

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Posgrados**

**Acreción esférica estacionaria de agujeros negros con pelo**

**Proyecto de investigación**

**Luis Emilio Cobos Mite**

**Ernesto José Contreras Herrada, Ph.D**

**Director de Trabajo de Titulación**

Trabajo de titulación de posgrado presentado como requisito para la obtención  
del título de Magister en Física

Quito, Mayo de 2024

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Posgrados

Hoja de calificación de trabajo de titulación

**Acreción esférica estacionaria de agujeros negros con pelo**

**Luis Emilio Cobos Mite**

Nombre del director de tesis, Título académico: Ernesto José Contreras Herrada, Ph.D.

Quito, Mayo de 2024

## © DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombre del estudiante: Luis Emilio Cobos Mite

Código del estudiante: 329389

C.I.: 0917584930

Lugar y fecha: Quito, Mayo de 2024

## ACLARACIÓN PARA PUBLICACIÓN

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>.

## UNPUBLISHED DOCUMENT

Note: The following graduation project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>.

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios, a mi familia, a mis compañeros y profesores.

## Resumen

Estudiar el proceso de acreción permite determinar ciertas propiedades de los objetos gravitantes y las condiciones físicas de su entorno circundante, de una forma en la que por medios directos es complicado. Por esta razón analizar el proceso de acreción es una herramienta vital en el estudio de los agujeros negros.

El presente trabajo de investigación estudia la acreción esférica estacionaria de agujeros negros. Partiendo de las leyes de conservación de número de partículas y conservación de la energía, establece un formalismo generalizado de análisis. Utilizando un enfoque Hamiltoniano se obtienen las ecuaciones dinámicas del sistema en función de las componentes de la métrica. Posteriormente se particulariza el formalismo general al caso de un agujero negro de Reissner-Nordström analizado en el marco del desacople gravitacional.

Se demuestra que es posible incorporar al formalismo Hamiltoniano generalizado el parámetro  $k$  de la ecuación de estado para fluidos isotérmicos, lo que permite determinar el comportamiento dinámico para distintos tipos de fluidos (ultra-rígidos, ultra-relativistas, sub-relativistas y de radiación). Se encuentran los puntos críticos y se grafica las soluciones en diagramas de velocidades. Se evidencia el comportamiento subsónico, transónico y supersónico similar para cada fluido. También se determina las tasas de acreción en dos casos encontrándose una fuerte correspondencia con la componente radial de la métrica.

Palabras clave: agujeros negros, acreción esférica, análisis Hamiltoniano, fluidos isotérmicos, Relatividad.

## Abstract

Studying the accretion process allows for determining certain properties of gravitating objects and the physical conditions of their surrounding environment in a way that is challenging through direct means. For this reason, analyzing the accretion process is a vital tool in the study of black holes.

This research work focuses on the study of the stationary spherical accretion of black holes. Building upon the conservation laws of particle number and energy, it establishes a generalized formalism for analysis. By employing a Hamiltonian approach, the dynamic equations of the system are derived in terms of the metric components. Subsequently, the general formalism is specialized to the case of a Reissner-Nordström black hole analyzed within the framework of gravitational decoupling.

It is demonstrated that it is feasible to incorporate the parameter  $k$  from the equation of state for isothermal fluids into the generalized Hamiltonian formalism, allowing for determining the dynamic behavior for different types of fluids (ultra-stiff, ultra-relativistic, sub-relativistic, and radiation). Critical points are identified, and solutions are graphed on velocity diagrams. Subsonic, transonic, and supersonic behavior similar for each fluid is evidenced. Additionally, accretion rates are determined in two cases, showing a strong correspondence with the radial component of the metric.

Keywords: black holes, spherical accretion, Hamiltonian analysis, isothermal fluids, Relativity.

# TABLA DE CONTENIDO

Resumen . . . . .	6
Abstract . . . . .	7
<b>1 Introducción</b>	<b>11</b>
1.1 Motivación de la investigación . . . . .	11
1.2 Acreción. Generalidades . . . . .	12
1.3 Acreción de Bondi . . . . .	13
1.4 Acreción de Michel . . . . .	26
<b>2 Acreción esférica generalizada y enfoque Hamiltoniano</b>	<b>31</b>
2.1 Desarrollo de formalismo general . . . . .	31
2.2 Termodinámica . . . . .	34
2.3 Determinación del Sistema Hamiltoniano . . . . .	36
2.4 Puntos Críticos . . . . .	40
2.5 Tasa de Acreción . . . . .	40
<b>3 Acreción esférica aplicada a un agujero negro de Reissner-Nordström modificado</b>	<b>42</b>
3.1 Ecuaciones generales . . . . .	42
3.2 Sistema Hamiltoniano . . . . .	47
3.3 Puntos críticos . . . . .	49
3.4 Hamiltoniano en función del parámetro de la ecuación de estado . . . . .	51
3.5 Comportamiento de fluidos isotérmicos . . . . .	53
3.5.1 Fluido ultra-rígido ( $k = 1$ ) . . . . .	53
3.5.2 Fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ ) . . . . .	54
3.5.3 Fluido de radiación ( $k = 1/3$ ) . . . . .	56
3.5.4 Fluido sub-relativista ( $k = 1/4$ ) . . . . .	58
3.6 Tasa de Acreción . . . . .	60
<b>4 CONCLUSIONES</b>	<b>68</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS

- 1.1  $u$  como función de  $x$  usando la ecuación (1.15), con  $\gamma=7/5$ . Las soluciones que cumplen las condiciones de contorno (si  $x \rightarrow \infty$  entonces  $v \rightarrow 0$  y  $u \rightarrow 0$ ) son las curvas de color verde, rojo y la parte inferior de la curva naranja. La curva amarilla y las curvas de líneas punteadas no satisfacen las condiciones de contorno por lo tanto no son parte de la solución. . . . . 20
- 1.2 Identificación de regímenes de movimiento para la solución de Bondi, en base a la ecuación (1.15),  $u$  como función de  $x$ . Cuando  $u < 1$  se tiene un régimen subsónico y cuando  $u > 1$  se tiene un régimen supersónico. . . . . 21
- 1.3  $u$  como función de  $x$  para distintos valores de  $\gamma$ . Las soluciones posibles ocurren siempre y cuando  $\gamma < 3/2$ , en estos casos  $u$  (y consecuentemente  $v$ ) tiene un máximo. . . . . 22
- 1.4 Continuidad de las funciones  $z$  y  $y$  en función  $x$ , para  $\gamma=7/5$ . Note los regímenes de movimientos tipo 1 (puramente subsónico) y tipo 2 (subsónico/supersónico). 23
- 1.5 Continuidad de las funciones  $z$  y  $y$  como función de  $x$ , para  $\gamma=1$ . Note los regímenes de movimientos tipo 1 (puramente subsónico) y tipo 2 (subsónico/-supersónico). . . . . 24
- 1.6 Continuidad de las funciones  $z$  y  $y$  como función de  $x$ , para  $\gamma=5/3$ . Note los regímenes de movimientos tipo 1 (puramente subsónico) y tipo 2 (subsónico/-supersónico). . . . . 25

- 3.1 Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $\nu$ ) para un fluido ultra-rígido. La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{min} \simeq 0.38$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{min}$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{min}$ . . . . . 54
- 3.2 Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $\nu$ ) para un fluido ultra-relativista, con valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . Los puntos críticos  $(r_c, \nu_c)$  son  $(2.026209, \pm 0.707107)$ . La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c = 0.20016$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ . . . . . 56
- 3.3 Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $\nu$ ) para un fluido de radiación, con valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . Los puntos críticos  $(r_c, \nu_c)$  son  $(2.484886, \pm 0.577350)$ . La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c = 0.250956$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ . . . . . 58
- 3.4 Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $\nu$ ) para un fluido sub-relativista, con valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . Los puntos críticos  $(r_c, \nu_c)$  son  $(2.959339, \pm 0.5)$ . La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c = 0.296704$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ . . . . . 60
- 3.5 Acreción para fluido ultra-rígido utilizando la métrica 1 (3.9), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5, A = 0.1$  y valores variables de  $l_1$ . . . . . 63
- 3.6 Acreción para fluido ultra-rígido utilizando la métrica 2 (3.13), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5$  y valores variables de  $l_2$ . . . . . 64
- 3.7 Acreción para fluido ultra-relativista utilizando la métrica 1 (3.9), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5, A = 0.1$  y valores variables de  $l_1$ . 66
- 3.8 Acreción para fluido ultra-relativista utilizando la métrica 2 (3.13), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5$  y valores variables de  $l_2$ . . . . . 67

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación de la investigación

Explicar la presencia de agujeros negros supermasivos es un desafío actual. Los métodos para estudiar la presencia y características de los agujeros negros son varios, entre los más importantes tenemos: ondas gravitacionales detectadas por primera vez en 2015 por el Proyecto LIGO [1], fotografías obtenidas por primera vez en 2019 por el Telescopio de Horizonte de Eventos EHT [2], y el estudio de los procesos de acreción.

Solamente en la última década fue tecnológicamente posible detectar agujeros negros de forma directa. Debido a esto, el análisis del proceso de acreción es una herramienta vital en el estudio de las propiedades de los agujeros negros y las condiciones físicas en su entorno circundante, de una forma en la que por medios directos es aún muy complicado.

En base a esto, la motivación principal de la presente investigación es entender el proceso de acreción esférica estacionaria en agujeros negros con pelo desde un punto de vista teórico, partiendo de las ecuaciones que gobiernan la conservación del número de partículas y la con-

servación de la energía.

## 1.2 Acreción. Generalidades

La acreción de agujeros negros fue estudiada inicialmente desde el punto de vista newtoniano, por Bondi en 1952 [3]. Posteriormente Michel en 1972 [4] investigó la acreción desde el punto de vista relativista y Babichev [5] estudió el efecto de la energía oscura en la acreción de los agujeros negros. Recientemente Azreg et al [6] examinaron como la acción de la energía oscura podría disminuir la masa de los agujeros negros. Karkowsky y Malec [7] determinaron que la tasa de acreción de masa disminuye con el aumento del valor absoluto de la constante cosmológica. Mach et al [8] concluyeron que la acumulación de materia puede detenerse por completo cuando la constante cosmológica tiene valores suficientemente altos.

La acreción es el proceso por el cual un objeto gravitante (agujero negro o estrella masiva) captura partículas de su entorno y acumula materia, cambiando sus propiedades físicas [9]. Este es uno de los principales procesos astrofísicos que existen en el universo, involucrado en la formación de objetos como estrellas jóvenes, planetas, núcleos galácticos, entre otros.

En función de la relación entre el objeto gravitante y la materia que lo rodea existen tres tipos principales de acreción: acreción esférica, acreción por disco [10], y acreción de régimen mixto [11] [12]. En este trabajo se estudia la acreción esférica, en régimen estacionario, considerando el objeto gravitante un agujero negro no rotante.

La acreción con simetría esférica ocurre cuando la materia que rodea al agujero negro no tiene momento angular, es decir el agujero negro está estático con relación al medio circundante y la materia cae de forma radial [13]. Por lo tanto los parámetros físicos, densidad de partícu-

las, densidad de energía, presión, cuadrivelocidad, serán funciones solamente de la coordenada radial [9].

Uno de los primeros artículos y más completos que analizó la forma más simple de acreción debido a un objeto gravitante fue realizado por Bondi [3]. Posteriormente Michel [4] aplicó la solución de Bondi a los agujeros negros realizando una extensión al marco relativista.

### 1.3 Acreción de Bondi

El trabajo realizado por Bondi [3] es un análisis desde el punto de vista puramente newtoniano. Su trabajo analiza la acreción más simple, y parte de las siguientes premisas:

- El objeto gravitante es una estrella de masa  $M$  en reposo ubicada en una nube infinita de gas.
- El gas en el infinito se encuentra en reposo, con una densidad  $\rho_\infty$  y presión  $p_\infty$  uniforme.
- El movimiento del gas es esféricamente simétrico y constante, es decir cae con una velocidad radial  $v$  hacia el objeto gravitante.
- El aumento de la masa de la estrella es despreciable, por lo que el campo de fuerza no cambia.
- Existe una relación presión vs densidad en todas partes, dado por:

$$p/p_\infty = (\rho/\rho_\infty)^\gamma, \quad (1.1)$$

donde  $\gamma$  es el índice adiabático.

- Con un valor de  $\gamma$  adecuado la ecuación (1.1) equivale a la condición física de que no se irradia ni se conduce calor. Es decir el gas obedece a una ecuación de estado en condiciones adiabáticas.

El análisis de Bondi parte de los principios de conservación de masa (ecuación de continuidad) y conservación de energía (ecuación de Bernoulli):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) &= 0, \\ \frac{v^2}{2} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} - \frac{GM}{r} &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Considerando la simetría esférica, la ecuación de continuidad resulta:

$$4\pi r^2 \rho v = \text{constante} = A, \quad (1.3)$$

donde  $A$  es la tasa de acreción.

Aplicando las condiciones de contorno (en el infinito  $v \rightarrow 0$  y  $\rho_\infty$ ,  $p_\infty$  son uniformes) la ecuación de Bernoulli resulta:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} - \frac{GM}{r} = 0. \quad (1.4)$$

Despejando  $\rho$  de (1.1) y reemplazando en el segundo término de (1.4) se puede obtener que:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{GM}{r}. \quad (1.5)$$

Considerando que en esta ecuación se tiene  $\rho$  y  $v$  en términos de  $r$ , y el factor del segundo término así como la expresión contenida entre corchetes es adimensional, se define la velocidad

del sonido como:

$$C_s^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}. \quad (1.6)$$

Con el fin de obtener ecuaciones que incluyan relaciones entre la velocidad del gas y del sonido, se introduce las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned} x &= \frac{C_s^2}{\frac{GM}{r}} = \frac{C_s^2}{\text{potencial}}, \\ y &= \frac{v}{C_s} \equiv \text{velocidad normalizada}, \\ z &= \frac{\rho}{\rho_\infty} \equiv \text{densidad normalizada}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Se define la relación entre las variables adimensionales como un único parámetro adimensional que determine la tasa de acreción:

$$x^2 y z = \lambda > 0. \quad (1.8)$$

Reemplazando en la ecuación (1.5) se obtiene:

$$\frac{1}{2}y^2 + (z^{\gamma-1} - 1)/(\gamma - 1) = 1/x. \quad (1.9)$$

Con lo que la tasa de acreción mostrada en la ecuación (1.3) queda como:

$$A = 4\pi\lambda (GM)^2 c^{-3} \rho_\infty. \quad (1.10)$$

Se define  $u$  a la relación entre la velocidad local del gas versus la velocidad local del sonido:

$$u = \frac{v_{local}}{C_{slocal}} = yz^{-(\gamma-1)/2}. \quad (1.11)$$

La cantidad  $u$  se utilizará para resolver las ecuaciones (1.8) y (1.9), de tal forma que todos los parámetros estén en función de la relación entre velocidad del gas y velocidad del sonido, y el parámetro  $x$  que es proporcional al radio. Sustituyendo la ecuación (1.11) en (1.8) se obtiene:

$$z = (\lambda/x^2 u)^{2/(\gamma+1)}, \quad (1.12)$$

y sustituyendo (1.12) en (1.11) se obtiene:

$$y = u^{2((\gamma+1))} (\lambda/x^2)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}. \quad (1.13)$$

Reemplazando  $y$  y  $z$  de las ecuaciones (1.12) y (1.13) en (1.9):

$$\frac{1}{2} u^{4(\gamma+1)} \left( \frac{\lambda}{x^2} \right)^{2(\gamma-1)/(\gamma+1)} + \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\lambda}{x^2 u} \right)^{2(\gamma-1)/(\gamma+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1}. \quad (1.14)$$

Despejando todos los términos que dependen de  $u$  al lado izquierdo y los términos que dependen de  $x$  al lado derecho, se obtiene:

$$\frac{1}{2} u^{\frac{4}{\gamma+1}} + \frac{1}{\gamma-1} u^{\frac{-2(\gamma-1)}{\gamma+1}} = \lambda^{\frac{-2(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[ \frac{x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}}}{\gamma-1} + x^{\frac{-(5-3\gamma)}{\gamma+1}} \right], \quad (1.15)$$

$$f(u) = \lambda^{-2(\gamma-1)/(\gamma+1)} g(x).$$



donde hemos llamado  $f$  y  $g$  a las funciones correspondientes de  $u$  y  $x$ , es decir:

$$f(u) = \frac{1}{2}u^{4/(\gamma+1)} + \frac{1}{\gamma-1}u^{-2(\gamma-1)/(\gamma+1)} = u^{4/(\gamma+1)} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{u^2} \right), \quad (1.16)$$

$$g(x) = \frac{x^{4(\gamma-1)/(\gamma+1)}}{\gamma-1} + x^{-(5-3\gamma)/(\gamma+1)} = x^{4(\gamma-1)/(\gamma+1)} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1} \right). \quad (1.17)$$

Analizando la ecuación (1.15) se observa que siempre el valor de  $f$  es menor que  $g$  (o a lo sumo igual). Si despejamos  $\lambda$  de la ecuación (1.15) obtenemos:

$$\lambda = \left( \frac{g(x)}{f(u)} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}. \quad (1.18)$$

Ya que  $f$  siempre es menor o igual que  $g$ , el valor máximo que puede alcanzar  $\lambda$  es cuando se tenga el valor mínimo de  $f$  con respecto a  $g$ . Para determinar los valores mínimos se deriva las ecuaciones (1.16) y (1.17) y se iguala a cero, se obtiene:

$$f = f_m = \frac{1}{2}(\gamma+1)/(\gamma-1), \quad \text{cuando } u = u_m = 1, \quad (1.19)$$

$$g = g_m = \frac{1}{4} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[ \frac{1}{4}(5-3\gamma) \right]^{-(5-3\gamma)/(\gamma+1)}, \quad \text{cuando } x = x_m = \frac{1}{4}(5-3\gamma). \quad (1.20)$$

Usando las ecuaciones (1.19) y (1.20) en (1.18), se define el valor crítico (valor máximo)  $\lambda_c$  como:

$$\lambda_c = \left( \frac{g_m}{f_m} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \left( \frac{5-3\gamma}{4} \right)^{\frac{-(5-3\gamma)}{2(\gamma-1)}}. \quad (1.21)$$

Ya que  $\lambda \leq \lambda_c$ , de la ecuación (1.10) se obtiene que la tasa de acreción puede tener un valor máximo de:

$$A = 4\pi\lambda_c(GM)^2 C_s^{-3} \rho_\infty. \quad (1.22)$$

Este es uno de los resultados más importantes del trabajo de Bondi, ya que la ecuación (1.22) maximiza la tasa de acreción hacia el objeto gravitante, donde  $\lambda_c$  relaciona la velocidad del sonido, el potencial gravitacional, la densidad y la relación entre la velocidad del gas versus la velocidad del sonido.

En el análisis de Bondi,  $x$  varía entre infinito y el valor correspondiente a la superficie de la estrella (este valor es realmente muy pequeño). Como ejemplo se calculó el valor de  $x$  para el sol, para una una gigante roja promedio y para la Hipergigante UY Sct, obteniéndose en todos los casos valores de  $x$  menores que  $10^{-2}$ ; por lo tanto se puede considerar que  $x$  debe ser estrictamente mayor o igual a cero. Con esta condición aplicada a  $x_m$  de la ecuación (1.20), se obtiene que el valor de  $\gamma$  para la solución de Bondi debe ser menor o igual que  $5/3$ .

Ahora analicemos la solución de la ecuación (1.15), donde se tiene  $u$  como función de  $x$  de forma implícita. Utilizando un valor específico de  $\gamma=7/5$ , y variando los valores de  $\lambda$  se obtiene la gráfica de la Figura 1.1. Considerando las condiciones de contorno ( $x \rightarrow \infty$  entonces  $v \rightarrow 0$ , por lo tanto  $u \rightarrow 0$ ) la curva de color amarillo no satisface las condiciones de contorno ya que  $u$  crece cuando  $x$  crece, por lo tanto no es parte de la solución. De manera similar las curvas en líneas punteadas, no cumplen con las condiciones de contorno y tampoco cumplen con la

condición del valor crítico de  $\lambda \leq \lambda_c$ . Por lo tanto las soluciones que cumplen las condiciones de contorno son las curvas de color verde, rojo y la parte inferior de la curva naranja. Recordando que  $u$  es la relación que existe entre la velocidad local del gas versus la velocidad del sonido, cuando  $u < 1$  estaremos en un régimen subsónico (curva verde y parte inferior de la curva naranja) y cuando  $u > 1$  estaremos en un régimen supersónico (parte superior de la curva roja). En base a este análisis se identifican dos tipos de movimiento:

- **Movimiento tipo I** que ocurre cuando  $\lambda < \lambda_c$ , siendo subsónico en todas partes, corresponde a la familia de curvas de color verde. En estas cuando  $x \rightarrow \infty$  entonces  $u \rightarrow 0$  y consecuentemente  $v \rightarrow 0$ , teniendo  $u$  un único máximo.
- **Movimiento tipo II** que ocurre cuando  $\lambda = \lambda_c$ . Tiene dos segmentos, uno subsónico cuando  $u < 1$  (parte inferior de la curva naranja), y otro supersónico cuando  $u > 1$  (parte superior de la curva roja). En este caso  $u$  y  $v$  son funciones monótonas del radio.

Los resultados de este análisis genera zonas de regímenes subsónicos y supersónicos consistentes con las condiciones de contorno y que son compilados en la Figura 1.2.

Ahora variando  $\gamma$  para determinar el comportamiento de las soluciones posibles, se analizó valores alrededor de  $\lambda = \lambda_c$ . Se encontró que  $u$  (y consecuentemente  $v$ ) tiene un máximo siempre y cuando  $\gamma < 3/2$  (ver Figura 1.3).

Existen casos especiales cuyas soluciones deben ser analizados: Cuando  $\lambda=0$  entonces  $u \rightarrow 0$ , consecuentemente  $v \rightarrow 0$  al igual que  $y$ . También se debe analizar cuando  $\gamma$  adquiere sus valores extremos, esto es  $\gamma=1$  y  $\gamma=5/3$ . Reemplazando estos valores en las ecuaciones (1.9), (1.12) y (1.13) se obtiene las Figuras 1.4, 1.5 y 1.6, donde se evidencia que  $u$ ,  $y$  y  $z$ , consideradas como funciones de  $x$  y  $\gamma$  son continuas en  $1 \leq \gamma \leq 5/3$ .

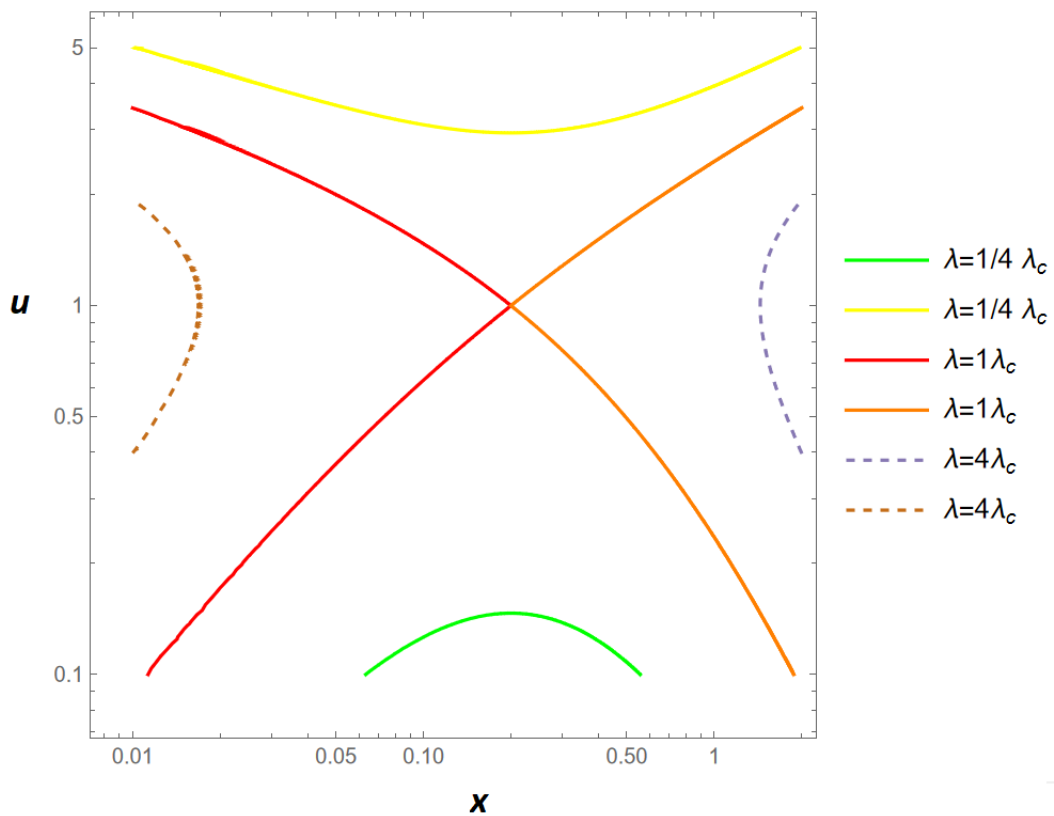


Figura 1.1:  $u$  como función de  $x$  usando la ecuación (1.15), con  $\gamma=7/5$ . Las soluciones que cumplen las condiciones de contorno (si  $x \rightarrow \infty$  entonces  $v \rightarrow 0$  y  $u \rightarrow 0$ ) son las curvas de color verde, rojo y la parte inferior de la curva naranja. La curva amarilla y las curvas de líneas punteadas no satisfacen las condiciones de contorno por lo tanto no son parte de la solución.

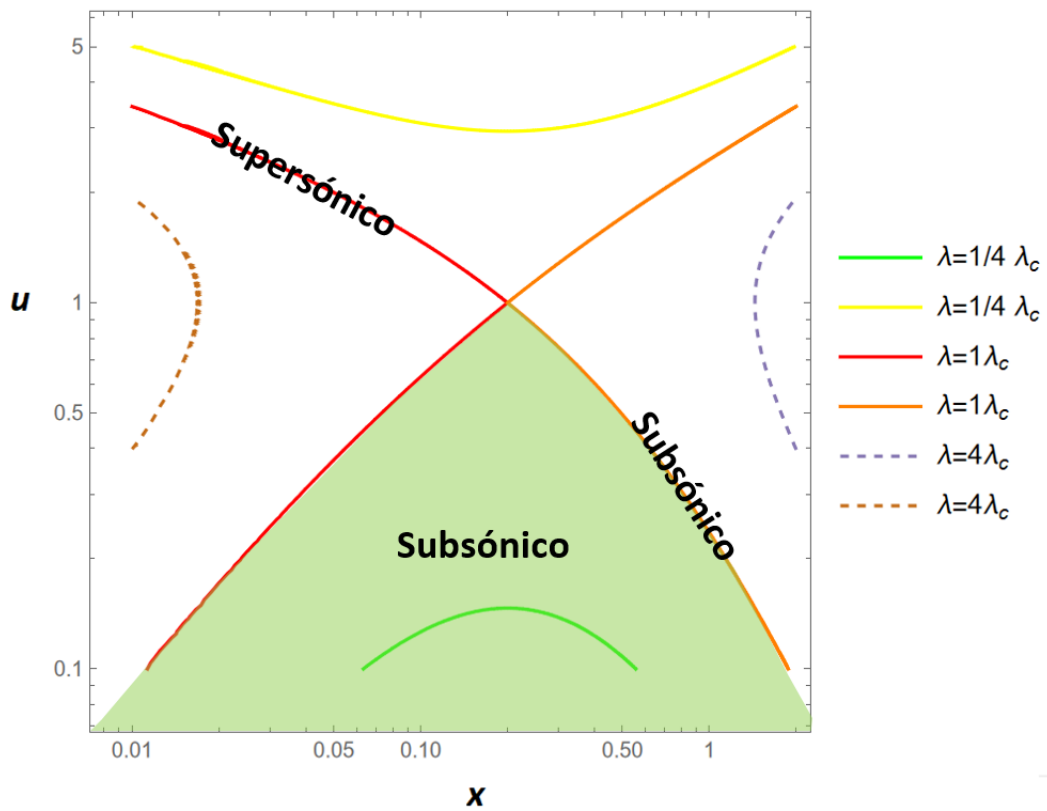


Figura 1.2: Identificación de regímenes de movimiento para la solución de Bondi, en base a la ecuación (1.15),  $u$  como función de  $x$ . Cuando  $u < 1$  se tiene un régimen subsónico y cuando  $u > 1$  se tiene un régimen supersónico.

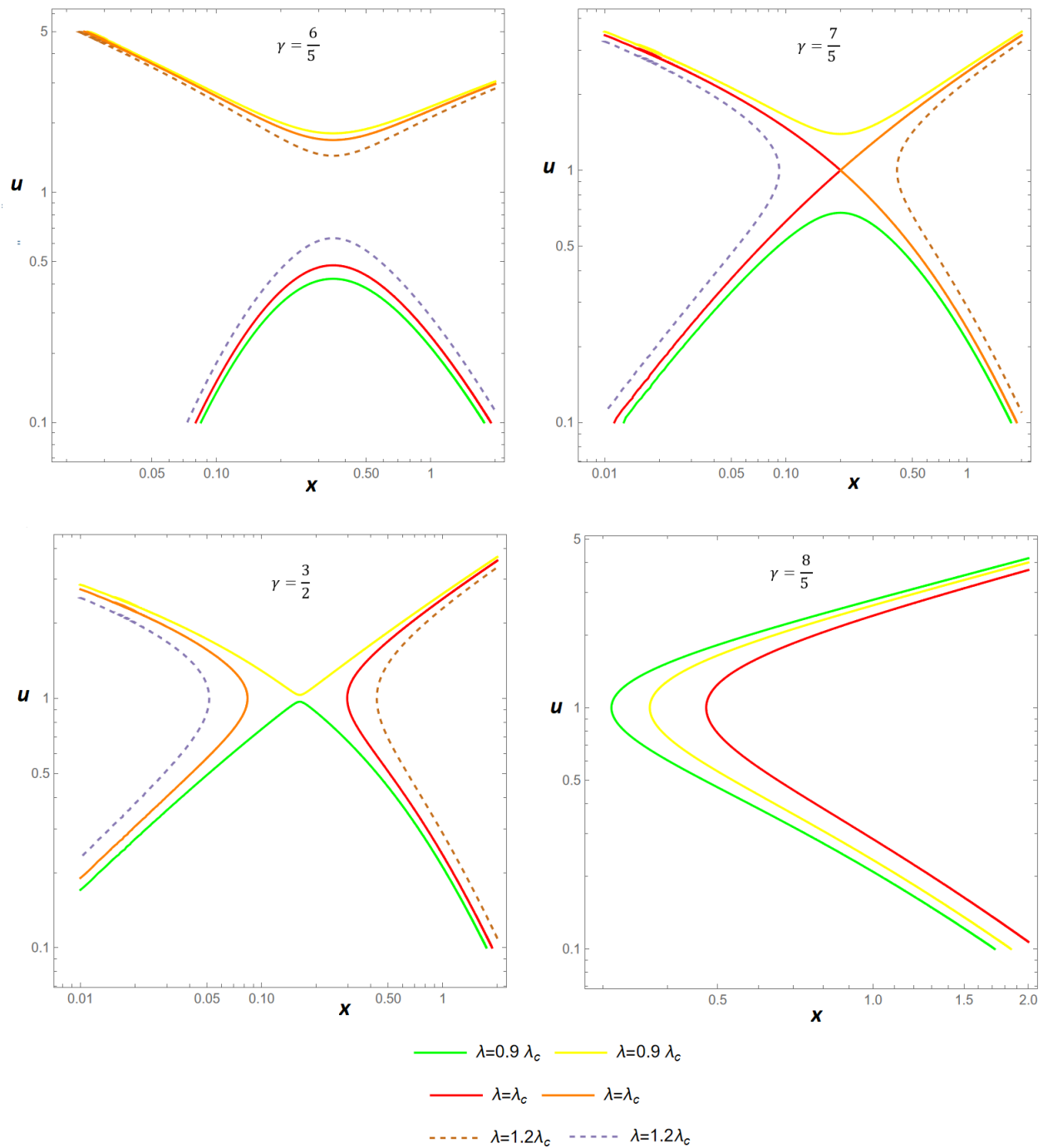


Figura 1.3:  $u$  como función de  $x$  para distintos valores de  $\gamma$ . Las soluciones posibles ocurren siempre y cuando  $\gamma < 3/2$ , en estos casos  $u$  (y consecuentemente  $v$ ) tiene un máximo.

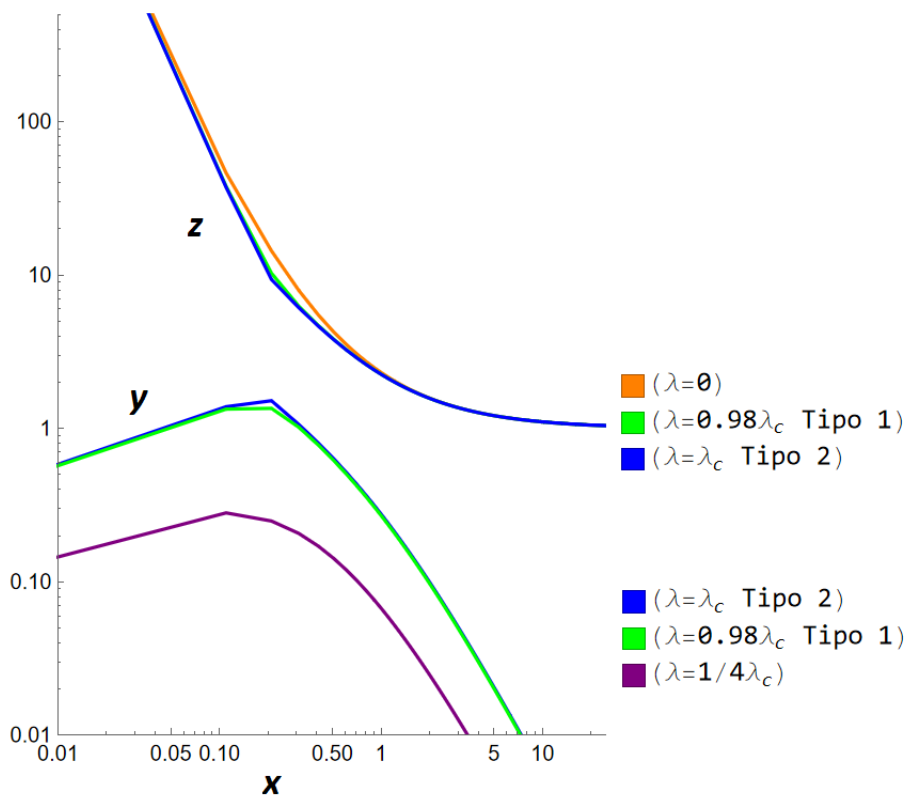


Figura 1.4: Continuidad de las funciones  $z$  y  $y$  en función  $x$ , para  $\gamma=7/5$ . Note los regímenes de movimientos tipo 1 (puramente subsónico) y tipo 2 (subsónico/supersónico).

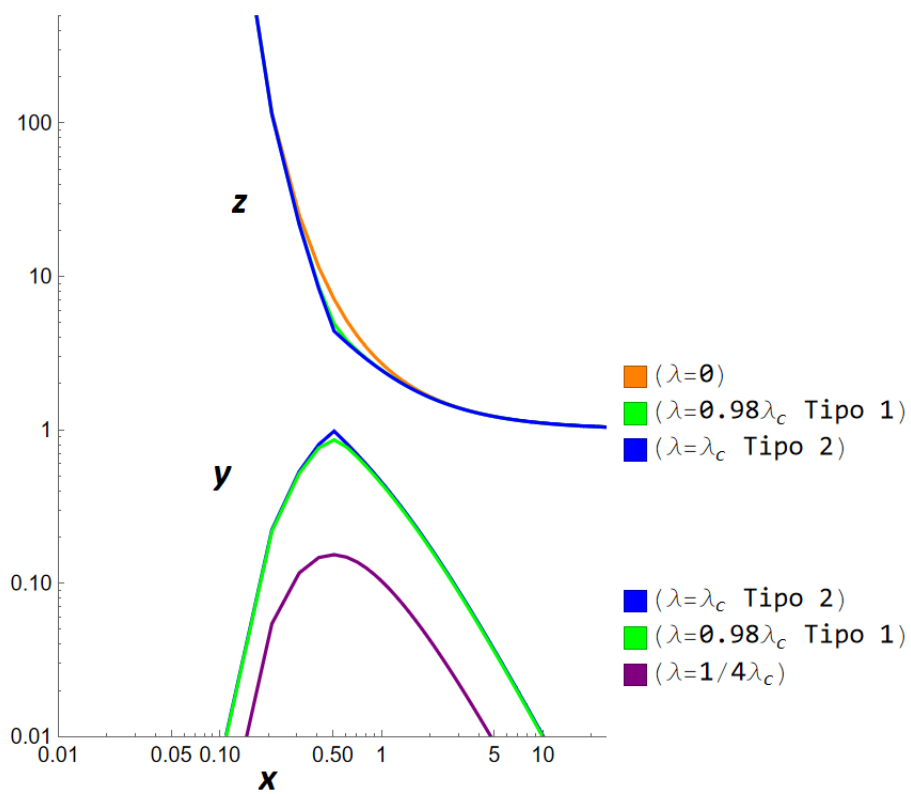


Figura 1.5: Continuidad de las funciones  $z$  y  $y$  como función de  $x$ , para  $\gamma=1$ . Note los regímenes de movimientos tipo 1 (puramente subsónico) y tipo 2 (subsónico/supersónico).



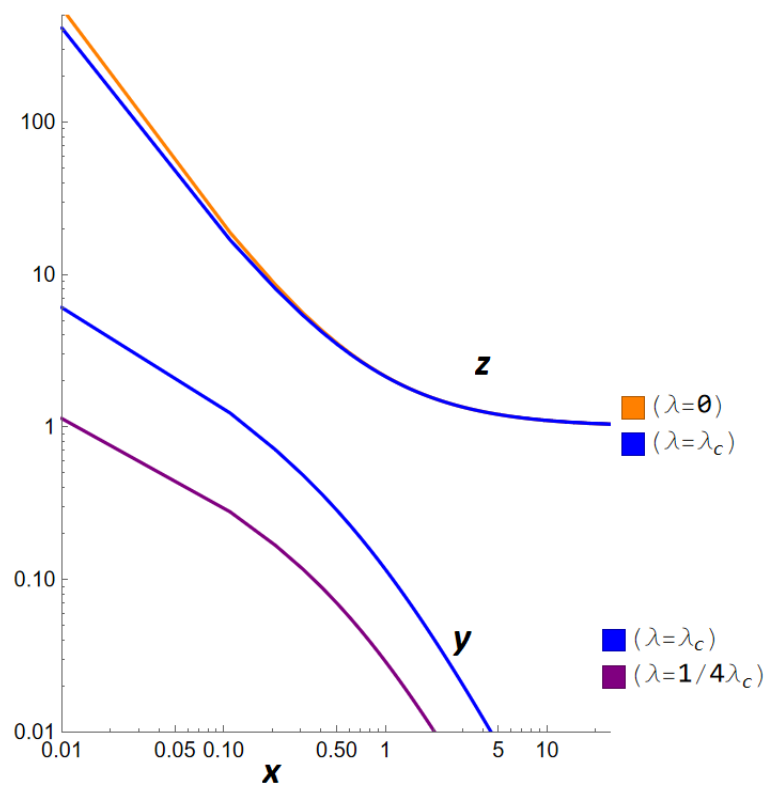


Figura 1.6: Continuidad de las funciones  $z$  y  $y$  como función de  $x$ , para  $\gamma=5/3$ . Note los regímenes de movimientos tipo 1 (puramente subsónico) y tipo 2 (subsónico/supersónico).

Según Bondi, parece probable que el orden de magnitud de la tasa de acreción en el caso en el que una estrella de masa  $M$  se mueve con velocidad relativa  $V$  en una nube uniforme de gas, en la que la densidad no perturbada y la velocidad del sonido tienen los mismos valores de  $\rho_\infty$  y  $C_s$ . La fórmula intuitivamente sería:

$$A = 2\pi(GM)^2(C_s)^{-3}\rho_\infty. \quad (1.23)$$

$$A \approx 2\pi(GM)^2(V^2 + C_s^2)^{-3/2}\rho_\infty. \quad (1.24)$$

Esta fórmula sugiere que si  $C_s$  excede a  $V$ , la temperatura (presión) impone la principal limitación en la tasa de acumulación; mientras que si  $V$  excede a  $C_s$ , las limitaciones dinámicas son de mayor importancia [3].

## 1.4 Acreción de Michel

El trabajo realizado por Michel [4] investigó la acreción desde el punto de vista relativista cuando el objeto gravitante es un agujero negro de Schwarzschild, es decir no rotante y estático. Las premisas utilizadas en este trabajo son:

- Un objeto colapsado rodeado de un fino plasma interestelar, produciéndose flujo de plasma hacia el objeto.
- Se tiene la presencia de un plasma continuo.
- Se desprecian las correcciones a la métrica del propio plasma externo.

El análisis de Michel parte de las ecuaciones básicas de flujo de masa y flujo de energía

utilizando derivadas covariantes:

$$J_{;\sigma}^{\sigma} = 0, \quad (1.25)$$

donde  $J$  es el flujo de partículas,  $\sigma = 0, 1, 2, 3$  corresponden a las componentes espacio-temporales y  $_{;\sigma}$  indica derivada covariante. También se cumple que:

$$T_{0;\sigma}^{\sigma} = 0, \quad (1.26)$$

donde  $T$  es el tensor energía momento.

Considerando simetría esférica y estado estacionario, estas ecuaciones quedan de la forma:

$$\frac{d}{dr} (J^1 \sqrt{-g}) = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{d}{dr} (T_0^1 \sqrt{-g}) = 0. \quad (1.28)$$

Realizando la integración y para un fluido perfecto se obtiene:

$$\rho U^1 \sqrt{-g} = C_1, \quad (1.29)$$

$$(P + \mu) U_0 U^1 \sqrt{-g} = C_2, \quad (1.30)$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración, así como  $\rho$  y  $P$  son la densidad y la presión propia,  $\mu$  es la densidad de energía propia total definida como:

$$\mu = \rho c^2 + \varepsilon. \quad (1.31)$$

donde  $\varepsilon$  es la energía interna térmica.

La métrica de Schwarzschild tiene la forma:

$$ds^2 = c^2 e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.32)$$

donde se tiene que:

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \text{ donde } m = \frac{GM}{c^2}. \quad (1.33)$$

En términos de la métrica de Schwarzschild las componentes de la cuadrivelocidad  $U$  son:

$$U^1 = dr/ds, U_0 = e^\nu dt/ds, \text{ y } -g = c^2 r^4 \sin^2 \theta e^{\nu+\lambda}, \quad (1.34)$$

Con lo anterior las ecuaciones de conservación toman la forma:

$$\rho u r^2 = C_1, \quad (1.35)$$

$$\left( \frac{P + \mu}{\rho} \right)^2 \left( 1 - \frac{2m}{r} + u^2 \right) = (C_2/C_1)^2 = C_3. \quad (1.36)$$

Diferenciando (1.35) y (1.36), se obtiene la relación que define el punto crítico:

$$\frac{du}{u} \left[ 2V^2 - \frac{m}{r \left( 1 - \frac{2m}{r} + u^2 \right)} \right] + \frac{dr}{r} \left[ V^2 - \frac{u^2}{\left( 1 - \frac{2m}{r} + u^2 \right)} \right] = 0, \quad (1.37)$$

donde:

$$V^2 \equiv \frac{d \ln(P + \mu)}{d \ln \rho} - 1, \quad (1.38)$$

ya que  $u = \frac{U^1}{c}$ ,  $U^1 = \frac{dr}{ds}$ ,  $U^0 = e^{\nu} \frac{dt}{ds}$ , entonces:  $u = \frac{1}{c^2} \frac{dr}{d\tau}$ .

En las ecuaciones (1.35) y (1.36) si un solo término desaparece se tiene un punto de inflexión, por lo tanto solo las soluciones que pasan por un punto crítico representarían el material que cae al objeto gravitante con una velocidad que aumenta monótonamente. Para esto ambos términos deben anularse, por lo tanto:

$$u_c^2 = \frac{m}{2r_c}, \quad (1.39)$$

$$V_c^2 = \frac{u_c^2}{(1 - 3u_c^2)}. \quad (1.40)$$

Utilizando la ecuación de estado:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (1.41)$$

y definiendo:

$$T \equiv \frac{P}{\rho}, \quad (1.42)$$

se encuentra que:

$$T^n u r^2 = C_4, \quad (1.43)$$

$$[1 + (1+n)T]^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right) = C_5, \quad (1.44)$$

$$V^2 = \frac{(1+n)T}{n[1 + (1+n)T]}, \quad (1.45)$$

donde:

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad (1.46)$$

es la relación usual entre el índice politrópico  $n$  y el índice adiabático  $\gamma$ .

En el siguiente capítulo se desarrolla un formalismo general utilizando un enfoque Hamiltoniano para el análisis de la acreción esférica estacionaria, debido a que el método convencional enmascara propiedades del flujo de fluidos.

## Capítulo 2

# Acreción esférica generalizada y enfoque Hamiltoniano

### 2.1 Desarrollo de formalismo general

Con el fin de obtener un formalismo general para el estudio de la acreción esférica, Ahmed et al [9] realizaron una primera aproximación utilizando una métrica que dependía de un coeficiente métrico  $f(r)$ . Posteriormente Azreg et al [14], [6], ampliaron este formalismo para una métrica más general. En base a esta métrica generalizada obtiene las expresiones para construir un sistema Hamiltoniano. El enfoque Hamiltoniano es utilizado para mostrar que el método estándar de análisis de la acreción enmascara algunas propiedades del flujo de fluidos, por lo tanto se usa algunos conceptos de hidrodinámica de fluidos.

Para el desarrollo formal generalizado se utiliza unidades estándar  $c = G = 1$  con signatura para la métrica igual a  $(+, -, -, -)$ . La métrica generalizada tiene la forma:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - C(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

con determinante  $g = -AC^2/B$ .

Se define la cuadrivelocidad de las partículas del fluido como:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \text{con } \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Si  $n$  es la densidad de partículas, entonces el flujo de partículas (o densidad de corriente) está dado por:

$$J^\mu = nu^\mu. \quad (2.3)$$

Para encontrar las ecuaciones de la acreción esférica utilizaremos las leyes de conservación de partículas y la conservación de energía. La conservación de partículas considera que no hay cambios en el número de partículas. Por lo tanto se conserva la divergencia de la densidad de corrientes, es decir:

$$\nabla_\mu J^\mu = \nabla_\mu (nu^\mu) = 0, \quad (2.4)$$

donde  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante.

La ley de conservación de la energía considera que no hay cambio en la energía total del sistema. Para esto utilizaremos el tensor energía-momento para un fluido perfecto dado por:

$$T^{\mu\nu} = (e + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

donde  $e$  es la densidad de energía y  $p$  es la presión. Usando este concepto la ley de conservación de la energía queda expresada como:



$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.6)$$

Como el sistema tiene simetría esférica podemos considerar el movimiento en el plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ), por lo tanto  $d\theta = d\phi = 0$ . La métrica generalizada queda:

$$ds^2 = \left(\sqrt{A}dt\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{B}}dr\right)^2. \quad (2.7)$$

Se define la trivelocidad, vista por un observador local estático, como:

$$v = \sqrt{\frac{1}{AB}} \frac{dr}{dt}. \quad (2.8)$$

Si se define  $u^t = dt/d\tau$  y  $u^r = u = dr/d\tau$  como las componentes temporal y radial respectivamente, obtenemos:

$$v^2 = \frac{1}{AB} \left(\frac{u}{u^t}\right)^2. \quad (2.9)$$

Usando la condición de normalización  $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1$  y despejando, se obtiene:

$$u^t = \pm \sqrt{\frac{1 + B^{-1}u^2}{A}}. \quad (2.10)$$

Utilizando la métrica para bajar índices se obtiene:

$$u_t = g_{tt} u^t = \pm \sqrt{A(1 + B^{-1}u^2)} = \pm \sqrt{A + Du^2}. \quad (2.11)$$

donde  $D \equiv \frac{A}{B}$

En base a (2.8), (2.9) y (2.10) se obtiene [14] :

$$u^2 = \frac{Bv^2}{1 - v^2}, \quad (2.12)$$

$$u_t^2 = \frac{A}{1 - v^2}, \quad (2.13)$$

$$v^2 = \frac{Du^2}{A + Du^2}. \quad (2.14)$$

A continuación se establecerán relaciones entre los parámetros termodinámicos del fluido, que servirán para determinar las constantes de movimiento y las ecuaciones dinámicas del sistema Hamiltoniano.

## 2.2 Termodinámica

Ahora procedemos a analizar la termodinámica del fluido. Partiendo de las relaciones termodinámicas de Maxwell:

$$dH = TdS + VdP, \quad (2.15)$$

donde  $H, T, V, P, S$  son la entalpía, temperatura, volumen, presión total y entropía del sistema. Partiendo de esta relación, despejando y reemplazando la densidad de partículas  $n$ , se obtiene:

$$dp = n(dh - Tds), \quad (2.16)$$

donde  $h$  es la entalpía por partícula. De la relación termodinámica para la entalpía del sistema se tiene que:

$$H = U + PV, \quad (2.17)$$

donde  $U, P, V$  son la energía, presión y volumen de todo el fluido. De esta relación dividiendo para el número de partículas, considerando la densidad de partículas  $n$  y la densidad de energía  $e$ , la entalpía por partícula  $h$  es:

$$h = \frac{e + p}{n}, \quad (2.18)$$

derivando, utilizando la ecuación (2.16) y despejando se obtiene la relación:

$$de = hdn + nTds. \quad (2.19)$$

Los fluidos perfectos son adiabáticos, es decir se cumple que [9]:

$$u^{\nu} \nabla_{\nu} S = 0, \quad (2.20)$$

esto significa que la entropía específica  $S$  se conserva a lo largo de las líneas de fluido siempre y cuando el flujo sea continuo. Además un fluido perfecto es isoentrópico (adiabático y la entropía específica  $s$  es constante en todo el líquido) si se cumple que:

$$\nabla_{\nu} S = 0. \quad (2.21)$$

Bajo las condiciones de movimiento de fluido radial, estacionario (no dependencia del tiempo) y conservación de simetría esférica, se cumple que:

$$\partial_r S = 0, \quad (2.22)$$

es decir el movimiento del fluido es isoentrópico ( $S$  constante). Con esto las ecuaciones (2.16) y (2.19) quedan:

$$dp = ndh, \quad de = hdn, \quad (2.23)$$

con estas relaciones se define la velocidad del sonido (adiabática) como:

$$a^2 = \frac{dp}{de} = \frac{d \ln h}{d \ln n}. \quad (2.24)$$

A continuación esta velocidad del sonido será incorporada en las ecuaciones dinámicas del sistema Hamiltoniano, y su relación con la velocidad del fluido determinará los regímenes subsónico, transónico y supersónico.

## 2.3 Determinación del Sistema Hamiltoniano

Para establecer el sistema Hamiltoniano obtendremos primero constantes de movimiento. En las condiciones de estado estacionario y simetría esférica, todos los parámetros físicos como densidad de partículas, densidad de energía, presión, cuadrivelocidad, etc, son funciones solamente de la coordenada radial [9].

De la ley de conservación de partículas  $\nabla_\mu (nu^\mu) = 0$  se tiene que:

$$\partial_r (J^1 \sqrt{-g}) = \partial_r \left( nu^1 \sqrt{\frac{AC^2}{B}} \right) = 0, \quad (2.25)$$

de lo que se obtiene una primera constante de movimiento:

$$C\sqrt{D}nu = C_1, \quad (2.26)$$

que indica que el flujo de partículas  $C\sqrt{D}nu$  permanece constante a través de una esfera de radio  $r$ . Reemplazando  $u^2$  de la ecuación (2.12) se obtiene la constante  $C_1$  como:

$$C_1^2 = \frac{A(Cnv)^2}{1 - v^2}. \quad (2.27)$$

Esta expresión se utilizará para determinar las ecuaciones dinámicas del sistema. También se observa que el comportamiento del fluido cerca del horizonte es independiente de la forma de  $B(r)$  [14], alcanzando el horizonte con una velocidad  $v \rightarrow 0$  o  $v \rightarrow 1$  [9]. Otra constante de movimiento puede ser obtenida a través de la hidrodinámica relativista [15]. Sea  $\xi^\mu$  cualquier vector Killing del espacio-tiempo. Las ecuaciones que determinan las isometrías del espacio tiempo vienen dadas por:

$$\nabla_\mu \xi^\mu = 0. \quad (2.28)$$

Si se considera que el fluido también es invariante bajo el mismo grupo de simetrías del espacio tiempo se cumple que:

$$L_\xi(B) = 0, \quad (2.29)$$

donde  $B$  es cualquier cantidad asociada al fluido y  $L$  es la derivada de Lie . Considerando también la ecuación relativista de Euler:

$$u^\mu \nabla_\mu u_\nu + \frac{1}{\rho h} h^\mu{}_\nu \nabla_\mu p = 0. \quad (2.30)$$

Aplicando la condición (2.28) se demuestra que:

$$L_\xi(hu_\mu \xi^\mu) = \nabla_\nu(hu_\mu \xi^\mu) = 0. \quad (2.31)$$

Lo que significa que si  $\xi$  es un generador de simetrías del espacio tiempo y si el fluido comparte la misma simetría, entonces la cantidad escalar  $hu_\mu \xi^\mu$  se conserva a lo largo de las líneas de fluido [15].

Si tomamos  $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$  se obtiene:

$$\partial_t(hu_t) = 0, \quad (2.32)$$

lo que significa que  $hu_t$  es constante. Reemplazando  $u_t$  usando la ecuación (2.11) se obtiene la constante de movimiento  $C_2$ :

$$h\sqrt{A + Du^2} = C_2. \quad (2.33)$$

Note que  $C_2$  es una constante de movimiento invariante frente a traslaciones temporales, por lo que está asociada con la energía.

Las ecuaciones (2.26) y (2.33) corresponden a dos constantes de movimiento del sistema, por lo que una de ellas, o una combinación de ambas, puede proveer un Hamiltoniano del sistema. Una primera aproximación en la determinación al Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es la combinación de  $C_1$  y  $C_2$ :

$$\mathcal{H} = h(n)^2 \left[ A(r) + \frac{C_1^2}{C^2(r)n^2} \right], \quad (2.34)$$

pero esta expresión depende de  $h(n), A(r), C(r), n(r, v)$ . Si consideramos solo la constante  $C_2$  de

la ecuación (2.26), y reemplazando  $u$  con la ecuación (2.12), se obtiene que:

$$C_2 = \frac{h^2(r, v)A(r)}{1 - v^2}. \quad (2.35)$$

Ya que  $C_2$  es una constante de movimiento, invariante frente a traslaciones temporales, es proporcional a la energía. Con esta consideración el Hamiltoniano se define como:

$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{h^2(r, v)A(r)}{1 - v^2}. \quad (2.36)$$

Nótese que este Hamiltoniano solo depende de  $A(r)$ ,  $h(r, v)$  y  $v$ , por lo que será este el que utilizaremos para los análisis posteriores. Con este Hamiltoniano las ecuaciones dinámicas quedan establecidas como:

$$\dot{r} = \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{H} = \mathcal{H}_{,v}, \quad (2.37)$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{H} = -\mathcal{H}_{,r}, \quad (2.38)$$

donde la derivada parcial se denota  $\partial f / \partial x = f_{,x}$ . Derivando  $\mathcal{H}(r, v)$ , utilizando la definición para la velocidad del sonido  $a$  dada en la ecuación (2.24), y la expresión para  $C_1$  dada en la ecuación (2.27), se obtiene que [14]:

$$\dot{r} = \frac{2h^2A}{v(1 - v^2)^2} (v^2 - a^2), \quad (2.39)$$

$$\dot{v} = -\frac{h^2}{1 - v^2} \left[ \frac{dA}{dr} - 2a^2A \frac{d \ln(\sqrt{AC})}{dr} \right]. \quad (2.40)$$

Estas son las ecuaciones dinámicas del fluido. A continuación resolviendo este sistema de

ecuaciones, se determinan los puntos críticos.

## 2.4 Puntos Críticos

Los puntos críticos del sistema dinámico son los puntos  $(r_c, v_c)$  que son solución de  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{v} = 0$  simultáneamente. Utilizando la ecuación (2.39) para  $\dot{r} = 0$  se obtiene que:

$$v_c^2 = a_c^2. \quad (2.41)$$

Donde  $a_c$  es la velocidad del sonido evaluado en el punto crítico y  $v_c$  es la tri-velocidad del fluido. Utilizando la ecuación (2.40) para  $\dot{v} = 0$  se obtiene que:

$$a_c^2 = \frac{C_c A_{c,r_c}}{C_c A_{c,r_c} + 2A C_{c,r_c}}. \quad (2.42)$$

Similar a lo establecido por Bondi [3] y Michel [4], los puntos críticos son aquellos puntos en los que la tri-velocidad del fluido es igual a la velocidad del sonido, y delimitan regímenes subsónicos, transónicos o supersónicos.

## 2.5 Tasa de Acreción

La tasa de acreción mide la variación de la masa de un agujero negro por unidad de tiempo. Se define como el flujo de fluido a través del área del horizonte de sucesos. Se relaciona con el tensor energía-momento a través de la relación:

$$\dot{M} = 4\pi C(r) T_t^r(r)|_{r=r_+}, \quad (2.43)$$

donde  $T_t^r(r)$  es el tensor energía-momento en la dirección radial. Recordando que el tensor energía momento puede ser expresado como:



$$T_{\mu}^{\nu} = (e + p)u_{\mu}u^{\nu} - pg_{\mu}^{\nu}, \quad (2.44)$$

por lo tanto  $T_i^r = (e + p)u_i u^r$ . Utilizando las ecuaciones (2.11), (2.18), (2.26) y (2.33) se obtiene:

$$T_i^r = (e + p)\sqrt{A + Du^2}u. \quad (2.45)$$

Reemplazando en la ecuación (2.43), y considerando que la ecuación de estado para fluidos isotérmicos tiene la forma  $p = ke$  tenemos finalmente:

$$\dot{M} = 4\pi C(r)e(k + 1)\sqrt{A + Du^2}u. \quad (2.46)$$

La ecuación (2.46) es la que se usará cuando determinemos la tasa de acreción para un agujero negro con pelo.

## Capítulo 3

# Acreción esférica aplicada a un agujero negro de Reissner-Nordström modificado

### 3.1 Ecuaciones generales

El formalismo generalizado determinado en el capítulo 3, para analizar la acreción esférica estacionaria de un agujero negro, puede ser aplicado a distintos modelos de agujeros negros. En el presente capítulo se aplicará dicho formalismo a una familia de agujeros negros cargados tipo Reissner-Nordström (RN).

Si bien es cierto que los agujeros negros suelen ser eléctricamente neutros, debido a procesos de descarga cuántica, producción de pares electrón-positrón y la neutralización de carga por plasmas astrofísicos, estos proporcionan modelos simplificados para fenómenos complejos como efectos rotacionales y agujeros negros extremos [16]. En la presente sección se utilizará como base las soluciones de agujero negro de Reissner-Nordström analizado en el marco de

desacoplamiento gravitacional (GD) presentados en el trabajo de Tello-Ortiz et al [16].

El elemento de línea de la solución de un agujero negro de Reissner-Nordström es:

$$ds^2 = h dt^2 - h^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

donde

$$h = e^\xi = \mu = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2},$$

en la que  $M$  es la masa y  $Q$  es la carga eléctrica del agujero negro.

La investigación de Tello-Ortiz et al [16] parte de la métrica espacio-temporal de un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico en coordenadas canónicas dada por:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Con esta métrica se resuelve las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi T_{\mu\nu},$$

llegando a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 8\pi\rho &= \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right], \\ 8\pi p_r &= -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right], \\ 8\pi p_\perp &= \frac{1}{4}e^{-\lambda} \left[ 2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\{\rho, p_r, p_\perp\}$  se refiere a la densidad y a las presiones radial y transversal.

El desacoplamiento gravitacional parte de que el tensor de energía-momento se puede escribir como una combinación lineal de diferentes fluidos:

$$T_{\mu\nu} \equiv \tilde{T}_{\mu\nu} + \alpha \theta_{\mu\nu},$$

donde  $\tilde{T}_{\mu\nu} = \text{diag} \{ \tilde{\rho}, -\tilde{p}_r, -\tilde{p}_\perp, -\tilde{p}_\perp \}$  es la fuente conocida llamada tensor energía momento semilla,  $\theta_\mu^\nu = \text{diag} \{ \theta_0^0, \theta_1^1, \theta_2^2, \theta_3^3 \}$  es un fluido genérico desconocido llamado fluido de desacoplamiento, y  $\alpha$  es un parámetro de acoplamiento.

Se realiza una división de los potenciales métricos de la forma:

$$\begin{aligned} v &= \xi + \alpha g, \\ e^{-\lambda} &= \mu + \alpha f, \end{aligned} \tag{3.3}$$

con esto el sistema de ecuaciones (3.2) se desacopla en dos conjuntos: uno para las métricas  $\xi$  y  $\mu$  obtenido por  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  y otro para  $f$  y  $g$  obtenido por  $\theta_{\mu\nu}$ .

Reemplazando las transformaciones (3.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} 8\pi\tilde{\rho} &= \frac{1}{r^2} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu'}{r}, \\ 8\pi\tilde{p}_r &= -\frac{1}{r^2} + \mu \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{\xi'}{r} \right], \\ 8\pi\tilde{p}_\perp &= \frac{\mu(r)}{4} \left[ 2\xi'' + \xi'^2 + \frac{2\xi'}{r} \right] + \frac{\mu'}{4} \left[ \xi' + \frac{2}{r} \right], \end{aligned} \tag{3.4}$$

junto con la ecuación de conservación:  $\frac{d\tilde{p}_r}{dr} + \frac{\xi'}{2} [\tilde{\rho} + \tilde{p}_r] - \frac{2}{r} [\tilde{p}_\perp - \tilde{p}_r] = 0$ .

y para el fluido de desacoplamiento se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -8\pi\theta_0^0 &= \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}, \\
 -8\pi\theta_1^1 &= f \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{\xi'}{r} \right], \\
 -8\pi\theta_2^2 &= \frac{f}{4} \left[ 2\xi'' + \xi^2 + 2\frac{\xi'}{r} \right] + \frac{f'}{4} \left[ \xi' + \frac{2}{r} \right],
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

junto con la ecuación de conservación:  $[\theta_1^1]' - \frac{\xi'}{2} [\theta_0^0 - \theta_1^1] - \frac{2}{r} [\theta_2^2 - \theta_1^1] = 0$ .

Como el componente  $g_{tt}$  de la métrica es el mismo para cada sector, el conjunto de ecuaciones (3.5) corresponde a tres ecuaciones diferenciales con cuatro incógnitas:  $\{f, \theta_0^0, \theta_1^1, \theta_2^2\}$ , por lo que se requiere información adicional para cerrar el sistema. Se puede demostrar que ambos sectores de materia se conservan por separado, es decir:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} &= 0, \\
 \nabla_\mu \theta^{\mu\nu} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

El sistema de ecuaciones (3.5) es completado con una ecuación de estado no local dada por:

$$\theta_1^1 = \theta_0^0 + \frac{A}{r^n} \int_0^r x^2 \theta_0^0(x) dx, \tag{3.7}$$

donde  $A$  es una constante con unidades de [longitud] <sup>$n-3$</sup>  y  $n$  un entero positivo. El resultado general para la función de desacoplamiento  $f_1(r)$  que proviene de la ecuación (3.7) es:

$$f_1(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \text{Exp} \left( \frac{r^{3-n}}{n-3} A \right) c_1, \tag{3.8}$$

lo que conduce a:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}}{\left(1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1\right)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.9)$$

con  $c_1$  una constante de integración adimensional y  $l_1 \equiv \alpha c_1$ . Se observa que el caso límite  $n = 3$  no es permitido.

Analizando bajo que condiciones los parámetros  $\{A, n\}$ , la solución de (3.9) mantienen el comportamiento asintóticamente plano del espacio-tiempo original ecuación (3.1). Se tienen tres casos:

1. Para  $n < 3$  y  $A > 0$ , el espacio-tiempo (3.9) es asintóticamente plano, ya que since  $\text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ .
2. Para  $n < 3$  y  $A < 0$ , el espacio-tiempo (3.9) no es asintóticamente plano porque  $\text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ .
3. Para  $n > 3$  y  $A > 0$  o  $A < 0$ , el espacio-tiempo (3.9) no es asintóticamente plano, ya que  $\text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ .

El comportamiento del caso 1 es lo que se espera para una buena solución y es el que se analizará de aquí en adelante. En este caso, la solución mantiene la misma estructura de horizonte y singularidad en  $r = 0$  que su contra parte RN. Para ser más precisos, la métrica  $g^{rr}$  se hace cero si  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ , donde  $r_+$  y  $r_-$  son el horizonte de eventos y el horizonte de Cauchy o si:

$$1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1 = 0 \Rightarrow r = \left[\frac{(n-3)}{A} \log\left(-\frac{1}{l_1}\right)\right]^{1/(3-n)}. \quad (3.10)$$

Ahora si tomamos un conjunto  $n = 3$ , la condición (3.7) resulta:

$$\theta_1^1 = \theta_0^0 + \frac{2}{r^3} \int_0^r x^2 \theta_0^0(x) dx. \quad (3.11)$$

Con esto la solución  $f_2(r)$  es

$$f_2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{c_2}{r^2}, \quad (3.12)$$

con  $c_2$  una constante de integración con unidades de  $[longitud]^2$  y  $l_2 \equiv \alpha c_2$ , La métrica RN resulta:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}}{\left(1 + \frac{l_2}{r^2}\right)} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.13)$$

Note que un nuevo horizonte aparece cuando:

$$1 + \frac{l_2}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{-l_2}, \quad (3.14)$$

por lo que si  $l_2 > 0$  tenemos una condición no física.

## 3.2 Sistema Hamiltoniano

Para particularizar el enfoque Hamiltoniano generalizado que se estableció en el capítulo 2, en las métricas de las ecuaciones (3.9) y (3.13) se identifican las funciones de la métrica general de la ecuación (2.1), reconociendo las funciones  $A(r), C(r)$  iguales para ambas métricas:

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (3.15)$$

$$C(r) = r^2. \quad (3.16)$$

Las funciones  $B(r)$  y  $D \equiv \frac{A}{B}$  sí son diferentes para cada métrica. Para la métrica 1 ecuación (3.9) se tiene que:

$$B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1\right), \quad (3.17)$$

$$D(r) = \left(1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1\right)^{-1}. \quad (3.18)$$

Y para la métrica 2, ecuación (3.13) las funciones  $B(r)$  y  $D \equiv \frac{A}{B}$  son:

$$B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{l_2}{r^2}\right), \quad (3.19)$$

$$D(r) = \left(1 + \frac{l_2}{r^2}\right)^{-1}. \quad (3.20)$$

Dado que  $A(r)$  y  $C(r)$  para ambas métricas tienen la misma forma, las siguientes ecuaciones son aplicables para ambos casos, debido a que no involucran a las funciones  $B(r)$  y  $D(r)$ .

Aplicando la ecuación (2.36) y reemplazando las respectivas funciones, se obtiene que el Hamiltoniano viene dado por:

$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{h^2}{1-v^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right). \quad (3.21)$$

Aplicando la ecuación (2.39) y reemplazando las funciones se obtiene la ecuación dinámica:

$$\dot{r} = \frac{2h^2(v^2 - a^2)}{v(1-v^2)^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right). \quad (3.22)$$

Para determinar la segunda ecuación dinámica del sistema aplicando la ecuación (2.40), es necesario realizar unos cálculos intermedios. La ecuación (2.40) puede escribirse también



como:

$$\dot{v} = \frac{h^2}{v^2 - 1} \left[ \frac{dA}{dr} (1 - a^2) - 2a^2 \frac{A}{C} \frac{dC}{dr} \right], \quad (3.23)$$

donde se obtiene que:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3}, \quad (3.24)$$

$$\frac{A}{C} = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right). \quad (3.25)$$

Reemplazando (3.22) (3.23) en (3.21) se obtiene que la segunda ecuación dinámica del sistema es:

$$\dot{v} = \frac{h^2}{(v^2 - 1)r^3} [2Mr(1 + 3a^2) - 2Q^2(1 + a^2) - 4a^2r^2]. \quad (3.26)$$

A continuación se encuentran los puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones (3.23) y (3.26).

### 3.3 Puntos críticos

Dado que el Hamiltoniano y las ecuaciones dinámicas para ambas métricas tienen la misma forma, los puntos críticos se establecerán de forma similar para ambas métricas.

Recordemos que los puntos críticos son los puntos  $(r_c, v_c)$  que son solución de  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{v} = 0$

simultáneamente. De la ecuación (3.22) para  $\dot{r} = 0$  se obtiene que:

$$\dot{r} = \frac{2h^2(v^2 - a^2)}{v(1 - v^2)^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) = 0,$$

de donde se obtiene que:

$$v_c^2 = a_c^2, \quad (3.27)$$

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0. \quad (3.28)$$

De esta última ecuación se obtiene que:

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (3.29)$$

como consecuencia, para tener condiciones físicas debe cumplirse que  $M^2 \geq Q^2$ .

Utilizando la ecuación (3.26) para  $\dot{v} = 0$ , se obtiene que:

$$a_c^2 = \frac{Q^2 - Mr_c}{3Mr_c - Q^2 - 2r_c^2}. \quad (3.30)$$

A continuación se incorpora el parámetro  $k$  de la función de estado a las ecuaciones dinámicas del fluido, con el fin de aplicarlas a distintos tipos de fluidos isotérmicos.

### 3.4 Hamiltoniano en función del parámetro de la ecuación de estado

En esta sección se encontrará el Hamiltoniano y las ecuaciones dinámicas en función del parámetro  $k$  de la ecuación de estado para fluidos isotérmicos, con el fin de determinar el comportamiento para fluidos ultra-rígidos, ultra-relativistas, de radiación y sub-relativistas [8] [17] [9].

Partiendo de  $C_1$  de la ecuación (2.27) y reemplazando las expresiones de  $A(r)$  y  $C(r)$  se obtiene que:

$$C_1^2 = \frac{v^2 r^4 n^2}{1 - v^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right). \quad (3.31)$$

Considerando (3.27) y (3.30) y reemplazando el valor de  $v^2$  se obtiene que:

$$C_1^2 = -\frac{n^2 r^2 (Q^2 - Mr_c)}{2(r_c^2 - 2Mr_c + Q^2)} (r^2 - 2Mr + Q^2). \quad (3.32)$$

Recordando que  $n$  es válida para cualquier punto, entonces para el punto crítico tendríamos, simplificando:

$$C_1^2 = -\frac{1}{2} n_c^2 r_c^2 (Q^2 - Mr_c). \quad (3.33)$$

Reemplazando esto en (3.31) y despejando se obtiene:

$$\frac{n^2}{n_c^2} = \frac{(v^2 - 1) r_c^2 (Q^2 - Mr_c)}{2r^2 v^2 (r^2 - 2Mr + Q^2)}. \quad (3.34)$$

De la parte termodinámica del formalismo general, usando las ecuaciones (2.18) y (2.23) se llega a:

$$h = \frac{de}{dn} = \frac{e+p}{n}. \quad (3.35)$$

Integrando desde el punto sónico a cualquier punto al interior del fluido se tiene que [18] :

$$n = n_c \exp \left( \int_{e_c}^e \frac{de'}{e' + p(e')} \right). \quad (3.36)$$

Considerando la ecuación de estado isotérmica  $p = ke$ , reemplazando e integrando se obtiene:

$$n = n_c \left( \frac{e}{e_c} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (3.37)$$

Despejando  $e$  y reemplazando en la ecuación de la entalpía (2.18) se llega a:

$$h = \frac{(k+1)e_c}{n_c} \left( \frac{n}{n_c} \right)^k. \quad (3.38)$$

Elevando al cuadrado y reemplazando (3.34) en (3.38) se obtiene:

$$h^2 = \left( \frac{e_c}{n_c^{k+1}} \right)^2 (k+1)^2 C_1^{2k} \frac{(1-v^2)^k}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^k v^{2k} r^{4k}}. \quad (3.39)$$

Nótese que en la primera parte se han agrupado constantes que se pueden integrar en la definición de tiempo del Hamiltoniano [19]. Considerando que  $h^2$  es proporcional a (3.39) y reemplazando en la expresión (3.21), el Hamiltoniano queda determinado como:

$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1-k}}{(1-v^2)^{1-k} v^{2k} r^{4k}}, \quad (3.40)$$

donde ya queda incorporado el parámetro  $k$  de la ecuación de estado para fluidos isotérmicos. A continuación se utiliza este Hamiltoniano para hallar las ecuaciones dinámicas, puntos críticos y tasas de acreción para distintos fluidos isotérmicos.

## 3.5 Comportamiento de fluidos isotérmicos

A partir de soluciones analíticas exactas para fluidos isotérmicos obtenidas por Mach et al [8] y del análisis respectivo de la estabilidad de la acreción para estas soluciones [17], Ahmed et al [9] clasificaron los fluidos isotérmicos en ultra-rígidos, ultra-relativistas, de radiación y sub-relativistas, dependiendo del valor que tome el parámetro  $k$  de la ecuación de estado  $p = ke$ . Comparando esta ecuación de estado con la velocidad del sonido adiabática  $a^2 = dp/de$  definida en la ecuación (2.24), se encuentra que  $a^2 = k$ . A continuación se aplican los resultados obtenidos en la secciones anteriores, con el fin de determinar el comportamiento de los distintos fluidos isotérmicos alrededor de un agujero negro estático, esféricamente simétrico y analizado en el marco de Desacople Gravitacional.

### 3.5.1 Fluido ultra-rígido ( $k = 1$ )

En el caso de un fluido ultra-rígido la ecuación de estado se obtiene cuando el parámetro  $k = 1$ , por lo que  $p = ke$  indica que la densidad de energía y la presión isotrópica es la misma. El Hamiltoniano de la ecuación (3.40) queda:

$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{1}{v^2 r^4}. \quad (3.41)$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema se obtienen diferenciando (3.41), como resultado:

$$\dot{v} = \frac{4}{v^2 r^5}, \quad (3.42)$$

$$\dot{r} = -\frac{2}{v^3 r^4}. \quad (3.43)$$

Este sistema indica que no existen puntos críticos. El valor mínimo de  $\mathcal{H}$  es:

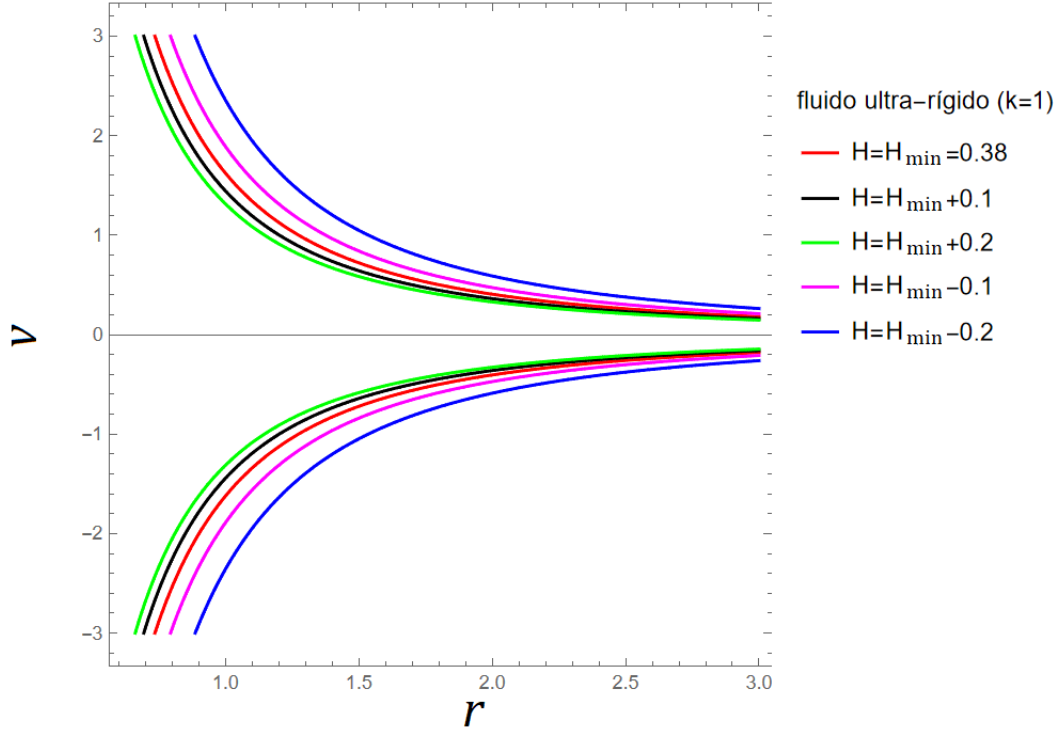


Figura 3.1: Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $v$ ) para un fluido ultra-rígido. La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\min} \simeq 0.38$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_{\min}$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_{\min}$ .

$$\mathcal{H}_{\min} = \frac{1}{r^2(v+r)^2}. \quad (3.44)$$

Gráficamente se puede apreciar el comportamiento del fluido ultra-rígido en la Figura 3.1. Las curvas de la parte superior ( $v > 0$ ) corresponden a salida de fluido o emisión de partículas, mientras que las curvas de la parte inferior ( $v < 0$ ) corresponden a acumulación de fluido o acreción.

### 3.5.2 Fluido ultra-relativista ( $k = 1/2$ )

Los fluidos ultra-relativistas son aquellos cuya presión isotrópica es menor que la densidad de energía [9]. La ecuación de estado para un fluido ultra-relativista se obtiene cuando el

parámetro  $k = \frac{1}{2}$ , resultando la ecuación  $p = e/2$ . El Hamiltoniano de la ecuación (3.40) queda:

$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}}{\sqrt{(1 - v^2)vr^2}}. \quad (3.45)$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema se obtienen diferenciando (3.45), como resultado:

$$\dot{r} = -\frac{(-2v^2 + 1)(r^2 - 2Mr + Q^2)^{\frac{1}{2}}}{r^3 v^2 (1 - v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.46)$$

$$\dot{v} = -\frac{-2r^2 + 5Mr - 3Q^2}{r^4 v (1 - v^2)^{\frac{1}{2}} (r^2 - 2Mr + Q^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.47)$$

Estas dos ecuaciones se resuelven para  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{v} = 0$  simultáneamente, obteniéndose que los puntos críticos  $(r_c, v_c)$  son  $(2.026209, \pm 0.707107)$ . Reemplazando estos valores en (3.45) se obtiene el Hamiltoniano crítico  $\mathcal{H}_c = 0.20016$ .

Gráficamente se puede apreciar el comportamiento del fluido ultra-relativista en la Figura 3.2. Para facilidad de cálculo y en base a la ecuación (3.29), que establece la relación  $M^2 \geq Q^2$  para tener soluciones físicas, se eligen los valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . En esta figura las curvas de la parte superior ( $v > 0$ ) corresponden a salida de fluido o emisión de partículas, mientras que las curvas de la parte inferior ( $v < 0$ ) corresponden a acumulación de fluido o acreción. Los puntos críticos se ubican en el cruce de las curvas color rojo. Las curvas verde y negra ocurren cuando  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las del extremo superior ocurren cuando  $v > v_c$  y corresponden a emisión supersónica. Las del extremo inferior ocurren cuando  $v < -v_c$  y corresponden a acreción supersónica. Las curvas intermedias, cuando  $-v_c < v < v_c$ , corresponden a emisión/acreción subsónica con una velocidad que tiende a cero cerca del horizonte. Las curvas rojas ocurren cuando  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$ . Las curvas en las que se pasa de un comportamiento supersónico a subsónico corresponden a la acreción de Bondi no relativista estándar y reflejan un comportamiento transónico

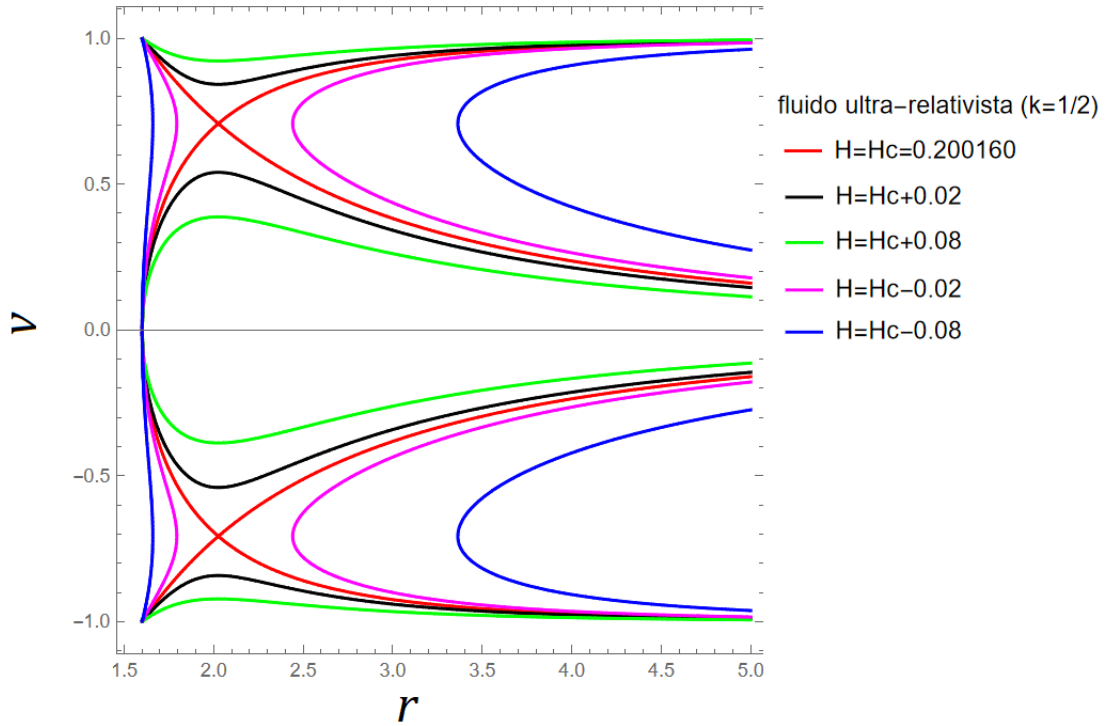


Figura 3.2: Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $v$ ) para un fluido ultra-relativista, con valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . Los puntos críticos  $(r_c, v_c)$  son  $(2.026209, \pm 0.707107)$ . La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c = 0.20016$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ .

hacia el horizonte del agujero negro. Las curvas que pasan de un comportamiento subsónico a supersónico violan las condiciones de contorno ya que indican que cuando  $r \rightarrow +\infty$   $v \rightarrow \infty$ , y por lo tanto son inestables. Las curvas magenta y azul ocurren cuando  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ , lo que indica que son flujos subcríticos que no alcanzan el punto crítico, y que violan las condiciones de contorno ya que indican que cuando  $r \rightarrow +\infty$   $v \rightarrow \infty$ , por lo tanto reflejan un comportamiento no físico.

### 3.5.3 Fluido de radiación ( $k = 1/3$ )

La ecuación de estado para un fluido de radiación se obtiene cuando el parámetro  $k = \frac{1}{3}$ , resultando  $p = e/3$  [8],[9]. El Hamiltoniano de la ecuación (3.40) queda:



$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{2}{3}}}{(1 - v^2)^{\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} r^{\frac{4}{3}}}. \quad (3.48)$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema se obtienen diferenciando (3.48), como resultado:

$$\dot{r} = -\frac{(-6v^2 + 2)(r^2 - 2Mr + Q^2)^{\frac{2}{3}}}{3r^{\frac{8}{3}} v^{\frac{5}{3}} (1 - v^2)^{\frac{5}{3}}}, \quad (3.49)$$

$$\dot{v} = -\frac{-4r^2 + 12Mr - 8Q^2}{3r^{\frac{11}{3}} v^{\frac{2}{3}} (1 - v^2)^{\frac{2}{3}} (r^2 - 2Mr + Q^2)^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.50)$$

Para encontrar los puntos críticos estas dos ecuaciones se resuelven para  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{v} = 0$  simultáneamente. Se encontró que los puntos críticos  $(r_c, v_c)$  son  $(2.484886, \pm 0.577350)$ . Reemplazando estos valores en (3.48) se obtiene el Hamiltoniano crítico  $\mathcal{H}_c = 0.250956$ .

En la Figura 3.3 se visualiza el comportamiento del fluido de radiación. Se eligen los valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$  para facilidad de cálculo y para cumplir la relación  $M^2 \geq Q^2$  para tener soluciones físicas. Las curvas de la parte superior ( $v > 0$ ) corresponden a salida de fluido o emisión de partículas, mientras que las curvas de la parte inferior ( $v < 0$ ) corresponden a acumulación de fluido o acreción. Los puntos críticos se ubican en el cruce de las curvas color rojo. Las curvas verde y negra ocurren cuando  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las del extremo superior ocurren cuando  $v > v_c$  y corresponden a emisión supersónica. Las del extremo inferior ocurren cuando  $v < -v_c$  y corresponden a acreción supersónica. Las curvas intermedias, cuando  $-v_c < v < v_c$ , corresponden a emisión/acreción subsónica con una velocidad que disminuye cerca del horizonte. Las curvas rojas ocurren cuando  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$ . Las curvas en las que se pasa de un comportamiento supersónico a subsónico corresponden a la acreción de Bondi no relativista estándar y reflejan un comportamiento transónico hacia el horizonte del agujero negro. Las curvas que pasan de un comportamiento subsónico a supersónico violan las condiciones de

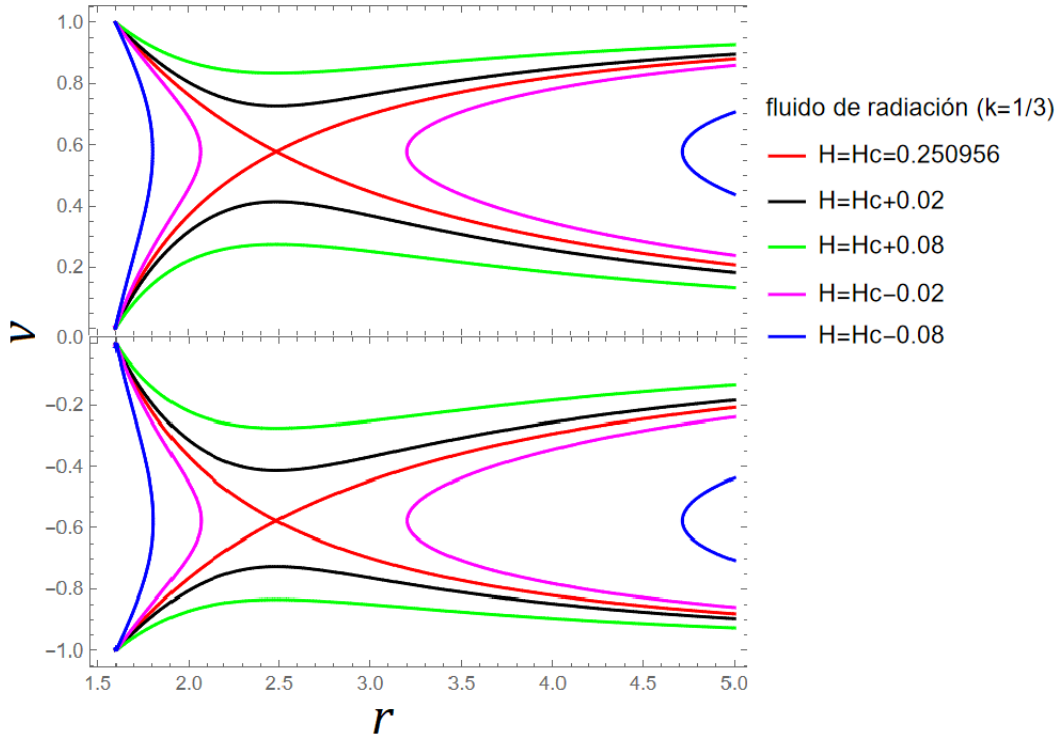


Figura 3.3: Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $v$ ) para un fluido de radiación, con valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . Los puntos críticos  $(r_c, v_c)$  son  $(2.484886, \pm 0.577350)$ . La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c = 0.250956$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ .

contorno ya que indican que cuando  $r \rightarrow +\infty$   $v \rightarrow \infty$ , y por lo tanto son inestables. Las curvas magenta y azul ocurren cuando  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ , lo que indican que son flujos subcríticos que no alcanzan el punto crítico, y que violan las condiciones de contorno ya que indican que cuando  $r \rightarrow +\infty$   $v \rightarrow \infty$ , por lo tanto reflejan un comportamiento no físico.

### 3.5.4 Fluido sub-relativista ( $k = 1/4$ )

La ecuación de estado para un fluido sub-relativista se obtiene cuando el parámetro  $k = \frac{1}{4}$  [9]. El Hamiltoniano de la ecuación (3.40) resulta:

$$\mathcal{H}(r, v) = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{4}}}{(1 - v^2)^{\frac{3}{4}} v^{\frac{1}{2}} r}. \quad (3.51)$$

Las ecuaciones dinámicas del sistema se obtienen diferenciando (3.45), como resultado:

$$\dot{r} = -\frac{(-4v^2 + 1) (r^2 - 2Mr + Q^2)^{\frac{3}{4}}}{2r^{\frac{5}{2}} v^{\frac{3}{2}} (1 - v^2)^{\frac{7}{4}}}, \quad (3.52)$$

$$\dot{v} = -\frac{3(Mr - Q^2) - 2\left(\frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{4}} r^{\frac{3}{2}} (r^2 - 2Mr + Q^2)^{\frac{1}{4}}}{2r^{\frac{7}{2}} v^{\frac{1}{2}} (1 - v^2)^{\frac{3}{4}} (r^2 - 2Mr + Q^2)^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.53)$$

Estas dos ecuaciones se resuelven para  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{v} = 0$  simultáneamente, obteniéndose que los puntos críticos  $(r_c, v_c)$  son  $(2.959339, \pm 0.5)$ . Reemplazando estos valores en (3.51) se obtiene el Hamiltoniano crítico  $\mathcal{H}_c = 0.296704$ .

El comportamiento del fluido sub-relativista se muestra en la Figura 3.4. Para tener soluciones físicas y para facilidad de cálculo se eligen los valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . En esta figura las curvas de la parte superior ( $v > 0$ ) corresponden a salida de fluido o emisión de partículas, mientras que las curvas de la parte inferior ( $v < 0$ ) corresponden a acumulación de fluido o acreción. Los puntos críticos se ubican en el cruce de las curvas color rojo. Las curvas verde y negra ocurren cuando  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las del extremo superior ocurren cuando  $v > v_c$  y corresponden a emisión supersónica. Las del extremo inferior ocurren cuando  $v < -v_c$  y corresponden a acreción supersónica. Las curvas intermedias, cuando  $-v_c < v < v_c$ , corresponden a emisión/acreción subsónica con una velocidad que disminuye a cero cerca del horizonte. Las curvas rojas ocurren cuando  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$ . Las curvas en las que se pasa de un comportamiento supersónico a subsónico corresponden a la acreción de Bondi no relativista estándar y reflejan un comportamiento transónico hacia el horizonte del agujero negro. Las curvas que pasan de un comportamiento subsónico a supersónico violan las condiciones de contorno ya que indican

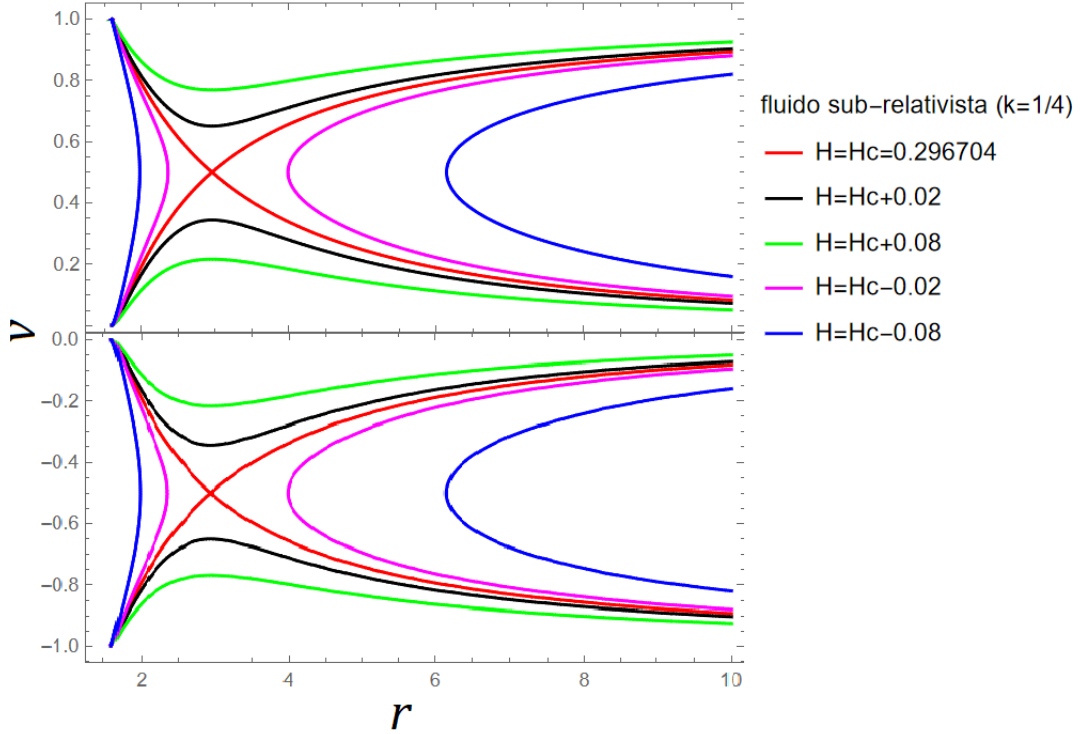


Figura 3.4: Perfil de  $H$  ( $r$  versus  $v$ ) para un fluido sub-relativista, con valores de  $M = 1$  y  $Q = 0.8$ . Los puntos críticos  $(r_c, v_c)$  son  $(2.959339, \pm 0.5)$ . La curva magenta corresponde a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c = 0.296704$ . Las curvas verde y negra corresponden a  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$ . Las curvas roja y azul corresponden a  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ .

que cuando  $r \rightarrow +\infty$   $v \rightarrow \infty$ , y por lo tanto son inestables. Las curvas magenta y azul ocurren cuando  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$ , lo que indican que son flujos subcríticos que no alcanzan el punto crítico, y que violan las condiciones de contorno ya que indican que cuando  $r \rightarrow +\infty$   $v \rightarrow \infty$ , por lo tanto reflejan un comportamiento no físico.

### 3.6 Tasa de Acreción

La tasa de acreción mide la variación de la masa de un agujero negro por unidad de tiempo. En la ecuación (2.46) se determinó la forma generalizada para determinarla.

La ecuación relativista de flujo de energía es dada por:

$$\frac{de}{e+p} + \frac{du^r}{u^r} + \frac{2}{r}dr = 0. \quad (3.54)$$

Integrando esta ecuación se obtiene que:

$$r^2 u^r \exp \left[ \int_{e_\infty}^e \frac{de'}{e' + p(e')} \right] = A_1. \quad (3.55)$$

Ya que la ecuación de estado de un fluido isotérmico está dada por  $p = ke$ , por lo tanto  $(e + p) = e(1 + k)$ . Reemplazando en la ecuación (3.55) e integrando se tiene que:

$$e = \left[ \frac{A_1}{r^2 u^r} \right]^{1+k}. \quad (3.56)$$

Utilizando las constantes de movimiento  $C_1$  y  $C_2$  dadas por las ecuaciones (2.26) y (2.33), se puede definir una nueva constante  $A_0 = C_1 C_2$ , que resultará:

$$r^2 u^r (e + p) \sqrt{A(r) + D(r)} (u^r)^2 \sqrt{D} = A_0 = C_1 C_2. \quad (3.57)$$

Reemplazando (3.56) en (3.57) y despejando se encontrará una expresión general que relaciona la velocidad radial con las componentes de la métrica y las constantes  $A_0$  y  $A_1$  que es:

$$D^2 (u^r)^2 - \frac{A_0^2 A_1^{-2(k+1)}}{(k+1)^2} r^{4k} (u^r)^{2k} + AD = 0. \quad (3.58)$$

Recordando que  $D = \frac{A}{B}$  y reemplazando la ecuación (3.57) en (2.46) se encuentra que:

$$\dot{M} = 4\pi \frac{A_0}{\sqrt{D}}. \quad (3.59)$$

Tomando la condición de frontera al infinito se puede encontrar la relación [18]:

$$A_0 = (e + p) u_t u^r r^2 = A_1 (e_\infty + p(e_\infty)). \quad (3.60)$$

Reemplazando en la ecuación (3.9) se llega a que la tasa de acreción para un fluido isotérmico está dada por:

$$\dot{M} = \frac{4\pi}{\sqrt{D}} A_1 e^{(k+1)}. \quad (3.61)$$

Con estos resultados, para calcular la tasa de acreción para un valor de  $k$  en particular se utiliza la ecuación (3.58) para determinar  $u^r$ , cuyo resultado se reemplaza en la ecuación (3.56) para determinar  $e$  y finalmente determinar  $\dot{M}$  utilizando la ecuación (3.61).

Para un **fluido ultra-rígido**, valor  $k = 1$  y utilizando las expresiones  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $C(r)$  y  $D(r)$  determinadas en las ecuaciones (3.15) a (3.20), se obtiene:

Para la métrica 1 dada por (3.9):

$$u^r = \pm 2A_1^2 \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) / \left(1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1\right)}{A_0^2 r^4 - \left(4A_1^4 / \left(1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1\right)^2\right)}}, \quad (3.62)$$

$$\dot{M} = 2\pi \frac{\left(A_0^2 r^4 \left(1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1\right)^2 - 4A_1^4\right)}{A_1 r^4 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(1 + \text{Exp}\left(\frac{r^{3-n}}{n-3}A\right) l_1\right)^{1/2}}. \quad (3.63)$$

Para la métrica 2 dada por (3.13) se obtiene:

$$u^r = \pm 2A_1^2 \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) / \left(1 + \frac{l_2}{r^2}\right)}{A_0^2 r^4 - \left(4A_1^4 / \left(1 + \frac{l_2}{r^2}\right)^2\right)}}, \quad (3.64)$$

$$\dot{M} = 2\pi \frac{\left(A_0^2 r^4 \left(1 + \frac{l_2}{r^2}\right)^2 - 4A_1^4\right)}{A_1 r^4 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{l_2}{r^2}\right)^{1/2}}. \quad (3.65)$$

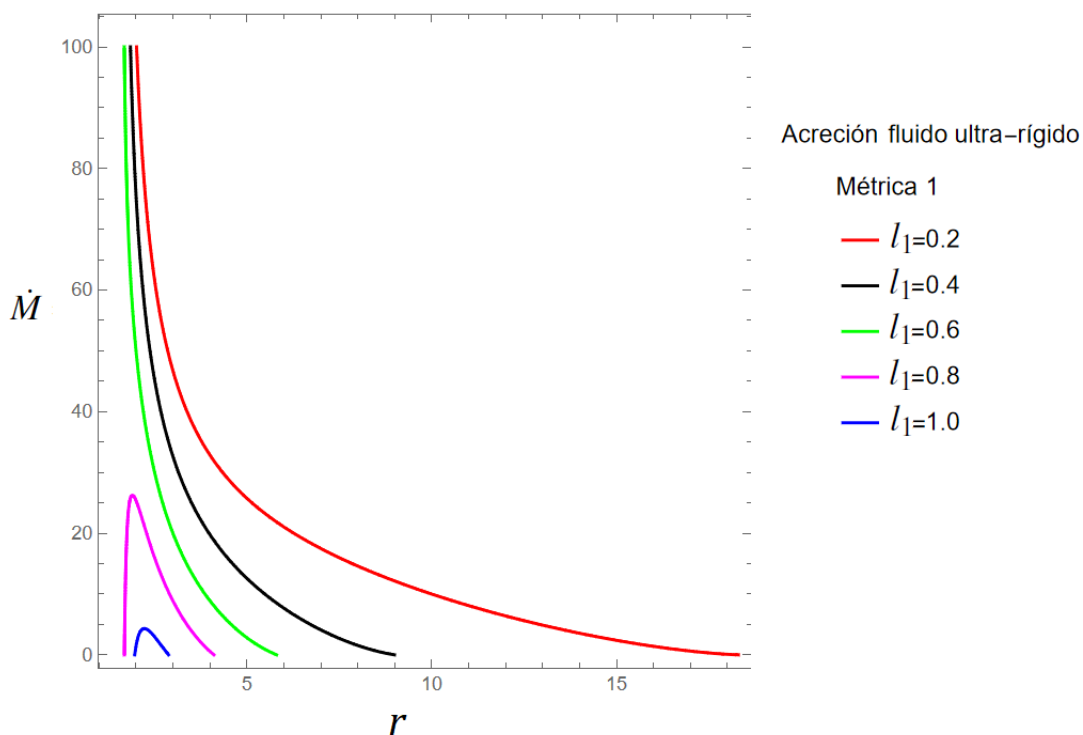


Figura 3.5: Acreción para fluido ultra-rígido utilizando la métrica 1 (3.9), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5, A = 0.1$  y valores variables de  $l_1$ .

Las tasas de acreción obtenidas por las ecuaciones (3.63) y (3.65) se presentan en las Figuras 3.5 y 3.6 respectivamente. Ambas figuras muestran que la tasa de acreción aumenta asintóticamente a medida que nos acercamos a la superficie del agujero negro. Esto es consistente con el hecho de que para una partícula que cae y se acerca a la superficie del agujero negro su velocidad aumenta constantemente. Es decir un observador estático local en  $r = r_s$  observará que la partícula se aproxima al horizonte de eventos a lo largo de una geodésica radial a una velocidad cercana a la de la luz, pero a una velocidad estrictamente menor [20]. En cambio a medida que aumenta  $r$  la tasa de acreción disminuye, debido a que la materia circundante se aleja de la zona de atracción gravitacional. En el caso de la métrica 1 la tasa de acreción disminuye a medida que aumenta el parámetro  $l_1$ . En el caso de la métrica 2 ocurre lo contrario, la tasa de acreción aumenta cuando  $l_2$  aumenta.

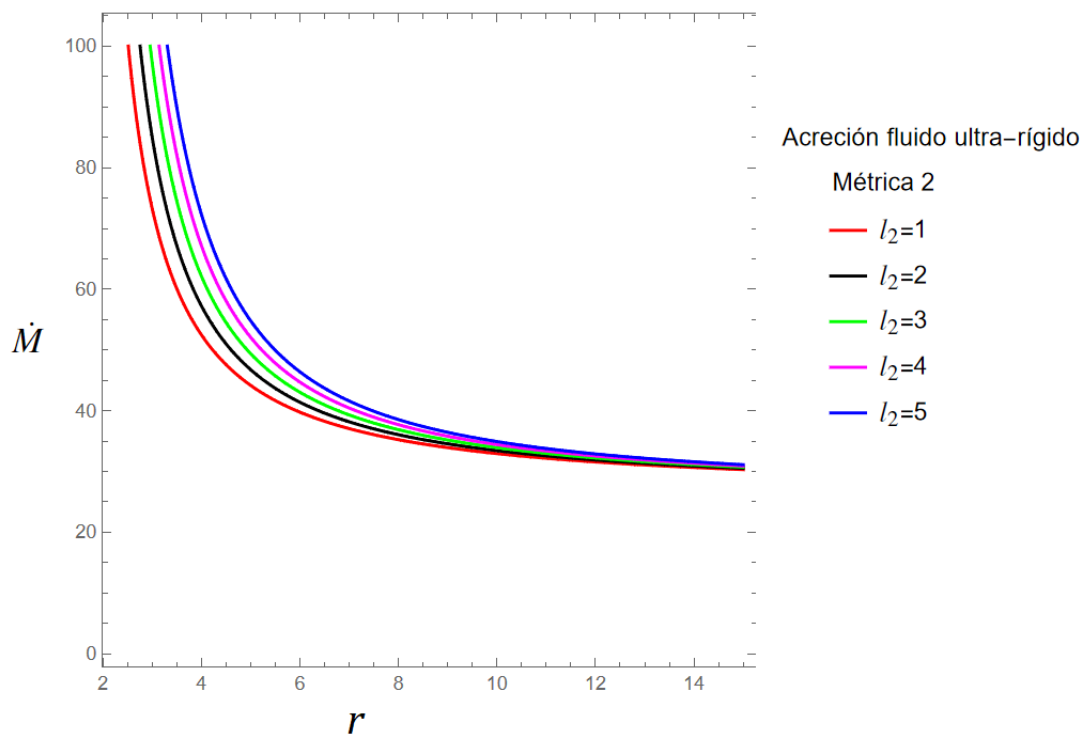


Figura 3.6: Acreción para fluido ultra-rígido utilizando la métrica 2 (3.13), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5$  y valores variables de  $l_2$ .



De igual forma para un **fluido ultra-relativista**, valor  $k = 1/2$  y utilizando las expresiones  $A(r), B(r), C(r)$  y  $D(r)$  determinadas en las ecuaciones (3.15) a (3.20), se obtiene:

Para la métrica 1 dada por (3.9):

$$u^r = \frac{\frac{4A_0^2 r^2}{9A_1^3} \pm \sqrt{\frac{16A_0^4 r^4}{81A_1^6} - 4 \frac{(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})}{(1 + \text{Exp}(\frac{r^{3-n}}{n-3} A) l_1)^3}}}{2/(1 + \text{Exp}(\frac{r^{3-n}}{n-3} A) l_1)^2}, \quad (3.66)$$

$$\dot{M} = 12\sqrt{2}\pi \frac{A_1^{5/2}}{r^3 (1 + \text{Exp}(\frac{r^{3-n}}{n-3} A) l_1)^{5/2} \left( \frac{4A_0^2 r^2}{9A_1^3} \pm \sqrt{\frac{16A_0^4 r^4}{81A_1^6} - 4 \frac{(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})}{(1 + \text{Exp}(\frac{r^{3-n}}{n-3} A) l_1)^3}} \right)^{3/2}}. \quad (3.67)$$

Para la métrica 2 dada por (3.13) se obtiene:

$$u^r = \frac{\frac{4A_0^2 r^2}{9A_1^3} \pm \sqrt{\frac{16A_0^4 r^4}{81A_1^6} - 4 \frac{(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})}{(1 + \frac{l_2}{r^2})^3}}}{2/(1 + \frac{l_2}{r^2})^2}, \quad (3.68)$$

$$\dot{M} = 12\sqrt{2}\pi \frac{A_1^{5/2}}{r^3 (1 + \frac{l_2}{r^2})^{5/2} \left( \frac{4A_0^2 r^2}{9A_1^3} \pm \sqrt{\frac{16A_0^4 r^4}{81A_1^6} - 4 \frac{(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})}{(1 + \frac{l_2}{r^2})^3}} \right)^{3/2}}. \quad (3.69)$$

Las tasas de acreción obtenidas por las ecuaciones (3.67) y (3.69) se presentan en las Figuras 3.7 y 3.8 respectivamente. En este caso las figuras muestran que, a medida que nos acercamos a la superficie del agujero negro la tasa de acreción aumenta constantemente, de forma similar como ocurre en el caso del fluido ultra-rígido. En el caso de la métrica 1 la tasa de acreción aumenta a medida que aumenta el parámetro  $l_1$ . En el caso de la métrica 2 ocurre lo contrario, la tasa de acreción disminuye cuando  $l_2$  aumenta.

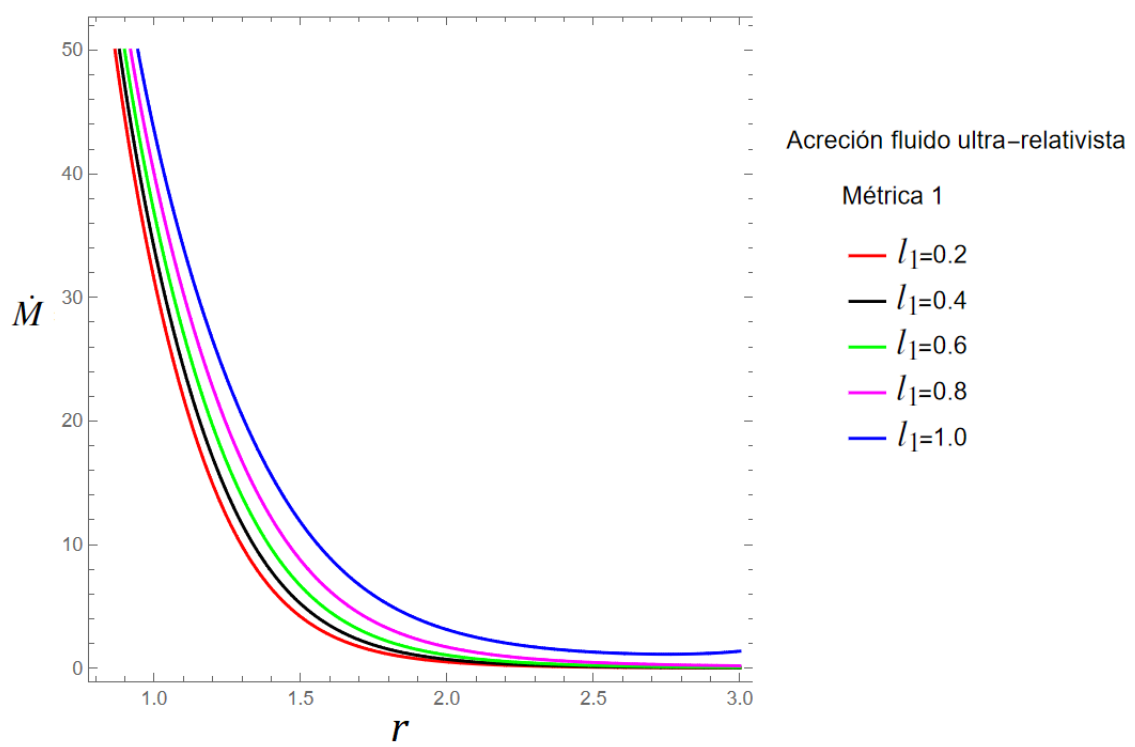


Figura 3.7: Acreción para fluido ultra-relativista utilizando la métrica 1 (3.9), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5, A = 0.1$  y valores variables de  $l_1$ .

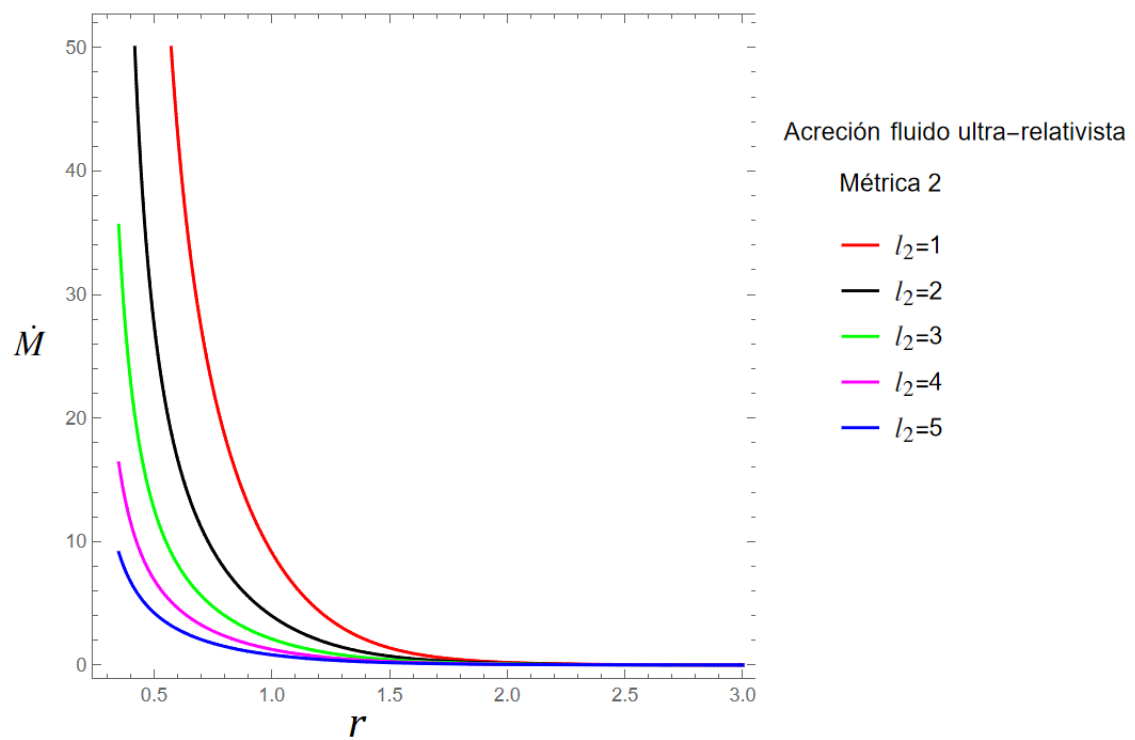


Figura 3.8: Acreción para fluido ultra-relativista utilizando la métrica 2 (3.13), utilizando valores de  $M = 1, Q = 0.8, A_0 = 2.5, A_1 = 1.5$  y valores variables de  $l_2$ .

## Capítulo 4

# CONCLUSIONES

Utilizando los principios de conservación de la energía y conservación de partículas fue posible determinar un formalismo general para el análisis de la acreción esférica estacionaria, en base a la forma genérica de la métrica utilizada para la solución de un agujero negro:  $ds^2 = A(r)dt^2 - \frac{dr^2}{B(r)} - C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

Se determinó el Hamiltoniano y las ecuaciones dinámicas del sistema en función únicamente de las componentes  $A(r)$  y  $C(r)$  de la métrica.

Se pudo construir un Hamiltoniano y sus ecuaciones dinámicas incorporando el parámetro  $k$  de la ecuación de estado para fluidos isotérmicos.

Se estableció una metodología generalizada para determinar los puntos críticos para fluidos isotérmicos, y fue posible aplicar las expresiones para determinar el comportamiento de fluidos ultra-rígidos, ultra-relativistas, sub-relativistas y de radiación.

Se evidenció que cuando  $\mathcal{H} > \mathcal{H}_c$  se pueden tener acreción (o emisión) supersónica si  $v < -v_c$  (o  $v > v_c$ ). Cuando  $-v_c < v < v_c$  se produce acreción/emisión subsónica con una velocidad que disminuye cerca del horizonte.

Cuando  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$  se tiene la acreción de Bondi no relativista estándar siempre y cuando el sistema pase de un régimen supersónico a subsónico a medida que aumenta  $r$ . Si se pasa de un

régimen subsónico a supersónico se viola las condiciones de contorno (cuando  $r \rightarrow +\infty$  debe cumplirse que  $v \rightarrow 0$ ), por lo tanto en este último caso se tienen comportamientos inestables y poco probables.

Si se tiene que  $\mathcal{H} < \mathcal{H}_c$  es indicativo de flujos subcríticos que no alcanzan el punto crítico, además violan las condiciones de contorno ya que indican que cuando  $r \rightarrow +\infty$  también  $v \rightarrow +\infty$ , por lo tanto constituyen un comportamiento no físico.

El comportamiento dinámico de los fluidos isotérmicos es relativamente similar. Esto se establece comparando las Figuras 3.2 a 3.4 donde las tendencias generales son las mismas.

La componente  $B(r)$  de la métrica fue el principal factor determinante en el comportamiento de la acreción. Los parámetros  $l_1$  y  $l_2$  de las métricas respectivas afectan de manera significativa la tasa de acreción.

La tasa de acreción aumenta asintóticamente a medida que nos acercamos a la superficie del agujero negro, consistente con el hecho de que para una partícula que cae y se acerca a la superficie del agujero negro su velocidad aumenta constantemente.

La tasa de acreción disminuye a medida que aumenta  $r$ , debido a que la materia circundante se aleja de la zona de atracción gravitacional.

# REFERENCIAS

- [1] B.P. Abbott, R. Abbott, and Abbott. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6), February 2016.
- [2] Kazunori Akiyama and Antxon et al Alberdi. First m87 event horizon telescope results. vi. the shadow and mass of the central black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L6, April 2019.
- [3] H. Bondi. On Spherically Symmetrical Accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 112(2):195–204, 04 1952.
- [4] F. Curtis Michel. Accretion of Matter by Condensed Objects. , 15(1):153–160, January 1972.
- [5] E. Babichev, V. Dokuchaev, and Yu. Eroshenko. Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion. *Physical Review Letters*, 93(2), July 2004.
- [6] Mustapha Azreg-Aïnou, Ayyesha K Ahmed, and Mubasher Jamil. Spherical accretion by normal and phantom einstein–maxwell–dilaton black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 35(23):235001, November 2018.
- [7] Janusz Karkowski and Edward Malec. Bondi accretion onto cosmological black holes. *Physical Review D*, 87(4), February 2013.

- [8] Patryk Mach, Edward Malec, and Janusz Karkowski. Spherical steady accretion flows: Dependence on the cosmological constant, exact isothermal solutions, and applications to cosmology. *Physical Review D*, 88(8), October 2013.
- [9] Ayyesha K. Ahmed, Mustapha Azreg-Aïnou, Mir Faizal, and Mubasher Jamil. Cyclic and heteroclinic flows near general static spherically symmetric black holes. *The European Physical Journal C*, 76(5), May 2016.
- [10] A. Treves, L. Maraschi, and M. Abramowicz. Basic elements of the theory of accretion. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 100(626):427, apr 1988.
- [11] Ramesh Narayan and Insu Yi. Advection-dominated Accretion: A Self-similar Solution. , 428:L13, June 1994.
- [12] Ramesh Narayan and Insu Yi. Advection-dominated Accretion: Underfed Black Holes and Neutron Stars. , 452:710, October 1995.
- [13] Daniel Proga and Mitchell C. Begelman. Accretion of low angular momentum material onto black holes: Two-dimensional hydrodynamical inviscid case. *The Astrophysical Journal*, 582(1):69, jan 2003.
- [14] Mustapha Azreg-Aïnou. Cyclic and heteroclinic flows near general static spherically symmetric black holes: semi-cyclic flows – addendum and corrigendum. *The European Physical Journal C*, 77(1), January 2017.
- [15] L. Rezzolla and O. Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*. EBSCO ebook academic collection. OUP Oxford, 2013.
- [16] F. Tello Ortiz R. Avalos, Y. Gomez-Leyton and E. Contreras. Charged black holes by gravitational decoupling satisfying a non–local eos. 2024 under review.

- [17] Patryk Mach and Edward Malec. Stability of relativistic bondi accretion in schwarzschild–(anti–)de sitter spacetimes. *Physical Review D*, 88(8), October 2013.
- [18] Ayyesha K Ahmed, Ugur Camci, and Mubasher Jamil. Accretion on reissner–nordström–(anti)-de sitter black hole with global monopole. *Classical and Quantum Gravity*, 33(21):215012, October 2016.
- [19] H. Rehman and G. Abbas. Accretion around a hairy black hole in the framework of gravitational decoupling theory. *Chin. Phys. C*, 47(12):125106, 2023.
- [20] Paulo Crawford and Ismael Tereno. Generalized observers and velocity measurements in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 34(12):2075–2088, December 2002.