}} \quad (3.30)$$

$$\nu''(\xi) = 2 \frac{(4\pi\rho_c a^2 / \alpha(n+1) - \xi^2)}{(\xi^2 + 4\pi\rho_c a^2 / \alpha(n+1))^2}. \quad (3.31)$$

A su vez, para la componente radial de la métrica, pasando a las variables adimensionales previamente introducidas se tiene

$$e^{-\mu(\xi)} = \frac{(c^2 A^2 - \xi^2)(a^2 A^2 + \xi^2)}{c^2(a^2 A^2 + 2\xi^2)} \quad (3.32)$$

$$e^{-\mu(\xi)} = \frac{(4\pi\rho_c c^2 - \xi^2 \alpha(n+1))(4\pi\rho_c a^2 + \xi^2 \alpha(n+1))}{c^2 \alpha(n+1)(4\pi\rho_c a^2 + 2\alpha \xi^2(n+1))}, \quad (3.33)$$

Con su derivada dada por,

$$e^{-\mu}\mu' = \frac{2\xi(a^4 A^4 + 2\xi^4 + a^2(A^4 c^2 + 2A^2 \xi^2))}{A^2 c^2 (a^2 A^2 + 2\xi^2)^2} \quad (3.34)$$

$$e^{-\mu}\mu' = \frac{4\xi\alpha(n+1)[8(\pi\rho_c)^2 a^2 (c^2 + a^2) + \xi^2\alpha(n+1)(4\pi\rho_c a^2 + \alpha\xi^2(n+1))]}{c^2(4\pi\rho_c a^2 + 2\alpha\xi^2(n+1))^2} \quad (3.35)$$

Se puede notar que  $\{\nu, \mu\}$  estan determinadas completamente por la solución semilla y por lo tanto cierran el sistema.

## Wyman IIa

También se considera la métrica de Wyman IIa [31],

$$\begin{aligned} e^\nu &= (a - br^2)^2 \\ e^{-\mu} &= 1 + cr^2(a - 3br^2)^{-2/3} \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde  $a$  es una constante adimensional y  $b$  y  $c$  son constantes con dimensiones de la inversa de una longitud al cuadrado. De igual manera que hicimos con la semilla de Tolman IV, cambiamos a las variables adimensionales y calculamos sus derivadas:

$$\nu' = \frac{-4b\xi}{aA^2 - b\xi^2} \quad (3.37)$$

$$\nu'' = -\frac{4b(aA^2 + b\xi^2)}{(aA^2 - b\xi^2)^2} \quad (3.38)$$

y las expresiones para la componente radial se escriben,

$$e^{-\mu} = 1 + \frac{c\xi^2(a - 3b\xi^2/A^2)^{-2/3}}{A^2} \quad (3.39)$$

$$e^{-\mu}\mu' = -(2\xi/A^2(a - 3b\xi^2/A^2)^{-5/3})(c + 2b\xi^2/A^2) \quad (3.40)$$

## Durgapal IV

La métrica de Durgapal IV [32] como solución semilla, se escribe como,

$$\begin{aligned} e^\nu &= a(cr^2 + 1)^4 \\ e^{-\mu} &= \frac{7 - 10cr^2 - c^2r^4}{7(cr^2 + 1)^2} + \frac{bcr^2}{(cr^2 + 1)^2(1 + 5cr^2)^{2/5}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde  $a$  es una constante adimensional y  $c$  es una constante con dimensiones de la inversa de una longitud al cuadrado. Una vez introduciendo las variables adimensionales y calculando sus derivadas obtenemos las siguientes expresiones:

$$\nu' = \frac{8c\xi}{A^2 + c\xi^2} \quad (3.42)$$

$$\nu'' = \frac{8c(A^2 - c\xi^2)}{(A^2 + c\xi^2)^2}, \quad (3.43)$$

y para la componente radial de la métrica,

$$e^{-\mu} = \frac{7A^4 - 10c\xi^2A^2 - c^2\xi^4}{7(c\xi^2 + A^2)^2} + \frac{bc\xi^2A^2}{(c\xi^2 + A^2)^2(1 + 5\frac{c\xi^2}{A^2})^{2/5}} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
e^{-\mu}\mu' = & \frac{7(20c\xi A^2 + 4c^2\xi^3)(c\xi^2 + A^2) + 28c\xi(c\xi^2 + A^2)(7A^4 - 10c\xi^2 A^2 - c^2\xi^4)}{49(c\xi^2 + A^2)^4} \\
& + \frac{4bc^2\xi^3 A^2[(c\xi^2 + A^2)(1 + 5\frac{c\xi^2}{A^2})^{2/5} + \frac{1}{A^2}(1 + 5\frac{c\xi^2}{A^2})^{-3/5}(c\xi^2 + A^2)^2]}{(c\xi^2 + A^2)^4(1 + 5\frac{c\xi^2}{A^2})^{4/5}} \\
& - \frac{2bc\xi A^2(c\xi^2 + A^2)^2(1 + 5\frac{c\xi^2}{A^2})^{2/5}}{(c\xi^2 + A^2)^4(1 + 5\frac{c\xi^2}{A^2})^{4/5}}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Como podemos ver, la introducción de las soluciones semillas en la ecuación de Lane-Endem no es un proceso trivial debido a que se tiene dos ecuaciones diferenciales acopladas no lineales con varios parámetros libres. De hecho, no se ha encontrado una ecuación exacta para la ecuación de Lane-Endem para enfoques previos mencionados anteriormente. En este sentido, una solución numérica con parámetros ajustados es el único camino a seguir. En el siguiente capítulo presentamos la integración numérica de la ecuación de Lane-Endem en el contexto de MGD.



## Capítulo IV

### Resultados Obtenidos

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la solución anisótropa total de la ecuación de Lane-Emden para las semillas Tolman IV, Durgapal IV y Wyman IIa presentadas en el capítulo anterior.

#### 4.1 Tolman IV

Para la semilla Tolman IV presentada en la sección 3.3, para describir el modelo, se ha fijado los valores de  $a = 1.41421$ ,  $b = 2.23607$ .

En la Fig. 4.1 representamos  $\psi$  como una función de la variable adimensional  $\xi$  para diferentes valores del índice politrópico  $n$  para el modelo politrópico obtenido con la solución semilla Tolman IV. Observamos que  $\psi$  disminuye monótonamente, como se esperaba para polítrapos relativistas generales de buen comportamiento.

En la Fig. 4.2 se muestra la función de masa  $\eta$  como una función de la variable  $\xi$  para diferentes valores del índice  $n$ . Los resultados también dependen del parámetro ( $\alpha = P_{rc}/\rho_c$ ) relacionado con el límite relativista de la ecuación de Lane-Emden ( $\alpha \rightarrow 0$  corresponde al

límite newtoniano). Se debe notar que para cada modelo de polítropo (dado por  $n$ ),  $\eta$  es una función creciente que crece hasta que la evaluación numérica se detiene en la superficie del objeto compacto ( $\xi_\Sigma$ ).

En la Fig. 4.3 se muestra el “ potencial de superficie ”  $y$  en función del índice politrópico  $n$  para diferentes valores de  $\alpha$ . El parámetro  $y$  es una variable relevante ya que mide la compacidad de la configuración y está relacionado con el corrimiento al rojo.

La Fig. 4.4 muestra la masa de Tolman (normalizada por la masa total), para la solución de semillas Tolman IV, en función de  $\xi$  para la selección de valores de los parámetros indicados en la leyenda . El comportamiento de las curvas es cualitativamente el mismo para una amplia gama de valores de los parámetros. Se debe tener en cuenta que para producir el comportamiento numérico de  $\eta/\eta_{\Sigma_T}$  (representado en la Fig. 4.4) debemos alimentar los datos de  $y$  obtenidos de la Fig. 4.3.

La Fig. 4.5 muestra la dependencia de la anisotropía de presión local con la variable radial adimensional  $\xi$  y el índice politrópico. Se puede observar que  $\Delta$  comienza en cero, donde  $P_r = P_\perp$ , es una función que crece monótonamente como se esperaba, y la presión radial  $P_r$  se hace cero en la superficie como lo requiere la continuidad de la segunda forma fundamental.

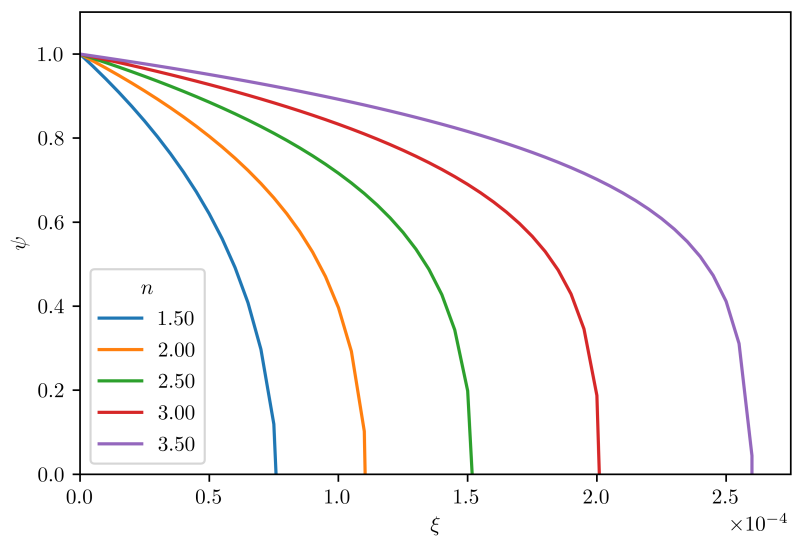


Figura 4.1:  $\psi$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

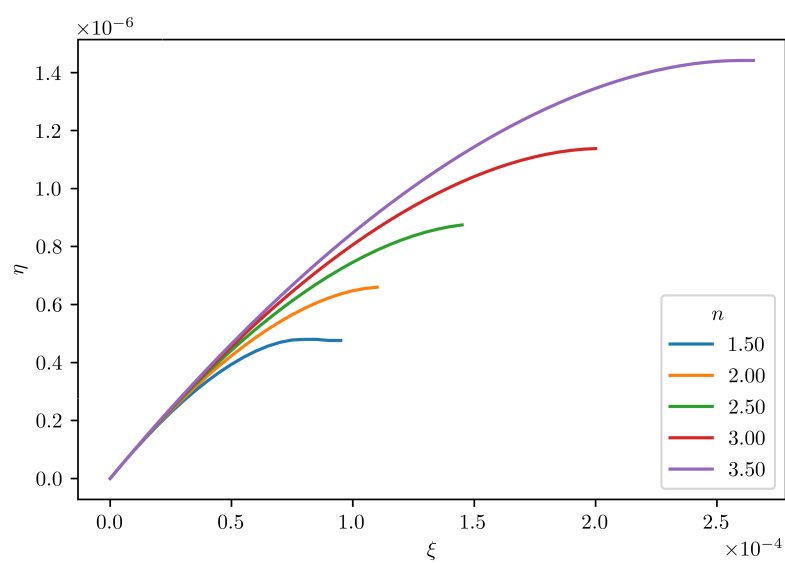


Figura 4.2:  $\eta$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

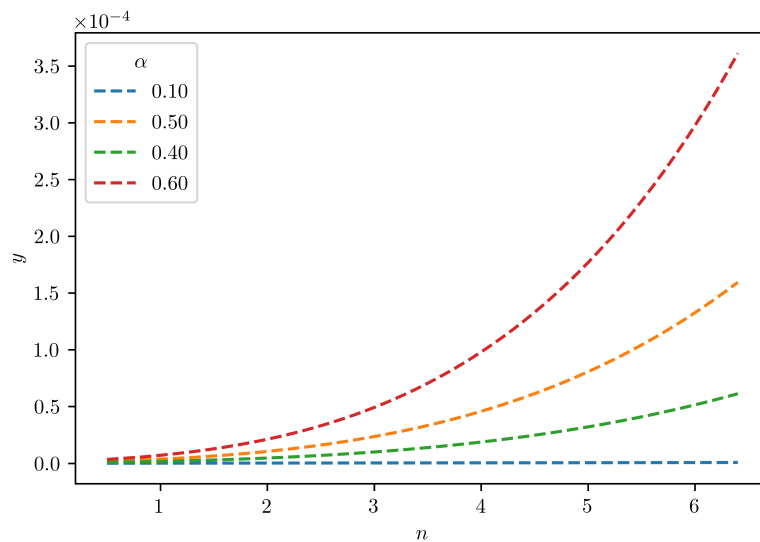


Figura 4.3: Potencial de superficie  $y$  como función de  $n$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

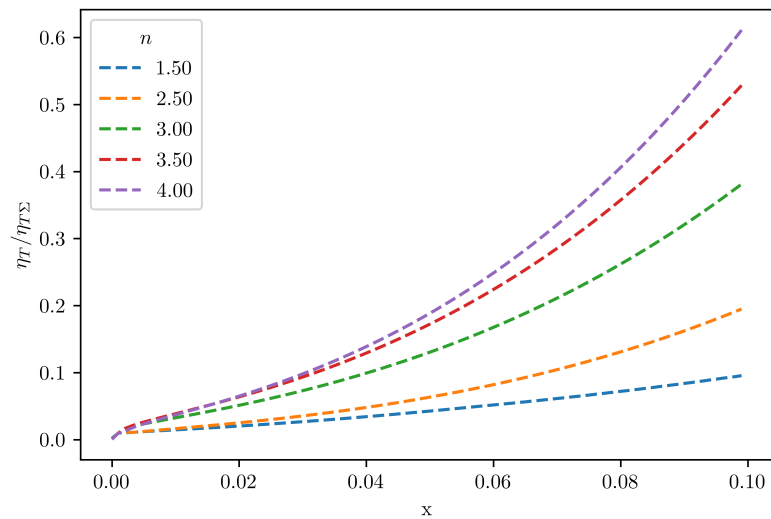


Figura 4.4: Masa de Tolman-Whittaker normalizada  $\eta/\eta_{\Sigma_T}$  como función de  $x$  para  $\alpha = 0.2$  y diferentes valores de  $n$ .

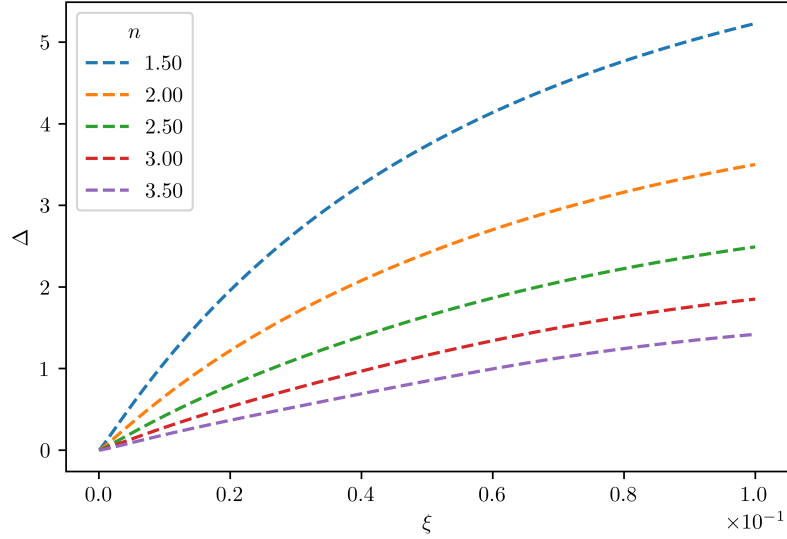


Figura 4.5: Anisotropía local  $\Delta$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

## 4.2 Wyman IIa

En esta sección usamos la solución Wyman IIa como semilla,

$$e^\nu = (a - br^2)^2 \quad (4.1)$$

$$e^{-\mu} = 1 + cr^2(a - 3br^2)^{-2/3}, \quad (4.2)$$

con  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes. Para este modelo, los valores constantes fijos son  $a = 1.5297$ ,  $b = 1.0$ . y  $c = 2.148$ .

En la Fig. 4.6 se muestra el comportamiento del sector de materia mediante la integración de la ecuación de Lane-Emden y se obtiene  $\psi$  como función de  $\xi$  para el modelo politrópico representado por Wyman IIa solución de semillas. Nótese que la densidad es positiva dentro de la estrella compacta, alcanza su máximo en el centro y decrece monótonamente hacia el

exterior, como se esperaba. Se observa que todas las configuraciones obtenidas para diferentes valores del índice politrópico, tienen la misma superficie límite donde  $P_{r\Sigma} = 0$ .

En la Fig. 4.7 se muestra la masa  $\eta$  como función de  $\xi$  para diferentes valores de  $n$  que crece apropiadamente desde cero hasta su valor límite total y valores mayores de la las funciones de masa se obtienen para valores más pequeños de  $n$ .

El potencial de superficie  $y$  y la masa de Tolman normalizada, para una selección de valores de los parámetros, se representan en las figuras 4.8 y 4.9 respectivamente. El comportamiento exhibido de estas variables es cualitativamente el mismo que para un amplio rango de valores de los parámetros. Asimismo, las conclusiones extraídas de estas cifras son básicamente las mismas que las de los modelos anteriores. En cualquier caso, los valores máximos de  $y$  corresponden a valores mayores de  $\alpha$ , lo que representa un resultado coherente y esperado para todos los modelos.

En la Fig. 4.10 se muestra el comportamiento de la función de anisotropía  $\Delta$  en función de la variable redefinida ( $\xi$ ) para  $\alpha = 0.7$  y diferentes valores de  $n$  indicado en el título de la figura correspondiente. Se manifiesta un comportamiento creciente y la función  $\Delta$  decrece al aumentar  $n$ .

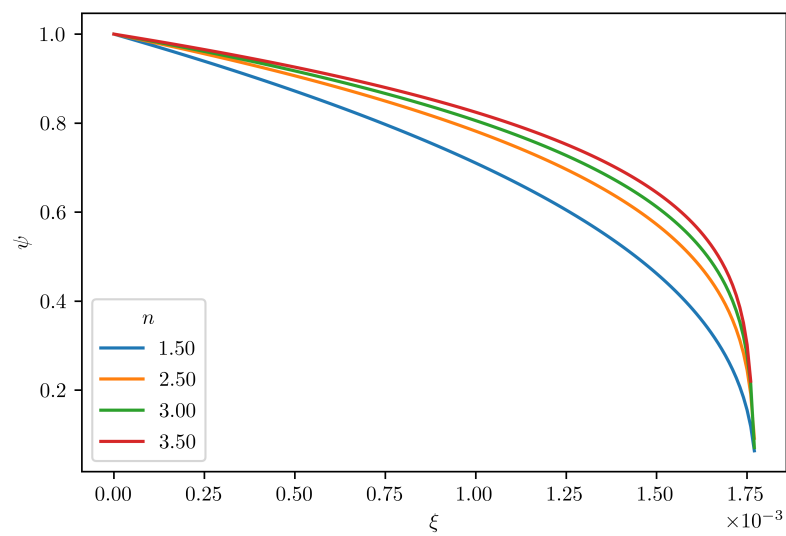


Figura 4.6:  $\psi$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

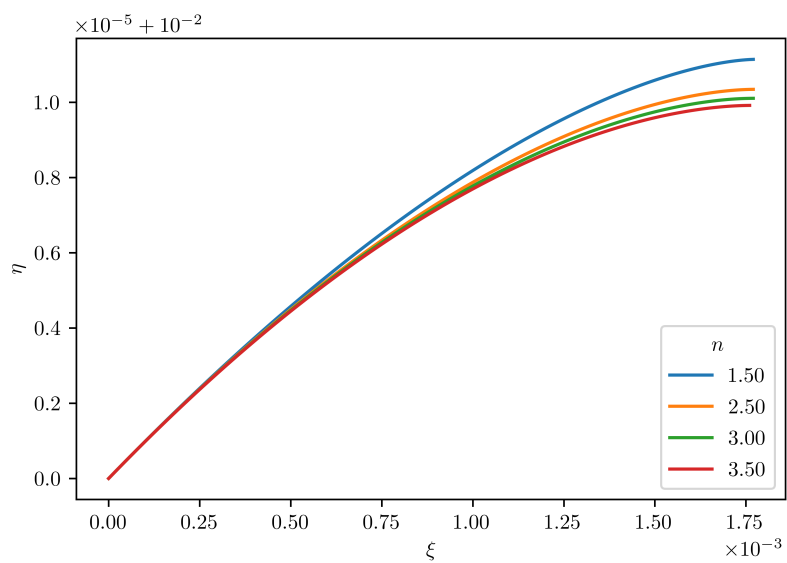


Figura 4.7:  $\eta$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

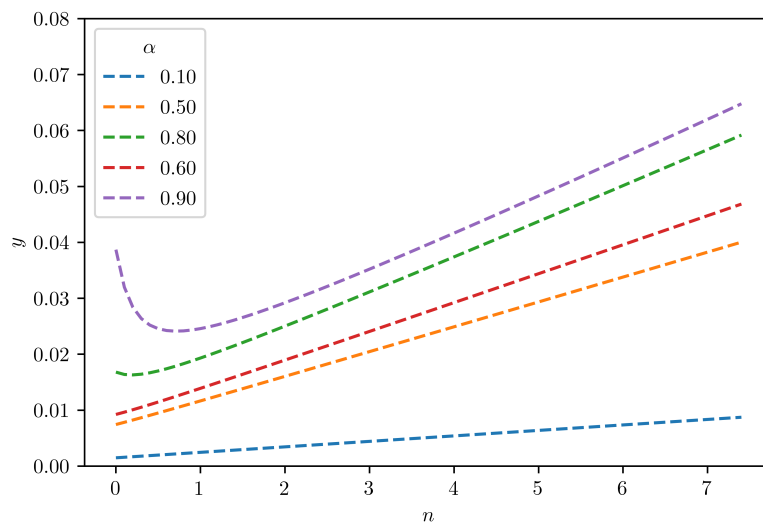


Figura 4.8: Potencial de superficie  $y$  como función de  $n$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

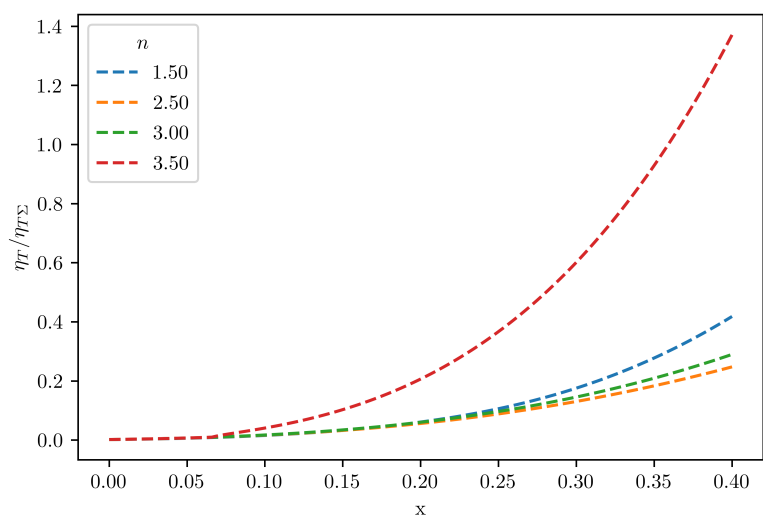


Figura 4.9: Masa de Tolman-Whittaker normalizada  $\eta_r/\eta_{r\Sigma}$  como función de  $x$  para  $\alpha = 0.7$  y diferentes valores de  $n$ .



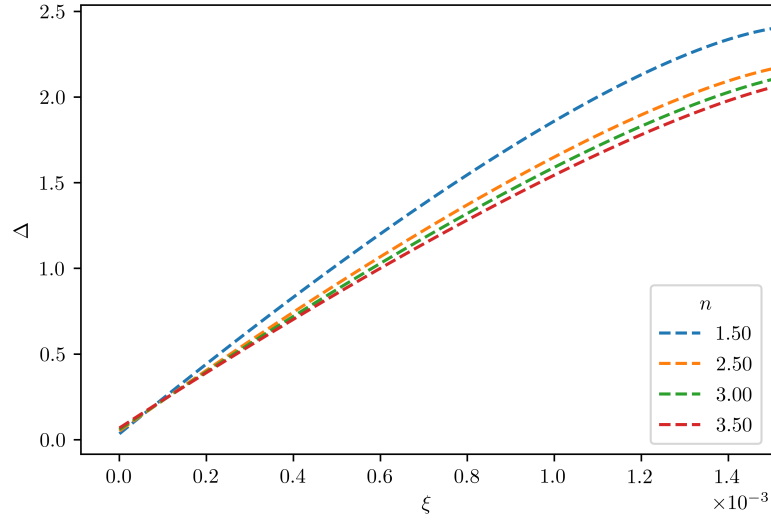


Figura 4.10: Anisotropía local  $\Delta$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

### 4.3 Durgapal IV

Ahora, se aplica el procedimiento descrito en la sección 4 a la solución interior de Durgapal IV como semilla en el marco GD. Entonces, nuestro punto de partida es

$$e^\nu = a(cr^2 + 1)^4 \quad (4.3)$$

$$e^{-\mu} = \frac{7 - 10cr^2 - c^2r^4}{7(cr^2 + 1)^2} + \frac{bcr^2}{(cr^2 + 1)^2(1 + 5cr^2)^{2/5}}, \quad (4.4)$$

donde  $a$ ,  $b$  (con unidades de la inversa de una longitud al cuadrado) y  $c$  (adimensional) son constantes. En este caso, los valores constantes fijos usados en la semilla de Durgapal IV son  $a = 0.6254$ ,  $b = 2.1479$ . y  $c = 1,372281$ .

En la figura 4.11 se muestra la integración de las Ecs. (2.35) y (2.36), con uso previo de la función de anisotropía (3.20), para la solución semilla de Durgapal IV, graficada para los valores de los parámetros indicados en el figura. Se observa que  $\psi$  decrece monótonamente

como se esperaba. Nuevamente, el análisis numérico depende tanto del índice politrópico  $n$  como del parámetro de “ rigidez ”  $\alpha$  (relacionado con la relación de presión y densidad en el centro del objeto compacto). Cada  $n$  define un objeto estelar específico que, para este modelo (solución semilla de Durgapal IV) presenta diferentes límites,  $\xi_\Sigma$ , consistente con el hecho de que la presión radial  $P_r$  se hace cero en la superficie ( $\Sigma$ ) como lo requiere la continuidad de la segunda forma fundamental.

La función masa  $\eta$  como función de  $\xi$  para diferentes valores de  $n$  se presenta en la Fig. 4.12. La evaluación numérica se detiene cuando  $\eta$  alcanza  $\xi_\Sigma$ , donde la función de masa, la masa de Tolman y la masa total se igualan. Por supuesto, cada modelo de politrópo, con un límite diferente (hecho observado en la Fig. 4.11) a su vez también presenta una energía total contenida diferente.

El parámetro  $y$  muestra en la Fig. 4.13 como función de  $n$  para diferentes  $\alpha$  y la masa de Tolman normalizada  $\eta/\eta_{\Sigma_T}$  se muestra en Fig. 4.14. Nuevamente, la masa gravitacional activa aumenta desde el centro hacia la superficie, mostrando algunos comportamientos peculiares para algunos valores del índice politrópico (línea naranja:  $n = 3$ ).

Finalmente, la Fig. 4.15 muestra el comportamiento de la anisotropía local de la presión en función del parámetro adimensional  $\xi$ . Para esta función de anisotropía obtenemos el comportamiento habitual. Observamos que la anisotropía es una función creciente y cuando el índice del politropo aumenta, la anisotropía dada en alguna capa del objeto estelar disminuye.

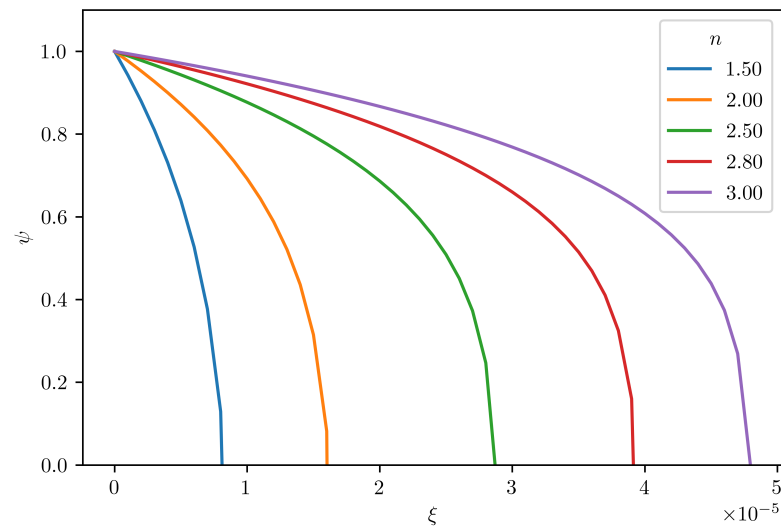


Figura 4.11:  $\psi$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

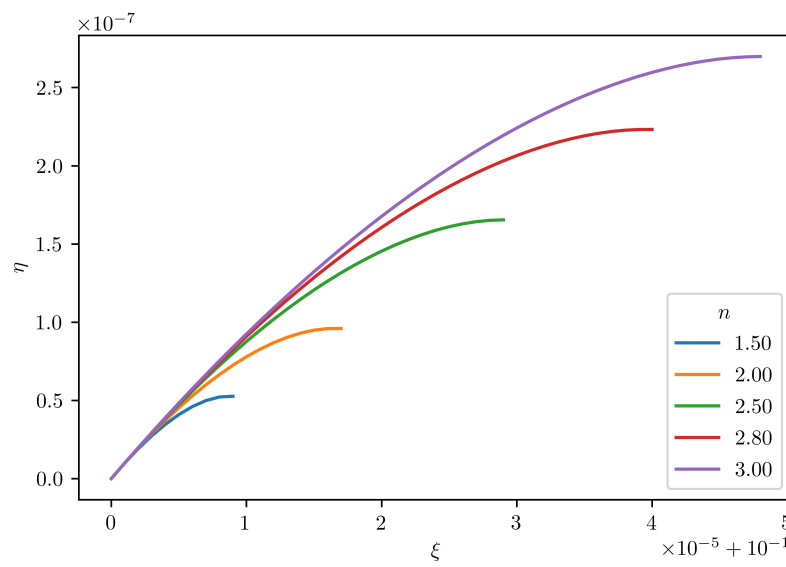


Figura 4.12:  $\eta$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

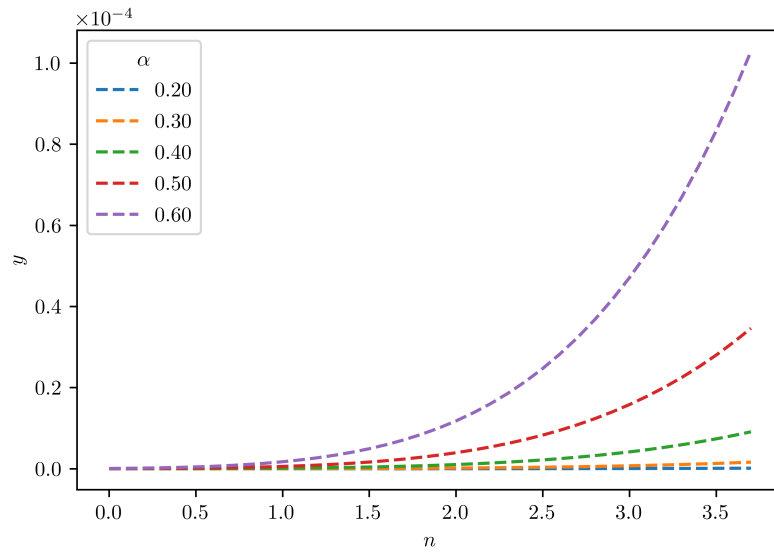


Figura 4.13: Potencial de superficie  $y$  como función de  $n$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

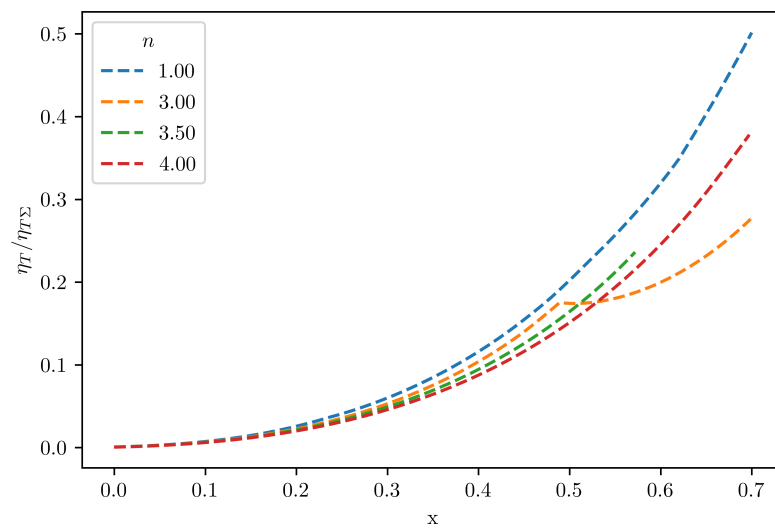


Figura 4.14: Masa de Tolman-Whittaker normalizada  $\eta/\eta_{\Sigma_T}$  como función de  $x$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

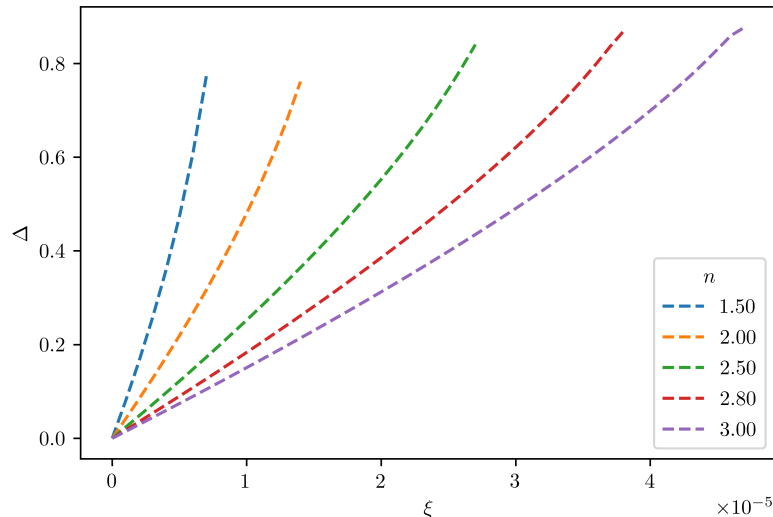


Figura 4.15: Anisotropía local  $\Delta$  como función de  $\xi$  para  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $n$ .

## 4.4 Discusión

Para obtener un modelo politrópico relativista general se debe integrar el sistema de ecuaciones de campo de Einstein. Si asumimos que la presión del fluido es anisotrópica, necesitamos proporcionar más información sobre la anisotropía inherente al problema en consideración. La introducción de una nueva variable produce un grado adicional de libertad y, por lo tanto, la ecuación (2.6) no es suficiente para integrar la ecuación de Lane-Emden. Para hacer eso, hay diferentes formas de lidiar con este problema como se ha mencionado anteriormente. Se puede asumir un *ansatz* para la anisotropía permitiendo un modelado específico [1]. Otra posibilidad es imponer ciertas condiciones físicas sobre las variables métricas, como la nulidad del tensor de Weyl (modelos polítopo conformemente plano) [2] y el polítopo Karmarkar Clase I [75]. Además, se ha desarrollado [9] el modelo de polítopo de complejidad nula.

Dado que los polítopos representan una variedad de sistemas de fluidos con una amplia

gama de aplicaciones en astrofísica (por ejemplo, fluidos de Fermi), en la sección 2.3 se describe un marco general para modelar polítrópos relativistas generales (con anisotropía de presión local), mediante el proceso de desacoplamiento gravitacional, a través de el enfoque de deformación geométrica mínima. Así, se ha construido otro método para obtener las ecuaciones de Lane-Emden generalizadas, que nos permite encontrar un modelo específico. Asumir la ecuación de estado politrópica para la presión radial nos permite obtener una expresión para la anisotropía total del sistema en términos de la función masa adimensional ( $\eta$ ), dada en (2.34), y las variables métricas del sector semilla. Esto representa una enorme ventaja, ya que ahora podemos obtener una gran variedad de modelos de polítrópos relativistas generales eligiendo soluciones conocidas de buen comportamiento como semillas. En este trabajo se ha estudiado tres modelos politrópicos considerando Tolman IV, Durgapal IV y Wyman IIa como soluciones de semillas. Para cada caso, se ha encontrado el conjunto completo de ecuaciones que se convierten en la ecuación de Lane-Emden generalizada para la materia anisotrópica. Tales extensiones de las soluciones politrópicas al caso relativista general son obligatorias si uno tiene que tratar con objetos ultracompactos como estrellas de neutrones, donde los efectos relativistas generales no pueden ser despreciados. Sin embargo, cabe destacar que los modelos mencionados anteriormente se presentan aquí con el único propósito de ilustrar el método. La forma natural de obtener modelos consiste en brindar información específica sobre el tipo de anisotropía presente en cada problema, aún así, los modelos obtenidos en este trabajo presentan algunas características interesantes que merecen ser comentadas.

En las Figuras 4.1, 4.6 y 4.11 observamos que existen configuraciones limitadas para un rango de valores de los parámetros involucrados y solo en la semilla Wyman IIa modelo de solución todos los radios del borde coinciden. Sin embargo, debido a la existencia de un número mayor de parámetros que en el caso isotrópico, las condiciones para la existencia de distribu-

ciones de radio finito son más complicadas que en el último caso. Las Figuras 4.3, 4.8 y 4.13 muestran el comportamiento del “potencial de superficie” ( $y$ ) para todos los modelos considerados: crece a medida que aumenta  $n$  y tiene valores más grandes para un parámetro de rigidez mayor ( $\alpha$ ). Esto se comprende fácilmente, si recordamos que el corrimiento al rojo en la superficie es una variable observable, que por lo tanto podría proporcionar información sobre la estructura de la fuente, que está relacionada con el modelo politrópico (el índice  $n$ ) que describe el fluido y también su grado de anisotropía. Esto sucede así, ya que cada modelo politrópico anisotrópico se caracteriza por un  $y$  único como se puede ver en la Ec. (3.28). Los modelos politrópicos que favorecen mayores desplazamientos hacia el rojo se muestran claramente en la Fig. 4.8, para la solución Wyman IIa, donde se observa un comportamiento peculiar para el valor más alto de  $\alpha$ . Este comportamiento “anómalo” podría estar relacionado con el valor extremo (máximo) de este parámetro ( $\alpha = 1$ ), que corresponde a la ecuación de estado  $P_r = \rho$ , que se cree describe materia ultradensa [113].

La correspondencia mencionada anteriormente, entre el parámetro  $y$  y el índice politrópico  $n$ , sugiere que se puede establecer una relación entre la compacidad y la distribución de anisotropía local del fluido, lo que a su vez está vinculado a hechos interesantes que aparecen cuando se estudia la estabilidad del sistema, excepto en casos particulares en los que se rompa dicha correspondencia. Para profundizar en esta característica, en las Figs. 4.4, 4.14 y 4.9 se ha investigado el comportamiento de la masa de Tolman (que podría estar relacionada con la estabilidad) dentro de la esfera para cada modelo. Estos hechos han sido extensamente reportados en [1, 2, 3, 79, 114] donde se discute la eficiencia para disminuir la masa de Tolman en las regiones internas y concentrarla en las externas dependiendo del factor anisotrópico que la produce lo cual resalta el papel que juega la anisotropía en la estabilidad de la configuración del fluido.

En principio, un argumento un tanto especulativo afirma que podría ser posible investigar las características del fluido de la estrella determinando  $n$  mediante el potencial de superficie. Esto sería válido para aquellas configuraciones donde los efectos relativistas generales, así como la inclusión de la anisotropía de presión, son inevitables y se modelan recurriendo a una ecuación de estado politrópica. Entonces, una posible aplicación del enfoque presentado aquí podría aplicarse al estudio de las enanas blancas de super-Chandrasekhar que tienen masas del orden de  $2.8M_{\odot}$ . Sin embargo, se debe tener cuidado con el hecho de que algunos de los fenómenos físicos presentes en tales configuraciones (por ejemplo, campos magnéticos intensos) podrían romper la simetría esférica.



## Capítulo V

### Conclusiones

En este trabajo se presentó una alternativa nueva para obtener soluciones relativistas de polítopos anisótropos mediante el método de desacople gravitacional a través de una deformación geométrica mínima. En este sentido, se ha extendido el dominio de las soluciones isotropas hacia soluciones anisótropas. Este hecho es de alto interés ya que para modelar objetos ultracompactos la condición de una configuración isotrópica deja de ser un modelo realista como se ha mencionado previamente. Las soluciones numéricas obtenidas de las ecuaciones de Lane-Emden generalizadas muestran configuraciones anisótropas estables y bien comportadas para los tres sectores semillas elegidos: Tolman IV, Wyman IIa y Durgapal IV. Esto se refleja al haber obtenido la función densidad energía que disminuye monótonamente como se espera y la función masa se encuentra una función creciente que depende del parámetro de compacidad impuesto al modelo. Adicionalmente, se ha calculado el potencial de superficie y se ha investigado el comportamiento de la masa activa gravitacional ( $m_T$ ) cuyo comportamiento es el esperado y reportado anteriormente en varios trabajos. De igual manera, se ha obtenido una expresión para la anisotropía total del sistema en términos de la función masa, esto representa una gran ventaja

ya que nos permite generar un gran número de modelos de polítrpos relativistas para cualquier solución semilla bien comportada.

El método de Desacople Gravitacional ha demostrado ser una herramienta eficaz y versátil y una alternativa al modelar objetos estelares, sin duda este método puede ser aplicado a un sin número de aplicaciones astrofísicas y en el caso de este trabajo puede ser extendido a un análisis más detallado con otras condiciones de interés en el modelamiento de objetos ultracompactos.

## Bibliography

- [1] L. Herrera and W. Barreto, *Phys. Rev. D* **88**, 084022 (2013).
- [2] L. Herrera, A. Di Prisco, W. Barreto and J. Ospino, *Gen. Relativ. Gravit.*, **46**, 1827 (2014).
- [3] G. Abellán, E. Contreras, E. Fuenmayor and L. Herrera, *Phys. Dark Univ.* **30**, 100632 (2020).
- [4] G. D. Schmidt and P. S. Schmidt, *Astrophys. J.* **448**, 305 (1995).
- [5] A. Putney, *Astrophys. J.* **451**, L67 (1995).
- [6] A. P. Martinez, R. G. Felipe and D. M. Paret, *Int. J. Mod. Phys. D* **19**, 1511 (2010).
- [7] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ospino, and E. Fuenmayor, *J. Math. Phys.* (N.Y.) **42**, 2129 (2001).
- [8] K. R. Karmarkar, *Proc. Indian Acad. Sci. A* **27**, 56 (1948).
- [9] L. Herrera, *Phys. Rev. D* **97**, 044010 (2018).
- [10] E. Contreras and E. Fuenmayor, *Phys. Rev. D* **103**, 124065 (2021).
- [11] P. León, E. Fuenmayor, and E. Contreras, *Phys. Rev. D* **104**, 044053 (2021).

- [12] J. Ovalle. Phys. Rev. D **95**, 104019 (2017).
- [13] R. Casadio, J. Ovalle and R. da Rocha, Class. Quant. Grav. **32** (2015) no.21, 215020
- [14] J. Ovalle, R. Casadio, R. da Rocha, A. Sotomayor. Eur. Phys. J. C **78**, 122 (2018).
- [15] M. Estrada, F. Tello-Ortiz. Eur. Phys. J. Plus **133**, 453 (2018) .
- [16] J. Ovalle, R. Casadio, R. da Rocha, A. Sotomayor, Z. Stuchlik, Eur. Phys. J. C **78**, 960 (2018).
- [17] C. Las Heras, P. Leon. Fortschr. Phys. **66**, 1800036 (2018).
- [18] M. Estrada, R. Prado, Eur. Phys. J. Plus **134**, 168 (2019).
- [19] G. Panotopoulos, Á. Rincón, Eur. Phys. J. C **78**, 851 (2018)
- [20] J. Ovalle, Phys. Lett. B **788**, 213 (2019).
- [21] J. Ovalle, R. Casadio, R. da Rocha, A. Sotomayor, Z. Stuchlik, Einstein-Klein-Gordon system by gravitational decoupling, EPL 124 (2) (2018).
- [22] S. Maurya, F. Tello, Eur. Phys. J. C **79**, 85 (2019).
- [23] C. Las Heras, P. León, Eur. Phys. J. C **79**, no. 12, 990 (2019).
- [24] M. Estrada, Eur. Phys. J. C **79**, no. 11, 918 (2019).
- [25] L. Gabbanelli, J. Ovalle, A. Sotomayor, Z. Stuchlik, R. Casadio, Eur. Phys. J. C **79**, 486 (2019).
- [26] S. Hensh and Z. Stuchlík, Eur. Phys. J. C **79**, no. 10, 834 (2019).

- [27] F. Linares and E. Contreras, *Phys. Dark Univ.* **28**, 100543 (2020)
- [28] P. León and A. Sotomayor, *Fortsch. Phys.* **67**, 1900077 (2019).
- [29] S. Maurya, and F. Tello-Ortiz, *Physics of the Dark Universe*, **27**, 100442 (2020).
- [30] A. Arias, F. Tello-Ortiz and E. Contreras, *Eur. Phys. J. C* **80**, 463 (2020).
- [31] M. Wyman, Radially symmetric distributions of matter. *Phys. Rev.* 75(12), 1930 (1949)
- [32] M.C. Durgapal, A class of new exact solutions in general relativity. *J. Phys. A Math. Gen.* 15(8), 2637 (1982).
- [33] G. Abellán, V. Torres-Sánchez, E. Fuenmayor, and E. Contreras, *Eur. Phys. J. C* **80**, 177 (2020).
- [34] F. Tello-Ortiz, *Eur. Phys. J. C* **80**, 413 (2020).
- [35] A. Rincón, E. Contreras, F. Tello-Ortiz, P. Bargueño, and G. Abellán, *Eur. Phys. J. C* **80**, 490 (2020).
- [36] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.
- [37] J. Ovalle and R. Casadio, *Beyond Einstein Gravity. The Minimal Geometric Deformation Approach in the Brane-World*, Springer International Publishing (2020). DOI:10.1007/978-3-030-39493-6.
- [38] G. Abellán, Á. Rincón, E. Fuenmayor and E. Contreras, *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 606 (2020). doi:10.1140/epjp/s13360-020-00589-0
- [39] J. Ovalle, R. Casadio, E. Contreras and A. Sotomayor, *Phys. Dark Univ.* **31**, 100744 (2021).

- [40] E. Contreras, J. Ovalle and R. Casadio, Phys. Rev. D **103**, 044020 (2021).
- [41] J Ovalle, E Contreras, Z Stuchlik, Physical Review D **103**, 084016 (2021).
- [42] F. Tello, S. Maurya and P. Bargueño, Eur. Phys. J. C **81**, 426 (2021).
- [43] P. Meert and R. da Rocha, Nucl. Phys. B **967**, 115420 (2021)  
doi:10.1016/j.nuclphysb.2021.115420 [arXiv:2006.02564 [gr-qc]].
- [44] R. da Rocha, Phys. Rev. D **102**, no.2, 024011 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.102.024011  
[arXiv:2003.12852 [hep-th]].
- [45] R. da Rocha, Symmetry **12**, no.4, 508 (2020) doi:10.3390/sym12040508  
[arXiv:2002.10972 [hep-th]].
- [46] M. Sharif and Q. Ama-Tul-Mughani, Annals Phys. **415**, 168122 (2020)  
doi:10.1016/j.aop.2020.168122 [arXiv:2004.07925 [gr-qc]].
- [47] M. Sharif and A. Majid, Astrophys. Space Sci. **365**, no.2, 42 (2020) doi:10.1007/s10509-020-03754-0
- [48] M. Sharif and Q. Ama-Tul-Mughani, Mod. Phys. Lett. A **35**, no.12, 2050091 (2020)  
doi:10.1142/S0217732320500911
- [49] M. Carrasco–Hidalgo and E. Contreras, Eur. Phys. J. C **81**, 757 (2021).
- [50] J.Sultana, Symmetry **13**, 159 (2021).
- [51] S.K. Maurya, Asma Mohammed Al Aamri, Athari Khalifa Al Aamri, Riju Nag, Eur. Phys. J. C **81**, 701 (2021).
- [52] Neeraj Pant, Satyanarayana Gedela, Ravindra K. Bisht, Chin.J.Phys. **72**, 530 (2021).

- [53] P. Meert, R. da Rocha, e-Print: 2109.06289
- [54] M. Zubair, Mobeen Amin, Hina Azmat, Phys.Scripta **96**, 125008 (2021).
- [55] S.K. Maurya, Asma Sulaiman Al Kindi, Maryam Rashid Al Hatmi, Riju Nag, Results Phys. **29**, 104674 (2021).
- [56] J. Andrade and E. Contreras, Eur. Phys. J. C **81**, 889 (2021).
- [57] G. D. Birkhoff, Relativity and Modern Physics. Harvard University Press, 1923. Cambridge, Massachusetts, LCCN 23008297.
- [58] B. Kuchowicz, Acta Phys. Pol. B 2 (1971) 657.
- [59] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt and M. MacCallum, Exact Solutions of Einstein's Field Equations (Cambridge University Press, Cambridge, 1980) 163.
- [60] M. R. Finch Ph. D Thesis The Painleve-Gambier Equation and The Relativistic Static Fluid Sphere (University of Sussex, 1987)
- [61] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago, Chicago, 1939).
- [62] R. Kippenhahn and A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution* (Springer Verlag, Berlin, 1990).
- [63] L. Herrera and W. Barreto, Phys. Rev D **87**, 087303 (2013).
- [64] G. Abellán, E. Fuenmayor and L. Herrera, Phys. Dark Univ. **28**, 100549 (2020).
- [65] L. Herrera, N.O. Santos, Phys. Rep. 286, 53 (1997)

- [66] R. Tooper, *Astrophys. J.*, **140**, 434 (1964).
- [67] R. Tooper, *Astrophys. J.*, **142**, 1541 (1965).
- [68] R. Tooper, *Astrophys. J.*, **143**, 465 (1966).
- [69] S. Bludman, *Astrophys. J.*, **183**, 637 (1973).
- [70] U. Nilsson and C. Ugglå, *Ann. Phys.*, **286**, 292 (2000).
- [71] H. Maeda, T. Harada, H. Iguchi and N. Okuyama, *Phys. Rev. D*, **66**, 027501 (2002).
- [72] L. Herrera and W. Barreto, *Gen. Relativ. Gravit.*, **36**, 127 (2004).
- [73] X. Y. Lai and R. X. Xu, *Astropart. Phys.*, **31**, 128 (2009).
- [74] S. Thirukkanesh and F. C. Ragel, *Pramana J. Phys.*, **78**, 687 (2012).
- [75] A. Ramos, C. Arias, E. Fuenmayor and E. Contreras, *Eur. Phys. J. C*, **81**, 203 (2021).
- [76] N. Anderson, G. Comer and K. Glampedakis, *Nucl. Phys. A* **763**, 212 (2005).
- [77] R.C. Tolman, Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.* 55(4), 364 (1939).
- [78] E. N. E. van Dalen and A. E. L. Dieperink, *Phys. Rev. C* **69**, 025802 (2004).
- [79] L. Herrera and N.O. Santos, *Phys. Rep.* **286**, 53 (1997).
- [80] L. Herrera, E. Fuenmayor, and P. León, *Phys. Rev. D* **93**, 024047 (2016).
- [81] J. Ovalle, R. Casadio and A. Sotomayor, *Adv. High Energy Phys.* **2017** (2017), 9756914 doi:10.1155/2017/9756914 [arXiv:1612.07926 [gr-qc]].



- [82] J. Ovalle and A. Sotomayor, Eur. Phys. J. Plus **133** (2018) no.10, 428  
doi:10.1140/epjp/i2018-12291-7 [arXiv:1811.01300 [gr-qc]].
- [83] M. Sharif, S. Saba, Gravitational decoupled anisotropic solutions in  $f(G)$  gravity, Eur. Phys. J. C78 (11) (2018) 921.
- [84] J. Ovalle, Phys. Rev. D **95**, 104019 (2017)
- [85] J. Ovalle, R. Casadio, R. da Rocha, A. Sotomayor, Eur. Phys. J. C **78**, 122 (2018)
- [86] J. Ovalle, Phys.Lett. B7 **88** (2019) 213-218
- [87] J. Ovalle, R. Casadio, R. d. Rocha, A. Sotomayor, Z. Stuchlik, Black holes by gravitational decoupling, Eur. Phys. J. C78 (11) (2018) 960.
- [88] E. Contreras, P. Bargueo, Minimal Geometric Deformation in asymptotically (A-)dS space-times and the isotropic sector for a polytropic black hole, Eur. Phys. J. C78 (12) (2018) 985.
- [89] E. Contreras, A. Rincon, P. Bargueo, A general interior anisotropic solution for a BTZ vacuum in the context of the Minimal Geometric Deformation decoupling approach, Eur. Phys. J. C79 (3) (2019) 216.
- [90] L. Herrera, Phys. Rev. D **101**, 104024 (2020).
- [91] L. Gabbanelli, A. Rincon, C. Rubio, Gravitational decoupled anisotropies in compact stars, Eur.Phys. J. C78 (5) (2018) 370.
- [92] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).
- [93] K.N. Singh, S. K. Maurya, F. Rahaman and F. Tello-Ortiz, Eur . Phys. J. C **79**, 381 (2019).

- [94] S. K. Maurya, A. Errehymy, D. Deb, F. Tello-Ortiz and M. Daoud, Phys. Rev .D **100**, 044014 (2019).
- [95] F. Tello-Ortiz, S. K. Maurya, A. Errehymy, Ksh. N. Singh and M. Daoud, Eur. Phys. J. C **79**, 88 (2019).
- [96] J. Ospino and L. Nuñez, Eur. Phys. J. C **80**, 166 (2020).
- [97] F. Tello-Ortiz, S. K. Maurya and Y. Gomez-Leyton, Eur. Phys. J. C **80**, 324 (2020).
- [98] F. Tello-Ortiz and E. Contreras, Annals Phys. **419**, 168217 (2020).
- [99] S. Maurya and S. Maharaj, Eur. Phys. J. C **77** (2017) 328.
- [100] S. K. Maurya, F. Tello-Ortiz and M. K. Jasim, Eur. Phys. J. C **80** (2020) no.10, 918  
doi:10.1140/epjc/s10052-020-08491-w
- [101] B. V. Ivanov, Eur. Phys. J. Plus **135**, 377 (2020).
- [102] G. Mustafa, M. Farasat Shamir, Xia Tie-Cheng, Phys. Rev. D **101**, 104013 (2020).
- [103] G. Mustafa, M. Farasat Shamir, Mushtaq Ahmad, Phys. Dark Universe **30**, 100652 (2020).
- [104] Asifa Ashraf, Zhiyue Zhang, Allah Ditta, G. Mustafa, Annals Phys. **422**, 168322 (2020).
- [105] Y. Gomez-Leyton, Hina Javaid, L. S. Rocha, Francisco Tello-Ortiz, Phys. Scr. **96**, 025001 (2020).
- [106] G. Mustafa, Xia Tie-Cheng, Mushtaq Ahmad, M. Farasat Shamir, Phys. Dark Universe **31**, 100747 (2021).

- [107] S.K. Maurya, Francisco Tello-Ortiz, Saibal Ray, *Phys.Dark Univ.* **31**, 100753 (2021).
- [108] R. López–Ruiz, H. L. Mancini, and X. Calbet, *Phys. Lett. A* **209**, 321 (1995).
- [109] L. Herrera, W. Barreto, A. Di. Prisco and N. O. Santos, *Phys. Rev. D* **65**, 104004 (2002).
- [110] B. V. Ivanov, *Phys. Rev. D* **65**, 104011 (2002).
- [111] C. G. Böhmer and T. Harko, *Classical Quantum Grav.* **23**, 6479 (2006).
- [112] P. Karageorgis and J. G. Stalker, *Classical Quantum Grav.* **25**, 195021 (2008).
- [113] Ya. B. Zeldovich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **41**, 1609 (1969) [*Sov. Phys. JETP* **14**, 1143 (1962)].
- [114] R. Chan, L. Herrera and N. O. Santos, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **265**, 533 (1993).

# **Apéndice**

## Apéndice A

### Método Alternativo

A continuación se presenta un método alternativo y equivalente al procedimiento presentado en este trabajo para encontrar las soluciones a la ecuación de Lane Endem para u polítrolo anisótropo relativista.

Se comienza separando a la función masa, en un sector material y desacoplado como sigue:

$$m(r) = m^m + m_\theta \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} m^m &= \frac{r}{2}(1 - e^{-\mu}) \\ m_\theta &= \frac{-\beta r f}{2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Con estas definiciones tenemos,

$$\eta(\xi) = \eta^m + \eta_\theta = \frac{A^3(m^m + m_\theta)}{4\pi\rho_c} \quad (1.3)$$

con

$$\begin{aligned}\eta^m &= \frac{A^3 m^m}{4\pi\rho_c} = \frac{\xi(1 - e^{-\mu})}{2\alpha(n+1)} \\ \eta_\theta &= \frac{A^3 m_\theta}{4\pi\rho_c}\end{aligned}\quad (1.4)$$

Luego,

$$\eta' = \eta'^m + \eta'_\theta = \xi^2 \psi^n \quad (1.5)$$

de donde,

$$\eta'_\theta = \frac{d\eta_\theta}{d\xi} = \xi^2 \psi^n - \frac{1}{2\alpha(n+1)} [1 - e^{-\mu} + \xi e^{-\mu} \mu'] \quad (1.6)$$

Con las definiciones de  $f$  se puede calcular,

$$f = -\frac{2\alpha(n+1)\frac{\eta_\theta}{\xi}}{\beta} \quad (1.7)$$

y su derivada,

$$f' = \frac{2A\alpha(n+1)}{\beta} \frac{\eta_\theta - \xi\eta'_\theta}{\xi^2} \quad (1.8)$$

Con las expresiones anteriores podemos reemplazar en la anisotropía (3.13).

$$\Delta = \frac{2\alpha(n+1)A^2}{4\kappa\xi^2} \left[ -\eta_\theta\xi \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) + (\eta_\theta - \xi\eta'_\theta) \left( \nu' + \frac{2}{\xi} \right) \right] \quad (1.9)$$

Finalmente nos queda,

$$\boxed{\Delta = \frac{2\pi\rho_c}{\kappa\xi^2} \left[ (\eta_\theta - \xi\eta'_\theta) \left( \nu' + \frac{2}{\xi} \right) - \xi\eta_\theta \left( 2\nu'' + \nu'^2 - 2\frac{\nu'}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) \right]} \quad (1.10)$$

Por lo que la ecuación de Lane Emdem se reescribe como,

$$\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \left[ \frac{1 - 2\alpha(n+1) \frac{\eta_\theta + \eta^m}{\xi}}{1 + \alpha\psi} \right] + \eta_\theta + \eta^m + \alpha\xi^3 \psi^{n+1} - \frac{2\Delta\xi}{P_{rc}\psi^n(n+1)} \left[ \frac{1 - 2\alpha(n+1) \frac{\eta_\theta + \eta^m}{\xi}}{1 + \alpha\psi} \right] = 0 \quad (1.11)$$

donde,

$$\begin{aligned} \eta^m &= \frac{\xi(1 - e^{-\mu})}{2\alpha(n+1)} \\ \eta'_\theta &= \xi^2 \psi^n - \frac{1}{2\alpha(n+1)} [1 - e^{-\mu} + \xi e^{-\mu} \mu'] \end{aligned} \quad (1.12)$$