

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Posgrados**

**Enseñanza del modelo de Solow: un enfoque pedagógico mediante  
ventanas interactivas.**

Proyecto de Investigación

**Alvaro Xavier Trejo Rodríguez**

**Carlos A. Uribe, Ph.D.**

**Director de Trabajo de Titulación**

Trabajo de titulación de posgrado presentado como requisito para la  
obtención del título de Magíster en Economía

Quito, 08 de diciembre de 2023

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ  
COLEGIO DE POSGRADOS

**HOJA DE APROBACIÓN DE TRABAJO DE  
TITULACIÓN**

**Enseñanza del modelo de Solow: un enfoque pedagógico  
mediante ventanas interactivas.**

**Alvaro Xavier Trejo Rodríguez**

Pedro Romero  
PhD.  
Director de la Maestría en Economía

Mónica Rojas  
PhD.  
Decana de la Escuela de Economía

Hugo Burgos  
PhD.  
Decano del Colegio de Posgrados

Quito, 08 de diciembre de 2023

### **Derechos de Autor**

Por medio del presente documento certifico que he leído la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad San Francisco de Quito y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo de investigación quedan sujetos a lo dispuesto en la Política.

Así mismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo de investigación en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante: .....

Nombres y Apellidos: Alvaro Xavier Trejo Rodríguez

Código: 00326490

Cédula de Identidad : 1719524082

Lugar y fecha: Quito, 08 de diciembre de 2023

## ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN

**Nota:** El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETHeses>.

## UNPUBLISHED DOCUMENT

**Note:** The following graduation project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETHeses>.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero empezar agradeciendo especialmente a quien ha sido mi mentor durante estos últimos años y una parte fundamental de este trabajo: Carlos Uribe. Sin su guía y seguimiento exigente, este trabajo no habría avanzado, así que por eso y mucho más, estoy realmente agradecido. Agradezco también a todos los profesores que fueron parte de esta maestría: Julio Acuña, Victor Aguiar, Raúl Aldaz, Hugo Burgos, Victor Morales, Sergio Parra, Juan David Robalino, Pedro Romero y Carlos Uribe, además de mis compañeros de estudio: Nicolás, Mario y Roberto. También quiero expresar mi agradecimiento a quienes me brindaron la oportunidad de servir como asistente de cátedra: Daniel Baquero y Raúl Aldaz. Espero haber cumplido con todas sus expectativas. Agradezco a mi novia por su apoyo especialmente en los momentos de más incertidumbre. Finalmente, y no menos importante, quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional. Madre, Padre, Hermano, ninguno de mis logros académicos y profesionales hubiera sido posible sin su presencia y aliento.

Alvaro Trejo

## RESUMEN

Este artículo presenta una estrategia auxiliar interactiva para enseñar el modelo de crecimiento de Solow de una forma más comprensible, y detalla su posible aplicación en el ámbito de la enseñanza de la economía. Se inicia con un resumen del Modelo de Solow, seguido por un análisis detallado de las complejidades inherentes al estudio de la ciencia económica y, específicamente, al modelo de Solow en el ámbito universitario. Como resultado de este análisis, se propone la herramienta interactiva. Dicha herramienta, programada en Julia, permite a los usuarios ajustar los parámetros del modelo mediante *widgets* y observar visualmente el impacto de estos ajustes a través de gráficos interactivos. Se implementa dos tipos de interfaces: una orientada hacia la representación de gráficos teóricos y la otra enfocada en la simulación del modelo. Además, se detallaron estrategias para su aplicación práctica en el estudio del modelo, basadas en escenarios empíricos. El código fuente adjunto permite su replicación en diversos contextos académicos. En síntesis, este artículo destaca el uso innovador de las herramientas interactivas al momento de enseñar modelos de crecimiento económico, invitando a la comunidad académica a explorar y expandir sus herramientas pedagógicas.

*Palabras clave: Modelo de Solow, pedagogía, dificultades pedagógicas, ventanas interactivas, docencia, Julia.*

## ABSTRACT

This article introduces an interactive strategy for teaching the Solow Growth Model in a more comprehensible manner, highlighting its practical utility in teaching economics. It starts with a summary of the Solow Model, followed by an in-depth examination of the complexities of economic science, particularly focusing on this model in a university context. From this analysis, the interactive tool programmed in Julia is presented. It allows users to modify model parameters using widgets, enabling the visualization of the impact of these changes through interactive graphs. The tool features two interfaces: one for representing theoretical graphs and another for simulating the model. The source code included allows to replicate this tool in different academic contexts. In summary, this article underscores the innovative use of interactive tools in teaching economics, encouraging the academic community to explore and expand their pedagogical resources.

*Keywords: Solow model, pedagogy, pedagogical difficulties, interactive windows, teaching, Julia.*

## TABLA DE CONTENIDO

<b>TABLA DE CONTENIDO</b>	<b>8</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>10</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>11</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>12</b>
1.1 Relación a la literatura . . . . .	14
<b>2 Modelo de Solow</b>	<b>15</b>
2.1 Versión Cobb-Douglas . . . . .	16
2.2 Estado Estacionario . . . . .	17
2.3 Dinámica del Modelo - Tasa de crecimiento de K . . . . .	18
2.4 Regla de Oro . . . . .	19
2.5 El rol de la Tecnología en el modelo . . . . .	21
2.6 Tecnología estocástica . . . . .	22
2.6.1 Incertidumbre . . . . .	22
<b>3 Dificultades Pedagógicas</b>	<b>23</b>
3.1 Matemáticas Abstractas . . . . .	24
3.2 Conexión con lo Empírico . . . . .	25
3.3 Visualización . . . . .	26
<b>4 Propuesta Pedagógica – Valor Innovador</b>	<b>27</b>
4.1 Propuesta . . . . .	27
4.2 Herramientas a Utilizar . . . . .	28
<b>5 Ventanas Interactivas</b>	<b>29</b>
5.1 Resultado Interfaz Interactiva 1 . . . . .	30
5.2 Resultado Interfaz Interactiva 2 . . . . .	33

	9
<b>6 Conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>7 Referencias</b>	<b>41</b>
<b>8 Anexos</b>	<b>44</b>
<b>A Demostraciones Matemáticas del Modelo de Solow</b>	<b>44</b>
<b>B Manual de Replicación</b>	<b>49</b>
B.1 Interfaz Interactiva 1 . . . . .	50
B.2 Interfaz Interactiva 2 . . . . .	59

## ÍNDICE DE FIGURAS

1	<b>Modelo de Solow-Swan.</b> . . . . .	18
2	<b>Dinámica del Modelo.</b> . . . . .	19
3	<b>Regla de Oro.</b> . . . . .	20
4	<b>Ventana Interactiva 1.</b> . . . . .	30
5	<b>1<sup>ra</sup> Comparativa - Escenario 1.</b> . . . . .	31
6	<b>1<sup>ra</sup> Comparativa - Escenario 2.</b> . . . . .	32
7	<b>Ventana Interactiva 2.</b> . . . . .	33
8	<b>Simulación Escenario 1.</b> . . . . .	35
9	<b>Simulación Escenario 2.</b> . . . . .	37

## ÍNDICE DE TABLAS

# 1 Introducción

A pesar de la indiscutible presencia del modelo de crecimiento económico de Solow-Swan en materias sobre crecimiento económico en pregrado o de nivel más avanzado, como macroeconomía avanzada en el posgrado, por múltiples razones, a los alumnos les cuesta interiorizar el modelo. Las dificultades más comunes en el estudio del modelo de Solow incluyen el manejo de las variables en su dimensión temporal, la interpretación del estado estacionario, y el análisis diferenciado considerando las unidades eficientes de trabajo. En relación con esto, un consenso entre los investigadores refleja escepticismo sobre la capacidad de los estudiantes para comprender claramente el estado estacionario (Taylor, 2000), así como el análisis de modelos en su forma intensiva (DeLong, 2002). Bajo esta premisa y con miras a mejorar la comprensión y dominio de la teoría de crecimiento económico, ¿Cómo mejorar la comprensión teórica y práctica del modelo de Solow en estudiantes de pregrado con el uso de herramientas interactivas codificadas en Julia?

Este artículo, fundamentado en un análisis de las dificultades pedagógicas en la educación universitaria, desarrolla una herramienta interactiva diseñada para complementar la enseñanza del modelo de Solow. Para ello, primero se realizó un resumen detallado sobre el modelo en base al libro de Barro and Sala-I-Martin (2003) junto a la extensión estocástica del modelo. A posteriori, se llevó a cabo una discusión detallada sobre las dificultades pedagógicas en el estudio de economía a nivel de pregrado, abordando también los desafíos específicos asociados con el modelo. En dicha sección, se realiza una comparación profunda entre los métodos pedagógicos tradicionales y los innovadores, destacando la inclusión de enfoques más activos en la educación. Posteriormente, se plantea abordar estas problemáticas con una herramienta interactiva programada en Julia, la cual facilita la interacción con los gráficos del modelo. Este apartado detalla el propósito de la herramienta, así como las herramientas y paquetes empleados en su desarrollo.

La herramienta interactiva se centra en los dos tipos principales de gráficos del modelo: uno que ilustra las interacciones de las funciones y otro que simula el comportamiento del modelo. La estrategia adoptada para el diseño de la herramienta abarcó varios aspectos clave:

en primer lugar, determinar el estado estacionario y replicar los gráficos teóricos del modelo; en segundo lugar, simular el modelo utilizando la versión estocástica del parámetro tecnológico; seguidamente, se agruparon los gráficos en dos tipos de ventanas interactivas, cada una diseñada específicamente para cada tipo de gráfico. Por último, se presentan las ventanas interactivas junto a su modo de uso y su posible aplicación como auxiliar pedagógico del modelo. En complemento, se anexa un manual de replicación con el código que se utilizó para la creación de las ventanas con el fin de abrir la posibilidad de replicar la herramienta en otros modelos o proyectos similares.

La implementación de una herramienta para enseñar el modelo de Solow trae consigo una serie de beneficios significativos, particularmente en la personalización del proceso de aprendizaje. Esta herramienta enriquece el análisis del modelo con actividades auxiliares y se adapta a diferentes estilos de aprendizaje entre los estudiantes. Por ejemplo, mientras algunos pueden encontrar mayor provecho en simulaciones visuales, otros pueden preferir la manipulación directa de datos o variables. Además, el profesor puede requerir análisis específicos del modelo que involucren el uso de la herramienta, promoviendo así un aprendizaje más activo y participativo, lo que contribuye a un enfoque pedagógico más dinámico y adaptativo.

En el segundo aspecto, la herramienta se destaca por su capacidad de simular escenarios económicos reales, utilizando *widgets* para ajustar los valores de los parámetros del modelo de Solow. Esto no solo mejora el aprendizaje práctico al permitir a los estudiantes observar en tiempo real las consecuencias de sus decisiones y ajustes, sino que también facilita el estudio de situaciones históricas relevantes. Analizar tales eventos como *shocks* inesperados en la economía proporciona un contexto práctico para entender por qué ciertas economías fueron más afectadas que otras y cómo esto influyó en sus perspectivas de crecimiento. Esta conexión entre teoría y situaciones del mundo real es crucial para aclarar conceptos complejos y desarrollar habilidades críticas, como el pensamiento analítico y la resolución de problemas.

Esta investigación no busca impartir un nuevo estilo pedagógico en economía, como ha sido el énfasis de otros autores en el campo. En cambio, la meta central es contribuir con una herramienta práctica para dar solución a una de las problemáticas identificadas en la enseñanza del modelo de Solow; es decir, la interiorización del modelo a nivel de pregrado y la solución al

desafío intelectual que puede generar la resolución del modelo. La implementación de esta herramienta puede ayudar a superar las barreras de aprendizaje comunes en el ámbito universitario, manteniendo así la motivación de los estudiantes hacia el estudio de las ciencias económicas.

## 1.1 Relación a la literatura

Este artículo aborda dos corrientes principales: la innovación en la pedagogía para la formación en ciencias económicas, y los métodos actuales en la enseñanza del modelo de Solow. Con respecto a la primera, una serie de estudios en crecimiento sobre la eficacia de los métodos pedagógicos en las ciencias económicas ha inclinado su foco de estudio en el uso de métodos alternos interactivos que fomenten las destrezas del análisis económico de los alumnos, además de despertar un mayor interés y compromiso con el material de estudio. Por ejemplo, investigaciones sobre métodos pedagógicos interactivos para enseñar economía (Adugafforovna et al., 2023; Ray, 2018), el método del “aula invertida”<sup>1</sup> (Roach, 2014), aprendizaje dinámico basado en aplicaciones web (Olczak, 2014; White and Wagner, 2021), enseñanza integrando datos (Elmslie and Tebaldi, 2010; Wuthisatian and Thanetsunthorn, 2019), el uso de diagramas visuales para destrabar la sobrecarga cognitiva a raíz de la pluralidad y variedad de conceptos (Moosavian, 2016) y ampliar el estudio de modelos económicos utilizando tareas de “andamiaje en-clase”<sup>2</sup> (Lynn Trafton, 2019).

En cuanto al modelo de Solow, las investigaciones se han centrado en explicar el modelo, ya sea mediante aplicaciones en escenarios reales (de León Arias, 2010; Paudel, 2020; Wickremaratne, 2020), aplicaciones en la industria y la empresa, (Yerznkyan et al., 2021) o guías que explican el modelo de forma diferente y simplificada (Chu, 2018; Stein, 2007). En ninguno de ellos se proponen métodos pedagógicos interactivos que permitan complementar el análisis del modelo y resolver todos los conflictos que genera a nivel de pregrado. De hecho, el propósito de esta investigación es ocuparse de esta brecha, proponiendo una solución práctica, fácil de

---

<sup>1</sup>El concepto de “aula invertida” se refiere a esquema de educación alternativo al tradicional donde los estudiantes miran las clases en casa y utilizan los horarios de clase para realizar otro tipo de actividades de educación activa. (Roach, 2014)

<sup>2</sup>El concepto de “andamiaje en-clase” se refiere a las actividades extras para el análisis de un modelo: Por ejemplo: análisis de fortalezas y debilidades del modelo, tareas grupales que brindan pasos hacia la extensión del modelo, presentaciones de resultados, discusiones en grupos grandes donde se critican los resultados de todos, por último, incluye escribir un artículo sobre la extensión del modelo. (Lynn Trafton, 2019)

utilizar por los docentes y replicable en otros modelos de economía.

Se organizó este documento de la siguiente forma. En la sección 2 se presenta el modelo de Solow junto con aspectos fundamentales para esta investigación. La sección 3 realiza una discusión sobre las dificultades pedagógicas del modelo y de la economía en general a nivel de pregrado. La sección 4 brinda una descripción general de la herramienta propuesta y la sección 5 presenta las ventanas interactivas y ejemplos ilustrativos de cómo utilizarlas para complementar la enseñanza del modelo. En última instancia, la sección 6 concluye.

## 2 Modelo de Solow

El modelo de crecimiento de Solow (1956) es esencial en los modelos de crecimiento exógeno, fundamentándose en los rendimientos decrecientes del capital dentro de una función de producción neoclásica. Esta función se caracteriza por rendimientos constantes a escala u homogeneidad de grado uno, lo que significa que un aumento proporcional en los factores productivos lleva a un incremento equivalente en la producción final; rendimientos positivos pero decrecientes, indicando que cada unidad adicional de capital incrementa la producción a una tasa menor; la Condición de Inada, que señala que el producto marginal de los factores tiende a infinito cuando se acercan a cero y a cero cuando se acercan a infinito; y la esencialidad de los factores, donde su ausencia resulta en una producción nula. En su enfoque tradicional, el modelo simplifica la economía a un único sector productivo, descrito mediante variables claves como  $Y$  (la producción económica),  $K$  (la acumulación de capital),  $A$  (el progreso tecnológico),  $L$  (la fuerza laboral),  $I$  (la inversión) y  $C$  (el consumo de los hogares), todas ellas en función del tiempo  $t$ , proporcionando un marco comprensivo para el análisis del crecimiento económico.

La producción total en el modelo se describe mediante una función que depende de tres elementos principales: el promedio anual de los insumos de capital y trabajo, así como de un factor tecnológico exógeno. Esta relación se representa con la fórmula  $Y = AF(K, L)$ . La producción final se asigna tanto para consumo como para inversión  $Y = C + I$ , además de una tasa constante de ahorro por parte de los hogares  $S = sY$  donde  $0 \leq s \leq 1$ . La inversión, expresada como  $I = \dot{K} + \delta K$ , corresponde a la fracción de producción no consumida y destinada a au-

mentar el capital económico, con  $\delta$  representando la tasa constante de depreciación del capital. Simultáneamente, la fuerza laboral crece a un ritmo constante, denotado por  $\frac{\dot{L}}{L} = n$ .

Para simplificar el análisis, el modelo adopta una versión per cápita, expresada como  $y = f(k)$ , donde  $k$  y  $y$  simbolizan, respectivamente, los valores de capital y producción por trabajador. Esta simplificación resulta crucial, ya que permite enfocar el análisis en el bienestar promedio de los hogares dentro de la economía. Tal enfoque mejora la comprensión de la interacción entre capital y trabajo, a la vez que destaca el papel fundamental que la tecnología desempeña en el crecimiento económico a largo plazo. En síntesis, el modelo de Solow se lo puede resumir en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = f(k) \quad (1)$$

$$c = (1 - s)f(k) \quad (2)$$

$$s = s \cdot f(k) \quad (3)$$

$$\dot{k} = sy - (n + \delta)k \quad (4)$$

La ecuación (4) ilustra la ley de Acumulación del capital.

## 2.1 Versión Cobb-Douglas

Para describir de manera idónea la combinación de los factores de producción en el modelo, es necesario adaptar diversas formas funcionales para la función de producción de la economía, destacando entre ellas la función Cobb-Douglas, que constituye un ejemplo clave y esencial en este contexto.

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha} \quad (5)$$

Es común utilizar esta función para resolver modelos de crecimiento, pues la misma cumple con las condiciones de Inada y de rendimientos marginales decrecientes, además de su simplificación matemática y su ajuste empírico razonable. Dado el contexto, se adaptan las ecuaciones del modelo y se las expresan en su forma intensiva:

$$y = Ak^\alpha \quad (6)$$

$$s = sAk^\alpha \quad (7)$$

$$c = (1 - s)Ak^\alpha \quad (8)$$

$$\dot{k} = sAk^\alpha - (n + \delta)k \quad (9)$$

## 2.2 Estado Estacionario

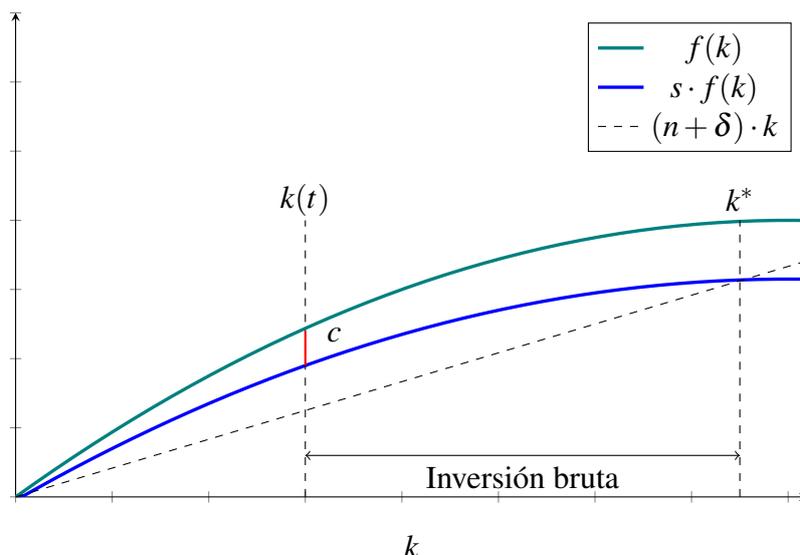
El concepto de estado estacionario se enfoca en explicar el comportamiento a largo plazo de las variables del modelo, donde las tasas de crecimiento son constantes e incluso pueden ser igual a cero. La resolución del estado estacionario conlleva encontrar el nivel de capital per cápita en el punto donde la curva ahorro per cápita iguala la recta depreciación y el crecimiento del capital per cápita es nulo ( $\dot{k} = 0$ ). Con ello, se halla el punto donde los niveles de capital, producción y consumo per cápita no crecen. En el modelo de Solow, este concepto es fundamental ya que demuestra que, a largo plazo, la economía converge hacia un punto estacionario, independientemente de las condiciones iniciales. En consecuencia, es posible entender el efecto que tienen las políticas económicas y los cambios en las tasas de ahorro, crecimiento poblacional y niveles tecnológicos sobre la economía en el largo plazo.

$$k^* = \left[ \frac{sA}{n + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (10)$$

$$y^* = A \left[ \frac{sA}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (11)$$

$$c^* = (1 - s)A \left[ \frac{sA}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (12)$$

Gráficamente, el modelo puede simplificarse de la siguiente manera:



**Figura 1: Modelo de Solow-Swan.**

La Figura 1 ilustra las tres curvas claves del modelo: La función de producción per cápita  $f(k)$ , el ahorro o inversión bruta  $s \cdot f(k)$  y la recta depreciación del capital  $(n + \delta) \cdot k$ . Juntas configuran la resolución visual del modelo. El punto de análisis  $k(t)$  denota el consumo per cápita del hogar como resultado de la proporción no-ahorrada. En cambio,  $k^*$  representa el estado estacionario del modelo donde se equiparán los niveles per cápita del ahorro y la depreciación del capital. Además, la distancia entre  $k(t)$  y  $k^*$  es un ejemplo del nivel de inversión bruta necesaria para llegar al estado estacionario si la economía se encontrase en un nivel de capital per cápita de  $k(t)$ . Elaboración propia basada en Barro and Sala-I-Martin (2003).

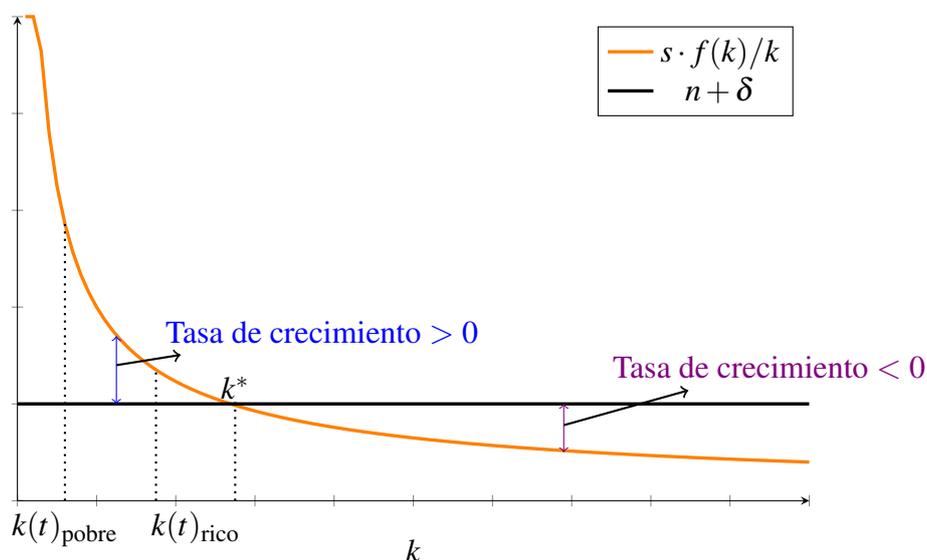
### 2.3 Dinámica del Modelo - Tasa de crecimiento de K

El análisis del modelo no se enfoca solamente en el estado estacionario sino también en la dinámica de transición. En este contexto, la dinámica de transición se refiere al proceso mediante el cual la economía se ajusta y converge hacia el estado estacionario  $k^*$ . Durante el proceso de ajuste en el modelo de Solow, la producción per cápita se dirige gradualmente hacia su nivel en el estado estacionario, lo que provoca cambios en la acumulación de capital y otros indicadores económicos. La transición de la economía y el ritmo de crecimiento del capital son determinados por la diferencia entre la curva de ahorro per cápita  $sAk^{\alpha-1}$  y la recta de depreciación  $(n + \delta)$ :

$$\gamma_k = sAk^{\alpha-1} - (n + \delta) \quad (13)$$

La dinámica de transición es fundamental para entender cómo las economías se ajustan

en respuesta a los cambios en las políticas económicas, las tasas de ahorro, y otros factores externos. Este análisis también es crucial para entender las diferencias en la renta per cápita entre diferentes países y cómo estas diferencias pueden disminuir a lo largo del tiempo bajo ciertas condiciones.



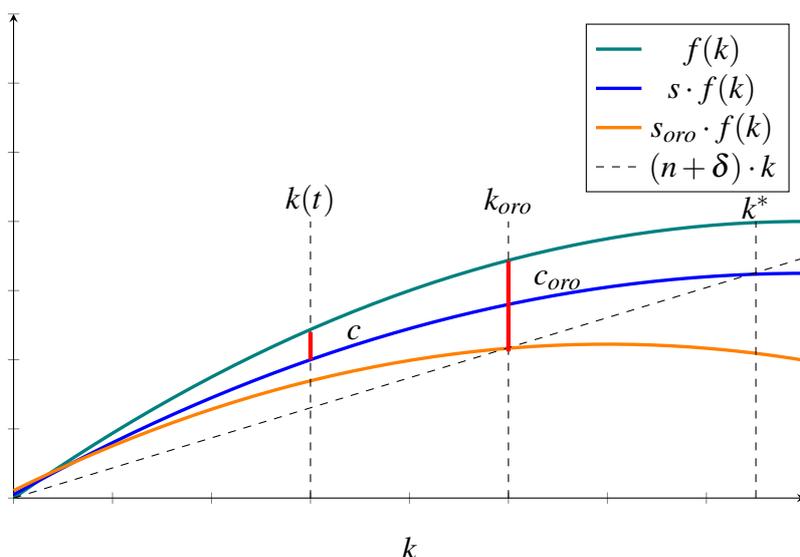
**Figura 2: Dinámica del Modelo.**

La Figura 2 muestra la dinámica del capital per cápita del modelo. La distancia vertical entre la curva del ahorro  $s \cdot f(k)/k$  y la recta depreciación del capital  $(n + \delta)$  traza el comportamiento de crecimiento del capital. Por encima de la recta depreciación, la economía invierte más capital de lo que se está depreciando, aumentando el *stock* de capital per cápita, viceversa, la inversión no es suficiente y el ritmo de crecimiento es negativo. A medida que se aproximan a  $k^*$ , el crecimiento tiende a 0, demostrando que el sistema tiene un equilibrio estable. Los puntos  $k(t)_{\text{pobre}}$  y  $k(t)_{\text{rico}}$  ilustran la comparativa entre dos países, donde el país pobre tiene un bajo nivel de inversión per cápita en contraste con uno rico. Ahora, si el país pobre optara por una política que aumenten dicha inversión, el rango de crecimiento económico es mayor al de un país rico, cuyo margen es reducido. No obstante, podrían existir diferenciaciones entre el tiempo que le llevaría a cada caso llegar al equilibrio de  $k^*$ . Elaboración propia basada en Barro and Sala-I-Martin (2003).

## 2.4 Regla de Oro

El concepto de la Regla de oro se refiere a la tasa de ahorro óptima que maximiza el consumo per cápita de los hogares en estado estacionario. Se define como “oro” pues hace referencia a la idea del equilibrio del consumo per cápita entre las generaciones presentes y futuras, inspirado en la cita bíblica “Trata a los demás como quisieras ser tratado”. En este punto, el nivel de

ahorro es lo suficiente elevado para invertir y equiparar los niveles de depreciación del capital y del crecimiento poblacional. Es crucial destacar que esta maximización se aplica solo al consumo en el estado estacionario, sin considerar el proceso de transición hacia ese estado. Por lo tanto, no necesariamente representa un óptimo de Pareto, dado que no asegura la eficiencia óptima en términos de bienestar a lo largo de todo el trayecto. Gráficamente, este concepto se evidencia en el punto en el cual la curva del consumo per cápita en el estado estacionario alcanza su punto máximo en relación con diversas tasas de ahorro posibles.



**Figura 3: Regla de Oro.**

La Figura 3 ilustra la Regla de Oro en el Modelo de Solow, donde el nivel de capital  $k_{oro}$  maximiza el consumo per cápita  $c_{oro}$  en estado estacionario. Se observa que  $k_{oro}$  se sitúa en el punto de corte entre la curva de ahorro  $s_{oro}$  y la tasa de depreciación más la tasa de crecimiento de la población  $(n + \delta)$ . A diferencia del nivel de capital  $k^*$ , que corresponde al estado estacionario sin maximización del consumo. Las rectas del consumo indican que el consumo óptimo  $c_{oro}$  es superior al consumo asociado con  $k^*$ . Elaboración propia basada en Barro and Sala-I-Martin (2003).

Una vez hallado la tasa de ahorro óptima, las ecuaciones del modelo se las pueden expe-

sar matemáticamente como:

$$k_{oro}^{**} = \left[ \frac{\alpha A}{n + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (14)$$

$$y_{oro}^{**} = A \left[ \frac{\alpha A}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (15)$$

$$c_{oro}^{**} = (1 - s) A \left[ \frac{\alpha A}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (16)$$

Fíjese que ahora la tasa de ahorro de la economía es  $s^* = \alpha$ . Esta relación entre la tasa de ahorro *oro* y la participación del capital implica que, para llegar al punto de maximización del consumo, es necesario reinvertir en capital una proporción del ingreso que es exactamente igual a la contribución del capital al ingreso total de la economía. Por fuera de este nivel de ahorro, la economía se encuentra en trayectorias ineficientes en términos de maximización del consumo per cápita.

## 2.5 El rol de la Tecnología en el modelo

El factor tecnológico  $A$  juega un rol crucial en la dinámica del modelo y en el estudio del crecimiento económico. Resulta fundamental entender como este parámetro influye en la productividad de una economía y como aprovecha, de forma eficiente, la restricción de recursos que tiene. Asimismo, la tecnología puede dar pasos a transiciones entre economías poco productivas y altamente productivas. El análisis de esta variable aborda la cuestión de por qué algunos países se desarrollan más rápido que otros, además de la importancia que tiene la inversión en factores como la investigación y desarrollo ( $I + D$ ) y como estos tienen impacto sobre la estructura de la economía.

La tecnología puede ser tratada de dos maneras distintas: como un factor exógeno o endógeno, una distinción que genera un amplio debate debido a que cada enfoque conlleva análisis y resultados diferentes. En el modelo exógeno, el valor de la tecnología es determinado por factores externos, fuera del control de los agentes económicos, y afecta directamente la tasa de crecimiento. En contraste, el enfoque endógeno sostiene que las decisiones económicas internas pueden influir en el nivel tecnológico, permitiendo un mayor control y adaptabilidad

por parte de los agentes económicos en la determinación de su trayectoria de crecimiento.

## 2.6 Tecnología estocástica

El modelo parte de la premisa de que el parámetro tecnológico es exógeno y crece a una tasa constante; además, actúa como un multiplicador de la eficacia de los factores capital y trabajo. Por consiguiente, cualquier mejora o aumento de los niveles tecnológicos conlleva un aumento de la producción sin la necesidad de incrementar la cantidad de capital o trabajo. Matemáticamente se lo puede representar de la siguiente forma:

$$A(t) = A_0 e^{gt} \quad (17)$$

Donde,  $A_0$  representa el nivel inicial de tecnología, mientras que  $g$  denota la tasa constante de crecimiento tecnológico. Es importante destacar que los cambios en los valores de la tecnología dependen exclusivamente de esta tasa de crecimiento. Por lo tanto, el parámetro tecnológico no es manipulable ni susceptible a intervenciones directas de políticas económicas por parte de los tomadores de decisiones. Esta característica subraya una naturaleza intrínseca y autónoma del progreso tecnológico en el modelo.

### 2.6.1 Incertidumbre

La introducción de incertidumbre en el modelo implica transformar al parámetro  $A$  en un proceso estocástico. Una práctica habitual para hacerlo es utilizando un proceso auto regresivo de primer orden  $AR(1)$  sobre su logaritmo. Esta representación dinámica implica que el nivel actual de la tecnología tiene dependencia sobre el rezago anterior, además de un término de error. La ecuación toma la siguiente forma:

$$\log A(t) = \phi \log A(t-1) + \varepsilon(t) \quad (18)$$

En este caso, el término  $\phi$  modela el coeficiente autor-regresivo de la ecuación. Esto implica que  $\phi$  cuantifica la influencia del valor rezagado de un período anterior sobre el período

actual, ilustrando así la persistencia temporal sobre la tecnología. Por ejemplo, valores de  $\phi$  cercanos a 1 indican que la tecnología en el periodo anterior es un buen predictor de la tecnología de hoy. Además,  $\varepsilon(t)$  representa el término de error en el modelo. En este contexto, consideramos que estos errores son *shocks* aleatorios que se distribuyen de manera independiente e idéntica, con una media de cero y una varianza constante, siguiendo una distribución normal, específicamente  $\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$ . Estos *shocks* aleatorios introducen la incertidumbre al provocar que la predicción del nivel actual de la tecnología sea impredecible, incluso si se conoce el nivel anterior. Esta suposición es crucial para la interpretación de los resultados y la inferencia estadística en el análisis.

Esto conlleva implicaciones significativas sobre el análisis del modelo de Solow. En primera instancia, la dinámica del capital per cápita  $k$  cambia pues ahora los niveles del capital dependen de los *shocks* aleatorios sobre la tecnología y la magnitud de estos. De igual forma, no es posible tener un solo estado estacionario, más bien, se da paso a una distribución de posibles estados estacionarios. Con respecto a la regla de oro, la tasa de ahorro óptima ahora debe considerar la incertidumbre en los valores tecnológicos del futuro.

### 3 Dificultades Pedagógicas

Siendo este un modelo multidisciplinario, aún forma parte de la enseñanza básica en niveles de pregrado, incluso en la actualidad y tal como lo menciona Chu (2018) sigue siendo relevante para el ámbito de la teoría y la investigación (Google Académico: 1420 varios artículos publicados que mencionan el modelo desde 2017). Es por ello que, autores como Acemoglu (2013) afirman que: “los profesores de economía deberían dedicar más tiempo a enseñar sobre crecimiento económico y desarrollo a nivel de pregrado porque el tema es de interés para los estudiantes, es menos abstracto que otros temas macroeconómicos y es el centro de una interesante investigación en economía”; Por su parte, Stein (2007) indica que, a pesar de las incógnitas que se generen en los estudiantes de pregrado, el modelo de Solow es el pilar inicial del aprendizaje sobre la teoría del crecimiento económico.

Pese a la relevancia demostrada del modelo, Taylor (2000) expresó escepticismo con re-

specto a la claridad con la que los estudiantes pueden entender la noción de crecimiento en estado estacionario. Además, DeLong (2002) indica que la mayoría sus estudiantes de Berkeley tienen obstáculos para comprender la esencia de las unidades de trabajo eficientes. Esto sugiere un desafío general en el enfoque pedagógico de estos conceptos económicos. El pensamiento dinámico no es fácil de digerir en niveles de pregrado, incluso el pensamiento matemático abstracto puede conllevar angustia y al desinterés por parte de los alumnos (Brown and Coles, 2007).

Bajo este contexto, se enfatiza la necesidad de nuevas metodologías y herramientas de enseñanza que permitan sobrellevar estas barreras y que los estudiantes puedan comprender y conectar no solo con el modelo de Solow, sino con la comprensión de la teoría económica en general. Si bien parte de las dificultades del modelo es la resolución matemática, el centro del modelo es la intuición económica. La enseñanza y el aprendizaje son dos elementos esenciales de cualquier sistema educativo, pese a ello, a nivel de pregrado, el modelo pedagógico presenta una serie de dificultades que perjudica el aprendizaje y fracasa en su intento de generar un entorno propicio para el desarrollo integral de los alumnos.

### **3.1 Matemáticas Abstractas**

Los dos pilares fundamentales de un programa de Economía a nivel de pregrado son la Microeconomía y la Macroeconomía. Las demás áreas de estudio se enfocan en expandir y profundizar el conocimiento adquirido en estos dos campos esenciales, complementándose con otras materias que enriquecen el programa académico. Las teorías más conservadoras de la economía que forman parte de la enseñanza económica tienen bases fuertemente relacionadas con elementos matemáticos, es por ello que se justifica la presencia de materias como: cálculo, álgebra lineal, probabilidad, estadística, etc. Según Richard Ruggles (como se cita en Pulido San Román et al. (2002)), profesor en la Universidad de Yale, el análisis económico resulta meramente especulativo y poco fundamentado si este no incluye herramientas y métodos estadísticos como la economía matemática y la econometría.

No obstante, cada vez es más frecuente el desinterés y el poco optimismo por parte de los

estudiantes al momento de cursar materias relacionadas con matemáticas. Esto se puede deber a diferentes circunstancias que surgen a lo largo de la vida universitaria: primera, conocimientos matemáticos poco sólidos, pues parte de los estudiantes en los primeros años de universidad reflejan tener bases débiles, segunda, no existe un verdadero proceso de nivelación académica que permita a los estudiantes cubrir estas carencias de conocimiento, tercera, el tiempo transcurrido entre las primeras materias impartidas y las materias avanzadas, esto puede incurrir en problemas de memoria que perjudiquen la práctica de conocimientos adquiridos a lo largo del programa. Todo ello representa un reto para la docencia, que debe rediseñar sus metodologías de enseñanza para tratar de mitigar la deserción de los estudiantes, especialmente durante los primeros años de la carrera.

### **3.2 Conexión con lo Empírico**

Otro de los grandes retos que se tiene a nivel de pregrado es cerrar la brecha que se genera en el aprendizaje de los alumnos entre los conceptos teóricos impartidos y la conexión con el mundo real. Para los estudiantes resulta frustrante y desmotivador el no entender por qué se enseñan muchas de las teorías económicas si estas no se relacionan con problemas económicos del mundo real o no están vinculadas a ellos. En un curso típico de economía, los estudiantes reciben la impresión incorrecta de que el proceso de realizar análisis económicos del mundo real es sencillo y fluido. No obstante, este enfoque no transmite el complejo análisis que conlleva el estudio de los fenómenos económico, ni tampoco su intrincada interacción con múltiples variables y factores contextuales. Se requiere de un modelo educativo más complejo para obtener un conocimiento holístico sobre la materia (Gullason, 2006).

A pesar de ello, el modelo educativo predominante, tanto a niveles pregrado como posgrado, se limita en su mayoría a un enfoque de aprendizaje pasivo en donde el rol del estudiante se restringe en escuchar la lección del docente y a tomar apuntes. Esto resulta ineficiente para ambas partes, pues la atención del inicio de la charla tiende a perderse en el muy corto tiempo y atraer de nuevo esa “atención” resulta ser un reto pedagógico complejo. Es por ello que se proponen alternativas para alentar el desarrollo del pensamiento económico, cuyo enfoque se

centra más en la participación activa (en todo sentido) de los estudiantes. Cuanto antes los docentes empiecen a impartir teoría económica con metodologías más activas que pasivas, más eficiente y enriquecedor será el material aprendido por parte de los estudiantes, y les resultará más fácil hacer la conexión entre lo empírico y lo teórico.

Estos procesos de aprendizaje activo implican: fomentar espacios de diálogo y debate económico, demostraciones teóricas a través de casos prácticos ligados a situaciones del mundo real, promover apuntes creativos como mapas conceptuales y mentales, uso de herramientas digitales y metodologías cuantitativas, todo ello con el fin de generar un entorno que permita y motive a los alumnos a cultivar un pensamiento crítico y autónomo. De esta forma, se logra que los alumnos ganen confianza, tanto en la enseñanza recibida, como en su capacidad de razonamiento y pensamiento crítico. Además de eso, contribuye a superar la barrera de la desmotivación y la falta de entusiasmo entre los estudiantes, y, como resultado, se forma a economistas de mayor calidad (Ray, 2018).

### **3.3 Visualización**

Otra de las habilidades de gran importancia para el análisis económico es la generación e interpretación efectiva de gráficos y diagramas visuales. Esto debido a su relación con la inferencia con datos, detección de tendencias, crítica y uso de datos para respaldar afirmaciones o hallazgos y sacar conclusiones significativas. A pesar de ello, se requieren ciertos aspectos previos antes de poder dominar esta habilidad que podría resultar frustrante, como, por ejemplo, el nivel de complejidad de los gráficos y que tan preparado se encuentran los alumnos para desempeñar esta tarea. El problema se agrava cuando los estudiantes reciben poca o nula participación activa en la generación de gráficos durante el pregrado, pues en la educación científica es primordial las actividades como: recopilación, visualización e interpretación de datos.

Algunas de las actividades que los docentes pueden incluir en el aula para mejorar la educación gráfica entre los alumnos son: incentivar el análisis de datos, promover el desarrollo de temas utilizando infografías, incentivar presentaciones que incluyan gráficos utilizando datos actuales (Ej.: PIB, desempleo, inflación, etc.), etc. Esto permitirá a los estudiantes involucrarse

efectivamente en todo el proceso que requiere la interpretación de un gráfico, desde la investigación y recolección de datos hasta el análisis de los gráficos como tal.

Poder analizar y evaluar visualmente la información presentada en diversos contextos es un proceso gradual que requiere de un aprendizaje continuo y que va de la mano con el desarrollo de habilidades cuantitativas. Esto resulta de gran relevancia para materias que requieren de análisis exhaustivo como Microeconomía y Macroeconomía, donde la interpretación gráfica es primordial para el análisis de las teorías económicas. Sin estas habilidades desarrolladas, los estudiantes tendrán dificultades para aplicar los conceptos económicos abstractos, limitando su capacidad de interpretar datos de forma efectiva (Johari et al., 2018).

## **4 Propuesta Pedagógica – Valor Innovador**

Los obstáculos puntuados anteriormente en relación con la enseñanza de teoría económica y el modelo de Solow a nivel de pregrado, empujan hacia una solución novedosa e interactiva que no sea únicamente para simplificar el aprendizaje, sino también para profundizar la comprensión de la dinámica del modelo, potenciando las habilidades y destrezas de los estudiantes. Los métodos tradicionales carecen de este tipo de enfoques y muy difícilmente serán capaces de cerrar estas brechas, resultando en la necesidad de nuevas herramientas que sean más interactivas y visualmente atractivas (García Callejas, 2012).

### **4.1 Propuesta**

El objetivo general de este trabajo es proponer una herramienta pedagógica enfocada en la visualización interactiva y destacar su potencial uso en la enseñanza del modelo de Solow a nivel de pregrado. Para ello se plantea el desarrollo y el empleo de una herramienta de programación interactiva codificada en el lenguaje de Julia que permita modificar en vivo los parámetros del modelo de Solow. La herramienta consta de 2 ventanas interactivas, una para la resolución teórica de los gráficos del modelo, y otra para la simulación del modelo. A través de *widgets* los estudiantes podrían ajustar los parámetros y probar varios puntos de partida, visualizando así el impacto sobre los gráficos teóricos y sobre la simulación del modelo.

El objetivo de la primera ventana se centra en facilitar la comprensión de las trayectorias de las curvas del modelo y como cada parámetro tiene un impacto en diferente magnitud sobre todo el sistema del modelo. En cambio, el enfoque de la segunda ventana radica en como un conjunto de parámetros iniciales afecta a la simulación del modelo durante un periodo de tiempo  $T$ . Con ello, los alumnos pueden generar diferentes simulaciones que responda a diferentes escenarios bajo contextos del mundo real. Además de aquello, pueden optar por una simulación estocástica a través de dos tipos de *shock*, temporal o permanente. Los métodos de enseñanza efectivos en economía deben abordar la naturaleza de esta ciencia, permitiendo entender las relaciones entre los conceptos, variables y modelos (Zeytoon Nejad Moosavian, 2015).

## 4.2 Herramientas a Utilizar

**Julia Programming Language:** Iniciado en 2009, Julia es un lenguaje de programación veloz de código abierto con más de 1000 colaboradores activos y que ofrece diversas características de otros lenguajes de programación, algunas más complejas como funciones avanzadas de Python y Matlab y otras más básicas como características de C++ y Fortran. Además, al ser un lenguaje natural, se acorta la curva de aprendizaje que toma en dominar el programa y se adapta perfectamente a las necesidades de este trabajo (Caraiani, 2018).

**Visual Studio Code:** Visual Studio Code (VS Code) es un editor de código abierto multiplataforma creado por Microsoft para Windows, Linux y macOS. Esta herramienta facilita la edición y organización del código, ya que permite una organización de proyectos basada en carpetas, además permite la escritura de aplicaciones web, móviles y en plataformas en la nube, lo cual permite poseer un entorno de desarrollo centrado en el código muy poderoso (Del Sole and Sole, 2019).

**Bibliotecas:** Para este trabajo se utilizaron las siguientes bibliotecas:

- \* **Plots:** este paquete contiene herramientas que permiten crear interfaces visuales y fue utilizado para generar todos los gráficos del modelo.
- \* **LaTeXStrings** este paquete permite la escritura de ecuaciones y cadenas de texto en el estilo de LaTeX, se lo utilizó como complemento de los gráficos.

- \* **Random:** este paquete ofrece diferentes generadores de números aleatorios (RNG), fue utilizado para generar semillas aleatorias y condicionar la simulación del modelo.
- \* **Blink:** este paquete permite generar ventanas locales y almacenar contenido HTML, permitiendo conectar a Julia con la web local, además permite crear aplicativos de escritorio. Fue utilizada para generar las ventanas interactivas.
- \* **Interact:** este paquete brinda una variedad de herramientas para crear aplicaciones GUI (interfaz gráfica de usuario) basadas en el diseño de páginas web. Utiliza tres recursos principales. Los Observables son referencias conectadas a otras referencias, lo que significa que almacenan información de otro elemento y cambian cuando el otro elemento cambia. Los *Widgets* son elementos gráficos conectados a parámetros que permiten modificar el valor de estos parámetros, ya sea mediante deslizadores, cajas de texto o botones. La sección de Diseño es donde se combinan los dos elementos anteriores para dar forma a la aplicación. Este paquete fue utilizado para la primera ventana interactiva para la creación de *widgets* en forma de deslizadores que alteran los valores de los parámetros del modelo.
- \* **Gtk:** Similar al paquete Interact, este te permite crear múltiples tipos de aplicativos, pero es un paquete que ofrece una mayor variedad de herramientas y fue diseñado con la capacidad de utilizarse en múltiples lenguas de programación. Se utilizó para la segunda ventana interactiva debido a que los *widgets* que ofrece se ajustan mejor a la funcionalidad interactiva en la simulación de modelos.

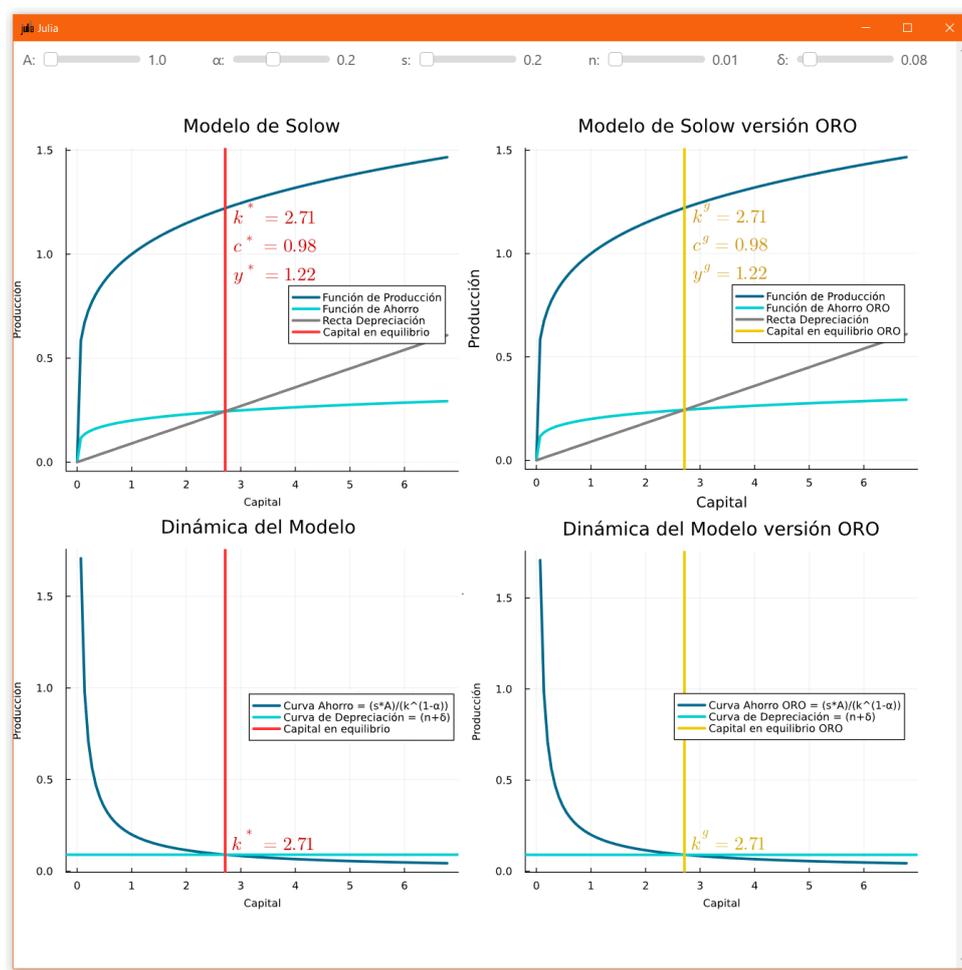
## 5 Ventanas Interactivas

En esta sección, se presenta y discute tanto el resultado visual de cada ventana interactiva como la experiencia del usuario con la herramienta, destacando su valor como recurso pedagógico. Para el docente, esta herramienta se revela especialmente útil, ya que su integración en tareas o proyectos fomenta no solo el uso práctico sino también la interpretación crítica de los resultados. Esto facilita reflexiones y discusiones sobre el impacto de cada parámetro en el modelo,

brindando a los alumnos una experiencia de aprendizaje más activa y enriquecedora que los métodos tradicionales.

En calidad de ejemplo, se llevará a cabo una comparativa entre dos escenarios que parten de un punto neutro, cuyos parámetros han sido respaldados por fuentes oficiales e investigaciones empíricas:<sup>3</sup>

## 5.1 Resultado Interfaz Interactiva 1

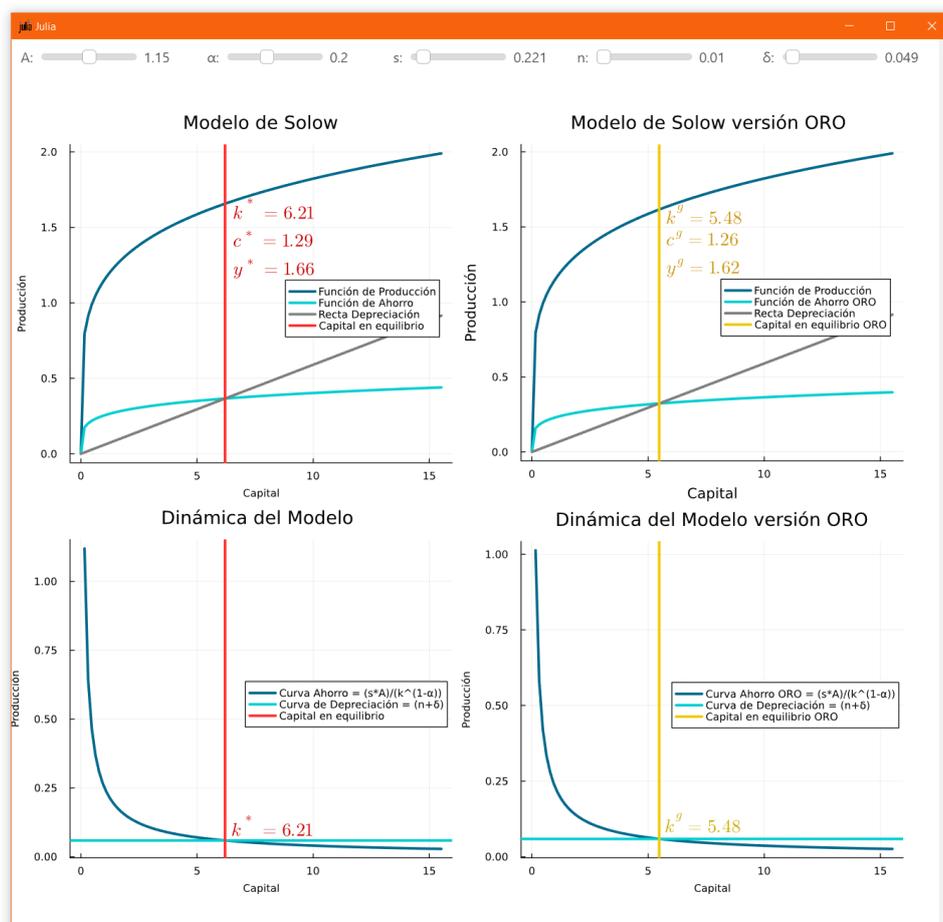


**Figura 4: Ventana Interactiva 1.**

<sup>3</sup>Ver Anexo B, Párrafos 3 y 4 para más detalles.

La Figura ilustra los resultados de la primera interfaz interactiva para el escenario neutro. Esta interfaz diseñada integra de manera eficiente los deslizadores correspondientes a cada parámetro y los gráficos representativos del modelo en sus dos resoluciones. Esta configuración hace que la interfaz no solo sea sencilla, sino también extremadamente práctica para el usuario. Facilita el ajuste preciso de los parámetros, lo que a su vez provoca movimientos correspondientes en las curvas del modelo, permitiendo una visualización dinámica e interactiva de los cambios. Además, en esta misma interfaz se muestran de forma clara y accesible los valores relacionados con el capital, el consumo y la producción en el estado estacionario.

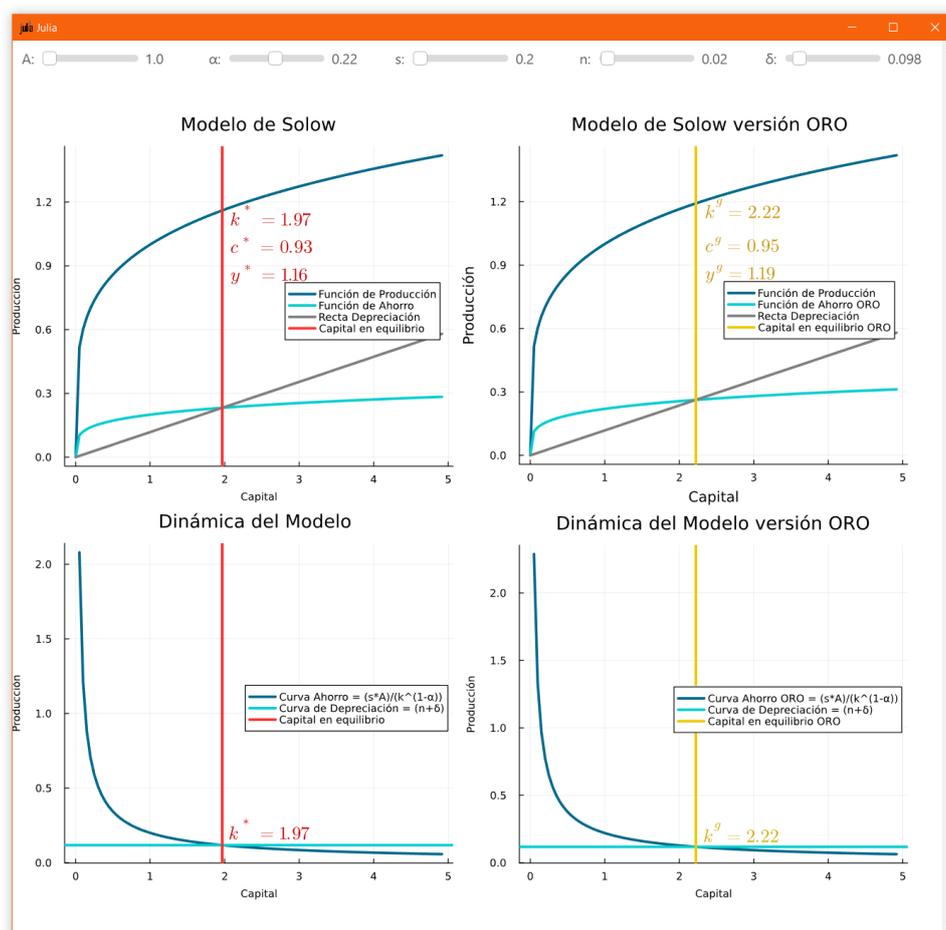
En el primer escenario, se situará el caso de una economía cuyo ahorro y progreso tecnológico son respectivamente 10% y 15% mayor al escenario neutro, sumado a que el capital se deprecia a menor ritmo (5%) ver-sus una economía cuyo capital tiene 10% más de participación en la producción, pero se deprecia un 25% más, además, se duplica la tasa de crecimiento poblacional.



**Figura 5: 1<sup>ra</sup> Comparativa - Escenario 1.**

La Figura muestra los resultados de la interfaz interactiva para el escenario 1.

Los resultados del primer escenario demuestran tener un efecto positivo sobre el modelo. El aumento de ahorro permite que el capital se acumule a un ritmo más rápido, además, un progreso tecnológico mayor trae consigo un aumento en la productividad de la economía. Esto, sumado a una menor tasa de depreciación del capital, llevan al aumento de la producción per cápita en estado estacionario y de la disponibilidad de bienes y servicios por persona. Nótese además como, en su versión oro, los niveles estacionarios del consumo y la producción son muy similares a la versión estándar, incluso con un menor nivel de capital. El aumento en las tasas de capital, consumo y producción por trabajador son indicadores que se asocian a un mayor nivel, bienestar económico y desarrollo de la economía y demuestran la tesis de Solow de como el uso de los recursos disponibles tiene su impacto en el rendimiento económico en el largo plazo.



**Figura 6: 1<sup>ra</sup> Comparativa - Escenario 2.**

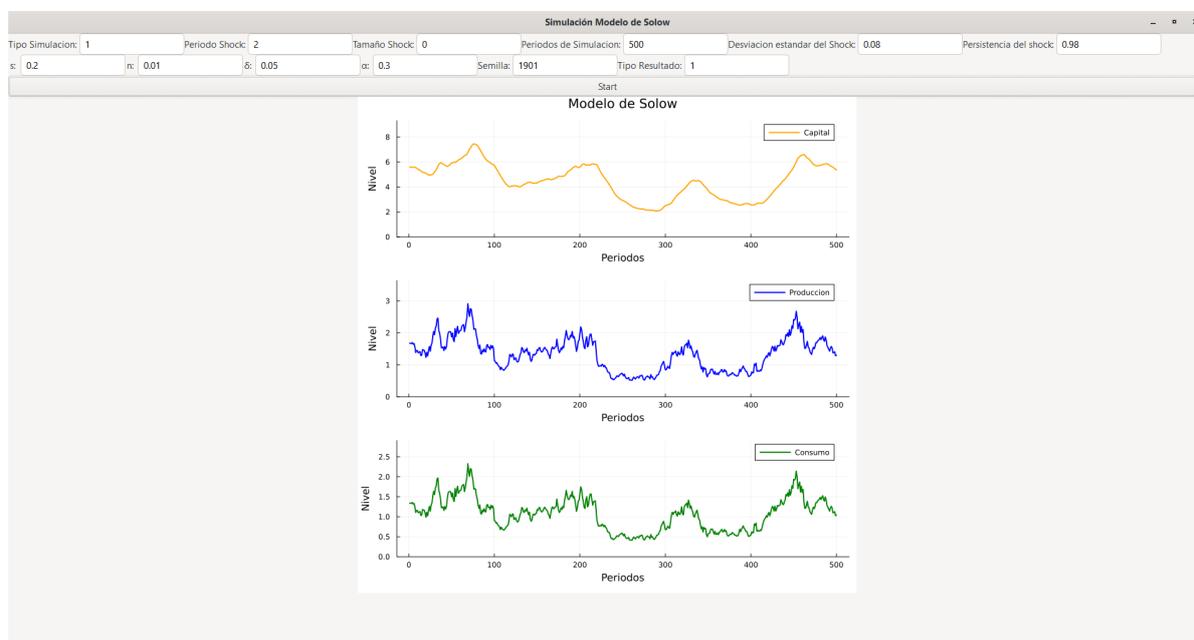
La Figura muestra los resultados de la interfaz interactiva para el escenario 2.

De manera opuesta, el segundo caso ilustra que incluso cuando existe una mayor par-

ticipación del capital en la producción de la economía, la ausencia de avances tecnológicos, sumado a una mayor depreciación del capital, resulta en una economía incapaz de capitalizar este aumento en la contribución del capital, a su vez que los niveles de capital son insuficientes para cubrir el aumento de trabajadores en el modelo. En consecuencia, la economía sufre un deterioro económico visible en los niveles de sus parámetros. Esto subraya la importancia no solo de centrarse en ser más óptimos con la participación del capital, sino también de invertir en tecnologías que permitan mayores niveles de producción, aún más si el capital se deprecia a mayor ritmo que el estándar.

## 5.2 Resultado Interfaz Interactiva 2

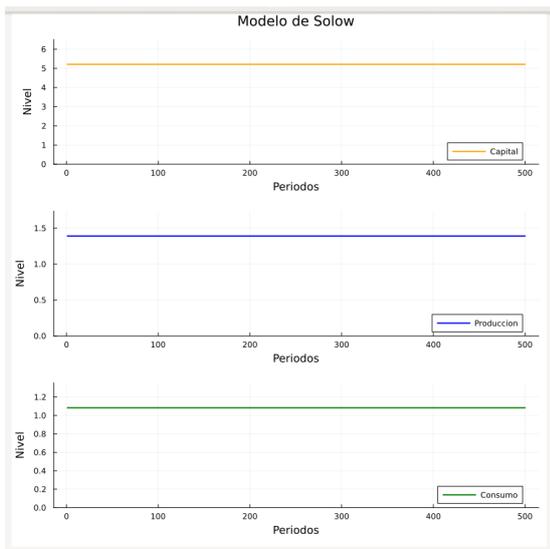
Subsiguientemente, se puede observar la segunda ventana interactiva donde se simula y gráfica las trayectorias de las funciones del modelo dentro de un rango de tiempo  $T$  escogido por el usuario:



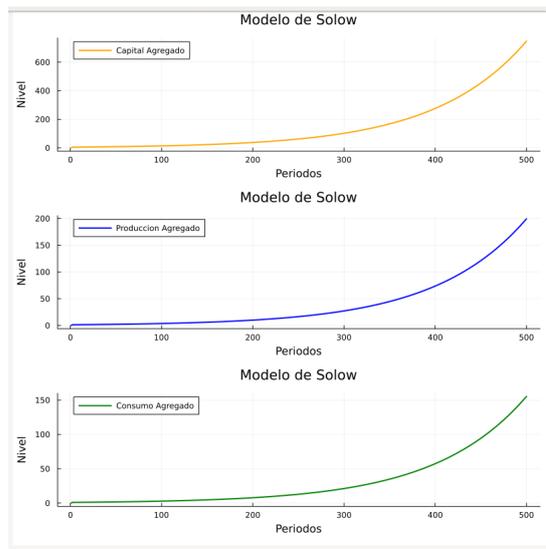
**Figura 7: Ventana Interactiva 2.**

La Figura ilustra los resultados de la segunda interfaz interactiva para el escenario neutro. La funcionalidad de esta interfaz es distinta a la primera por diversos aspectos: En primer lugar, permite escoger el tipo de simulación que el alumno desea realizar; una simulación estocástica representada por "1" con múltiples *shocks*, con un *shock* temporal representada por "2" y con un *shock* permanente que sería la "3". Si el tipo de simulación recae en 2 o 3, el usuario puede escoger el periodo de inicio y el tamaño del *shock*, sea este positivo o negativo. En segundo lugar, posibilita la elección del tamaño de simulación que se desea realizar. Tercero, es posible modificar elementos que componen al *shock*, como lo son el peso y la duración del efecto durante la simulación. Asimismo, la combinación de  $\sigma = 0$  y  $\rho = 0$  resulta en la versión determinista del modelo. Cuarto, viabiliza la posibilidad de controlar la aleatoriedad reproducible y que los alumnos puedan obtener los mismos gráficos utilizando una semilla en común. Por último, ofrece la opción de visualizar los resultados en sus dos formas, per cápita, cuya etiqueta es la "1" o en agregado, representada por "2".

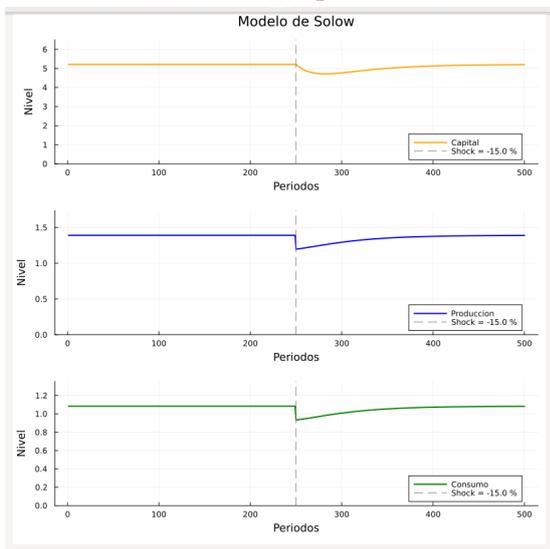
De manera análoga a la primera comparativa, esta ventana permite realizar múltiples análisis económicos sobre distintas combinaciones de parámetros; sin embargo, y dado el abanico de herramientas disponibles, es posible personalizar aún más cada escenario. Tomando como referencia a los ejemplos anteriormente construidos: ¿Qué pasaría sobre cada escenario si ocurriese: un *shock* temporal de -15% sobre la tecnología o un *shock* permanente del 1%? ¿Cuál de los escenarios tendrá mayor afectación sobre estos eventos? Para responder dichas preguntas, es posible simular los escenarios, parametrizar los *shocks* y obtener los resultados, tanto en per cápita como en agregado.



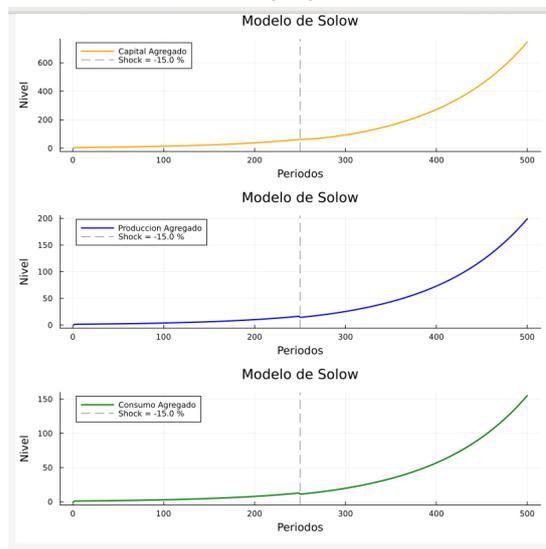
(a) Per Cápita



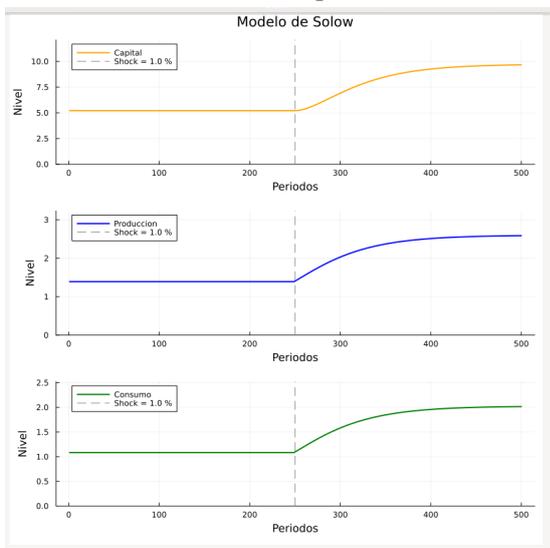
(b) Agregado



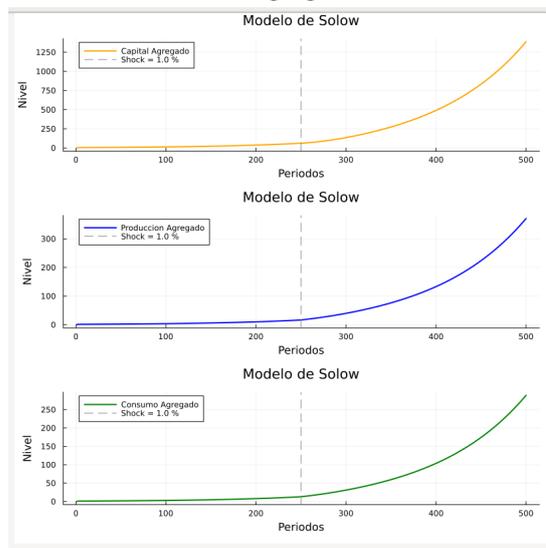
(c) Per Cápita



(d) Agregado



(e) Per Cápita

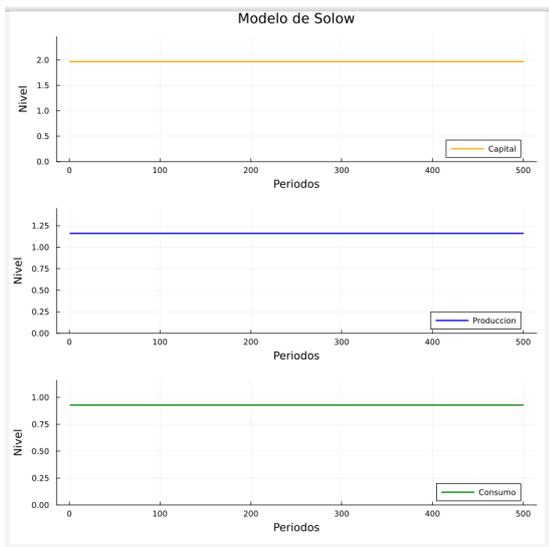


(f) Agregado

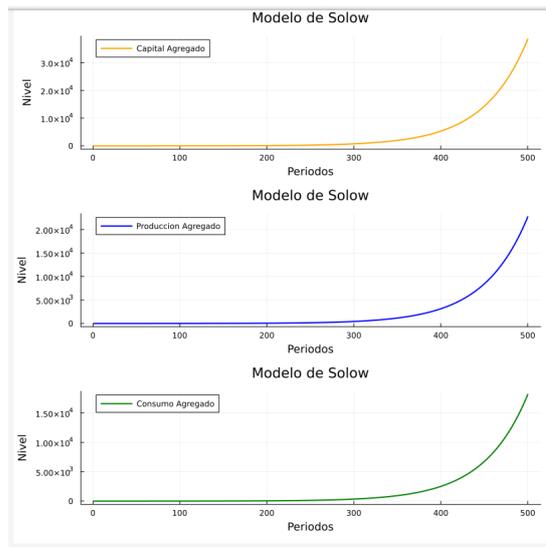
Figura 8: Simulación Escenario 1.

El panel esta compuesto por los resultados de la simulación del escenario 1. Las imágenes (a) y (b) exhiben la simulación determinista del modelo; (c) y (d) la estocástica con *shock* temporal; y (e) y (f) con *shock* permanentes..

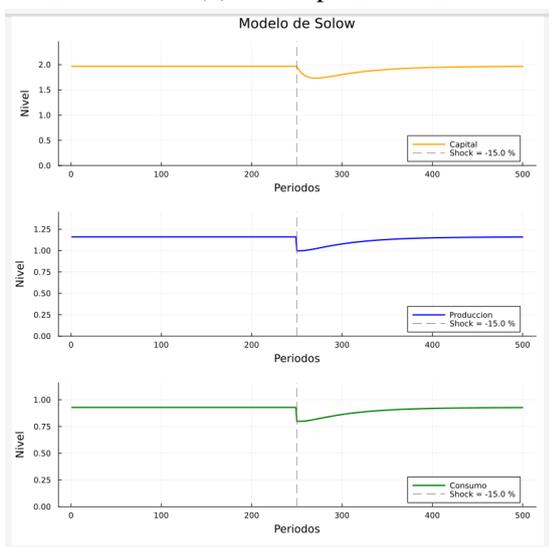
En lo que concierne al escenario 1, la simulación determinista del modelo muestra las trayectorias de las variables sin presencia de perturbaciones y que coinciden con el nivel de estado estacionario. Ante la introducción de un *shock* temporal, las trayectorias per cápita sufren una perturbación que arroja sus niveles por fuera del estacionario, pero la economía vuelve a su senda estacionaria aproximadamente en el periodo 400. En contraste, el *shock* permanente produce un cambio estructural en el modelo, alterando todos los valores per cápita y casi duplicando los niveles del modelo en el agregado.



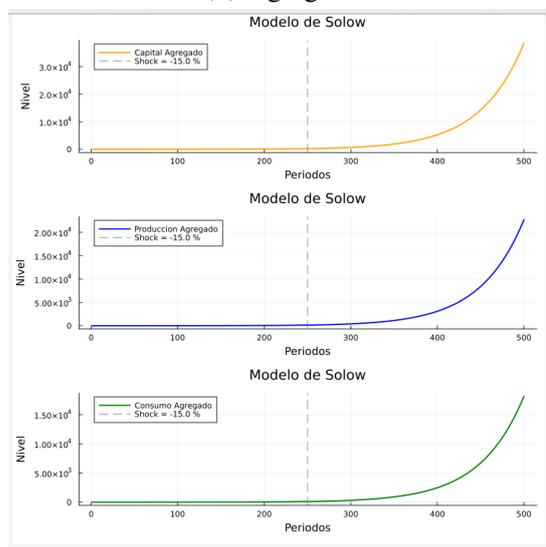
(a) Per Cápita



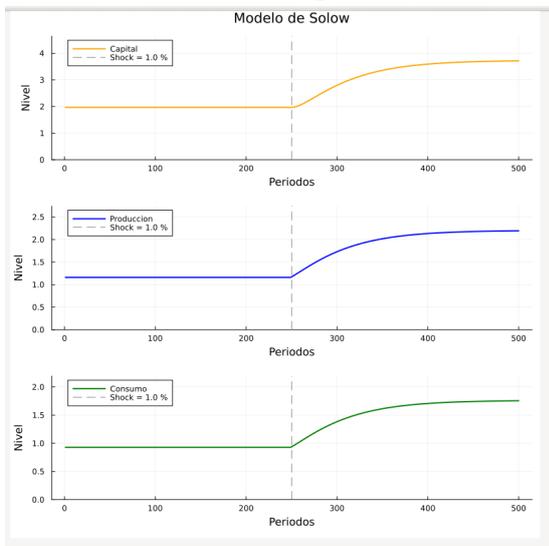
(b) Agregado



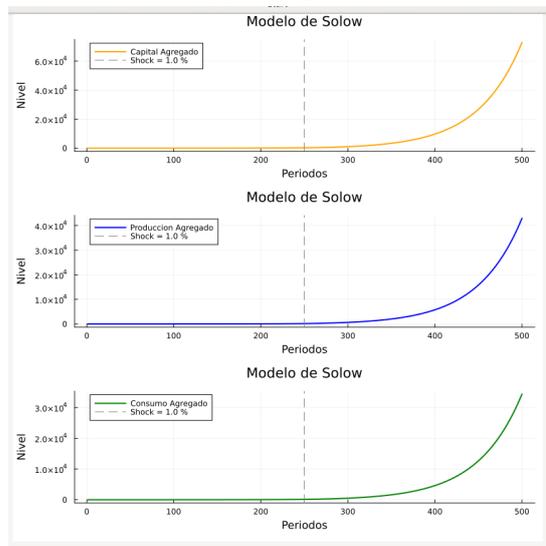
(c) Per Cápita



(d) Agregado



(e) Per Cápita



(f) Agregado

Figura 9: Simulación Escenario 2.

Este panel muestra los resultados de la simulación para el escenario 2 siguiendo la misma organización gráfica de la Figura 8.

Similar al primer ejemplo, la simulación determinista se alinea a los niveles estacionarios del modelo. A pesar de ello, se necesita de un periodo más largo de simulación para que la economía se recupere de los efectos del *shock* temporal y, a la postre, regresar a la senda de equilibrio estacionario. En sentido contrario, la influencia del *shock* permanente es significativamente mayor que la observada en el primer ejemplo, duplicando los niveles de las variables del modelo. Este resultado refuerza a la hipótesis inicial presentada en la primera ventana interactiva.

Estos ejemplos ilustran cómo esta herramienta complementaria puede ser implementada para enriquecer el análisis en el modelo de Solow, destacando la replicación de casos y situaciones empíricas. No obstante, el docente puede enriquecer aun más la enseñanza del modelo incorporando la herramienta de diversas maneras. Por ejemplo, se pueden diseñar preguntas para exámenes que requieran su utilización, organizar foros en clase para debatir sobre diferentes políticas (modificaciones en los parámetros) y su impacto a largo plazo en la economía, proponer proyectos que busquen ampliar o mejorar la herramienta, o pedir a los alumnos que desarrollen casos de estudio basados en situaciones históricas. Esto involucraría ilustrar los eventos ocurridos, analizar la dimensionalidad de los *shocks* económicos, evaluar su impacto en la economía seleccionada y finalmente, presentar los resultados junto con simulaciones pertinentes para el caso en cuestión. Esto permite una comprensión más profunda y aplicada del modelo, adaptándolo a diferentes contextos y realidades, lo cual es crucial para los estudiantes que buscan entender cómo las teorías económicas operan en el mundo real.

## 6 Conclusiones

En este estudio, se ha propuesto una herramienta pedagógica novedosa y efectiva para la enseñanza del Modelo de Solow en el nivel de pregrado. Mediante el uso de una aplicación interactiva desarrollada en Julia, los alumnos tienen la capacidad de estudiar y comprender los conceptos

clave de este modelo económico de crecimiento de una manera visual e interactiva. Se ha demostrado el potencial del aplicativo como herramienta complementaria y de uso fácil para la docencia, sobre todo de aquellos instructores que buscan mejorar la comprensión y el compromiso de los estudiantes en el aula.

La economía es una ciencia social que abarca una multitud de conceptos, variables, representaciones gráficas y modelos. Esta amplia variedad puede ser la causa de confusión y fatiga mental para muchos de los estudiantes de economía en pregrado. Adoptar nuevas técnicas y herramientas de enseñanza a las impartidas actualmente y que estas sean adecuadas y eficaces para esta ciencia específica implica abarcar todas estas dificultades especiales de la economía, con el fin de evitar posibles confusiones intelectuales que resulten en desmotivación y deserción estudiantil. La propuesta de valor se centra en ofrecer interfaces visuales que involucren activamente a los alumnos y que aborden estas dificultades en la enseñanza de economía en niveles intermedios-avanzados. Por tal razón, proveer de recursos innovadores puede resultar beneficioso para los estudiantes al ayudarles a evitar la potencial confusión mental que puede surgir debido a la gran cantidad y variedad de conceptos, terminología, variables, gráficos e investigaciones que conforman el campo del análisis económico.

La literatura existente sobre la enseñanza del modelo de Solow, y de los modelos económicos en general, contribuyen con soluciones generales específicas sobre los modelos como tal, pero recomendar “soluciones o métodos interactivos” persiste como una carencia poco discutida en el área de investigación de la enseñanza económica. En efecto, ese es el objetivo propuesto que este trabajo busca resolver, aportar con una solución sencilla, pero práctica, junto a un manual de replicación que puede ser ampliado a, no solo otros modelos, sino también a otras áreas de estudio relevantes en el campo de la ciencia como tal. A modo de ejemplo, este artículo presenta una solución aplicada al modelo de Solow que puede ser utilizada como recurso complementario en clases de macroeconomía a nivel intermedio. Esta propuesta incluye dos ventanas interactivas diseñadas mediante el uso de widgets conectados a los parámetros del modelo y que, en el primer caso, resuelvan los gráficos teóricos vistos en clase; en el segundo, simula el modelo y muestra las trayectorias de las variables, todo ello en un ambiente amigable y fácil de usar. Esta metodología busca que los estudiantes reflexionen y comprendan el impacto de los

parámetros en el modelo y los asocien a escenarios del mundo real, así, se busca resolver los atascos cognitivos que puede implicar la resolución del modelo de Solow en el aula.

A modo de conclusión, el rol de la docencia en pregrado, sin importar en qué cursos de economía sean impartidos, debe centrarse en ofrecer una sólida visión general de los conceptos económicos apoyada por el uso de todo tipo de herramientas pedagógicas. El desarrollo de una interfaz interactiva codificada en Julia para enseñar el Modelo de Solow a nivel de pregrado es una propuesta valiosa e innovadora que apoya a la comprensión de los conceptos económicos e incentiva a la participación activa de los estudiantes. En consecuencia al vacío que existe en la literatura sobre esta problemática, esta contribución puede resultar relevante para la educación económica.

## 7 Referencias

- Acemoglu, D. (2013). Economic growth and development in the undergraduate curriculum. *The Journal of Economic Education*, 44(2):169–177.
- Adugafforovna, A. M. et al. (2023). The use of interactive methods in teaching students of economics. *Web of Synergy: International Interdisciplinary Research Journal*, 2(5):237–241.
- Barro, R. and Sala-I-Martin, X. (2003). *Economic Growth, second edition*. Economic Growth. MIT Press.
- Brown, L. and Coles, A. (2007). Striving to ‘know what is to be done’: The role of the teacher. *D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou*, pages 1847–1855.
- Caraiani, P. (2018). *Introduction to Quantitative Macroeconomics Using Julia: From Basic to State-of-the-Art Computational Techniques*. Academic Press.
- Chu, A. C. (2018). From solow to romer: Teaching endogenous technological change in undergraduate economics. *International Review of Economics Education*, 27:10–15.
- de León Arias, A. (2010). Teaching the solow through the building of economic growth scenarios: An application to china. *Available at SSRN 1749699*.
- Del Sole, A. and Sole, D. (2019). *Visual Studio Code Distilled*. Springer.
- DeLong, J. B. (2002). Do we have a “new” macroeconomy? *Innovation Policy and the Economy*, 2:163–184.
- Elmslie, B. T. and Tebaldi, E. (2010). Teaching economic growth theory with data. *The Journal of Economic Education*, 41(2):110–124.
- García Callejas, D. (2012). En economía, el aprendizaje y la enseñanza activa e incluyente fomenta el bienestar. *Lecturas de Economía*, (76):05–11.
- Gullason, E. T. (2006). Additional strategies for effective teaching in the economics discipline. *Available at SSRN 903656*.
- Johari, N., Ali, D. F., Hassan, T., Mokhtar, M., Wahid, N. H. A., Noordin, M. K., and Ibrahim, N. H. (2018). Problems faced by students in learning microeconomics course. *The Turkish*

- Online Journal of Design Art and Communication*, 8:847–852.
- Lynn Trafton, T. (2019). Teaching students to extend economic models using in-class scaffolding assignments. *The Journal of Economic Education*, 50(3):230–241.
- Moosavian, S. A. Z. N. (2016). Teaching economics and providing visual” big pictures”. *arXiv preprint arXiv:1601.01771*.
- Olczak, M. (2014). Evaluating the impact of a web-based resource on student learning. *International Review of Economics Education*, 16:156–169.
- Paudel, R. K. (2020). Empirics of solow growth model in nepali economy. *Management Dynamics*, 23(1):125–136.
- Pulido San Román, A. et al. (2002). Posibilidades y limitaciones de las matemáticas en la economía. *Encuentros multidisciplinares*.
- Quiero Aguirre, F. (2021). Relaciones económicas sino-latinoamericanas: El rol de la inversión para el crecimiento económico en china y en américa latina, 1991–2019. *Interacción Sino-Iberoamericana/Sino-Iberoamerican Interaction*, 1(1):63–87.
- Ray, M. (2018). Teaching economics using ‘cases’—going beyond the ‘chalk-and-talk’ method. *International Review of Economics Education*, 27:1–9.
- Roach, T. (2014). Student perceptions toward flipped learning: New methods to increase interaction and active learning in economics. *International review of economics education*, 17:74–84.
- Schündeln, M. (2013). Appreciating depreciation: physical capital depreciation in a developing country. *Empirical Economics*, 44:1277–1290.
- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The quarterly journal of economics*, 70(1):65–94.
- Stein, S. H. (2007). A beginner’s guide to the solow model. *The Journal of Economic Education*, 38(2):187–193.
- Taylor, J. B. (2000). Teaching modern macroeconomics at the principles level. *American Economic Review*, 90(2):90–94.
- White, D. R. and Wagner, J. F. (2021). Getting your students to be dynamic: Lesson and web app about market dynamics in the long-run. *Journal of Economics Teaching*, 6(2):106–

122.

- Wickremeratne, N. (2020). Augmented solow growth model with human capital in the case of asia. *Journal of Economics & Management Policy (JEMP)*, 1 (1), pages 1–13.
- Wuthisatian, R. and Thanetsunthorn, N. (2019). Teaching macroeconomics with data: Materials for enhancing students' quantitative skills. *International Review of Economics Education*, 30:100151.
- Yerznkyan, B. H., Gataullin, T. M., and Gataullin, S. T. (2021). Solow models with linear labor function for industry and enterprise. *Montenegrin Journal of Economics*, 17(1):111–120.
- Zeytoon Nejad Moosavian, S. (2015). teaching economics and providing visual big pictures ‘. konferenz papier für die 14.“. In *Annual Cambridge Business & Economics Conference*. [www.gcbe.us/2015\\_CBEC/data/confcd.htm](http://www.gcbe.us/2015_CBEC/data/confcd.htm)(Zugegriffen am: 10.09. 2017).

## 8 Anexos

### A Demostraciones Matemáticas del Modelo de Solow

**Definition 1.** La fuerza laboral crece a un ritmo constante, denotado por  $\frac{\dot{L}}{L} = n$ .

*Proof.* Consideremos la tasa de crecimiento de la población dada por

$$\frac{\dot{L}}{L} = n, \quad (19)$$

donde  $\dot{L}$  denota la derivada de  $L$  con respecto al tiempo  $t$ , y  $n$  es la tasa de crecimiento constante.

De (19), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{L} &= nL, \\ \frac{dL}{dt} &= nL, \\ \frac{dL}{L} &= ndt, \\ \int \frac{dL}{L} &= \int ndt, \\ \ln|L| &= nt + c, \end{aligned}$$

donde  $c$  es una constante de integración. Exponenciando ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{\ln|L|} &= e^{nt+c}, \\ L &= e^c e^{nt}. \end{aligned}$$

Definiendo  $L_0 = e^c$ , concluimos que

$$L = L_0 e^{nt}.$$

□

**Definition 2.** El modelo de Solow, en su versión intensiva, se lo puede resumir en el siguiente

*sistema de ecuaciones:*

$$y = f(k) \quad (20)$$

$$c = (1 - s)f(k) \quad (21)$$

$$s = s \cdot f(k) \quad (22)$$

$$\dot{k} = sy - (n + \delta)k \quad (23)$$

*Donde la ecuación (23) expresa la ley de Acumulación de capital.*

*Proof.* Partimos de las ecuaciones que componen el modelo de Solow:

$$Y = C + I$$

$$S = I$$

$$S = sY$$

$$I = \dot{K} + \delta K$$

Se procede a realizar los reemplazos respectivos y a finalizar con la ecuación de la Ley de Acumulación de Capital.

$$sY = \dot{K} + \delta K$$

$$\dot{K} = sY + \delta K$$

Para encontrar la versión intensiva del modelo, dividimos para el parámetro de la fuerza laboral:

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{Y}{L} - \delta\frac{K}{L},$$

Expresamos cada variable en versión per cápita:

*Demostración de  $\delta \frac{K}{L}$ .* Considerando la relación entre capital total y capital per cápita, tenemos

$$\delta \frac{K}{L} = \delta k,$$

donde  $k = \frac{K}{L}$  representa el capital per cápita. □

*Demostración de  $s \frac{Y}{L}$ .* De forma similar, para el producto total y per cápita, obtenemos

$$s \frac{Y}{L} = sy,$$

donde  $y = \frac{Y}{L}$  es el producto per cápita. □

*Demostración de  $\frac{\dot{K}}{L}$ .* Para el cambio del capital per cápita en el tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{K}{L} \right) &= \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}, \\ \dot{k} &= \frac{\dot{K}}{L} - k \frac{\dot{L}}{L}, \\ &= \frac{\dot{K}}{L} - nk, \end{aligned}$$

donde  $\dot{k} = \frac{d}{dt}(k)$  y  $\dot{L} = nL$ . Finalmente, obtenemos

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk.$$

□

Con ello, obtenemos la ley de Acumulación del capital per cápita:

$$\begin{aligned} \dot{k} + nk &= sy - \delta k \\ \dot{k} &= sy - (n + \delta)k \end{aligned}$$

□

**Definition 3.** *La resolución del estado estacionario conlleva encontrar el nivel de capital per cápita en el punto donde la curva ahorro per cápita iguala la recta depreciación y el crecimiento*

del capital per cápita es nulo ( $\dot{k} = 0$ ). Se lo resume en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$k^* = \left[ \frac{sA}{n + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (24)$$

$$y^* = A \left[ \frac{sA}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (25)$$

$$c^* = (1 - s)A \left[ \frac{sA}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (26)$$

*Demostración de las condiciones del Estado Estacionario en el Modelo de Solow.* Para encontrar el estado estacionario, comenzamos con la ecuación de acumulación de capital per cápita:

$$\dot{k} = sAk^\alpha - (n + \delta)k$$

Para el estado estacionario,  $\dot{k} = 0$ , lo que nos lleva a la primera condición:

$$0 = sAk^{\alpha-1} - (n + \delta)$$

Luego, resolvemos para  $k^*$ :

$$k^* = \left( \frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

A continuación, calculamos la producción en equilibrio  $y^*$ :

$$y^* = A \left( \frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Finalmente, determinamos el consumo en equilibrio  $c^*$ :

$$c^* = (1 - s)y^* = (1 - s)A \left( \frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

□

**Definition 4.** La transición de la economía y el ritmo de crecimiento del capital son determinados por la diferencia entre la curva de ahorro per cápita  $sAk^{\alpha-1}$  y la recta de depreciación

$(n + \delta)$ :

$$\gamma k = sAk^{\alpha-1} - (n + \delta) \quad (27)$$

*Proof.* Comenzamos con la ecuación de cambio en el capital por trabajador en el modelo de Solow:

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n + \delta)k$$

Dividimos ambos lados de la ecuación por  $k$ :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sAk^{\alpha}}{k} - \frac{(n + \delta)k}{k}$$

Simplificando:

$$\gamma_k = sAk^{\alpha-1} - (n + \delta)$$

donde  $\gamma$  representa la tasa de crecimiento de  $k$  en el equilibrio de largo plazo. □

**Definition 5.** *El concepto de la Regla de oro se refiere a la tasa de ahorro óptima que maximiza el consumo per cápita de los hogares en estado estacionario. Una vez hallado la tasa de ahorro óptima, las ecuaciones del modelo se las pueden expresar matemáticamente como:*

$$k_{oro}^{**} = \left[ \frac{\alpha A}{n + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (28)$$

$$y_{oro}^{**} = A \left[ \frac{\alpha A}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (29)$$

$$c_{oro}^{**} = (1 - \alpha)A \left[ \frac{\alpha A}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (30)$$

*Demostración de las Condiciones de la Regla de Oro en el Modelo de Solow.* Para determinar la tasa de ahorro óptima que maximiza el consumo per cápita en el estado estacionario (donde  $\dot{k} = 0$ ), seguimos los siguientes pasos:

Comenzamos con la ecuación de acumulación de capital per cápita:

$$\dot{k} = sAk^{\alpha} - (n + \delta)k$$

Para maximizar el consumo per cápita en el estado estacionario, necesitamos derivar el consumo respecto al capital y encontrar el punto donde esta derivada es igual a cero:

$$c = Ak^\alpha - (n + \delta)k$$

Derivamos  $c$  con respecto a  $k$ :

$$\frac{dc}{dk} = \alpha Ak^{\alpha-1} - (n + \delta)$$

Igualamos a cero para encontrar el punto de máximo:

$$\alpha Ak^{\alpha-1} - (n + \delta) = 0$$

Resolvemos para  $k_{oro}^{**}$ , el capital per cápita que maximiza el consumo:

$$k_{oro}^{**} = \left( \frac{\alpha A}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Una vez determinado  $k_{oro}^{**}$ , calculamos la producción en equilibrio  $y_{oro}^{**}$  y el consumo en equilibrio  $c_{oro}^{**}$ , asumiendo que la tasa de ahorro  $s$  es igual a  $\alpha$ :

$$y_{oro}^{**} = A \left( \frac{\alpha A}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$c_{oro}^{**} = (1 - \alpha)A \left( \frac{\alpha A}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Esto completa la demostración de las condiciones óptimas bajo la Regla de Oro en el Modelo de Solow. □

## B Manual de Replicación

En esta sección se explica el código detrás de cada ventana interactiva. Antes de comenzar con la descripción del código, es importante estipular el versionado, tanto de Julia como de los

paquetes usados para la construcción de este código:

El siguiente código es una versión modificada del original por temas de ajuste en el documento.

```

1 # Dependencias
2 #
3 #   Version de Julia: v"1.8.1"
4 #
5 #   Version de los paquetes:
6 #       Plots v1.38.17
7 #       LaTeXStrings v1.3.0
8 #       Gtk v1.3.0
9 #       Interact v0.10.5
10 #       Blink v0.12.5
11 #

```

## B.1 Interfaz Interactiva 1

La metodología utilizada en este código puede ser fácilmente modificada para replicar otros modelos. Como primer paso para la construcción de ambas ventanas interactivas, es necesario instalar e importar los siguientes paquetes mencionados en la sección 4:

```

1 # Paquetes
2 using Plots , LaTeXStrings
3 using Random
4 using Gtk , Interact , Blink

```

En la estrategia para la resolución del modelo de Solow en Julia, para los parámetros, se establecieron valores iniciales fundamentados en fuentes oficiales y en investigaciones empíricas a modo de respaldo. En este caso, se escogió una tasa de ahorro del 20% fundamentado en el dato demográfico reportado por el portal *The Global Economy*, donde se indicó que, en el año

2022, el ahorro global en función del porcentaje del PIB fue del 23.91%. En cuanto a la tasa de crecimiento poblacional del 1%, esta se encuentra respaldada en el dato reportado por el portal *Worldometer*, quienes señalaron que, en el año 2022, el crecimiento de la población fue del 0.88%.

Para el caso de la depreciación y participación del capital, es más complicado encontrar datos globales porque no son parámetros que se midan y se reporten. Sin embargo, es posible referenciarlos de otros estudios económicos donde fueron estimados a través de metodologías empíricas. Con ello en mente, se hará referencia al trabajo de Schündeln (2013) quien realizó una estimación de la tasa de depreciación del capital para Indonesia, la cual la estimó en el rango de 8% y 14%. En cambio, Quiero Aguirre (2021) estimaron una tasa de participación del capital físico para China del 40% y para Latinoamérica del 20%, justificando la tasa del 20% escogido. Se utilizó un nivel de tecnología igual a 1, ya que como este representa la productividad total de los factores, el valor 1 significa un escenario neutral donde la economía comienza sin avances tecnológicos, a partir de aquí se realizarán distintos análisis.

```

1 #= Parámetros Iniciales por Default – Teóricos
2 # s = 0.2      Tasa de ahorro
3 # n = 0.01    Tasa Crecimiento Poblacional
4 # δ = 0.08    Tasa Depreciación del Capital
5 # α = 0.2     Tasa Participación del Capital
6 # A = 1.0     Nivel de Teconología (Endógeno)
7 # s_g = α     Tasa de ahorro "oro" (Coincide con α)  =#

```

A partir de los parámetros generados se pueden generar *widgets* en forma de deslizadores, definiendo un rango de valores en el cual podrá hacer el recorrido. En Julia puedes hacerlo utilizando el paquete *Interact* a través del siguiente código:

```

1 # Se crea lo widgets individualmente con valores iniciales y nombres
2 s = slider(0.2:0.001:0.5, label="s:", value=0.2)
3 n = slider(0.01:0.001:0.5, label="n:", value=0.01)
4 δ = slider(0.01:0.001:1.0, label="δ:", value=0.08)
5 α = slider(0.1:0.001:0.35, label="α:", value=0.2)

```

```
6 A = slider(1:.001:1.3, label="A:", value=1.0)
```

Para generar una ventana en donde podemos colocar múltiples componentes y realizar distintos diseños, se utiliza la función `Window()`. Aquí podemos almacenar los gráficos del modelo y hacer la conexión con los parámetros y los *widgets*.

```
1 # Se inicia la ventana de la aplicación
2 win = Window()
```

Una vez abierta la ventana, lo que se escriba a continuación será almacenado en la ventana. Utilizando la función `@manipulate`, podemos definir *widgets* locales que se conectaran con los parámetros que se utilicen dentro de la ventana abierta. Podemos modificar la velocidad del deslizador usando la opción `throttle`, además, lo que se codifique dentro de `mp` será todo local.

```
1 mp = @manipulate throttle=.05 for A=A,  $\alpha$ = $\alpha$ , s=s, n=n,  $\delta$ = $\delta$ 
```

Desde este punto en adelante, se procede a resolver los gráficos teóricos del modelo de Solow de la sección 2.

```
1
2 #Tasa de ahorro "oro"
3 s_g =  $\alpha$ 
4
5 # Funciones Necesarias:
6 # Utilizamos la Funcion Cobb - Douglas
7 function Cobb_Douglas(k, A,  $\alpha$ )
8     return A * k $\alpha$ 
9 end
10
```

```

11 # Tasa de Ahorro
12 function saving_rate(k, A,  $\alpha$ , s)
13     return (s*A)/(k^(1- $\alpha$ ))
14 end
15
16 # Tasa de Ahorro ORO
17 function saving_rate_gold(k, A,  $\alpha$ )
18     return ( $\alpha$ *A)/(k^(1- $\alpha$ ))
19 end

```

Para resolver el modelo, primero calculamos los valores de producción, ahorro y depreciación del capital, incluyendo la recta de depreciación. Seguidamente, determinamos el estado estacionario encontrando los valores de  $k^*$ ,  $y^*$  y  $c^*$ . Además, establecemos un rango de valores para  $k$ , esencial para la elaboración de gráficos del modelo. Este diseño de rango o *grid* asegura la visibilidad constante de las funciones del modelo en el gráfico principal.

```

1 # ----- Estado Estacionario del Modelo -----#
2
3 # Rango de valores del capital (Grid)
4 #Ajustamos para que sea automático (El Capital en
5     equilibrio siempre estará considerado).
6 k_star = ((s*A)/(n+ $\delta$ ))^((1)/(1- $\alpha$ )) # Capital en Equilibrio
7 k_star_rounded = round(k_star, digits=2) # Valor
8     redondeado de k_star a dos decimales
9 k_grid = range(0, k_star*2.5, length=100)
10
11 # Calculamos La producción, ahorro, depreciación.
12 y_hat = Cobb_Douglas.(k_grid, A,  $\alpha$ )
13 saving_hat = s*Cobb_Douglas.(k_grid, A,  $\alpha$ )
14 k_depr = (n+ $\delta$ )* k_grid

```

```

13     Depr = (n+δ) # Recta Depreciación
14
15     # Calculamos la Producción y el Consumo en Equilibrio
16
17     y_star = A*k_star^α
18     y_star_rounded = round(y_star, digits=2)
19
20     c_star = (1-s) * y_star
21     c_star_rounded = round(c_star, digits=2)

```

Se genera el primer gráfico de la Figura 1. El diseño de este gráfico permite mostrar el valor de los parámetros a través de la función *annotate!*, con ello lo que conseguimos es mostrar como los valores del estado estacionario cambian cuando se utilizan los *widgets* en forma de deslizadores y se van actualizando los valores de los distintos parámetros. Además, las curvas del gráfico también se modifican en tiempo real.

```

1     #-----Visualización Grafica del Modelo ----- #
2
3     # Graficamos
4     p1 = plot(k_grid, y_hat, label="Función de Producción", legend=:right
5             , guidefontsize=8, color=:deepskyblue4)
6             plot!(k_grid, saving_hat, label="Función de Ahorro", color=:
7                 darkturquoise)
8             plot!(k_grid, k_depr, label="Recta Depreciación", color=:
9                 gray50)
10            xlabel!("Capital")
11            ylabel!("Producción")
12            title!("Modelo de Solow")
13            plot!([k_star], seriestype="vline", label="Capital en
14                equilibrio", color=:firebrick1)
15
16            # Agrega la anotación al gráfico con tamaño de fuente personalizado
17            annotate!(k_star*1.06, Cobb_Douglas(k_star, A, α)*0.98,

```

```

        text(L""k^* =%$k_star_rouned"" , :left , color=:red3
        ))
13      annotate!(k_star*1.06, Cobb_Douglas(k_star , A,  $\alpha$ )*0.86 ,
        text(L""c^* =%$c_star_rouned"" , :left , color=:red3
        ))
14      annotate!(k_star*1.06, Cobb_Douglas(k_star , A,  $\alpha$ )*0.74 ,
        text(L""y^* =%$y_star_rouned"" , :left , color=:red3
        ))

```

Para generar la Figura 2 se utiliza el siguiente código.

```

1  # Predicciones – Largo Plazo
2  # Podemos desglosarle en Ahorro y Depreciación
3  saving_rate_hat = saving_rate.(k_grid , A,  $\alpha$  , s)
4
5  # Graficamos la tasa de crecimiento del capital , la función de
6  # ahorro y la función de depreciación
7  p2 = plot(k_grid , saving_rate_hat , label="Tasa Ahorro = (s*A)/(k^(1-
8  #  $\alpha$ )", legend=:right , guidefontsize=8, color=:deepskyblue4)
9  plot!([Depr], seriestype="hline", label="Tasa de Depreciación
10 # n = (n+ $\delta$ )", color=:darkturquoise)
11 plot!([k_star], seriestype="vline", label="Capital en
12 # equilibrio", color=:firebrick1)
13 xlabel!("Capital")
14 ylabel!("Producción")
15 title!("Dinámica del Modelo ")
16
17      annotate!(k_star*1.05, saving_rate(k_star , A,  $\alpha$  , s)*1.9 ,
18      text(L""k^* =%$k_star_rouned"" , :left , color=:
19      red3))

```

Se efectúa la unión de los dos gráficos en sentido vertical con la idea de poder observar la línea recta del parámetro  $k^*$  en ambos gráficos.

```

1 #Unificamos p1 y p2
2 P_Merge1 = plot(p1, p2, layout=grid(2,1, heights=[0.5, 0.5]), size
   =(600,600), position=(0,0.55))
3 #= Obtenemos el grafico donde, arriba vemos el modelo de Solow y abajo
   la dinamic autilizando las funciones de ahorro y depreciacion.
   Podemos ver que en el mismo nivel k* de ambos gráficos, abajo el
   ahorro iguala a la depreciación y arriba pasa lo mismo. Recordemos que
   k* es el capital en equilibrio y que al largo plazo es donde
   converge la economía. =#

```

Se utiliza el mismo análisis y metodología de resolución para la Regla de Oro.

```

1 ...
2
3 #-----#
4 #----- Regla de Oro -----#
5 #-----#
6 #= En la regla de oro, cuando maximizamos el consumos, la tasa
   de ahorro es igual a la peso del capital sobre la función
   de producción (es decir  $\alpha$ ) =#
7
8 # Regla de Oro: Estado estacionario que maximiza el consumo
9 k_gold = (( $\alpha$ *A)/(n+ $\delta$ ))^(1/(1- $\alpha$ ))
10 k_gold_rounded = round(k_gold, digits=2) # Valor
    redondeado de k_gold a dos decimales
11
12 y_gold = A*k_gold^ $\alpha$ 
13 y_gold_rounded = round(y_gold, digits=2)
14
15 c_gold = (1-s) * y_gold
16 c_gold_rounded = round(c_gold, digits=2)
17

```

```

18 # Funciones
19 saving_hat_g = s_g*Cobb_Douglas.(k_grid, A,  $\alpha$ )
20
21 #-----Visualización Grafica del Modelo ----- #
22 p3 = plot(k_grid, y_hat, label="Función de
      Producción",legend=:right, color=:deepskyblue4)
23
24     plot!(k_grid, saving_hat_g, label="Función de
      Ahorro OR0", color=:darkturquoise)
25
26     plot!(k_grid, k_depr, label="Recta Depreciación",
      color=:gray50)
27
28     xlabel!("Capital")
29
30     ylabel!("Producción")
31
32     title!("Modelo de Solow versión OR0 ")
33
34     plot!([k_gold], seriestype="vline", label="Capital
      en equilibrio OR0", color=:gold2)
35
36     annotate!(k_gold*1.06, Cobb_Douglas(k_gold, A,
       $\alpha$ )*0.98, text(L""k^g =%$k_gold_rounded"",
      :left, color=:darkgoldenrod3))
37
38     annotate!(k_gold*1.06, Cobb_Douglas(k_star, A,
       $\alpha$ )*0.86, text(L""c^g =%$c_gold_rounded"",
      :left, color=:darkgoldenrod3))
39
40     annotate!(k_gold*1.06, Cobb_Douglas(k_star, A,
       $\alpha$ )*0.74, text(L""y^g =%$y_gold_rounded"",
      :left, color=:darkgoldenrod3))
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55 # Podemos desglosarle en Ahorro y Depreciación
56 saving_rate_hat_g = saving_rate_gold.(k_grid, A,  $\alpha$ )
57

```

```

38 # Graficamos la tasa de crecimiento del capital, la
    función de ahorro y la función de depreciación
39 p4 = plot(k_grid, saving_rate_hat_g, label="Tasa Ahorro
    ORO = (s*A)/(k^(1-α))", legend=:right, guidefontsize=8,
    color=:deepskyblue4)
40     plot!([Depr], seriestype="hline", label="Tasa de
        Depreciación = (n+δ)", color=:darkturquoise)
41     plot!([k_gold], seriestype="vline", label="Capital
        en equilibrio ORO", color=:gold2)
42     xlabel!("Capital")
43     ylabel!("Producción")
44     title!("Dinámica del Modelo versión ORO")
45     annotate!(k_gold*1.05,
        saving_rate_gold(k_gold, A, α)*1.9,
        text(L""k^g = %$k_gold_rounded"", :left,
        color=:gold3))
46
47 #Podemos unir p3 y p4
48 P_Merge2 = plot(p3, p4, layout=grid(2,1, heights=[0.5,
    0.5]), size=(600,600), position=(0,0.25))

```

Se integran los cuatro gráficos en la primera ventana interactiva, ofreciendo una resolución teórica del modelo de Solow y la Regla de Oro, con sus parámetros interconectados mediante *widgets*. Mediante el uso de estos deslizadores es posible observar como todo el sistema de gráficos se modifica y como el estado estacionario cambia según el usuario haga uso de estos *widgets*.

```

1 # Plot Final
2 Final_plot = plot(P_Merge1, P_Merge2, linewidth=3, size=(1150,900))

```

Para cambiar el tamaño y ajustar en un solo recuadro a los *widgets* se utiliza la función `@layout!` sobre el objeto manipulable que generamos anteriormente. Para esta ocasión, se adjuntaron los *widgets* en un recuadro horizontal con un espacio de 2 puntos entre cada uno.

```
1 @layout! mp vbox(hbox(:A, : $\alpha$ , :s, :n, : $\delta$ ), vskip(2em), observe(_))
```

Finalmente, juntamos al objeto manipulable *mp* con la ventana abierta y utilizamos la función `show()` para dar apertura a la primera ventana interactiva.

```
1 # Juntamos el gráfico a la ventana interactiva
2 body!(win, mp)
3 show(win)
```

## B.2 Interfaz Interactiva 2

La creación de la segunda ventana interactiva se lleva a cabo con mira a simular el modelo de Solow y complementar el análisis teórico realizado en la primera ventana. Para ello y como primer requisito, es necesario estipular una carpeta de trabajo donde se almacenará los gráficos de la simulación del modelo. Esto permitirá mostrar los gráficos en la ventana interactiva, según la metodología que sea escogida.

```
1 # Espacio para almacenar los graficos de la simulacion
2 cd("C:/Users/alvar/OneDrive/Documentos/Tesis/Solow/Resultados_Simulacion
   ")
```

Los parámetros iniciales son similares a los de la primera venta aunque para esta parte fueron agregados 3 nuevos parámetros:

```
1 #  $\sigma = 0.08 \Rightarrow$  Desviación estándar del shock
2 #  $\rho = 0.98 \Rightarrow$  Persistencia del shock
3 # T = 500  $\Rightarrow$  Períodos
```

Los parámetros  $\sigma$  y  $\rho$  están relacionados con la introducción de shocks en la simulación del modelo. El primero representa la desviación estándar del *shock* en la simulación, es decir, representa la introducción de incertidumbre al modelo. A mayor desviación estándar el nivel de volatilidad del *shock* será mayor y por tanto serán más impredecibles. En cambio,  $\rho$  está relacionado con la persistencia del *shock*, es decir, el tiempo que dura el *shock* en la simulación del modelo. Mientras más se acerca a 1, el efecto del *shock* estará presente por mayor tiempo, mientras que un valor cercano a 0 resulta en que el efecto del *shock* desaparecerá rápidamente. Por último,  $T$  hace referencia a los periodos de simulación del modelo.

La estrategia para este segmento se centra en simular y graficar el modelo mediante funciones, seguido de la creación de una ventana interactiva que, con el uso de widgets, permite definir inputs y tomar decisiones que influyen en el output de la interfaz. La primera etapa implica simular el modelo, con inputs que activan condicionales y determinan el tipo de simulación. Se definieron tres tipos de simulación: una estocástica, otra con un *shock* temporal elegido por el usuario en algún momento de la simulación, y una tercera con un *shock* permanente, cuyo punto de inicio también es seleccionado por el usuario.

```
1 # Función para Simular el modelo
2 function Solow_Simulation(sym_type , shock_time , shock_size ;
3     s=0.2, n = 0.01,  $\delta$  = 0.08,  $\alpha$  = 0.2,  $\sigma$  = 0.08,  $\rho$  = 0.98, T = 500, rs
4     =1901)
5
6 Random.seed!(rs) # Controlar la aleatoriedad reproducible
7 epsilon = randn(T)* $\sigma$  # Fuente de variabilidad aleatoria
8
9 # Condicional "Tipo de Simulación"
10 if sym_type == 1
11     print("Simulación normal\n")
12 elseif sym_type == 2
13     epsilon[shock_time] = shock_size
14     epsilon[1:(shock_time-1)] .= 0
```

```

14     epsilon[(shock_time+1):end] .= 0
15     print("Simulacion Shock Temporal \n")
16     print("Shock Time = $shock_time\n")
17     ss = shock_size * 100
18     print("Shock Size = $ss%\n")
19     elseif sym_type == 3
20         epsilon[shock_time:end] .= shock_size
21         epsilon[1:(shock_time-1)] .= 0
22         print("Simulacion Shock Permanente \n")
23         print("Shock Time = $shock_time\n")
24         ss = shock_size * 100
25         print("Shock Size = $ss%\n")
26     end

```

Luego, se procede a simular el modelo. Se generan los respectivos contenedores de las funciones y se fijan los parámetros iniciales.

```

1     # Contenedores
2     A = ones(T)
3     L = zeros(T)
4     k = zeros(T)
5     y = zeros(T)
6     c = zeros(T)
7     K = zeros(T)
8     Y = zeros(T)
9     C = zeros(T)
10
11     # Valores iniciales
12     L[1] = 1.0
13     A[1] = 1.0
14     k[1] = ((s*A[1]) / (n+δ)) ^ ((1) / (1-α))
15     y[1] = A[1] * ((k[1]) ^ α)
16     c[1] = (1 - s) * y[1]

```

Para simular el modelo, se implementa un *loop* durante el periodo  $T$ , resolviendo en cada ciclo el sistema de ecuaciones del modelo y su interacción. Es fundamental destacar cómo se construyó la variable tecnológica  $A$ , clave para ajustes en la interfaz interactiva.  $A_{aux}$  se calcula como un proceso  $AR(1)$ , aplicándosele transformación logarítmica y multiplicándose por la persistencia del *shock*  $\rho$ , lo que afecta el impacto del *shock* en el valor futuro de la tecnología. Se suma el componente estocástico *epsilon* y se obtiene el valor tecnológico en  $t$  mediante transformación exponencial.

Este diseño es crucial para determinar el tipo de modelo que se va a resolver: determinista o estocástico. En la versión estocástica, *epsilon* incorpora la aleatoriedad al modelo, permitiendo la variación en los resultados en los diferentes periodos de ejecución. Por otra parte, en la versión determinista *epsilon* es suprimido, ocasionando que el valor de  $A$  solo dependa de su rezago anterior.

```

1      # Simulación
2      for t in 2:T
3          A_aux = rho * log(A[t-1]) + epsilon[t]
4          A[t] = exp(A_aux)
5          L[t] = (1 + n) * L[t-1]
6          k[t] = (1 - delta - n) * k[t-1] + s * y[t-1]
7          y[t] = A[t] * (k[t]^alpha)
8          c[t] = (1 - s) * y[t]
9      # Agregado
10     K[t] = L[t] * k[t]
11     Y[t] = L[t] * y[t]
12     C[t] = L[t] * c[t]
13
14     end

```

Por último, la función arroja los siguientes componentes que permitirán realzar los gráficos

de la simulación:

```

1     return k, y, c, K, Y, C, A, epsilon, shock_time
2 end

```

Tras eso, se construyen dos funciones para visualizar los resultados, una para la versión agregada de las variables y otra para la versión per cápita. En cada gráfico se muestra la simulación de cada una de las variables principales del modelo: la producción, el consumo y el capital. En adición a esto y si la simulación es diferente a la normal, el gráfico muestra el momento en el que ocurre el *shock*.

```

1 function plot_simulation(y,c,k,shock_size,sym_type,st; T = 500 )
2
3     ss = (shock_size * 100)
4     p10 = plot(1:T,y, ylim=(0, maximum(y)*1.25) , label="Produccion" ,
5             xlabel="Periodos", ylabel="Nivel", size=(800,600) ,
6             linecolor=:blue , linewidth=2)
7     if !(sym_type == 1)
8         vline!([st], label = "Shock = $ss %", style = :dash, color =
9             "gray50")
10
11    end
12
13    p11 = plot(1:T,c, ylim=(0, maximum(c)*1.25) ,label="Consumo",
14            xlabel="Periodos", ylabel="Nivel", size=(800,600) ,
15            linecolor=:green , linewidth=2)
16    if !(sym_type == 1)
17        vline!([st], label = "Shock = $ss %", style = :dash, color = "
18            gray50")
19    end
20
21    p12 = plot(1:T,k, ylim=(0, maximum(k)*1.25) ,label="Capital",
22            xlabel="Periodos", ylabel="Nivel", title="Modelo de Solow", size
23            =(800,600) ,
24            linecolor=:orange , linewidth=2)

```

```

21     if !(sym_type == 1)
22         vline!([st], label = "Shock = $ss %", style = :dash, color =
                "gray50")
23     end
24
25     P_Merge1 = plot(p12, p10, p11, layout=(3,1), size=(800,800), position
                =(0,0.25))
26     savefig(P_Merge1, "Simulacion_Solow_Percapita.png")
27
28 end

```

```

1 # Función para graficar – Versión Agregado
2 function plot_simulation2(Y,C,K, shock_size , sym_type , st; T = 500)
3
4     ss = (shock_size * 100)
5     p13 = plot(1:T,Y,label="Produccion Agregado" ,
6             xlabel="Periodos", ylabel="Nivel", title="Modelo de Solow", size
             =(800,600),
7             linecolor=:blue , linewidth=2)
8     if !(sym_type == 1)
9         vline!([st], label = "Shock = $ss %", style = :dash, color =
                "gray50")
10    end
11
12    p14 = plot(1:T,C,label="Consumo Agregado",
13            xlabel="Periodos", ylabel="Nivel", title="Modelo de Solow", size
            =(800,600),
14            linecolor=:green , linewidth=2)
15    if !(sym_type == 1)
16        vline!([st], label = "Shock = $ss %", style = :dash, color =
                "gray50")
17    end
18

```

```

19 p15 = plot(1:T,K,label="Capital Agregado",
20           xlabel="Periodos", ylabel="Nivel", title="Modelo de Solow", size
           =(800,600),
21           linecolor=:orange, linewidth=2)
22     if !(sym_type == 1)
23         vline!([st], label = "Shock = $ss %", style = :dash, color =
           "gray50")
24     end
25
26 P_Merge2 = plot(p15, p13, p14, layout=(3,1), size=(800,800),
           position=(0,0.25))
27 savefig(P_Merge2, "Simulacion_Solow_Agregado.png")
28
29 end

```

Usando el paquete *Gtk* se da apertura de la ventada usando la función *GtkWindow* donde se define el título del aplicativo y el tamaño inicial de la ventana:

```

1 #----- VENTANA INTERACTIVA
   ----- #
2
3 # Espacio Ventana
4 win = GtkWindow("Simulación Modelo de Solow", 350, 350)

```

El uso del paquete requiere diseñar el aplicativo a través de "espacios" o "diseño de bloques", por tanto, requiere que se dé apertura de estos para poder agregar los elementos del modelo. Primero se generó en espacio principal donde se agregarán el resto de bloques. Luego, se generó otro para los principales parámetros del modelo.

```

1 # Espacio inicial
2 main_box = GtkBox(:v)
3
4 # Primer espacio para los parámetros

```

```
5 parm_box1 = GtkBox (:h)
```

Para diseñar cada *widget* en forma de entrada de texto o números, primero es necesario agregar una etiqueta al espacio, seguido de crear el espacio como tal. Luego, se establecen las propiedades o se da forma al diseño del *widget* y por último, se debe juntar los *widget* con el espacio generado para ellos.

```
1 # Parámetros :
2
3 # Tipo Simulación
4 rate_label1 = GtkLabel("Tipo Simulacion: ")
5 rate_entry1 = GtkEntry()
6 set_gtk_property!(rate_entry1, :text, "1")
7 set_gtk_property!(rate_label1, :width_request, 20)
8 set_gtk_property!(rate_entry1, :width_request, 5)
9
10 # Periodo del Shock
11 rate_label2 = GtkLabel("Periodo Shock: ")
12 rate_entry2 = GtkEntry()
13 set_gtk_property!(rate_entry2, :text, "2")
14 set_gtk_property!(rate_label2, :width_request, 20)
15 set_gtk_property!(rate_entry2, :width_request, 5)
16
17 # Tamano del shock
18 rate_label3 = GtkLabel("Tamano Shock: ")
19 rate_entry3 = GtkEntry()
20 set_gtk_property!(rate_entry3, :text, "0")
21 set_gtk_property!(rate_label3, :width_request, 20)
22 set_gtk_property!(rate_entry3, :width_request, 5)
23
24 # Periodos de la Simulación
25 rate_label4 = GtkLabel("Periodos de Simulacion: ")
26 rate_entry4 = GtkEntry()
27 set_gtk_property!(rate_entry4, :text, "500")
```

```

28 set_gtk_property!(rate_label4 , :width_request , 20)
29 set_gtk_property!(rate_entry4 , :width_request , 5)
30
31 # Desviación estandar del shock
32 rate_label5 = GtkLabel("Desviacion estandar del Shock: ")
33 rate_entry5 = GtkEntry()
34 set_gtk_property!(rate_entry5 , :text , "0.08")
35 set_gtk_property!(rate_label5 , :width_request , 20)
36 set_gtk_property!(rate_entry5 , :width_request , 5)
37
38 # Persistencia del shock
39 rate_label6 = GtkLabel("Persistencia del shock: ")
40 rate_entry6 = GtkEntry()
41 set_gtk_property!(rate_entry6 , :text , "0.98")
42 set_gtk_property!(rate_label6 , :width_request , 20)
43 set_gtk_property!(rate_entry6 , :width_request , 5)
44
45 # Juntamos los espacios de los parámetros
46 for i in 1:6
47   push!(parm_box1 , eval(Symbol("rate_label$i")))
48   push!(parm_box1 , eval(Symbol("rate_entry$i")))
49 end
50 push!(main_box , parm_box1)

```

Con relación al diseño de la ventana, resulte eficiente generar diferentes espacios horizontales para cada grupo de parámetros y no un solo espacio para todos, de lo contrario, se presentarán problemas con respecto al espacio asignado para cada *widget*, lo que podría ocasionar que se colapsen uno encima de otro.

```

1 # Segundo espacio para los parámetros
2 parm_box2 = GtkBox(:h)
3
4 # Parámetros:
5

```

```
6 # Tasa de Ahorro
7 rate_label7 = GtkLabel("s: ")
8 rate_entry7 = GtkEntry()
9 set_gtk_property!(rate_entry7, :text, "0.2")
10 set_gtk_property!(rate_label7, :width_request, 20)
11 set_gtk_property!(rate_entry7, :width_request, 5)
12
13 # Tasa de crecimiento poblacional
14 rate_label8 = GtkLabel("n: ")
15 rate_entry8 = GtkEntry()
16 set_gtk_property!(rate_entry8, :text, "0.01")
17 set_gtk_property!(rate_label8, :width_request, 20)
18 set_gtk_property!(rate_entry8, :width_request, 5)
19
20 # Tasa de depreciación del capital
21 rate_label9 = GtkLabel("δ: ")
22 rate_entry9 = GtkEntry()
23 set_gtk_property!(rate_entry9, :text, "0.08")
24 set_gtk_property!(rate_label9, :width_request, 20)
25 set_gtk_property!(rate_entry9, :width_request, 5)
26
27 # Tasa de participación del capital
28 rate_label10 = GtkLabel("α: ")
29 rate_entry10 = GtkEntry()
30 set_gtk_property!(rate_entry10, :text, "0.3")
31 set_gtk_property!(rate_label10, :width_request, 20)
32 set_gtk_property!(rate_entry10, :width_request, 5)
33
34 # Random Seed
35 rate_label11 = GtkLabel("Semilla: ")
36 rate_entry11 = GtkEntry()
37 set_gtk_property!(rate_entry11, :text, "1901")
38 set_gtk_property!(rate_label11, :width_request, 20)
39 set_gtk_property!(rate_entry11, :width_request, 5)
```

```

40
41 # Tipo Resultado
42 rate_label12 = GtkLabel("Tipo Resultado: ")
43 rate_entry12 = GtkEntry()
44 set_gtk_property!(rate_entry12, :text, "1")
45 set_gtk_property!(rate_label12, :width_request, 20)
46 set_gtk_property!(rate_entry12, :width_request, 5)
47
48
49 # Juntamos los espacios de los parámetros
50 for i in 7:12
51   push!(parm_box2, eval(Symbol("rate_label$i")))
52   push!(parm_box2, eval(Symbol("rate_entry$i")))
53 end
54 push!(main_box, parm_box2)

```

Se establecieron tres componentes claves para la correcta funcionalidad de la interfaz del usuario: Primero, se incorporó un botón "Start" que da arranque a la simulación del modelo. En segundo lugar, se incluye un proceso interno que, en el momento que se interactúa con el botón "Start", la imagen que almacena el resultado y se encuentra en la dirección estipulada al inicio, es procesada y mostrada en la interfaz. Por último, se adiciona un mecanismo para los errores que se generan por parte del usuario, estos se muestran en formas de mensajes y aseguran que el usuario utilice y estipule correctamente los parámetros.

```

1 # Botón de inicio
2 start_button = GtkButton("Start")
3 push!(main_box, start_button)
4
5 # Adaptador de imágenes
6 image = GtkImage()
7 push!(main_box, image)
8
9 # Widget de errores

```

```

10 error = GtkLabel("")
11 push!(main_box, error)

```

Como último punto, se realiza el desenlace funcional que genera presionar el botón "Start" sobre todo el aplicativo. Es necesario realizar el proceso de forma ordenada, como si se tratase de la construcción de una función, caso contrario, la aplicación no será operativa. Inicialmente, se estableció la conexión de los *widgets* con los parámetros del modelo, donde el usuario tiene la opción de modificar sus valores. Seguidamente, se construyeron los diferentes "errores" que se pueden cometer si no se cumplen ciertas reglas con los *widgets*, emulando una guía para el usuario. En tercer paso y utilizando la función del modelo, se da paso a la resolución del mismo, además de extraer las variables simuladas. En último término y utilizando condicionales, se genera el gráfico final, que es el que el usuario podrá observar en tiempo real.

```

1 # Funcionalidad de la ventana interactiva
2 signal_connect(start_button, "clicked") do widget
3
4     # Conexión Widgets - Parámetros
5     sym_type_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry1, :text, String)
6     sym_type = tryparse(Int32, sym_type_str)
7
8     shock_time_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry2, :text, String)
9     shock_time = tryparse(Int32, shock_time_str)
10
11     shock_size_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry3, :text, String)
12     shock_size = tryparse(Float64, shock_size_str)
13
14     T_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry4, :text, String)
15     T = tryparse(Int32, T_str)
16
17      $\sigma$ _str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry5, :text, String)
18      $\sigma$  = tryparse(Float64,  $\sigma$ _str)
19
20      $\rho$ _str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry6, :text, String)

```

```
21   $\rho$  = tryparse(Float64 ,  $\rho$ _str)
22
23  s_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry7 , :text , String)
24  s = tryparse(Float64 , s_str)
25
26  n_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry8 , :text , String)
27  n = tryparse(Float64 , n_str)
28
29   $\delta$ _str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry9 , :text , String)
30   $\delta$  = tryparse(Float64 ,  $\delta$ _str)
31
32   $\alpha$ _str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry10 , :text , String)
33   $\alpha$  = tryparse(Float64 ,  $\alpha$ _str)
34
35  rs_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry11 , :text , String)
36  rs = tryparse(Int32 , rs_str)
37
38  ts_str = Gtk.get_gtk_property(rate_entry12 , :text , String)
39  ts = tryparse(Int32 , ts_str)
40
41  # Errores
42  set_gtk_property!(error , :label , "")
43
44  if (T < 2 || T > 1000)
45      set_gtk_property!(error , :label , "Error: El tamaño de la
46          Simulación no puede estar fuera del rango 2 y 1000")
47      return
48  end
49  if !(sym_type in 1:3)
50      set_gtk_property!(error , :label , "Error: El tipo de Simulación
51          debe ser 1,2 o 3.")
52      return
53  end
```

```

53
54  if !(shock_time in 2:T)
55      set_gtk_property!(error, :label, "Error: El periodo del shock
56          tiene que ser entre 2 y $T")
57      return
58  end
59  if (shock_size < -1 || shock_size > 1) && (sym_type in [2, 3])
60      set_gtk_property!(error, :label, "Error: El tamaño del shock no
61          puede estar fuera del rango -1 y 1.")
62      return
63  end
64  if (s < 0 || n < 0 ||  $\delta$  < 0 ||  $\alpha$  < 0 ||  $\sigma$  < 0 ||  $\rho$  < 0 || s > 1 || n
65      > 1 ||  $\delta$  > 1 ||  $\alpha$  > 1 ||  $\sigma$  > 1 ||  $\rho$  > 1)
66      (s, n,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  < 0 || shock_size > 1)
67      set_gtk_property!(error, :label, "Error: El parámetro no puede
68          estar fuera del rango 0 y 1.")
69      return
70  end
71  if !(ts in 1:2)
72      set_gtk_property!(error, :label, "Error: El tipo de Resultado
73          debe ser 1 o 2.")
74      return
75  end
76  # Simulación – Resultados
77  k, y, c, K, Y, C, A, E, st = Solow_Simulation(sym_type, shock_time,
78      shock_size; s, n,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ , T, rs)
79  # Gráficos
80  if ts == 1
81      plot_simulation(y,c,k, shock_size, sym_type, st; T)

```

```
81     set_gtk_property!(image, :file, "Simulacion_Solow_percapita.png")
82     )
83     return
84 elseif ts == 2
85     plot_simulation2(Y,C,K, shock_size, sym_type, st; T)
86     set_gtk_property!(image, :file, "Simulacion_Solow_Agregado.png")
87     return
88 end
89 end
```

Utilizando la función *showall()* se da apertura a la segunda ventana interactiva. Con ello, se concluye la construcción de este código, representando el modelo de Solow en la versión de Barro and Sala-I-Martin (2003).

```
1     showall(win)
```