

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingeniería

El grupo de bucles en la teorías Maxwell

Alejandro Rueda Manosalvas

Matemáticas

Trabajo de titulación presentado como requisito
para la obtención del título de

Matemático

29 de noviembre de 2023

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingeniería

**HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE FIN DE
CARRERA**

El grupo de bucles en la teorías Maxwell

Alejandro Rueda Manosalvas

Nombre del profesor, Título académico: Ernesto Contreras, PhD

29 de noviembre de 2023

© Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombres y apellidos: Alejandro Rueda Manosalvas

Código: 00336552

Cédula de Identidad: 1750257733

Lugar y fecha: Quito, 29 de noviembre de 2023

ACLARACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>

UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis padres y a mi familia por toda la ayuda y apoyo que siempre me han dado. Quiero agradecer a mis profesores por transmitir sus conocimientos acerca de los temas más interesantes que pueda haber. Especialmente agradezco a Ernesto Contreras, de quienes he aprendido una cantidad gigante de cosas, no solo de física sino también del mundo. Finalmente quiero agradecer a mis amigos: Ari, Bale, Mari, Mateo, Mile y Jose. También vale la pena mencionar a mis compañeros con los que he compartido toda clase de aventuras.

Resumen

En este trabajo se introduce la formulación de bucles. Se presenta el grupo de bucles y objetos matemáticos relacionados que ayudan a describir una teoría de calibre. Se introduce el grupo extendido de bucles con el objetivo de estudiar bucles bajo una nueva perspectiva. Se cuantiza la teoría de Maxwell con la formulación de bucles usando un álgebra no canónica y se la compara con la usual cuantización de Fock. Además, se cuantiza la teoría con la formulación extendida y se observan varias ventajas que pueden ser útiles para el caso no abeliano o en gravedad cuántica.

Palabras clave: *Cuantización canónica, grupo de bucles, teorías de calibre*

Abstract

In this work, the loop formulation is introduced. The loop group and related mathematical objects are presented to help describe a gauge theory. The extended loop group is introduced with the aim of studying loops from a new perspective. The Maxwell theory is quantized using the loop formulation with a non-canonical algebra, and it is compared with the usual Fock quantization. Additionally, the theory is quantized with the extended formulation, and several advantages are observed that can be useful for the non-abelian case or in quantum gravity.

Keywords: *Canonical cuantization, loop group, gauge theories*

Índice general

1. Introducción	11
2. Formulación Hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills y Maxwell	13
2.1. Formulación hamiltoniana de un sistema con ligaduras	14
2.1.1. Teoría clásica	14
2.1.2. Cuantización de un sistema Hamiltoniano	16
2.1.3. Teoría clásica de Maxwell	17
3. Grupo de bucles	21
3.1. Generadores infinitesimal del grupo de bucles	26
3.1.1. La derivada de bucles	26
3.1.2. Propiedades de la derivada de bucles	28

	8
3.1.3. Derivada de conexión	36
3.2. Representación del grupo de bucles	40
4. Grupo de bucles extendido	45
4.1. Campos multitangentes	45
4.2. El grupo de bucles extendido	49
4.3. Coordenadas de bucles	55
4.3.1. Acción de los operadores diferenciales	64
5. Cuantización de la teoría libre de Maxwell en la formulación del grupo de bucles	68
5.1. El grupo de bucles abeliano	69
5.1.1. Representación de bucles	71
5.1.2. Representación extendida	79
6. Conclusiones	82
Bibliografía	83

A. Conceptos básicos de geometría diferencial

Índice de figuras

3.1. El bucle infinitesimal que define la derivada de bucle.	26
3.2. El bucle infinitesimal para definir la derivada de Mandelstam.	34
3.3. El bucle infinitesimal que se usa para derivar las identidades de Bianchi.	34
3.4. Construcción de un bucle a partir de la derivada de bucle.	35
3.5. Camino que define la derivada de conexión.	37
3.6. Camino que define la relación entre la derivada de bucles y la deri- vada de conexión.	38

Capítulo 1

Introducción

En 1986 Abhay Ashtekar reformula la teoría de la relatividad en términos de variables canónicas, de forma que se obtiene la formulación Hamiltoniana de la teoría. De esta forma se intenta cuantizar la teoría usando las mismas herramientas que fueron exitosas para la teoría de Maxwell y Yang-Mills. Sin embargo, por las características de la relatividad general es imposible usar los mismos métodos perturbativos, por lo que se busca una formulación no perturbativa [1, 2].

Se propusieron varios métodos, los cuales fallaban al lidiar con las ligaduras del sistema. A partir de esto se introduce una nueva representación de estados cuánticos, donde los estados son funcionales que dependen de caminos cerrados. Usando esta formulación se pudo lidiar con las ligaduras del sistema y obtener un espacio de estados de gravedad cuántica, los cuales pueden ser usados para analizar el espacio-tiempo en escala de Planck [3, 4, 5].

Un aspecto que falta es la interpretación física de los operadores y de los estados resultantes de la formulación de bucles. Si bien existe una transformación que relaciona los objetos del espacio de bucles con los del espacio usual de conexiones, es formal y no siempre está bien definida. Para obtener una mejor intuición de esto, podemos cuantizar en términos de bucles teorías conocidas como la de Maxwell y la de Yang-Mills [6].

En este trabajo se estudia el grupo de bucles y el grupo de bucles extendido para cuantizar la teoría de Maxwell en el formalismo de bucles. Esto, con el objetivo de obtener una mejor intuición de los operadores y estados en la formulación de bucles, de forma que se pueda aplicar en teorías más complejas [7, 8].

Este trabajo se organiza de la siguiente forma: primero, se introduce la formulación Hamiltoniana de una teoría de calibre con ligaduras, en particular, las teorías de Yang-Mills y de Maxwell. Se introduce el grupo de bucles y el grupo de bucles extendido. Finalmente se cuantiza la teoría de Maxwell en la formulación de Maxwell.

Este trabajo se basa en el libro *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity* de R. Gambini y J. Pullin [4].

Capítulo 2

Formulación Hamiltoniana de las teorías de Yang-Mills y Maxwell

Al inicio de los años 70s aparecen las teorías de Yang-Mills como teorías que describen interacciones fundamentales. Hay dos resultados perturbativos importantes: la unificación del electromagnetismo y la interacción débil y la demostración de que la teoría de Yang-Mills es renormalizable. Sin embargo, hay problemas que requieren alternativas no-perturbativas. Uno de estos problemas es el de cuantización de la relatividad general. Una alternativa es la representación de bucles de una teoría de calibre.

En este capítulo se discutirán varios resultados que, junto a las ideas sobre bucles, ayudaran a introducir la idea de la representación de bucles.

2.1. Formulación hamiltoniana de un sistema con ligaduras

2.1.1. Teoría clásica

El estudio de sistemas Hamiltonianos restringidos empezó con Dirac en 1950 [9]. En esta sección revisaremos lo básico de este tema. Un tratamiento extensivo se puede encontrar en [10, 11].

Usualmente los sistemas físicos no están descritos usando el mínimo número de variables. En general hay cierto nivel de redundancia, que resulta en que el sistema sea invariante bajo ciertas simetrías. Por ejemplo, la formulación del electromagnetismo es invariante bajo transformaciones de calibre del vector potencial. Lo que sucede en general es que: dado un conjunto de información inicial, el resultado de la evolución no es única, es parte de una clase de configuraciones físicas equivalentes.

Partimos de la acción

$$S = \int dt L(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.1)$$

donde $L(q_i, \dot{q}_i)$ es el lagrangiano del sistema. Introducimos el momento conjugado

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.2)$$

el Hamiltoniano se obtiene a través de la transformación de Legendre

$$H(q_i, p^i) = p^i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i(p^i)), \quad (2.3)$$

el cual depende únicamente de las variables (q_i, p^i) . Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

En muchos sistemas físicos no se puede despejar las velocidades \dot{p}_i en términos de los momentos conjugados p^i . Esto implica que es suficiente si consideramos un subespacio del espacio de fases, para esto usamos ligaduras. Las ligaduras son un conjunto de relaciones de las variables canónicas de la forma

$$\phi_m(p_i, q_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.\tag{2.5}$$

Hay ligaduras que aparecen directamente a partir de la transformación de Legendre de la formulación lagrangiana, estas ligaduras se conocen como *primarias*. Las ligaduras deben preservarse en el tiempo, al realizar este proceso pueden aparecer nuevas ligaduras, estas son conocidas como *secundarias*, que también deben preservarse en el tiempo.

Hay otra distinción importante entre ligaduras. Una ligadura ϕ_k se dice que es de *primera clase* si sus corchetes de Poisson con las demás ligaduras resultan en una combinación lineal de ligaduras

$$\{\phi_k, \phi_i\} = C_{ki}^j \phi_j.\tag{2.6}$$

Las ligaduras que no son cero ni combinación lineal de ligaduras se les conoce como de *segunda clase*.

En este trabajo nos centraremos únicamente en ligaduras de primera clase. Esto se debe a que las teorías de interés únicamente presentan ligaduras de primera clase.

2.1.2. Cuantización de un sistema Hamiltoniano

El método para cuantizar un sistema Hamiltoniano con ligaduras de primera clase fue introducido por Dirac [9]. El procedimiento consiste en cinco pasos:

- Seleccionar un álgebra de objetos con las que se puede expresar cualquier cantidad de interés físico. Por ejemplo, las variables canónicas, con los corchetes de Poisson.

- Representar el álgebra como un conjunto de operadores que actúan sobre un espacio de funciones de onda \mathcal{V} y promover los corchetes de Poisson a conmutadores de operadores. Representando el álgebra sobre funcionales de las variables canónicas $\psi[q]$ y los operadores como $\hat{q}\psi[q] = q\psi[q]$, $\hat{p}\psi[q] = -i\hbar\frac{\delta\psi[q]}{\delta q}$ y la relación de conmutación es $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$.

- Promover las ligaduras a operadores que actúan sobre \mathcal{V} . El espacio de soluciones a las ligaduras es un subespacio de \mathcal{V} y contiene las funciones de onda con relevancia física. Llamaremos a este espacio $\hat{\mathcal{V}}$.

- Determinar la evolución temporal del sistema a partir de la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (2.7)$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano. Cabe destacar que la evolución temporal es única dado que ya se impusieron las ligaduras sobre las funciones de onda.

- Introducir un producto punto en $\hat{\mathcal{V}}$ tal que sea un espacio de Hilbert, los observables se vuelven operadores autoadjuntos y las funciones de onda son normalizables.

En el primer punto permitimos utilizar cualquier álgebra, no solo el álgebra canónica. Esto es importante en la formulación de la representación de bucles.

2.1.3. Teoría clásica de Maxwell

El Hamiltoniano de la teoría es

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (E^a E_a + B^a B_a) \quad (2.8)$$

donde $B_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{abc}F^{bc}$, también tenemos los campos $A_a(x)$ y $E^b(x)$, que cumplen

$$\{A_a(x), E^b(y)\} = \delta_a^b \delta^3(x - y), \quad (2.9)$$

donde $a, b = 1, 2, 3$. La única ligadura de la teoría es la ley de Gauss abeliana

$$\partial_a E^a = 0. \quad (2.10)$$

La ley de Gauss se resuelve considerando únicamente campos eléctricos trans-

versales, $E_T^a(x)$. La teoría puede ser reformulada en términos de los campos transversales E_T^a y A_a^T . Este par cumple el corchete de Dirac

$$\{A_a^T(y), E_T^a(x)\} = \delta_T^a{}_b(x-y), \quad (2.11)$$

donde la delta transversa es

$$\delta_T^a{}_b(x-y) = \delta_b^a \delta(x-y) - \Delta^{-1} \partial^a \partial_b \delta^3(x-y), \quad (2.12)$$

donde Δ^{-1} es el inverso del Laplaciano. Para simplificar los cálculos al cuantizar el Hamiltoniano vamos a considerar A_a^T y E_T^a en el espacio de momentos

$$A_a^T(x) = \int \frac{d^3k}{(\sqrt{2\pi})^3} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) [q_1(\vec{k}) e_a^1(\vec{k}) + q_2(\vec{k}) e_a^2(\vec{k})], \quad (2.13)$$

$$E_T^a(x) = \int \frac{d^3k}{(\sqrt{2\pi})^3} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) [p^1(\vec{k}) e_1^a(\vec{k}) + p^2(\vec{k}) e_2^a(\vec{k})], \quad (2.14)$$

donde $e_A^a(\vec{k})$ y $e_a^A(\vec{k})$ son vectores transversales y su dual en el espacio de momentos. Estas cantidades están normalizadas $k^a e_a^A = 0$, $e_A^a(\vec{k}) e_a^B(\vec{k}) = \delta_A^B$, $e_a^A(\vec{k}) = e_A^a(\vec{k})^* = e_a^A(-\vec{k})$. Además $q(-\vec{k}) = q^*(\vec{k})$ y $p(-\vec{k}) = p^*(\vec{k})$.

Invirtiendo estas relaciones llegamos a

$$q_A(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(\sqrt{2\pi})^3} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_A^a(\vec{k}) A_a^T(x), \quad (2.15)$$

$$p^A(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(\sqrt{2\pi})^3} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_a^A(\vec{k}) E_T^a(x), \quad (2.16)$$

con $A = 1, 2$. Los $q_A(\vec{k})$, $p^A(\vec{k})$ capturan la información de los dos grados de

libertad que describen los modos correspondientes a las dos posibles polarizaciones del fotón. Podemos formular la teoría en términos de estas variables. Los corchetes de Poisson son

$$\{q_A(\vec{k}), p^{*B}(\vec{k}')\} = \delta_A^B \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.17)$$

El Hamiltoniano queda como

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k (p_A(\vec{k})p^A(-\vec{k}) + |k|^2 q_A(\vec{k})q^A(-\vec{k})). \quad (2.18)$$

Ahora introducimos las cantidades

$$a_A(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{|k|} q_A(\vec{k}) + i \frac{1}{\sqrt{|k|}} p_A(\vec{k}) \right), \quad (2.19)$$

$$a_A^*(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{|k|} q_A(-\vec{k}) - i \frac{1}{\sqrt{|k|}} p_A(-\vec{k}) \right). \quad (2.20)$$

Para que se cumpla (2.17), las cantidades a_A y a_A^* deben cumplir con

$$\{a_A(\vec{k}), a_B^*(\vec{k}')\} = -i \delta_{AB} \delta^3(k - k'), \quad (2.21)$$

el Hamiltoniano, escrito en términos de a_A y a_A^* , tiene la forma de una colección infinita de osciladores armónicos, uno por cada \vec{k} .

$$H = \int d^3k |k| (a_C^*(\vec{k}) a^C(\vec{k}) + \frac{1}{2}). \quad (2.22)$$

A partir del estudio del sistema clásico, se puede usar el proceso mencionado en el capítulo 2 para obtener la formulación cuántica. En el siguiente capítulo se explora

la cuantización de la teoría en términos de bucles.

Capítulo 3

Grupo de bucles

En esta sección se introduce el concepto de holonomía y objetos relacionados que nos serán importantes para describir una teoría de calibre. Vamos a definir el grupo de bucles y sus generadores infinitesimales, lo que es fundamental para describir teorías de calibre en términos de bucles.

Comenzamos considerando el conjunto de curvas continuas y suaves a trozos parametrizadas sobre una variedad M . Una curva p es un mapa

$$p : [0, s_1] \cup [s_1, s_2] \dots [s_{n-1}, 1] \rightarrow M \quad (3.1)$$

suave en cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ y continua en todo el dominio. Ahora, definimos una operación entre dos curvas p_1 y p_2 tal que el punto final de p_1 es el punto

inicial de p_2 :

$$p_1 \circ p_2 = \begin{cases} p_1(2s) & \text{para } s \in [0, 1/2] \\ p_2(2(s - 1/2)) & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (3.2)$$

La curva que va en dirección opuesta es:

$$p^{-1}(s) = p(1 - s). \quad (3.3)$$

Puede ser suficiente usar curvas parametrizadas para construir el grupo de bucles, pero la estructura de grupo no es evidente. Para una formulación más clara vamos a trabajar con curvas no parametrizadas. Vamos a definir una relación de equivalencia de forma que las clases de equivalencia son independientes de la parametrización.

Definición 3.0.1. *Se dice que p_1 es equivalente a p_2 si existe una reparametrización diferenciable que preserva orientación $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tal que $p_2 = p_1 \circ \phi$.*

La composición de curvas no parametrizadas está bien definida, i.e. es independiente del representante

Ahora vamos a considerar curvas cerradas l, m, \dots , que inician y terminan en el mismo punto o . Vamos a denotar como L_0 al conjunto de todas estas curvas cerradas. Tenemos una operación binaria $l \circ m$ y un elemento identidad definido por la curva constante $i(s) = o$. Sin embargo, no forma un grupo dado que falta el elemento inverso, dado que $l \circ l^{-1}$.

Las holonomías están asociadas con el transporte paralelo alrededor de una

curva cerrada. En caso de un fibrado trivial ¹ la conexión es una uno forma con entradas A_a (con $a = 1, 2, 3$) en un álgebra de Lie sobre M . El transporte paralelo alrededor de una curva cerrada $l \in L_0$ es un mapa desde el fibrado sobre o hasta si mismo definido por el exponencial ordenado,

$$H_A(l) = P \exp \int_l A_a(y) dy^a. \quad (3.4)$$

En el caso general de un fibrado principal $P(M, G)$ con grupo G sobre la variedad M el mapa de holonomía se define de la siguiente manera. Tomamos un punto \hat{o} en el fibrado sobre o , usando la conexión A mandamos la curva cerrada l en M a una curva \hat{l} en P , tal que el punto inicial es

$$\hat{l}(0) = \hat{o} \quad (3.5)$$

y el punto final se da por

$$\hat{l}(1) = \hat{l}(0)H_A(l), \quad (3.6)$$

de esta forma se define $H_A(l)$. La holonomía H_A es elemento del grupo G y el producto denota la acción derecha de G . La propiedad principal de H_A es

$$H_A(l \circ m) = H_A(l)H_A(m) \quad (3.7)$$

Si reemplazamos el punto \hat{o} en el fibrado sobre o por un punto $\hat{o}' = \hat{o}g$ induce la transformación

$$H'_A(l) = g^{-1}H_A(l)g \quad (3.8)$$

¹Revisar el apendice [A](#) para una definición de estos conceptos.

Para transformar el conjunto L_0 en un grupo vamos a introducir una nueva relación de equivalencia. Vamos a identificar a las curvas cerradas que llevan a la misma holonomía para toda conexión suave. Esto, dado que las curvas con la misma holonomía llevan la misma información física de la teoría. Las clases de equivalencia se les llama *bucles*, las vamos a denotar con letras griegas. Hay varias definiciones para esta relación de equivalencia, cada una tiene información interesante para la estructura del grupo [12].

Definición 3.0.2. *Sea*

$$H_A : L_0 \rightarrow G \quad (3.9)$$

el mapa de holonomía de una conexión A definido en el fibrado $P(M, G)$. Dos curvas $l, m \in L_0$ son equivalentes $l \sim m$ si y solo si

$$H_A(l) = H_A(m) \quad (3.10)$$

para todo fibrado $P(M, G)$ y una conexión suave A .

Definición 3.0.3. *A una curva cerrada l se le llama árbol si existe una homotopía desde l a la curva nula, en la cual la imagen de la homotopía se incluye en la imagen de l . Dos curvas cerradas $l, m \in L_0$ son equivalentes $l \sim m$ si y solo si $l \circ m^{-1}$ es un árbol [13].*

Definición 3.0.4. *Dado las curvas cerradas l y m y tres curvas abiertas p_1, p_2 y q tal que*

$$\begin{aligned} l &= p_1 \circ p_2 \\ m &= p_1 \circ q \circ q^{-1} \circ p_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

entonces $l \sim m$.

En [14, 15] se muestra que las tres definiciones son equivalentes y las relaciones de equivalencia están bien definidas con la composición.

A partir de esta relación de equivalencia podemos definir el inverso de un bucle. La composición de una curva con su inverso da un árbol, que es equivalente a la identidad, por lo que podemos escribir $\alpha \circ \alpha^{-1} = \iota$, donde ι es el conjunto de curvas cerradas equivalentes a la curva nula y α^{-1} es el conjunto de curvas cerradas opuestas a las de α .

Vamos a denotar el conjunto de bucles al punto base o como \mathcal{L}_o , bajo la operación inducida por la composición \circ . Por lo que, \mathcal{L}_o es un grupo, es conocido como el grupo de bucles.

Todo homomorfismo $\mathcal{L}_o \rightarrow G$, donde G es un grupo de Lie, define una holonomía, asociada con una conexión (no necesariamente suave). Imponiendo diferenciabilidad en el homomorfismo obtenemos una conexión suave tal que H es la holonomía de esta conexión. Dado que H es un homomorfismo, tenemos las propiedades $H(\alpha \circ \beta) = H(\alpha)H(\beta)$ y $H(\alpha^{-1}) = H(\alpha)^{-1}$.

Vamos a trabajar con funciones continuas de bucles, para esto definimos la topología en el grupo de bucles.

Definición 3.0.5. *Se dice que un bucle α pertenece a la vecindad de β ($U_\epsilon(\beta)$) si existen dos curvas parametrizadas $a(s) \in \alpha$ y $b(s) \in \beta$ tal que $a(s) \in U_\epsilon(b(s))$ con la topología usual de curvas en una variedad [12].*

Es útil definir una relación de equivalencia para curvas abiertas. Dadas dos curvas abiertas p_o^x y q_o^x desde el origen o hasta el punto x en la variedad, decimos que son equivalentes si y solo si $p_o^x \circ q_o^{-1x}$ es un árbol, llamaremos a las relaciones de equivalencia caminos y denotadas por letras griegas.

3.1. Generadores infinitesimal del grupo de bucles

Vamos a considerar una representación del grupo de bucles dado por operadores que actúan en funciones continuas. Vamos a introducir un conjunto de operadores diferenciales que están relacionados con los generadores infinitesimales del grupo.

3.1.1. La derivada de bucles

Consideremos una función de \mathcal{L}_o $\psi(\gamma)$ continua y compleja. Queremos la variación cuando el bucle γ cambia al introducir el bucle infinitesimal $\delta\gamma$ con el punto base en x conectado por un camino π_o^x al punto base de γ , esto se muestra en la figura 3.1.

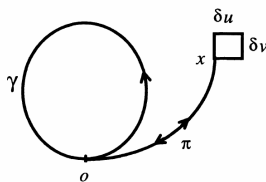


Figura 3.1: El bucle infinitesimal que define la derivada de bucle.

Queremos ver como cambia la función cuando cambiamos el argumento de γ a $\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma$. Para esto consideramos una familia de bucles infinitesimales $\delta\gamma$ que contienen, en una carta de coordenadas en particular, la curva que se obtiene al pasar el vector u^a desde x^a hasta $x^a + \epsilon_1 u^a$, el vector v^a desde $x^a + \epsilon_2 v^a$ hasta $x^a + \epsilon_1 u^a + \epsilon_2 v^a$, el vector $-u^a$ desde $x^a + \epsilon_1 u^a + \epsilon_2 v^a$ hasta $x^a + \epsilon_2 v^a$ y el vector $-v^a$ desde $x^a + \epsilon_2 v^a$ hasta x^a , denotamos este tipo de curvas como $\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v}$.

Dado un bucle γ y un camino π , asumiremos que la función $\psi(\gamma)$ tiene la siguiente expansión,

$$\begin{aligned} \psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = & \psi(\gamma) + \epsilon_1 u^a Q_a(\pi_o^x) \psi(\gamma) + \epsilon_2 v^a P_a(\pi_o^x) \psi(\gamma) \\ & + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b + v^a u^b) S_{ab}(\pi_o^x) \psi(\gamma) \\ & + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b - v^a u^b) \Delta_{ab}(\pi_o^x) \psi(\gamma), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde Q, P, S, Δ son operadores diferenciales en el espacio de funciones $\psi(\gamma)$.

Definición 3.1.1. *Se dice que la función es diferenciable si para cualquier camino π_o^x y vectores u, v , la expansión únicamente depende del operador antisimétrico $\Delta_{ab}(\pi_o^x)$*

$$\psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^{ab}(x) \Delta_{ab}(\pi_o^x)\right) \psi(\gamma), \quad (3.13)$$

donde $\sigma^{ab}(x) = 2\epsilon_1 \epsilon_2 (u^{[a} v^{b]})$ es el elemento de área que encierra el bucle $\delta\gamma$. Se conoce a $\Delta_{ab}(\pi_o^x)$ como la derivada de bucles [16].

La motivación para definir la derivada usando únicamente el operador antisimétrico se basa en que: si $\delta\gamma$ es un árbol, entonces $\psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = \psi(\gamma)$, esto para todo camino π_o^x y vectores u y v . Ahora consideramos distintos casos, si ϵ_1 es nulo,

entonces $\psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = \psi(\gamma) + \epsilon_2 v^a P_a(\pi_o^x) \psi(\gamma)$, pero $\psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = \psi(\gamma)$, por lo tanto $P = 0$, similarmente si $\epsilon_2 = 0$ entonces $Q = 0$ y si u y v son colineales $S = 0$. La relevancia de del grupo de bucles y de la dependencia de un camino de la derivada fue reconocida por Gambini y Trias [17].

Definición 3.1.2. *La derivada para una función de un camino abierto se define como:*

$$\psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma_o^y) = (1 + \frac{1}{2} \sigma^{ab}(x) \Delta_{ab}(\pi_o^x)) \psi(\gamma_o^y). \quad (3.14)$$

A partir de la definición de derivada de bucles podemos estudiar ciertas propiedades importantes.

3.1.2. Propiedades de la derivada de bucles

• **Relaciones de conmutación:** Consideremos dos bucles infinitesimales $\delta\eta_1$ y $\delta\eta_2$ dados por

$$\delta\eta_1 = \pi_o^x \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_x^o \text{ y } \delta\eta_2 = \chi_o^x \circ \delta q \delta r \delta \bar{q} \delta \bar{r} \circ \chi_x^o \quad (3.15)$$

con elementos de área

$$\sigma_1^{ab} = \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b - v^a u^b) \text{ y } \sigma_2^{ab} = \epsilon_3 \epsilon_4 (q^a r^b - r^a q^b) \quad (3.16)$$

Evaluamos la función en el bucle $\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma$ y usando la definición de la derivada cuatro veces se obtiene

$$\begin{aligned}
\psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) &= \psi(\pi_o^x \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_o^x \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) \\
&= (1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x))\psi(\delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) \\
&= (1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x))(1 + \frac{1}{2}\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y)) \\
&\quad (1 - \frac{1}{2}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi_o^x))(1 - \frac{1}{2}\sigma_2^{gh}\Delta_{gh}(\chi_o^y))\psi(\gamma)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Expandiendo el producto e ignorando los términos de orden ϵ_i^2 , tenemos

$$\begin{aligned}
&\psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) \\
&= (1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x) + \frac{1}{2}\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y) + \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y)) \\
&\quad (1 - \frac{1}{2}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi_o^x) - \frac{1}{2}\sigma_2^{gh}\Delta_{gh}(\chi_o^y) + \frac{1}{4}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi_o^x)\sigma_2^{gh}\Delta_{gh}(\chi_o^y))\psi(\gamma) \\
&= (1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x) + \frac{1}{2}\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y) + \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi_o^x) - \frac{1}{2}\sigma_2^{gh}\Delta_{gh}(\chi_o^y) - \frac{1}{4}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi_o^x)\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y) \\
&\quad - \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\sigma_2^{gh}\Delta_{gh}(\chi_o^y) + \frac{1}{4}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi_o^x)\sigma_2^{gh}\Delta_{gh}(\chi_o^y))\psi(\gamma)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Cancelando términos iguales se tiene

$$\begin{aligned}
& \psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) \\
&= \left(1 + \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y) - \frac{1}{4}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi_o^x)\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y)\right)\psi(\gamma) \\
&= \left(1 + \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\sigma_2^{cd}(\Delta_{ab}(\pi_o^x)\Delta_{cd}(\chi_o^y) - \Delta_{cd}(\chi_o^y)\Delta_{ab}(\pi_o^x))\right)\psi(\gamma)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Finalmente llegamos a

$$\psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) = \left(1 + \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\sigma_2^{cd}[\Delta_{ab}(\pi_o^x), \Delta_{cd}(\chi_o^y)]\right)\psi(\gamma) \tag{3.20}$$

Ahora definimos un camino de la siguiente forma

$$\chi_o^y = \delta\eta_1 \circ \chi_o^y. \tag{3.21}$$

Con esto podemos reescribir el bucle $\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma$ en términos de este nuevo camino

$$\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} = \chi_y^o \circ \delta q \delta r \delta \bar{q} \delta \bar{r} \circ \chi_o^y, \tag{3.22}$$

obtenemos la siguiente identidad en términos de las derivadas de bucle

$$\begin{aligned}
\psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) &= \psi(\chi_y^o \circ \delta q \delta r \delta \bar{q} \delta \bar{r} \circ \chi_o^y \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\sigma_2^{ab}\Delta_{ab}(\chi_y^o)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y)\right)\psi(\gamma)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Expandiendo el producto e ignorando los términos de orden ϵ_i^2 . Considerando a Δ_{ab} como una función de bucles y aplicando la derivada de bucles obtenemos

$$\Delta_{ab}(\chi_o^y) = (1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{cd}\Delta_{cd}(\pi_o^x))\Delta_{ab}(\chi_o^y) \quad (3.24)$$

reemplazando esto en la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} & \psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) \\ &= (1 + \frac{1}{2}\sigma_2^{ab}(1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{cd}\Delta_{cd}(\pi_o^x))\Delta_{ab}(\chi_o^y))(1 - \frac{1}{2}\sigma_2^{ef}\Delta_{ef}(\chi_o^y))\psi(\gamma) \\ &= (1 + \frac{1}{2}\sigma_2^{ab}\Delta_{ab}(\chi_o^y) + \frac{1}{4}\sigma_2^{ab}\sigma_1^{cd}\Delta_{cd}(\pi_o^x)[\Delta_{ab}(\chi_o^y)])(1 - \frac{1}{2}\sigma_2^{ef}\Delta_{ef}(\chi_o^y))\psi(\gamma) \quad (3.25) \\ &= (1 + \frac{1}{2}\sigma_2^{ab}\Delta_{ab}(\chi_o^y) - \frac{1}{2}\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi_o^y) + \frac{1}{4}\sigma_2^{ab}\sigma_1^{cd}\Delta_{cd}(\pi_o^x)[\Delta_{ab}(\chi_o^y)])\psi(\gamma) \\ &= (1 + \frac{1}{4}\sigma_2^{ab}\sigma_1^{cd}\Delta_{cd}(\pi_o^x)[\Delta_{ab}(\chi_o^y)])\psi(\gamma) \end{aligned}$$

Juntando ambas expresiones para el conmutador se obtiene

$$[\Delta_{ab}(\pi_o^x), \Delta_{cd}(\chi_o^y)] = \Delta_{cd}(\pi_o^x)[\Delta_{ab}(\chi_o^y)], \quad (3.26)$$

de la misma forma tenemos que

$$[\Delta_{cd}(\chi_o^y), \Delta_{ab}(\pi_o^x)] = \Delta_{cd}(\chi_o^y)[\Delta_{ab}(\pi_o^x)], \quad (3.27)$$

por lo que, llegamos a

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x)[\Delta_{cd}(\chi_o^y)] = -\Delta_{cd}(\chi_o^y)[\Delta_{ab}(\pi_o^x)]. \quad (3.28)$$

Esto muestra la dependencia de la derivada de bucles en el camino escogido. Demostraremos que estas relaciones se pueden escribir como el conmutador de grupos, cuando demostremos que la derivada de bucles es generadora del grupo de bucles.

Podemos ver esta relación de conmutación de una forma distinta usando un operador dependiente de un bucle $U(\alpha)$ sobre el espacio de funciones de bucles, el operador introduce una deformación finita en el argumento de la función,

$$U(\alpha)\psi(\gamma) = \psi(\alpha \circ \gamma). \quad (3.29)$$

Se puede definir una inversa para el operador,

$$U(\alpha)^{-1} = U(\alpha^{-1}), \quad (3.30)$$

y una ley de composición

$$U(\alpha)U(\beta)\psi(\gamma) = U(\alpha \circ \beta)\psi(\gamma). \quad (3.31)$$

Ahora, al evaluar la derivada de bucles en el camino deformado $\alpha \circ \pi_o^x$, obtenemos

$$\psi(\alpha \circ \pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \alpha^{-1} \circ \gamma) = \left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi_o^x)\right)\psi(\gamma) \quad (3.32)$$

donde $\delta\gamma$ es el bucle infinitesimal asociado con el elemento de área σ^{ab} . Usando la

definición del operador U obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha \circ \pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \alpha^{-1} \circ \gamma) &= U(\alpha)\psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \alpha^{-1} \circ \gamma) \\
&= U(\alpha)\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\right)\psi(\alpha^{-1} \circ \gamma) \\
&= U(\alpha)\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\Delta_{ab}(\pi_o^x)\right)U(\alpha)^{-1}\psi(\gamma).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Llegamos a la identidad

$$\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi_o^x) = U(\alpha)\Delta_{ab}(\pi_o^x)U(\alpha)^{-1}, \tag{3.34}$$

que muestra como transforma la derivada de bucles respecto a deformaciones finitas del camino.

• **Identidades de Bianchi:** Para mostrar que la derivada de bucles cumple relaciones similares a las identidades de Bianchi definimos un nuevo operador diferencial conocido como la derivada covariante de Mandelstam, que actúa sobre funciones de caminos abiertos.

Definición 3.1.3. *Dada una función en un camino abierto $\psi(\pi_o^x)$, una carta de coordenadas en un punto x y un vector en la carta u^a , definimos la derivada de Mandelstam considerando el cambio de la función cuando el camino se extiende desde x a $x + \epsilon u$ por el camino infinitesimal δu de la siguiente forma*

$$\psi(\pi_o^x \circ \delta u) = (1 + \epsilon u^a D_a)\psi(\pi_o^x). \tag{3.35}$$

Denotamos el nuevo camino como $\pi_o^{x+\epsilon u}$. Esto se muestra en la figura 3.2.

Notando que ϵu^a transforma como vector, se puede ver que D_a transforma como una 1-forma.

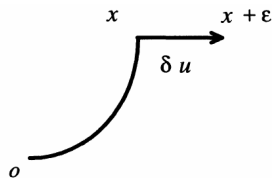


Figura 3.2: El bucle infinitesimal para definir la derivada de Mandelstam.

La idea detrás de las identidades de Bianchi es el borde de un borde es cero. En el lenguaje de bucles, esto se puede expresar de la siguiente forma: consideramos un árbol ι , un representante de este árbol tiene la forma de una caja con lados δu , δv y δw conectada al origen por el camino π_o^x , esto se muestra en la figura 3.3. Las

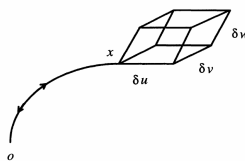


Figura 3.3: El bucle infinitesimal que se usa para derivar las identidades de Bianchi.

identidades de Bianchi quedan como:

$$D_c \Delta_{ab}(\pi_o^x) + D_a \Delta_{bc}(\pi_o^x) + D_b \Delta_{ca}(\pi_o^x) = 0 \quad (3.36)$$

- **Identidad de Ricci:**

Proposición 3.1.1. *La conmutación de las derivadas de Mandelstam cumplen con la siguiente relación con la derivada de bucles*

$$[D_a, D_b] \psi(\pi_o^x) = \Delta_{ab}(\pi_o^x) \psi(\pi_o^x) \quad (3.37)$$

• **Derivada de bucles como generadora del grupo:** Vamos a demostrar que, por la superposición de derivadas de bucle podemos generar cualquier bucle homotopico a la identidad. Sea $\gamma(s) \in \gamma$ una curva parametrizada perteneciente al bucle γ con $s \in [0, 1]$. Consideramos una familia de bucles monoparametricos $\eta(t, s)$ que interpola de forma suave entre $\gamma(s)$ y la curva nula, tal que $\eta(0, s)$ es la curva nula y $\eta(1, s) = \gamma(s)$. Vamos a considerar las curvas $\eta(1, s) = \gamma(s)$ y $\eta(1 - \epsilon, s)$. Ambas curvas están separadas por un área infinitesimal, usamos curvas transversales de forma que los bucles infinitesimales $\delta\eta_i$ cubren el área.

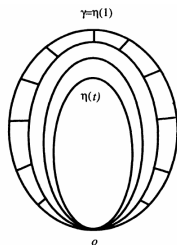


Figura 3.4: Construcción de un bucle a partir de la derivada de bucle.

Se puede expresar la curva $\gamma(s)$ en términos de los bucles infinitesimales, dado que las dos curvas están separadas por un área infinitesimal

$$\gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(s, 1 - \epsilon) \circ \delta\eta_1 \circ \dots \circ \delta\eta_n, \quad (3.38)$$

Proposición 3.1.2. *Podemos expresar la función de bucles como*

$$\psi(\eta(1)) = \psi(\eta(1 - \epsilon)) + \epsilon \int_0^1 ds \dot{\eta}^a(1 - \epsilon, s) \eta'^b(1 - \epsilon, s) \Delta_{ab}(\eta(1 - \epsilon)_s) \psi(\eta(1 - \epsilon)), \quad (3.39)$$

donde $\dot{\eta}(t, s) = d\eta(t, s)/ds$ y $\eta'(t, s) = d\eta(t, s)/dt$ e ignoramos la dependencia sobre s por simplicidad.

Repitiendo la misma construcción con los términos $\psi(\eta(1-\epsilon))$, se realiza el proceso hasta que la curva final es la identidad ($\eta(0, s)$), obtenemos una exponencial ordenada.

$$\psi(\eta(1, s)) = T \exp \int_0^1 dt \int_0^1 ds \dot{\eta}(1-\epsilon, s) \eta'(1-\epsilon, s) \Delta_{ab}(\eta(1-\epsilon)_o^s) \psi(\eta(0, s)) \quad (3.40)$$

donde la integral exterior esta ordenada en t. Este resultado es la versión de bucles de la formula de Stokes no abeliana [18] y permite generar un bucle homotopico a la identidad a partir de la derivada de bucles. En este caso necesitamos un numero infinito de generadores en la exponencial, a diferencia de un grupo de Lie. Podemos escribir el conmutador de la derivada de bucles de la siguiente forma,

$$[\Delta_{ab}(\pi_o^x), \Delta_{cd}(\chi_o^y)] = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma^{ab}} (\Delta_{cd}(\delta\eta_1 \circ \chi_o^y) - \Delta_{cd}(\chi_o^y)) \quad (3.41)$$

Por lo que podemos ver que el conmutador del generador del grupo es similar a la del grupo de Lie.

3.1.3. Derivada de conexión

En la sección anterior introdujimos la derivada de bucles que tiene ciertas propiedades similares a las de la curvatura en una teoría de calibre. Ahora vamos a introducir un operador diferencial con propiedades similares a las de una conexión o de potencial vector [12, 19]. Consideremos que la variedad está cubierta por parches sobrepuestos de coordenadas. Adherimos un camino $\pi_o^{y_i}$ a cada parche de coordenadas \mathcal{P}^i que va desde el origen hasta el punto y_o^i en \mathcal{P}^i . Introducimos una

función continua con soporte en \mathcal{P}^i tal que asocia cada punto x en el parche un camino $\pi_{y_o}^x$.

Dado un vector u en x , la derivada de conexión de una función continua de un bucle $\psi(\gamma)$ se obtiene considerando la deformación del bucle dado por el camino $\pi_{y_o}^x \circ \pi_{y_o}^o \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^{y_o} \circ \pi_{y_o}^o$, esto se muestra en la figura 3.5. El camino δu va desde x hasta $x + \epsilon u$.

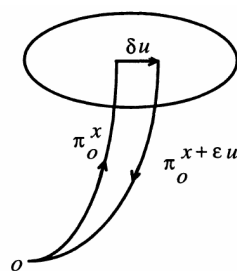


Figura 3.5: Camino que define la derivada de conexión.

Se dice que la derivada de conexión δ_a existe y esta bien definida si la función dependiente de bucles evaluada en el bucle deformado admite la expansión en términos de ϵu^a dada por

$$\psi(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \gamma) = (1 + \epsilon u^a \delta_a(x)) \psi(\gamma) \quad (3.42)$$

donde π_o^x es el camino $\pi_o^{y_o} \circ \pi_{y_o}^x$.

Si $\psi(\gamma)$ tiene una derivada de bucles bien definida $\iff \psi(\gamma)$ tiene una derivada de conexión bien definida.

La derivada de conexión tiene similitudes con el potencial vector de una teoría de calibre, una de las características más importantes del potencial vector es su

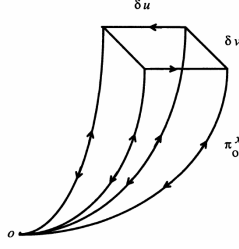


Figura 3.6: Camino que define la relación entre la derivada de bucles y la derivada de conexión.

dependencia en el calibre, esto también se puede ver, de cierto modo, en la derivada de conexión.

La derivada de conexión depende del camino escogido. Consideremos la derivada de conexión en un punto x y tenemos dos caminos que conectan el origen o con el punto x π_o^x y χ_o^x . Consideramos dos caminos equivalentes en el grupo de bucles

$$\chi_o^x \circ \delta u \circ \chi_{x+\epsilon u}^o = \chi_o^x \circ \pi_x^o \circ \pi_o^x \circ \delta u \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \pi_o^{x+\epsilon u} \circ \chi_{x+\epsilon u}^o. \quad (3.43)$$

Introducimos un operador $U(x)$ que depende del punto en la variedad, este se construye a través del operador dependiente del bucle $U(\gamma)$ de la siguiente forma: $U(x) = U(\chi_o^x \circ \pi_x^o)$. Esto nos da la identidad

$$(1 + \epsilon u^a \delta_a^{(\chi)}(x))\psi(\gamma) = U(x)(1 + \epsilon u^a \delta_a^{(\pi)}(x))U^{-1}(x + \epsilon u)\psi(\gamma) \quad (3.44)$$

y obtenemos el cambio del camino de la derivada de conexión

$$\delta_a^{(\chi)}(x) = U(x)\delta_a^{(\pi)}(x)U^{-1}(x) + U(x)\partial_a U^{-1}(x). \quad (3.45)$$

La cual es análoga a la ley de transformación para una conexión de calibre bajo

un cambio en el calibre.

La relación usual entre la conexión y holonomías en una carta local de las teorías de calibre se puede escribir en este lenguaje. Se puede usar incrementos diferenciales para escribir un bucle. La expresión es la siguiente

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta\gamma_1 \circ \delta\gamma_2 \circ \cdots \circ \delta\gamma_n, \quad (3.46)$$

donde $\delta\gamma_i = \pi_0^{x_i} \delta u_i \pi_{x+\epsilon u_i}$, esta relación conecta el operador de deformación con la derivada de conexión,

$$U(\gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + (x_2 - x_1)^a \delta_a(x_1)) \times \cdots \times (1 + (x_1 - x_k)^a \delta_a(x_k)). \quad (3.47)$$

Esta relación se puede escribir como la exponencial ordenada

$$U(\gamma) = P \exp \left(\int_{\gamma} dy^a \delta_a(y) \right). \quad (3.48)$$

Otra vez, llegamos a una expresión similar a lo encontrado en teorías de calibre. La expresión recuerda a la holonomía en términos de la exponencial ordenada de la conexión. A partir de estas similitudes, podemos encontrar una representación del grupo de bucles en términos de un grupo de calibre.

3.2. Representación del grupo de bucles

En las secciones anteriores obtuvimos relaciones entre los generadores del grupo de bucles, de forma independiente a cualquier representación. Ahora vamos a estudiarlos en el contexto de una representación en términos de un grupo de calibre.

Consideremos un homomorfismo del grupo de bucles hacia un grupo de calibre G

$$\mathcal{H} : \mathcal{L}_0 \rightarrow G \quad (3.49)$$

i.e.

$$\gamma \longrightarrow H(\gamma) \quad (3.50)$$

tal que $H(\gamma_1)H(\gamma_2) = H(\gamma_1 \circ \gamma_2)$.

Consideramos en grupo de Lie $SU(N)$, con $N^2 - 1$ generadores X^i tal que $\text{Tr}X^i = 0$ y cumplen

$$[X^i, X^j] = C_k^{ij} X^k, \quad (3.51)$$

donde C_k^{ij} son las constantes de estructura del grupo. Vamos a asumir que la derivada de bucles del homomorfismo existe y esta bien definida, esto nos permitirá definir objetos como la conexión y la curvatura a partir del lenguaje de bucles.

Vamos a estudiar el efecto de la derivada de conexión sobre H

$$(1 + \epsilon u^a \delta_a(x))H(\gamma) = H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \gamma) = H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o)H(\gamma), \quad (3.52)$$

donde $\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o$ es infinitesimal, es decir, esta en un vecindario muy pequeño de la identidad. Dado que H es continuo y diferenciable,

$$H(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o) = 1 + i\epsilon u^a A_a(x), \quad (3.53)$$

donde $A_a(x)$ es un elemento del álgebra del grupo. Esto es, $A_a(x) = A_a^i X^i$. por lo que se tiene,

$$\delta_a(x)H(\gamma) = iA_a(x)H(\gamma). \quad (3.54)$$

De forma similar

$$H(\pi_o^x \circ \delta \gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = (1 + i\frac{\epsilon}{2}\sigma^{ab}F_{ab}(x))H(\gamma) \quad (3.55)$$

Se tiene,

$$\Delta_{ab}(\pi_o^x)H(\gamma) = iF_{ab}(x)H(\gamma) \quad (3.56)$$

donde F_{ab} es un tensor antisemítico .

Consideremos un cambio en el camino π_o^x , dado que esto resultará en un cambio en el calibre. Nótese que si cambiamos el camino por $\pi_o^x \rightarrow \pi_o'^x \circ \pi_x^o \circ \pi_o^x$, llegamos a

$$F'_{ab} = H(x)F_{ab}H^{-1}(x), \quad (3.57)$$

donde $H(x) = H(\pi_o'^x \circ \pi_x^o)$. También tenemos la relación entre la curvatura y el potencial

$$F_{ab}(x) = \partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x) + i[A_a, A_b]. \quad (3.58)$$

De la misma forma para las transformaciones de calibre

$$A'_a(x) = H(x)A_a(x)H^{-1}(x) - iH(x)\partial H^{-1}(x). \quad (3.59)$$

Aplicando el operador de deformación $U(\eta)$ sobre $H(\gamma)$ obtenemos,

$$U(\eta)H(\gamma) = H(\eta \circ \gamma) = H(\eta)H(\gamma), \quad (3.60)$$

Usando la identidad (3.48) para el operador $U(\eta)$, llegamos

$$U(\eta)H(\gamma) = P \exp\left(\oint_{\eta} dy^a \delta_a(y)\right)H(\gamma), \quad (3.61)$$

usando la relación entre la derivada de conexión δ_a y el potencial A_a llegamos a

$$H(\eta) = P \exp i \oint_{\eta} dy^a A_a(y). \quad (3.62)$$

Esto muestra la relación usual de la holonomía en términos del potencial A_a .

Los caminos abiertos están relacionados con campos materiales acoplados a la teoría de calibre. Para esto, vamos a describir el campo material en el punto x usando una función de un camino abierto $\psi(\pi_o^x)$. La extensión de H se puede definir como la composición de un bucle con un camino,

$$\psi(\gamma \circ \pi_o^x) = H(\gamma)\psi(\pi_o^x). \quad (3.63)$$

El camino escogido ayuda a escoger el calibre. Vamos a fijar una familia de caminos, cada una asociada a cada punto de la variedad. En este sentido las funciones ψ son

funciones de los puntos etiquetada con el camino escogido π , $\psi^{(\pi)}(x)$. Si cambiamos el camino $\pi_o^x \rightarrow \pi_o'^x \circ \pi_x^o \circ \pi_o^x$, obtenemos

$$\psi^{\pi'}(x) = H(\pi_o'^x \circ \pi_x^o) \psi^\pi(x). \quad (3.64)$$

La derivada de Mandelstam D_a (definida en (3.35)) se comporta como la derivada covariante usual de la teoría de calibre. Consideremos la acción de D_a sobre una función de un camino abierto

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon u^a D_a) \psi(\pi_o^x) &= \psi(\pi_o^x \circ \delta u) = \psi(\pi_o^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^o \circ \pi_o^{x+\epsilon u}) \\ &= (1 + \epsilon u^a \delta_a(x)) \psi(\pi_o^{x+\epsilon u}) \\ &= (1 + \epsilon u^a \delta_a(x)) (1 + \epsilon u^b \partial_b) \psi(\pi_o^x), \end{aligned} \quad (3.65)$$

expandimos el producto y nos quedamos con los términos a primer orden, llegando a la siguiente identidad

$$D_a \psi(\pi_o^x) = \partial_a \psi^{(\pi)}(x) + \delta_a(x) \psi(\pi_o^x), \quad (3.66)$$

usando la relación de la derivada δ_a con el potencial A_a tenemos una identidad similar a la derivada covariante

$$D_a \psi(\pi_o^x) = \partial_a \psi^{(\pi)}(x) + i A_a(x) \psi^{(\pi)}(x). \quad (3.67)$$

También tenemos la forma usual de la identidad de Ricci

$$[D_a, D_b] = i F_{ab}. \quad (3.68)$$

En esta sección mostramos como las teorías de calibre surgen como representaciones del grupo de bucles. Notemos que las propiedades demostradas son independientes del calibre. En el siguiente capítulo introduciremos nuevas técnicas para trabajar con bucles en el contexto de teorías de calibre.

Capítulo 4

Grupo de bucles extendido

Continuando con el objetivo de describir teorías de calibre en términos de bucles, en este capítulo vamos a introducir técnicas que nos van a ayudar a describir bucles. La idea es representar bucles usando objetos más fáciles de trabajar con técnicas analíticas. Encontraremos que las cantidades, que inicialmente se introducen para describir bucles, tienen el potencial de reemplazar el grupo de bucles y resultar en una nueva formulación de la teoría.

4.1. Campos multitangentes

Toda la información invariante de calibre presente en un campo de calibre se puede obtener a partir de la holonomía. Esto implica que la única información que necesitamos saber de los bucles es la que se usa en la definición de la holonomía

[20],

$$H_A(\gamma) = P \exp \left(i \oint_{\gamma} A_a dy^a \right). \quad (4.1)$$

Se puede reescribir esta definición de una forma mas explicita

$$H_A(\gamma) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int dx_1^{a_1} \dots dx_n^{a_n} A_{a_1}(x_1) \dots A_{a_n}(x_n) X^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n, \gamma), \quad (4.2)$$

donde los objetos X dependientes del bucle se dan por

$$\begin{aligned} X^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n, \gamma) = & \\ & \oint_{\gamma} dy_n^{a_n} \int_0^{y_n} dy_{n-1}^{a_{n-1}} \dots \int_0^{y_2} dy_1^{a_1} \delta(x_n - y_n) \dots \delta(x_1 - y_1) = \\ & \oint_{\gamma} dy_n^{a_n} \oint_{\gamma} dy_{n-1}^{a_{n-1}} \dots \oint_{\gamma} dy_1^{a_1} \delta(x_n - y_n) \dots \delta(x_1 - y_1) \Theta_{\gamma}(0, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

y $\Theta_{\gamma}(0, y_1, \dots, y_n)$ es una función de Heaviside generalizada que ordena los puntos sobre el camino empezando por el origen del bucle,

$$\Theta_{\gamma}(0, y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n \text{ a lo largo del bucle} \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (4.4)$$

En (4.3) se define el objeto X , llamados los multitangentes de rango n del bucle γ . Al escribir la holonomía en esta forma podemos aislar la dependencia del bucle en los multitangentes. Con el objetivo de simplificar cálculos, vamos a introducir la notación

$$X^{\mu_1 \dots \mu_n}(\gamma) \equiv X^{a_1 x_1 \dots a_n x_n}(\gamma) \equiv X^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n, \gamma), \quad (4.5)$$

con $\mu_i \equiv (a_i x_i)$. Los objetos X transforman como densidades multivectoriales bajo las transformaciones de coordenadas que fijan el punto o fijo. En otras palabras

$$x^a \rightarrow x'^a = D^a(x). \quad (4.6)$$

Entonces

$$X^{a_1 x'_1 \dots a_n x'_n} (D\gamma) = \frac{\partial x'_1{}^{a_1}}{\partial x_1{}^{b_1}} \dots \frac{\partial x'_n{}^{a_n}}{\partial x_n{}^{b_n}} \frac{1}{J(x_1)} \dots \frac{1}{J(x_n)} X^{b_1 x_1 \dots b_n x_n} \quad (4.7)$$

donde J es el jacobiano de la transformación.

Los X no son precisamente coordenadas, en el sentido de que no son independientes. Están restringidos por relaciones algebraicas y diferenciales. Las relaciones algebraicas parten de relaciones que satisfacen la función de Heaviside generalizada,

$$\begin{aligned} \Theta_\gamma(o, y_1, y_2, y_3) + \Theta_\gamma(o, y_2, y_1, y_3) + \Theta_\gamma(o, y_2, y_3, y_1) &= \Theta_\gamma(o, y_2, y_3), \\ \Theta_\gamma(o, y_1) &= 1, \\ \Theta_\gamma(o, y_1, y_2) + \Theta_\gamma(o, y_2, y_1) &= 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Proposición 4.1.1. *Tenemos las relaciones entre los X ,*

$$\begin{aligned} X^{\mu_1 \mu_2} + X^{\mu_2 \mu_1} &= X^{\mu_1} X^{\mu_2}, \\ X^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + X^{\mu_2 \mu_1 \mu_3} + X^{\mu_2 \mu_3 \mu_1} &= X^{\mu_1} X^{\mu_2 \mu_3}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En general,

$$X^{\underline{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n}} \equiv \sum_{P_k} X^{P_k(\mu_1 \mu_n)} = X^{\mu_1 \dots \mu_k} X^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \quad (4.10)$$

Donde la suma es sobre todas las permutaciones de las variables μ que preservan el orden $\mu_1 \dots \mu_k$ y $\mu_{k+1} \dots \mu_n$ en si mismos. La notación de los índices subrayados para simbolizar permutación.

Las restricciones diferenciales aseguran que que la holonomía tiene la transformación correcta bajo transformaciones de calibre.

Proposición 4.1.2.

$$\frac{\partial}{\partial x_i^{a_i}} X^{a_1 x_1 \dots a_i x_i \dots a_n x_n} = (\delta(x_i - x_{i-1}) - \delta(x_i - x_{i+1})) X^{a_1 x_1 \dots a_{i-1} x_{i-1} a_{i+1} x_{i+1} \dots a_n x_n} \quad (4.11)$$

En esta expresión, ambos x_0 y x_{n+1} representan el punto base del bucle.

Cualquier densidad tensorial $D^{a_1 x_1 \dots a_n x_n}$ que satisface esta restricción se puede colocar en (4.2) y se obtiene un objeto que transforma bien bajo transformaciones de calibre. Por esto, se puede trabajar con densidades multitensoresiales para construir objetos invariantes de calibre. Llamamos \mathcal{D}_o al espacio de multitensores que satisfacen la restricción diferencial. A partir de esta construcción podemos representar las teorías de calibre únicamente en términos de las densidades multitensoresiales.

4.2. El grupo de bucles extendido

El grupo de bucles no es un grupo de Lie dado que no existe un subgrupo monoparametrico (dado que solo podemos definir potencias enteras de los generadores), es decir, no existe un difeomorfismo local hacia un subconjunto de \mathbb{R}^n . Esto hace que grupo no sea una variedad. En esta sección vamos a introducir un grupo de Lie tal que el grupo de bucles es un subgrupo del mismo, esto nos va a ayudar a usar las propiedades de los grupos de Lie para estudiar bucles.

El grupo de bucles especial extendido

Definición 4.2.1. *Consideremos densidades multitenoriales reales arbitrarias, definimos la cantidad \mathbf{E} como*

$$\mathbf{E} = (E, E^{\mu_1}, \dots, E^{\mu_1 \dots \mu_n}, \dots) \equiv (E, \vec{E}), \quad (4.12)$$

donde E es un numero real y $E^{\mu_1 \dots \mu_n}$ es una densidad multivectorial.

El conjunto de todos los \mathbf{E} forma un espacio vectorial, denotado por \mathcal{E} . Introducimos una multiplicación en \mathcal{E} de la siguiente forma: dados dos vectores \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 definimos $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ como el vector con componentes

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = (E_1 E_2, E_1 \vec{E}_2 + \vec{E}_1 E_2 + \vec{E}_1 \times \vec{E}_2) \quad (4.13)$$

donde $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ esta dado por

$$(\vec{E}_1 \times \vec{E}_2)^{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{i=1}^{n-1} E_1^{\mu_1 \dots \mu_i} E_2^{\mu_{i+1} \dots \mu_n}. \quad (4.14)$$

Escribiendo en componentes

$$(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2)^{\mu_1 \dots \mu_n} = \sum_{i=0}^n E_1^{\mu_1 \dots \mu_i} E_2^{\mu_{i+1} \dots \mu_n} \quad (4.15)$$

Con la convención

$$E^{\mu_1 \dots \mu_0} = E^{\mu_{n+1} \dots \mu_n} = E. \quad (4.16)$$

Proposición 4.2.1. *El producto es asociativo y distributivo con respecto a la suma de vectores.*

Existe un elemento nulo (el vector nulo) y una identidad dada por

$$\mathbf{I} = (1, 0, \dots, 0, \dots). \quad (4.17)$$

Existe un elemento inverso para todo vector con su componente cero no nula

$$\mathbf{E}^{-1} = E^{-1} \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i E^{-i-1} (\mathbf{E} - E \mathbf{I})^i, \quad (4.18)$$

tal que

$$\mathbf{E} \times \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^{-1} \times \mathbf{E}. \quad (4.19)$$

A partir de las proposiciones anteriores llegamos a que el conjunto de todos los vectores \mathbf{E} forma un grupo con el producto \times . El producto \times tiene una propiedad

interesante cuando se le restringe a multitangentes. En este caso se corresponde a la composición de bucles,

$$\mathbf{X}(\gamma_1) \times \mathbf{X}(\gamma_2) = \mathbf{X}(\gamma_1 \circ \gamma_2), \quad (4.20)$$

donde $\mathbf{x}(\gamma) = (1, x^{\mu_1 \dots \mu_n}(\gamma), \dots)$.

Esta identidad nos da una relación entre el producto \times y la composición de bucles, lo que nos puede dar una generalización para composición entre bucles sin el mismo punto base o un camino con un bucle en el punto final.

Vamos a centrar nuestra atención en multitensores que cumplen las restricciones algebraicas y diferenciales. Consideremos que conjunto de vectores $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$ que tienen la componente cero igual a uno, $\mathbf{X} = (1, \vec{X})$. El conjunto \mathcal{X} es cerrado bajo la ley de composición \times , por lo que es un subgrupo de \mathcal{E} conocido como grupo de bucles extendido especial SeL.

- Restricción algebraica

Consideremos las componentes de la suma de permutaciones del producto

$$(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_1 \times \vec{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n}. \quad (4.21)$$

Consideremos

$$(\vec{X}_1 \times \vec{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} = \sum_{i=1}^{n-1} (X_1, X_2)_i^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} \quad (4.22)$$

con $(X_1, X_2)_i^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} \equiv X_1^{\mu_1 \dots \mu_i} X_2^{\mu_{i+1} \dots \mu_n}$. Se puede ver que

$$(X_1, X_2)_i^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} = \sum_{n=\text{máx}(0, k+i-n)}^{\text{mín}(i, k)} X_1^{\mu_1 \dots \mu_n \mu_{k+1-n}} X_2^{\mu_{n+1} \dots \mu_{k+1} \mu_{k+i-n+1} \dots \mu_n}, \quad (4.23)$$

donde usamos la notación $X^{\mu_{n+1} \dots \mu_i \mu_j \dots \mu_m} = X^{\mu_j \dots \mu_m \mu_{i+1} \dots \mu_i} = X^{\mu_j \dots \mu_m}$. Ahora sumamos sobre i , operando, obtenemos

$$\begin{aligned} (\vec{X}_1 \times \vec{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} &= X_1^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_2]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \\ &\quad + X_2^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_1]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \\ &\quad + (X_1 \times X_2)^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_1 + \vec{X}_2]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

reemplazando (4.24) en (4.22) llegamos a

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} &= X_1^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_2]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} + X_1^{\mu_1 \dots \mu_k} X_1^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \\ &\quad + X_2^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_1]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} + X_2^{\mu_1 \dots \mu_k} X_2^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \\ &\quad + (X_1 \times X_2)^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_1 + \vec{X}_2]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \end{aligned} \quad (4.25)$$

usando la restricción algebraica sobre X_1 y X_2

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} &= X_1^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_2]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} + X_1^{\mu_1 \dots \mu_k} X_1^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \\ &\quad + X_2^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_1]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} + X_2^{\mu_1 \dots \mu_k} X_2^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \\ &\quad + (X_1 \times X_2)^{\mu_1 \dots \mu_k} [\vec{X}_1 \times \vec{X}_2 + \vec{X}_1 + \vec{X}_2]^{\mu_{k+1} \dots \mu_n} \end{aligned} \quad (4.26)$$

obtenemos que

$$(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} = (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)^{\mu_1 \dots \mu_k} (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)^{\mu_{k+1} \dots \mu_n}. \quad (4.27)$$

A partir de las propiedades anteriores se puede llegar a que hay un subgrupo de SeL isomorfo al grupo de bucles. Además, SeL es una estructura mas general que el grupo de bucles.

Además,

$$\mathbf{X}^\lambda \times \mathbf{X}^\mu = \mathbf{X}^{\lambda+\mu} \quad (4.28)$$

Llegamos a que el conjunto $\{\mathbf{X}^\lambda | \lambda \in \mathcal{R}, \mathbf{X} \in \mathcal{X}\}$ definen un subgrupo abeliano de un parámetro. Si λ no es entero, entonces \mathbf{X}^λ no es multitangente si \mathbf{X} es multitangente. Una representación matricial del grupo SeL se genera a través de extensión de la holonomía. La holonomía extendida esta asociada con una conexión no abeliana $A_{ax} \equiv A_a(x)$ se define a $H_A(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv (1, iA_{a_1x_1}, \dots, i^n A_{a_nx_n}, \dots), \\ \mathbf{X} &\equiv (1, X^{a_1x_1}, \dots, X^{a_1x_1 \dots a_nx_n}, \dots), \end{aligned} \quad (4.29)$$

El punto \cdot actúa como una convención de Einstein generalizada, en la que se suma sobre los índices a_i y se integra sobre los índices x_i . Tenemos que

$$\begin{aligned} H_A(\mathbf{X}_1)H_A(\mathbf{X}_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} i^j A_{\mu_1 \dots \mu_k} A_{\mu_{k+1} \dots \mu_j} X_1^{\mu_1 \dots \mu_k} X_2^{\mu_{k+1} \dots \mu_j} \\ &\sum_{j=0}^{\infty} i^j A_{\mu_1 \dots \mu_j} \left(\sum_{j=0}^{\infty} X_1^{\mu_1 \dots \mu_k} X_2^{\mu_{k+1} \dots \mu_j} \right) = H_A(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

La correspondencia $\mathbf{X} \rightarrow H_A(\mathbf{X})$ da una representación del grupo SeL en un grupo de calibre en particular. Demostramos que hay un subgrupo monoparametrico de SeL. Estudiando sus propiedades podemos encontrar un álgebra asociada a SeL.

Generadores SeL

Consideremos un subgrupo monoparametrico \mathbf{X}^λ y supongamos que aumentamos λ por una cantidad infinitesimal. Escribimos

$$\mathbf{X}^{\lambda+d\lambda} = \mathbf{X}^\lambda \times \mathbf{X}^{d\lambda} = \mathbf{X}^\lambda \times \frac{d\mathbf{X}^\lambda}{d\lambda} d\lambda, \quad (4.31)$$

tomando $\lambda = 0$ obtenemos

$$\mathbf{X}^{d\lambda} = \mathbf{I} + \mathbf{F}d\lambda, \quad (4.32)$$

donde

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{X}^\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \left(0, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \vec{X}^i \right) = (0, \vec{F}). \quad (4.33)$$

Reemplazando (4.32) en (4.31) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para los elementos de \mathbf{X}^λ

$$\frac{d\mathbf{X}^\lambda}{d\lambda} = \mathbf{X}^\lambda \times \mathbf{F} = \mathbf{F} \times \mathbf{X}^\lambda. \quad (4.34)$$

Efectivamente podemos escribir (4.33), (la derivada evaluada en 0 como la serie).

Además, se cumple la ecuación (4.34).

Esta ecuación puede integrarse iterativamente y resulta

$$\mathbf{X}^\lambda = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{k!} \mathbf{F}^k + \mathbf{F}^{n+1} \times \int_0^\lambda d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \cdots \int_0^{\lambda_n} d\lambda_{n+1} \mathbf{X}^{\lambda_{n+1}}. \quad (4.35)$$

Este proceso se detiene para cualquier componente de rango finito n ($\mathbf{F}^{n+1} =$

$\mathbf{F} \times n+1 \times \mathbf{F} = 0$ en este caso). Por lo tanto,

$$\mathbf{X}^\lambda = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbf{F}^k = \exp(\lambda \mathbf{F}). \quad (4.36)$$

Podemos concluir que el vector \mathbf{F} dado por (4.33) es el generador del subgrupo monoparametrico $\{\mathbf{X}^\lambda\}$.

El vector \mathbf{F} satisface la restricción diferencial y la restricción algebraica homogénea ($X^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n} = 0$).

El conjunto de todos los \mathbf{F} que satisfacen la restricción diferencial y la restricción algebraica homogénea forman un espacio vectorial \mathcal{F} . Se puede definir una operación bilineal en \mathcal{F} de la siguiente forma,

$$[\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2] = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_1 \text{ para todo } \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in \mathcal{F}. \quad (4.37)$$

Esta operación es cerrada en \mathcal{F} . El espacio vectorial \mathcal{F} y la operación (4.37) forman un álgebra de Lie asociada con el grupo SeL .

4.3. Coordenadas de bucles

Las cantidades \mathbf{X} no se pueden especificar libremente, dado que satisfacen las restricciones diferenciales y algebraica. Por esto, es importante encontrar el álgebra del grupo, dado que usando los parámetros libres podemos encontrar las multitangentes que podemos especificar libremente. En la sección anterior defini-

mos los objetos \mathbf{F} que, en lugar de la restricción algebraica, cumplen la restricción algebraica homogénea. Se obtiene una solución de las restricciones algebraicas y homogéneas de la siguiente forma

$$\mathbf{X} = \exp(\mathbf{F}). \quad (4.38)$$

El objetivo principal de esta sección es encontrar una forma de obtener los \mathbf{F} (por tanto los \mathbf{X}) a partir de objetos que se pueden especificar libremente.

Tensores transversales

La noción de transversalidad (divergencia igual a cero) esta bien definida para densidades vectoriales, dado que podemos calcular la divergencia sin introducir una métrica externa. Vamos a introducir la noción de proyectores transversales y longitudinales en el espacio de densidades multivectoriales.

Definición 4.3.1. *Dados dos campos transversales V^{ax} y W^{ax} se puede definir el producto interno*

$$g(V, W) = \int d^3x V^a A_a^W \quad (4.39)$$

$$\partial_a V^a = \partial_a W^a = 0$$

donde A_a^W es un "potencial" definido de la siguiente forma. Construimos una 2-forma $W_{ab} = \epsilon_{abc} W^c$. Esta 2-forma es de rotacional nulo, $\partial_{[c} W_{ab]}$, por la transversabilidad de W^a . Por lo que, podemos definir una 1-forma A_a^W por $\partial_{[b} A_{a]}^W = W_{ab}$.

Esta 1-forma esta bien definida mas la adición del gradiente de una función, es decir, la función $A_a^W + \partial_a \lambda$ resulta el mismo campo W^a . pero el producto interno (4.39) esta bien definido dado que la adición de un gradiente a A_a^W solo contribuye una divergencia total. Nótese que ni W_{ab} ni g cambian si se le añade un gradiente a A_a^W , además $\partial_{[a} W_{bc]}$

Este producto interno genera un métrica

$$g(V, W) = g_{0 \text{ } axby} V^{ax} W^{by} \quad (4.40)$$

Si fijamos a A_a^W con $\partial^a A_a^W = 0$ la métrica tiene la forma

$$g_{0 \text{ } axby} = -\frac{1}{4\pi} \epsilon_{abc} \frac{x^c - y^c}{|x - y|^3}. \quad (4.41)$$

A partir de la definición (4.40) y la transversalidad de V^a y W^a , llegamos a que la métrica está definida excepto por gradientes,

$$g_{axby} = g_{0 \text{ } axby} + \rho_{axy,b} + \rho_{byx,a}. \quad (4.42)$$

Los proyectores transversales y longitudinales se pueden escribir en términos de g y de su inversa en el espacio transverso,

$$g^{axy} = \epsilon^{abc} \partial_c \delta(x - y). \quad (4.43)$$

Definimos las cantidades δ_T y δ_L (deltas de Dirac transversa y longitudinal) como

$$\delta_T^{ax}{}_{by} \equiv g^{axcz} g_{czby}$$

(4.44)

$$\delta_L^{ax}{}_{by} \equiv \delta^{ax}{}_{by} - \delta_T^{ax}{}_{by},$$

donde $\delta^{ax}{}_{by} = \delta^a{}_b \delta(x - y)$. Las deltas tienen las propiedades

$$\begin{aligned} \delta_T^\mu{}_\rho \delta_T^\rho{}_\nu &= \delta_T^\mu{}_\nu, \\ \delta_L^\mu{}_\rho \delta_L^\rho{}_\nu &= \delta_L^\mu{}_\nu, \\ \delta_L^\mu{}_\rho \delta_T^\rho{}_\nu &= \delta_T^\mu{}_\rho \delta_L^\rho{}_\nu = 0, \end{aligned}$$

(4.45)

donde las variables griegas indican una dependencia de alguna variable continua y un índice discreto (e.g. $\mu = x, a$). Además, usando la forma explícita de la métrica, se tiene que

$$\delta_L^{ax}{}_{by} = \phi^{ax}{}_{y,b},$$

(4.46)

donde

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \phi^{ax}{}_{y} = -\delta(x - y)$$

La ambigüedad de la definición de la métrica induce una ambigüedad en la descomposición en partes transversales y longitudinales. Cada función ϕ que satisface (4.46) determina una prescripción de la descomposición. Es importante notar que los campos transversos y la métrica covariantes son independientes de la prescripción.

Proposición 4.3.1. *En el caso particular en que la métrica transversa es g_0 tenemos*

$$\begin{aligned}\phi_0^{ax}{}_y &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{1}{|x-y|}, \\ \delta_0 T^{ax}{}_{by} &= \delta^{ax}{}_{by} + \frac{\partial^a \partial_b}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}\end{aligned}\tag{4.47}$$

Un proyector transverso que actúa sobre el espacio vectorial \mathcal{E} de densidades multitenoriales se puede introducir a través de la matriz δ_T , definida como

$$\delta_T^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m} \equiv \delta_{n,m} \delta_T^{\mu_1}{}_{\nu_1} \dots \delta_T^{\mu_n}{}_{\nu_m}.\tag{4.48}$$

Dada una densidad multivectorial \mathbf{E} se puede construir otra densidad multivectorial \mathbf{E}_T que es transversa, en otras palabras, que satisface la parte homogénea de la restricción diferencial de la siguiente forma

$$\mathbf{E}_T = \delta_T \cdot \mathbf{E}.\tag{4.49}$$

Los vectores \mathbf{E}_T cumplen la restricción diferencial homogénea. El conjunto de todos los \mathbf{E}_T forman un espacio vectorial \mathcal{E}_T . La definición de \mathbf{E}_T no es única, sino que depende de la prescripción del proyector.

Se puede notar que δ_T no es invertible en general. Sin embargo, se puede invertir en un subespacio de \mathcal{E}_D , las densidades multitenoriales que satisfacen la restricción

diferencial. Para ver esto evaluamos

$$E_D^{\mu_1 \dots \mu_n} = \delta^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \delta^{\mu_n}_{\nu_n} E_D^{\nu_1 \dots \nu_n}. \quad (4.50)$$

Usando la identidad que define los proyectores, con la restricción diferencial y recordando que el componente de rango uno de \mathbf{E} es transversa, llegamos

$$\mathbf{E}_D = \sigma \cdot \mathbf{E}_T. \quad (4.51)$$

Las cantidades σ depende únicamente de la función ϕ que caracteriza la elección de descomposición en partes longitudinales y transversales,

$$\sigma^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \begin{cases} \delta_T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}, & \text{si } m = n \\ Q_{\rho_1 \dots \rho_{n-1}}^{\mu_1 \dots \mu_n} \sigma^{\rho_1 \dots \rho_{n-1}}_{\nu_1 \dots \nu_m}, & \text{si } m < n \\ 0 & \text{si } m > n, \end{cases} \quad (4.52)$$

con

$$Q_{c_1 y_1 \dots c_{n-1} y_{n-1}}^{a_1 x_1 \dots a_n x_n} \equiv \sum_{j=1}^n \delta_{c_1 y_1 \dots c_{j-1} y_{j-1}}^{a_1 x_1 \dots a_{j-1} x_{j-1}} \left(\phi_{y_j}^{a_j x_j} - \phi_{y_{j-1}}^{a_j x_j} \right) \delta_T^{a_{j+1} x_{j+1} \dots a_n x_n}_{c_j y_j \dots c_{n-1} y_{n-1}}. \quad (4.53)$$

De nuevo, esta definición no es única ya que depende de la prescripción. Sin embargo, empezando de un \mathbf{E}_D dado, se puede construir un \mathbf{E}_T y se reconstruye el \mathbf{E}_D original aplicando σ .

Una propiedad crucial es que las cantidades σ satisfacen la restricción diferencial en sus índices superiores. Esto es, dado una densidad multitensores transversa

\mathbf{E}_T , se puede construir una solución de la restricción diferencial, aplicando (4.51).

Las cantidades σ tiene las propiedades de transversalidad

$$\begin{aligned}\delta_T \cdot \sigma &= \delta_T, \\ \sigma \cdot \delta_T &= \sigma.\end{aligned}\tag{4.54}$$

Esto implica que, dado cualquier multitenor \mathbf{E} , la cantidad $\sigma \cdot \mathbf{E}$ es una solución de la restricción diferencial. Bajo el cambio de prescripción $\phi_1 \stackrel{ax}{y} \rightarrow \phi_2 \stackrel{ax}{y}$ obtenemos $\sigma[\phi_2]$ que satisface

$$\sigma[\phi_1] = \sigma[\phi_2] \cdot \sigma[\phi_1]\tag{4.55}$$

Las operaciones δ_T y σ definen un isomorfismo entre espacios vectoriales, \mathcal{E}_D el espacio de multitensores que resuelve la restricción diferencial y \mathcal{E}_T a través de

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T &= \delta_T \cdot \mathbf{E}_D, \\ \mathbf{E}_D &= \sigma \cdot \mathbf{E}_T.\end{aligned}\tag{4.56}$$

Por el isomorfismo puede introducirse el producto en el espacio vectorial \mathcal{E}_D , dado por

$$\mathbf{E}_{D_1} \times \mathbf{E}_{D_2} = \sigma \cdot (\mathbf{E}_{T_1} \times \mathbf{E}_{T_2}).\tag{4.57}$$

Coordenadas de bucles libres

Podemos generar una solución de las restricciones diferencial y algebraica \mathbf{X} considerando

$$\mathbf{X} = \exp(\mathbf{F}) \quad (4.58)$$

pero, \mathbf{F} debe satisfacer la restricción diferencial y la restricción algebraica homogénea.

Consideremos un multitensor transverso arbitrario \mathbf{E}_T . Aplicando lo de la sección anterior, tenemos que $\sigma \cdot \mathbf{E}_T$ satisface la restricción diferencial. Desafortunadamente, no satisface la restricción homogénea.

Para arreglar esto, definimos la matriz

$$\Omega^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \equiv \delta^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} (-1)^k \delta^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}, \quad (4.59)$$

donde

$$\delta^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \equiv \delta_{n,m} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \delta^{\mu_n}_{\nu_n}. \quad (4.60)$$

Proposición 4.3.2. *La matriz Ω tiene la siguiente propiedad: satisface la restricción algebraica homogénea en los índices superiores.*

A partir de esto, podemos decir que Ω es un proyector. Dado un vector arbitrario \mathbf{E} , $\Omega \cdot \mathbf{E}$ es un objeto que cumple la restricción algebraica homogénea. En particular, tenemos $\mathbf{F} = \Omega \cdot \mathbf{F}$.

Vamos a introducir el siguiente conjunto de vectores

$$\mathcal{S}_{\nu_1 \dots \nu_m} = (0, \vec{\mathcal{S}}_{\nu_1 \dots \nu_m}) \quad (4.61)$$

con

$$\mathcal{S} = (\sigma \cdot \Omega) \quad (4.62)$$

explícitamente, tenemos

$$(\mathcal{S}_{\nu_1 \dots \nu_m})^{\mu_1 \dots \mu_n} = \sigma^{\mu_1 \dots \mu_n} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \nu_1 \dots \nu_m. \quad (4.63)$$

Dado una densidad multivectorial \mathbf{E} , proyectando con \mathcal{S} obtenemos un elemento de \mathcal{F} . Con la exponencial de este elemento, obtenemos una solución de las restricciones diferenciales y algebraicas. Consideremos,

$$\mathbf{X} = \exp(\mathcal{S} \cdot \mathbf{E}). \quad (4.64)$$

Obtenemos que \mathbf{E} no está restringido, por lo que podemos escogerlo libremente. Esta expresión es la usual entre los elementos de un grupo de Lie (\mathbf{X}), una base de generadores \mathcal{S} y los parámetros libres (\mathbf{E}).

No nos interesa la parte de un vector que no satisface las restricciones (por el proyector), Por lo que, nos vamos a centrar en el conjunto de vectores transversales \mathbf{Y} que satisfacen las restricciones diferencial y algebraica. Vamos a llamar \mathcal{Y} a este conjunto,

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{Y} \iff \mathbf{Y} = \delta_T \cdot \mathbf{Y} \text{ y } Y^{\underline{\mu}_1 \dots \underline{\mu}_k \underline{\mu}_{k+1} \dots \underline{\mu}_n} = 0, \quad 1 \leq k < n. \quad (4.65)$$

Los elementos de \mathcal{Y} están relacionados con los elementos de \mathcal{F} por

$$\mathbf{Y} = \delta_T \cdot \mathbf{F}. \quad (4.66)$$

Cuando estudiamos multitangentes, a los \mathbf{Y} se les conoce como “coordenadas de bucle”.

4.3.1. Acción de los operadores diferenciales

Vamos a estudiar la acción de la derivada de bucles sobre las coordenadas de bucles. Empezamos calculando la acción de la derivada de bucles en un campo multitangente. Usando la definición de la derivada de bucles

$$\left(1 + \frac{1}{2} \sigma^{ab} \Delta_{ab}(\pi_o^z)\right) X^{a_1 x_1 \dots a_n x_n}(\gamma) \equiv X^{a_1 x_1 \dots a_n x_n}(\pi_o^z \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_z^o \circ \gamma), \quad (4.67)$$

recordando la relación entre el producto \times y la composición de bucles, podemos escribir

$$\begin{aligned} X^{a_1 x_1 \dots a_n x_n}(\pi_o^z \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_z^o \circ \gamma) = \\ (\mathbf{X}(\pi_o^z) \times \mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v}) \times \mathbf{X}(\pi_z^o) \times \mathbf{X}(\gamma))^{a_1 x_1 \dots a_n x_n}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Notemos que $\mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})$ es una multitangente con su punto base en z , por lo que usamos la definición de las multitangentes para evaluar $\mathbf{X}(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})$. Vamos a calcular cada orden. Empezamos con la multitangente de primer orden

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})^{a_1 x_1} &= \oint_{\delta u} dy_1^{a_1} \delta(x_1 - y_1) + \oint_{\delta v} dy_1^{a_1} \delta(x_1 - y_1) \\ &+ \oint_{\delta \bar{u}} dy_1^{a_1} \delta(x_1 - y_1) + \oint_{\delta \bar{v}} dy_1^{a_1} \delta(x_1 - y_1). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Integrando sobre los bucles infinitesimales obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})^{a_1 x_1} &= \epsilon_1 u^{a_1} \delta(x_1 - z) + \epsilon_2 v^{a_1} \delta(x_1 + \epsilon + 1u - z) \\ &- \epsilon_1 u^{a_1} \delta(x_1 + \epsilon_1 u + \epsilon_2 v - z) - \epsilon_2 v^{a_1} \delta(x_1 + \epsilon_2 v - z) \end{aligned} \quad (4.70)$$

expandimos las deltas de Dirac

$$\delta(x_1 + \epsilon_1 u - z) = \delta(x_1 - z) + \epsilon_1 u^b \partial_b \delta(x_1 - z), \quad (4.71)$$

$$\delta(x_1 + \epsilon_1 u + \epsilon_2 v - z) = \delta(x_1 - z) + \epsilon_1 u^b \partial_b \delta(x_1 - z) + \epsilon_2 v^b \partial_b \delta(x_1 - z), \quad (4.72)$$

$$\delta(x_1 + \epsilon_2 v - z) = \delta(x_1 - z) + \epsilon_2 v^b \partial_b \delta(x_1 - z). \quad (4.73)$$

Usando esto calculamos $\mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})^{a_1 x_1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})^{a_1 x_1} &= \epsilon_1 u^{a_1} \delta(x_1 - z) + \epsilon_2 v^{a_1} \delta(x_1 - z) + \epsilon_1 \epsilon_2 v^{a_1} u^b \partial_b \delta(x_1 - z) \\ &- \epsilon_1 u^{a_1} \delta(x_1 - z) - \epsilon_1 \epsilon_2 u^{a_1} v^b \partial_b \delta(x_1 - z) - \epsilon_2 v^{a_1} \delta(x_1 - z), \end{aligned} \quad (4.74)$$

los términos lineales se cancelan y nos quedamos con los términos $\epsilon_1\epsilon_2$, obtenemos

$$\mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})^{a_1 x_1} = \epsilon_1 \epsilon_2 v^{a_1} u^b \partial_b \delta(x_1 - z) - \epsilon_1 \epsilon_2 u^{a_1} v^b \partial_b \delta(x_1 - z), \quad (4.75)$$

reescribiendo

$$\mathbf{X}_z(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v})^{a_1 x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \delta_{ab}^{a_1 c} \delta_{,c}(x_1 - z), \quad (4.76)$$

donde $\sigma^{ab} = 2\epsilon_1 \epsilon_2 u^{[a} v^{b]}$, usamos la delta antisimétrica $\delta_{ab}^{cd} = \frac{1}{2}(\delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d)$ y $\delta_{,c}(x - z) = \partial_c \delta(x - z)$.

$$\Delta_{ab}(\pi_o^z) X^{a_1 x_1}(\gamma) = \delta_{ab}^{a_1 c} \delta_{,c}(x_1 - z). \quad (4.77)$$

Similarmente para la multitangente de ordenes superiores

$$\begin{aligned} \Delta_{ab}(\pi_o^z) X^{a_1 x_1 a_2 x_2}(\gamma) &= \delta_{ab}^{a_1 a_2} \delta(x_1 - z) \delta(x_2 - z) + \delta_{ab}^{a_2 c} \delta_{,c}(x_2 - z) X^{a_1 x_1}(\gamma) \\ &+ \delta_{ab}^{a_1 c} \delta_{,c}(x_1 - z) X^{a_2 x_2}(\pi_z^o \circ \gamma), \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{ab}(\pi_o^z)X^{a_1x_1\dots a_nx_n}(\gamma) &= \delta_{ab}^{a_1c}\delta_{,c}(x_1 - z)X^{a_2x_2\dots a_nx_n}(\pi_o^z \circ \gamma) \\
&+ \delta_{ab}^{a_n c}\delta_{,c}(x_n - z)X^{a_1x_1\dots a_{n-1}x_{n-1}}(\pi_o^z) + \delta_{ab}^{a_1a_2}\delta(x_1 - z)\delta(x_2 - z)X^{a_3x_3\dots a_nx_n}(\pi_o^z \circ \gamma) \\
&+ \delta_{ab}^{a_n-1a_n}\delta(x_{n-1} - z)\delta(x_n - z)X^{a_1x_1\dots a_{n-2}x_{n-2}}(\pi_o^z) \\
&+ \sum_{j=1}^{n-2} \delta_{ab}^{a_{j+1}c}\delta_{,c}(x_{j+1} - z)X^{a_1x_1\dots a_jx_j}(\pi_o^z)X^{a_{j+2}x_{j+2}\dots a_nx_n}(\pi_o^z \circ \gamma) \\
&+ \sum_{j=1}^{n-3} \delta_{ab}^{a_{j+1}a_{j+2}}\delta(x_{j+1} - z)\delta(x_{j+2} - z)X^{a_1x_1\dots a_jx_j}(\pi_o^z)X^{a_{j+3}x_{j+3}\dots a_nx_n}(\pi_o^z \circ \gamma).
\end{aligned} \tag{4.79}$$

En términos de estas expresiones se puede reescribir la acción de los demás operadores diferenciales.

Capítulo 5

Cuantización de la teoría libre de Maxwell en la formulación del grupo de bucles

En este capítulo vamos a estudiar la cuantización de la teoría libre de Maxwell. Es un problema de menor complejidad que se puede resolver con los métodos usuales, sin embargo, nos puede dar una mejor intuición del significado físico de los bucles. También se muestra que, efectivamente, llegamos los mismos resultados que usando otros métodos de cuantización. La teoría de Maxwell fue formulada en términos de bucles por primera vez por Gambini y Trias [21]. En [8, 22] se puede encontrar una discusión de la solución de vacío y otras propiedades.

5.1. El grupo de bucles abeliano

La teoría de Maxwell es abeliana, por lo que es suficiente considerar un subgrupo abeliano del grupo de bucles. Esto ayudará a simplificar el tratamiento de la teoría.

Vamos a empezar considerando elementos del grupo de bucles de la forma:

$$\kappa = \gamma \circ \eta \circ \gamma^{-1} \circ \eta^{-1}. \quad (5.1)$$

Está claro que el conjunto de estos elementos forman un subgrupo del grupo de bucles, el cual se denota como \mathcal{L}_{comm} . Se puede ver que \mathcal{L}_{comm} forma un grupo normal, es decir dado $\kappa \in \mathcal{L}_{comm}$,

$$\gamma \circ \kappa \circ \gamma^{-1} \in \mathcal{L}_{comm} \quad \forall \gamma \in \mathcal{L}_{comm}. \quad (5.2)$$

A partir del grupo normal, podemos definir el grupo cociente denotado por $\mathcal{L}_{Abel} = \mathcal{L}/\mathcal{L}_{comm}$. Introducimos la relación de equivalencia

$$\gamma \sim \eta \iff \gamma \circ \eta^{-1} = \kappa \in \mathcal{L}_{comm}. \quad (5.3)$$

La interpretación intuitiva de esta relación de equivalencia es que identificamos los elementos de \mathcal{L}_{comm} con la identidad. La siguiente propiedad se sigue inmediatamente de la naturaleza de la clase de equivalencia definida en el subgrupo. Si γ_1 y γ_2 pertenecen a \mathcal{L}_{Abel} ,

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma_2 \circ \gamma_1, \quad (5.4)$$

Es decir, \mathcal{L}_{Abel} es un grupo abeliano.

Las teorías de calibre son representaciones del grupo de bucles. Consideremos representaciones del grupo abeliano que construimos. Necesitamos matrices $H(\gamma)$ tal que

$$H(\gamma_1)H(\gamma_2) = H(\gamma_1 \circ \gamma_2) = H(\gamma_2 \circ \gamma_1) = H(\gamma_2)H(\gamma_1) \quad (5.5)$$

para todo bucle γ_1, γ_2 . Si queremos una representación unitaria, la única posibilidad es $U(1)$.

Cualquier representación del grupo de bucles, se puede escribir como

$$H_A(\gamma) = \exp \left(i \oint dy^a A_a(y) \right), \quad (5.6)$$

en este caso $A_a(y)$ es un numero real. Por lo que

$$H_A(\gamma) = W_A(\gamma). \quad (5.7)$$

$W_A(\gamma)$ depende en el bucle γ únicamente por la circulación de A_a . En términos de las coordenadas de bucles podemos escribir,

$$\oint_{\gamma} dy^a A_a(y) = \int d^3z A_a(z) X^{az}(\gamma). \quad (5.8)$$

Cabe destacar que la representación únicamente depende en la multitangente de primer orden. Esto induce ciertas propiedades que no se cumplen en general. Por ejemplo, $W(\pi_x^y \circ \gamma_y \circ \pi_y^x \circ \eta_x) = W(\gamma_y \circ \eta_x)$, donde γ es un bucle con punto base en y , π_x^y es un camino arbitrario y η_x es un bucle con punto base en x . Esto implica

que, para una deformación infinitesimal

$$W(\pi_o^x \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_x^o \circ \gamma) = W(\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \gamma). \quad (5.9)$$

Esto implica que las derivadas de bucle únicamente dependen del punto base, ya no del camino $\Delta_{ab}(\pi_o^x) \rightarrow \Delta_{ab}(x)$.

El siguiente resultado se sigue inmediatamente de la conmutatividad del grupo

Proposición 5.1.1. *La derivadas de bucle conmutan*

$$[\Delta_{ab}(x), \Delta_{cd}(y)] = 0, \quad (5.10)$$

y las identidades de Bianchi se pueden expresar como

$$\partial_{[a} \Delta_{bc]}(x) = 0. \quad (5.11)$$

5.1.1. Representación de bucles

En esta sección vamos a introducir la representación de bucles. Para el caso abeliano es sencillo encontrar un álgebra no canónica de objetos invariantes de calibre que contienen toda la información física en términos del bucle de Wilson y el campo eléctrico [23, 24]. Introducimos los operadores

$$T(\eta) = W(\eta), \quad (5.12)$$

$$T^a(\eta_x^x) = E^a(x)W(\eta), \quad (5.13)$$

que satisfacen el álgebra no canónica

$$\{T(\eta), T(\gamma)\} = 0, \quad (5.14)$$

$$\{T^a(\gamma_x^x), T(\eta)\} = -iX^{ax}(\eta)W(\eta \circ \gamma), \quad (5.15)$$

$$\{T^a(\gamma_x^x), T^b(\eta_y^y)\} = -iX^{ax}(\eta)T^b(\gamma \circ \eta) + iX^{by}(\gamma)T^a(\eta \circ \gamma). \quad (5.16)$$

La base de la representación cuántica del álgebra consiste en un espacio de funciones de onda dependientes de un bucle

$$\hat{T}(\eta)\psi(\gamma) = \psi(\eta^{-1} \circ \gamma), \quad (5.17)$$

$$\hat{T}^a(\eta_x^x)\psi(\gamma) = X^{ax}(\gamma)\psi(\eta^{-1} \circ \gamma), \quad (5.18)$$

Se puede expresar el campo eléctrico y el tensor de Maxwell de la siguiente forma

$$\hat{F}_{ab} = -i\Delta_{ab}(x)T(\gamma)|_{\gamma=\iota}, \quad (5.19)$$

$$\hat{E}^a = T^a(\gamma_x^x)|_{\gamma=\iota}, \quad (5.20)$$

donde ι es el bucle identidad.

Esto ayuda a expresar la representación de bucles como

$$\hat{F}_{ab}\psi(\gamma) = -i\Delta_{ab}(x)\psi(\gamma), \quad (5.21)$$

$$\hat{E}^a(x)\psi(\gamma) = X^{ax}(\gamma)\psi(\gamma). \quad (5.22)$$

De esta forma se puede interpretar a los bucles como líneas de flujo eléctrico. Únicamente objetos invariantes de calibre surgen naturalmente de la representación de bucles. Los objetos dependientes de calibre se pueden introducir usando la derivada de conexión definida en secciones anteriores, la dependencia de calibre surge por la dependencia de un camino de la derivada de conexión.

La relación de conmutación entre E y F es

$$[\hat{F}_{cd}(y), \hat{E}^a(x)] = -i\delta_{[c}^a \partial_{d]} \delta(x - y), \quad (5.23)$$

la cual se sigue de la derivada de bucle de la multitangente de primer orden, que calculamos en la sección 4

$$\Delta_{cd}(y) X^{ax}(\gamma) = \delta_{[c}^a \partial_{d]} \delta(x - y). \quad (5.24)$$

Se puede escribir el Hamiltoniano en términos de bucles. El termino del campo eléctrico se puede escribir en términos de dos integrales de camino

$$\hat{E}^a(x) \hat{E}_a(x) \psi(\gamma) = \eta_{ab} X^{ax}(\gamma) X^{bx}(\gamma) \psi(\gamma). \quad (5.25)$$

El termino del campo magnético se puede escribir en términos de derivadas de bucles

$$\hat{B}^a(x) \hat{B}_a(x) \psi(\gamma) = -\frac{1}{2} \eta^{ac} \eta^{bd} \Delta_{ab}(x) \Delta_{cd}(x) \psi(\gamma). \quad (5.26)$$

Por lo que la ecuación de valores propios del Hamiltoniano es

$$\hat{H}\psi(\gamma) = \int d^3x \left(-\frac{1}{4}\eta^{ac}\eta^{bd}\Delta_{ab}(x)\Delta_{cd}(x) + \frac{1}{2}\eta_{ab}X^{ax}(\gamma)X^{bx}(\gamma) \right) \psi(\gamma) = E\psi(\gamma). \quad (5.27)$$

El segundo termino se puede escribir como

$$\int d^3x X^{ax}(\gamma)X^{bx}(\gamma)\psi(\gamma) = \oint_{\gamma} dy^a \oint_{\gamma} dy'^b \delta(y - y') \eta_{ab} \psi(\gamma) \quad (5.28)$$

la cual, después de regularizar es proporcional a la longitud del bucle γ .

Ahora vamos a estudiar el estado base y los estados excitados del sistema.

Proponemos un estado de tipo gaussiano de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi_0(\gamma) &= \exp \left(-\frac{1}{2} \oint_{\gamma} dy^a \oint_{\gamma} dy'^b K_{ab}(y - y') \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} X^{ax}(\gamma) X^{bx}(\gamma) K_{axby} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

ahora, el problema se reduce a encontrar K_{axby} . Vamos a determinar el estado base a partir de los operadores de creación y aniquilación y encontrando el estado que es nulo al aplicar el operador de aniquilación. Para esto vamos a necesitar los operadores q y p , los cuales se obtienen a partir de \hat{A}_a^T . Podemos calcular \hat{A}_a^T usando la siguiente relación clásica

$$\partial^a F_{ab} = \Delta A_b^T, \quad (5.30)$$

donde Δ es el Laplaciano, en términos de la derivada de bucle tenemos

$$\hat{A}_a^T(x)\psi(\gamma) = -i\frac{1}{\Delta}\partial^b\Delta_{ab}(x)\psi(\gamma). \quad (5.31)$$

En términos de esta expresión, el operador $\hat{q}_A(\vec{k})$ es,

$$\hat{q}_A(\vec{k})\psi(\gamma) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_A^a(\vec{k}) \frac{k^b}{|\vec{k}|^2} \Delta_{ab}(x)\psi(\gamma). \quad (5.32)$$

De la misma forma el operador $\hat{p}^A(\vec{k})$ es

$$\hat{p}^A(\vec{k})\psi(\gamma) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_a^A(\vec{k}) X^{ax}(\gamma)\psi(\gamma). \quad (5.33)$$

Por lo tanto, los operadores de creación y aniquilación en la representación de bucles son

$$\begin{aligned} \hat{a}_A^\dagger(\vec{k}) &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} (\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_A^a(\vec{k}) \frac{k^b}{|\vec{k}|^{3/2}} \Delta_{ab}(x) \\ &\quad - i \frac{1}{|\vec{k}|^{1/2}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_{aA}(\vec{k}) X^{ax}(\gamma)), \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_A(\vec{k}) &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} (\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_A^a(\vec{k}) \frac{k^b}{|\vec{k}|^{3/2}} \Delta_{ab}(x) \\ &\quad + i \frac{1}{|\vec{k}|^{1/2}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_{aA}(\vec{k}) X^{ax}(\gamma)). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Aplicamos (5.35) en (5.29) e igualamos a cero para calcular K_{axy} . Es decir, imponemos que $\hat{a}_A(\vec{k})\psi_0(\gamma) = 0$. La aplicación del primer término del operador sobre

el estado base es

$$-i \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_A^a(\vec{k}) \sqrt{|\vec{k}|} X^{by}(\gamma) K_{axy} \psi_0(\gamma). \quad (5.36)$$

Llegamos a K_{axy} de forma que esto se cancele con el segundo termino

$$K_{axy} = \frac{\delta_{ab}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3q}{|q|} \exp(-i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})) \quad (5.37)$$

De esta forma, usando el operador de creación obtenemos el primer estado excitado

$$\psi_1^{(A,\vec{k})}(\gamma) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{|\vec{k}|^{1/2}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) e_{aA}(\vec{k}) X^{ax}(\gamma) \psi_0(\gamma) \quad (5.38)$$

Esta expresión se puede hacer mas compacta en el espacio de momentos. La transformada de Fourier de la multitangente es

$$X^{ak}(\gamma) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) X^{ax}(\gamma), \quad (5.39)$$

el primer estado excitado es

$$\psi_1^{(A,\vec{k})}(\gamma) = \frac{1}{|\vec{k}|^{1/2}} e_{aA}(\vec{k}) X^{ak} \psi_0(\gamma). \quad (5.40)$$

Este estado corresponde al fotón de momento \vec{k} y polarización A . Los objetos $X^{ak}(\gamma)$ se llaman factores de forma del bucle. Los factores de forma son transversales

$$k_a X^{ak}(\gamma) = 0. \quad (5.41)$$

Sus únicas componentes relevantes son las proyecciones sobre los vectores de polarización.

El estado para n fotones es

$$\psi_n^{(A_1, \vec{k}_1, \dots, A_n, \vec{k}_n)}(\gamma) = \left(\frac{1}{|\vec{k}_1|^{1/2}} e_{aA_1}(\vec{k}_1) X^{ak_1} \dots \frac{1}{|\vec{k}_n|^{1/2}} e_{aA_n}(\vec{k}_n) X^{ak_n} \right) \psi_0(\gamma). \quad (5.42)$$

Los estados coherentes en esta representación están dados por

$$\psi^{(\alpha)}(\gamma) = W(\gamma, A) \psi_0(\gamma), \quad (5.43)$$

donde $W(\gamma, A)$ es el bucle de Wilson a lo largo de γ con una conexión A . Se puede ver que este estado es un estado propio del operador de aniquilación con valor propio

$$\alpha = \frac{i}{|\vec{k}|^{3/2}} e_A^a(\vec{k}) k^b F_{ab}(k). \quad (5.44)$$

Hasta este punto hemos ignorado la problema de la regularización del Hamiltoniano, esto implica que las funciones propias no están bien definidas. El estado base (5.29) diverge cuando $x \rightarrow y$.

Una forma de regularizar es reemplazando la función delta del Hamiltoniano con una función $f_\epsilon(y - y')$ tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(y - y') = \delta(y - y'). \quad (5.45)$$

Explícitamente,

$$f_\epsilon(y - y') = \int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3}} r(|q|\epsilon) \exp(i\vec{q} \cdot (\vec{y} - \vec{y}')), \quad (5.46)$$

donde la función r se define tal que

$$\int_0^\infty r(x) dx = 0, \quad (5.47)$$

ejemplos explícitos de este tipo de funciones son

$$\begin{aligned} r(x) &= (1 - x) \exp(-x), \\ r(x) &= \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \Theta(1 - x). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Si se repite el proceso para llegar al estado base usando el Hamiltoniano regularizado, se tiene

$$\psi_0^\epsilon(\gamma) = \exp\left(-\frac{1}{2} \oint_\gamma dy^a \oint dy'^b K_{ab}^\epsilon(x - y)\right), \quad (5.49)$$

el propagador regularizado está dado por

$$K_{ab}^\epsilon(x - y) = \delta_{ab} \int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{r(\epsilon|q|)}{|q|} \exp(-i\vec{q} \cdot (\vec{y} - \vec{y}')), \quad (5.50)$$

donde $r(x)$ es la función definida anteriormente para regularizar el Hamiltoniano. Se puede definir un producto interno usando la integral funcional usando el factor de forma, esto se muestra en [4]. Después de obtener una representación de la teoría en la formulación de bucles es útil considerar la representación extendida.

5.1.2. Representación extendida

La representación de bucles extendida de la teoría tiene varias ventajas. A parte de ser mas elegante, nos da una visión conceptualmente distinta de la cuantización de bucles. Los problemas de regularización se manejan mejor usando coordenadas de bucles. Podremos ver que la representación extendida de bucles coincide con la representación del campo eléctrico. Además, vamos a encontrar una forma de escribir la acción del electromagnetismo puramente en términos de bucles. El hecho de que ganamos tanta información con la representación extendida en el caso de Maxwell nos sugiere que lo mismo pasara con teorías no abelianas o con la relatividad general.

Se puede escribir la holonomía en términos de coordenadas de bucles

$$H_A(\mathbf{X}) = \exp \left(i \int d^3x A_{ax} X^{ax} \right). \quad (5.51)$$

Es suficiente considerar la multitangente de primer orden por la naturaleza abeliana de la teoría, el cual puede ser visto como una densidad vectorial con divergencia nula

$$\partial_{ax} X^{ax} = 0. \quad (5.52)$$

Se introduce la representación en coordenadas de bucles usando la transformación

$$\psi(\mathbf{X}) = \int DA \psi[A] \exp \left(-ig \int d^3x A_a(x) X^{ax} \right), \quad (5.53)$$

donde DA denota integración funcional sobre el potencial A [25]. En esta represen-

tación, las funciones de onda son funcionales de la densidad vectorial diferenciable X . Podemos escribir los operadores \hat{F}_{ab} , \hat{E}^{ax} y el bucle de Wilson $\hat{W}_A(\mathbf{X})$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{W}_A(\mathbf{X}_0)\psi(\mathbf{X}) &= \psi(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \\ \hat{E}^{ax}\psi(\mathbf{X}) &= X^{ax}\psi(\mathbf{X}), \\ \hat{F}_{ab}(x)\psi(\mathbf{X}) &= i\partial_{[a}\frac{\delta}{\delta X^{b]x}}\psi(\mathbf{X}).\end{aligned}\tag{5.54}$$

El Hamiltoniano cuántico queda como

$$\hat{H}\psi(\mathbf{X}) = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\hat{X}^{ax}\hat{X}^{ax} + \frac{1}{4}(\partial_{[a}\hat{P}_{b]x})^2 \right] \psi(\mathbf{X}),\tag{5.55}$$

donde

$$\hat{P}_{bx} = i\frac{\delta}{\delta X^{bx}}.\tag{5.56}$$

A partir de estas ecuaciones podemos identificar lo siguiente

$$\begin{aligned}\hat{P}_{bx} &\rightarrow A_{bx}, \\ X^{ax} &\rightarrow E^{ax}.\end{aligned}\tag{5.57}$$

Esto muestra que la representación es, simplemente, la representación de campo eléctrico y la densidad X^a es el campo eléctrico. Esto muestra que los bucles son las líneas de flujo eléctrico. Un hecho interesante es que podemos pasar de la representación extendida a la representación de bucles usando el hecho que los multitensores son multitangentes $X^{ax} \rightarrow X^{ax}(\gamma)$, esto puede no ser cierto para el caso no abeliano. Esto implica que, si uno encuentra un estado físico en la representación extendida, entonces se puede encontrar un estado físico en la representación

de bucles. Para el caso de Maxwell el converso también es cierto. Con esta correspondencia podemos encontrar la expresión para el vacío en la representación extendida.

$$\psi(\mathbf{X}) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y X^{ax} X^{ay} D_1(x-y)\right). \quad (5.58)$$

El estado de vacío en la representación extendida no diverge, mientras que estado base en la representación de bucles necesitó regularización. Esto aumenta el interés de la representación extendida, dado que lo mismo podría suceder para casos no abelianos y en gravedad cuántica.

Tenemos una teoría en términos de cantidades tensoriales con un Hamiltoniano bien definido, por lo que podemos introducir una acción clásica desde la cual podemos formular la teoría. La acción clásica de la cual se puede formular la teoría cuántica correspondiente a la representación de bucles extendida es

$$S = \int dt \left\{ P_{ax} \dot{X}^{ax} - \left[\frac{1}{2} X^{ax} X^{ax} + \frac{1}{4} (\partial_{[a} P_{b]x})^2 \right] + \lambda_x \partial_a X^{ax} \right\}. \quad (5.59)$$

Podemos reconocer la acción del electromagnetismo si identificamos el momento con la conexión y la coordenada de bucle con el campo eléctrico. En este capítulo llegamos a una nueva forma de cuantizar el campo de Maxwell a partir del grupo extendido. Este formalismo tiene varias ventajas, como que el estado base esta automáticamente bien definido y llegamos a una acción clásica de la cual se llega a la formulación cuántica. Para un tratamiento mas detallado de esta formulación y de sus aplicaciones revisar [26, 27, 28].

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se presentó la cuantización de la teoría de Maxwell en términos del grupo de bucles y el grupo extendido. Se presentó la formulación Hamiltoniana de sistemas con ligaduras de primera clase y el procedimiento de Dirac para la cuantización. Además, en el apéndice [A](#) se introdujo formalmente ciertos conceptos geométricos que son básicos para la descripción de una teoría de calibre. Se definió el concepto de bucles y se construyó el grupo de bucles. Se introdujeron los operadores diferenciales que actúan en funciones de bucles y se demostró que son generadores del grupo. Se definió el grupo extendido de bucles y las coordenadas de bucles, de forma que se obtenga un grupo de Lie.

A partir de la formulación matemática del grupo de bucles y el grupo extendido, llegamos a la cuantización de la teoría de Maxwell en términos de bucles. Se llegó a la interpretación de los bucles como líneas de campo eléctrico. A partir de la formulación extendida se obtuvieron ciertos indicios de las ventajas de esta

formulación en casos no abelianos o de gravedad cuántica, por ejemplo el hecho de que el estado del vacío está bien definido o que se puede llegar a una acción clásica.

El paso siguiente es comprobar si el formalismo de bucles resulta en una teoría cuántica equivalente al espacio de Fock, que parte de la cuantización usual. En este trabajo se presentó las bases del formalismo de bucles, por lo que, en un trabajo futuro, se puede cuantizar teorías no abelianas como la teoría de Yang-Mills. La aplicación más importante de este formalismo está en cuantización de la gravedad, lo que implica el estudio, a mayor profundidad, de invariantes topológicos.

Bibliografía

- [1] A. Ashtekar. New Variables for Classical and Quantum Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2244–2247, 1986.
- [2] J. Baez and J. P. Muniain. *Gauge fields, knots and gravity*. World Scientific, 1995.
- [3] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [4] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] John Kogut and Leonard Susskind. Hamiltonian formulation of wilson’s lattice gauge theories. *Phys. Rev. D*, 11:395–408, Jan 1975.
- [6] R. Giles. Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops. , 24(8):2160–2168, oct 1981.
- [7] A Ashtekar and C Rovelli. A loop representation for the quantum maxwell field. *Classical and Quantum Gravity*, 9(5):1121–1150, May 1992.

- [8] C. di Bartolo, F. Nori, R. Gambini, and A. Trias. Loop Space Quantum Formulation of Free Electromagnetism. *Lett. Nuovo Cim.*, 38:497, 1983.
- [9] Paul Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964.
- [10] Claudio Teitelboim and Marc Henneaux. *Quantization of gauge systems*. Princeton University Press, 1992.
- [11] M. Henneaux. Hamiltonian Form of the Path Integral for Theories with a Gauge Freedom. *Phys. Rept.*, 126:1–66, 1985.
- [12] J. Lewandowski. Group of loops, holonomy maps, path bundle and path connection. *Class. Quant. Grav.*, 10:879–904, 1993.
- [13] John W. Barrett. Holonomy and path structures in general relativity and Yang-Mills theory. *Int. J. Theor. Phys.*, 30:1171–1215, 1991.
- [14] Kuo-Tsai Chen. Iterated path integrals. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(5):831–879, 1977.
- [15] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Representation Theory of Analytic Holonomy C*-algebras. In *Knots and Quantum Gravity*. Oxford University Press, 08 1994.
- [16] Stanley Mandelstam. Quantum electrodynamics without potentials. *Annals Phys.*, 19:1–24, 1962.
- [17] R. Gambini and A. Trias. Chiral Formulation of Yang-Mills Equations: A Geometric Approach. *Phys. Rev. D*, 27:2935, 1983.

- [18] Irina Arefeva. NonAbelian Stokes formula. *Theor. Math. Phys.*, 43:353, 1980.
- [19] X. Fustero, R. Gambini, and A. Trias. EINSTEIN'S GRAVITATION AS A GAUGE THEORY OF THE LORENTZ GROUP. *Phys. Rev. D*, 31:3144–3149, 1985.
- [20] Cayetano Di Bartolo, Rodolfo Gambini, and Jorge Griego. The Extended loop group: An Infinite dimensional manifold associated with the loop space. *Commun. Math. Phys.*, 158:217–240, 1993.
- [21] R. Gambini and A. Trias. Second Quantization of the Free Electromagnetic Field as Quantum Mechanics in the Loop Space. *Phys. Rev. D*, 22:1380, 1980.
- [22] G. M. Buendia and A. Trias. Coherent states and other basic states of quantum electrodynamics formulated in the loop space. *Phys. Rev. D*, 46:3649–3654, 1992.
- [23] Rodolfo Gambini and Antoni Trias. Gauge Dynamics in the C Representation. *Nucl. Phys. B*, 278:436–448, 1986.
- [24] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Knot theory and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1155–1158, Sep 1988.
- [25] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*. World Scientific, 2004.
- [26] Abhay Ashtekar and C. J. Isham. Inequivalent observable algebras: Another ambiguity in field quantization. *Phys. Lett. B*, 274:393–398, 1992.
- [27] John B. Kogut. An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems. *Rev. Mod. Phys.*, 51:659, 1979.

- [28] D. Armand Ugon, R. Gambini, J. Griego, and L. Setaro. Classical loop actions of gauge theories. *Phys. Rev. D*, 50:5352–5357, 1994.

Apéndice A

Conceptos básicos de geometría diferencial

En este apéndice se revisan varios conceptos de geometría diferencial que son fundamentales en el estudio de teorías de calibre. Este apéndice se basa en el libro *Gauge fields, knots and gravity* de J. Baez y J. Muniain [2].

Definición A.0.1. Una *n-variedad* es un espacio topológico M con cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde U_α son conjuntos abiertos que cubren M , tal que $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ es diferenciable sobre su dominio.

Definición A.0.2. Sea una variedad M . Un **vector tangente** a un punto $p \in M$ se define como una función desde $C^\infty(M)$ a \mathbb{R} que satisfacen las siguientes

propiedades:

$$\begin{aligned}
 v_p(f + g) &= v_p(f) + v_p(g) \\
 v_p(\alpha f) &= \alpha v_p(f) \\
 v_p(fg) &= v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g).
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

El espacio tangente T_pM en p se define como el conjunto de todos los vectores tangentes en $p \in M$.

Definición A.0.3. Un **grupo** es un conjunto G junto a una operación binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$ que cumple:

- 1) $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$.
- 2) Existe un elemento $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g \forall g \in G$.
- 3) $\forall g \in G$ existe un elemento inverso g^{-1} tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Definición A.0.4. Se dice que un grupo es un **grupo de Lie** si es una variedad y las operaciones $\cdot : G \times G \rightarrow G$ y $^{-1} : G \rightarrow G$ son funciones diferenciables.

Los grupos de matrices $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $SO(p, q)$, $U(n)$ y $SU(n)$ son grupos de Lie.

Definición A.0.5. Supongamos que G es un grupo de Lie. Definimos al **álgebra de Lie** \mathfrak{g} como el espacio tangente de la identidad de G .

El álgebra de Lie es un espacio vectorial de la misma dimensión de G . Se puede ver a los elementos del álgebra de Lie como vectores tangentes a caminos sobre G .

Definición A.0.6. Para cualquier grupo de Lie G , podemos definir el **mapa ex-**

ponencial. *El cual es un mapa diferenciable*

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad (\text{A.2})$$

determinado únicamente por las siguientes propiedades:

- 1) $\exp(0)$ es la identidad de G .
- 2) $\exp(sx) \exp(tx) = \exp((s+t)x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $s, t \in \mathbb{R}$.
- 3) $\frac{d}{dt} \exp(tx)|_{t=0} = x$

A partir del mapa exponencial podemos obtener toda la información del componente conexo a la identidad de G a partir de álgebra de Lie. En cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} se puede definir el conmutador o corchete de Lie $[v, w]$ a partir de las identidades:

- 1) $[v, w] = -[w, v]$ para todo $v, w \in \mathfrak{g}$.
- 2) $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w]$ para todo $u, v, w \in \mathfrak{g}$ y escalares α, β .
- 3) La identidad de Jacobi: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ para todo $u, v, w \in \mathfrak{g}$.

A partir de esto podemos definir, de forma abstracta, un álgebra de Lie como un espacio vectorial \mathfrak{g} con una operación $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que cumple las propiedades 1)-3).

Definición A.0.7. *El fibrado tangente de una variedad M , denotado por TM es*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (\text{A.3})$$

La proyección $\pi : TM \rightarrow M$ mapea cada vector tangente $v \in T_p M$ al punto

$p \in M$. Se puede considerar a TM como una variedad de dimensión $2n$.

Definición A.0.8. Dada una variedad M , el **fibrado trivial** es el producto cartesiano $M \times F$, donde F es una variedad. En particular, si F es un grupo, tenemos un **fibrado principal**. La proyección es $\pi(p, f) = p$, para todo $(p, f) \in M \times F$.

Consideremos una variedad M y su fibrado tangente TM . Definimos a $\Gamma(TM)$ el conjunto de funciones $s : M \rightarrow TM$, tal que, para todo $p \in M$ $s(p) \in T_pM$.

Definición A.0.9. Una **conexión** D en M , toma un vector v y lo asigna una función $D_v : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$. Satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 D_v(\alpha s) &= \alpha D_v s \\
 D_v(s + t) &= D_v s + D_v t \\
 D_v(fs) &= v(f)s + f D_v s \\
 D_{v+w}s &= D_v s + D_w s \\
 D_{fv}s &= f D_v s
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

para todo $v, w \in TM$, $s, t \in \Gamma(TM)$ y $f \in C^\infty(M)$ y escalares α .

A partir de esto podemos comparar vectores tangentes a distintos puntos p y q usando la conexión y un camino γ . Ahora podemos definir el concepto de transporte paralelo de forma rigurosa. Sea M una variedad y TM el fibrado tangente, con la conexión D . Sea $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ un camino diferenciable desde el punto p al punto q . Supongamos que, para $t \in [0, T]$, $u(t)$ es un vector en el fibrado sobre $\gamma(t)$. Queremos una ecuación que describa el transporte paralelo de $u(t)$ por la

curva γ . Esto nos dice que la derivada covariante de $u(t)$ en dirección de γ es cero.

Podemos escribir

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Podemos escribir la conexión como

$$D_\mu s = \partial_\mu s + A_\mu s \quad (\text{A.6})$$

donde A_μ es el potencial vector. Por lo que, podemos definir la derivada covariante en términos del vector potencial:

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = \frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t). \quad (\text{A.7})$$

Decimos que $u(t)$ es transportado de forma paralela a través de γ si $D_{\gamma'(t)}u(t) = 0$ para todo t .

Partiendo de cualquier vector $u \in T_p M$ podemos transportarlo por γ , podemos encontrar un $u(t) \in T_{\gamma(t)} M$ tal que

$$u(0) = u, \quad D_{\gamma'(t)}u(t) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Tenemos que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t) = 0. \quad (\text{A.9})$$

si la solución existe, satisface

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u(t_1)dt_1. \quad (\text{A.10})$$

Si reemplazamos el lado izquierdo en el lado derecho de la ecuación anterior tenemos

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u(t_1)dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A(\gamma'(t_1))A(\gamma'(t_2))u(t_2)dt_2dt_1. \quad (\text{A.11})$$

Haciendo esto un numero infinito de veces, tenemos la serie convergente

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_n \dots dt_1 \right) u. \quad (\text{A.12})$$

Definimos el producto ordenado sobre un camino

$$PA(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) \quad (\text{A.13})$$

como el producto con los factores permutados

$$PA(\gamma'(t_{\sigma(1)})) \dots A(\gamma'(t_{\sigma(n)})) \quad (\text{A.14})$$

tal que los valores mas altos de t_i aparecen primero:

$$t_{\sigma(1)} \geq \dots \geq t_{\sigma(n)}. \quad (\text{A.15})$$

La integral

$$\int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_n \dots dt_1. \quad (\text{A.16})$$

se puede escribir como

$$\frac{1}{n!} \text{P} \left(\int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right)^n. \quad (\text{A.17})$$

Si definimos el exponencial ordenado como

$$\text{P exp} \left(- \int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \text{P} \left(\int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right)^n. \quad (\text{A.18})$$

Llegamos a una solución de nuestra ecuación diferencial

$$u(t) = \text{P exp} \left(- \int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right) u. \quad (\text{A.19})$$

Llamamos a esto la holonomía sobre el camino γ . Se la denota como $H_A(\gamma)$:

$$H_A(\gamma) = \text{P exp} \left(\int_{\gamma} A_a(y) dy^a \right). \quad (\text{A.20})$$

El bucle de Wilson se define como

$$W_A(\gamma) = \text{Tr}(H_A(\gamma)), \quad (\text{A.21})$$

este objeto es invariante de calibre.