

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
COLEGIO DE POSGRADOS

ESTUDIO SOBRE POTENCIALES EFECTIVOS EN LA RADIACIÓN
DE HAWKING Y LA PRODUCCIÓN DE SCHWINGER EN
AGUJEROS NEGROS CARGADOS

Rafael Ignacio Vintimilla Gómez de la Torre

SUPERVISOR
ERNESTO CONTRERAS, PHD.

TRABAJO DE FIN DE CARRERA PRESENTADO COMO REQUISITO PARA LA
OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MAGÍSTER EN FÍSICA

QUITO, 15 DE ABRIL DE 2025

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
COLEGIO DE POSGRADOS

HOJA DE APROBACIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN

Estudio sobre potenciales efectivos en la radiación de Hawking y la
producción de Schwinger en agujeros negros cargados

Rafael Ignacio Vintimilla Gómez de la Torre

Nombre del Director de Programa: Darío Niebieskikwiat

Título académico: Doctor en Física

Director del programa de: Maestría en Física

Nombre del Decano del Colegio Académico: Eduardo Alba

Título académico: Doctor en Matemáticas

Decano del Colegio: Politécnico

Nombre del Decano del Colegio de Posgrados: Darío Niebieskikwiat

Título académico: Doctor en Física

Quito, mayo 2025

Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en la Ley Orgánica de Educación Superior del Ecuador.

Nombre completo: Rafael Ignacio Vintimilla Gómez de la Torre

Código: 00334879

Cédula de identidad: 1717094054

Lugar y fecha: Quito, 14 de mayo de 2025

Aclaración para publicación

Nota: El presente trabajo, en su totalidad o cualquiera de sus partes, no debe ser considerado como una publicación, incluso a pesar de estar disponible sin restricciones a través de un repositorio institucional. Esta declaración se alinea con las prácticas y recomendaciones presentadas por el Committee on Publication Ethics COPE descritas por Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing, disponible en <http://bit.ly/COPETheses>.

Unpublished Document

Note: The following capstone project is available through Universidad San Francisco de Quito USFQ institutional repository. Nonetheless, this project – in whole or in part – should not be considered a publication. This statement follows the recommendations presented by the Committee on Publication Ethics COPE described by Barbour et al. (2017) Discussion document on best practice for issues around theses publishing available on <http://bit.ly/COPETheses>.

Dedicatoria y Agradecimientos

A mi familia por apoyarme a lo largo del proceso.

A mis profesores y compañeros por haber compartido su conocimiento y experiencia.

A mi tutor de tesis Ernesto Contreras por compartir su guía y conocimiento del tema.

A mi abuelo Jaime Vintimilla por haberme enseñado el valor del trabajo y la vida.

Resumen

Estudiamos el comportamiento del potencial efectivo que experimentan campos bosónicos y fermiónicos cargados en el entorno de un agujero negro de Reissner-Nordström. Analizamos en detalle las diferencias entre las configuraciones angulares de momento $\ell = j = 0$ y $\ell = j = 1$, evaluando cómo varían la altura y la anchura de la barrera de potencial al modificar la masa m , la carga q y la frecuencia ω de la partícula. En el régimen de energías $\frac{qQ}{r_+} < \omega < \omega_{\max}$, mostramos que fermiones y bosones presentan perfiles distinguibles de potencial efectivo, con barreras más permeables en el caso fermiónico. Se identifican explícitamente las regiones con tunelamiento mediante análisis gráfico y sombreado, permitiendo una interpretación visual directa de la supresión exponencial de la emisión. En el límite $m \gg 1$, se verifica que el potencial efectivo se vuelve independiente del espín, unificándose en una forma universal dominada por $f(r)m^2$. Se discuten las implicaciones de estos resultados en el contexto de la radiación de Hawking-Schwinger y se plantea como trabajo futuro la extensión del análisis a los regímenes subextremal, extremal y superextremal, así como a otras soluciones tipo agujero negro.

Palabras clave: Reissner-Nordström, potencial efectivo, emisión de partículas, bosones, fermiones, WKB, Hawking-Schwinger, régimen clásico

Abstract

We study the behavior of the effective potential experienced by charged bosonic and fermionic fields in the background of a Reissner-Nordström black hole. We analyze in detail the differences between angular configurations of momenta $\ell = j = 0$ and $\ell = j = 1$, evaluating how the height and width of the potential barrier vary with the mass m , charge q and frequency ω of the particle. In the energy regime $\frac{qQ}{r_+} < \omega < \omega_{\max}$, we show that bosons and fermions display distinguishable effective potential profiles, with fermions encountering more permeable barriers. Tunneling regions are explicitly identified through graphical analysis and shading, providing a visual interpretation of the exponential suppression of emission. In the limit $m \gg 1$, the effective potential becomes spin-independent, collapsing into a universal form dominated by $f(r)m^2$. We discuss the implications of these results in the context of Hawking-Schwinger radiation, and propose as future work the extension of the analysis to subextremal, extremal and superextremal black holes, as well as to other black hole spacetimes.

Key words: Reissner-Nordström, effective potential, particle emission, bosons, fermions, WKB, Hawking-Schwinger, classical limit.

Índice general

1. Introducción	13
2. Teoría preliminar	15
2.1. Soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström a las ecuaciones de campo	15
2.2. Superficies y vectores de Killing	16
2.3. Leyes de la mecánica de agujeros negros	19
2.4. Termodinámica de agujeros negros	22
2.5. Radiación de Hawking	24
2.6. Producción de Schwinger en espacio-tiempo curvo	31
2.6.1. Lagrangiano de Euler-Heisenberg	32
2.6.2. Método canónico para la producción de pares	34
3. Tasa total de radiación	45
3.1. Factor de cuerpo gris	45
3.2. Radiación de Hawking como efecto túnel	47
3.2.1. Tunelaje a través del horizonte en RN	55
3.3. Ecuación bosónica	59
3.4. Ecuación fermiónica	60
3.5. Condiciones de borde	61
3.6. Método WKB	64
4. Resultados y Discusión	67
4.1. Tunelamiento a través del campo eléctrico	67

4.2. Un proceso de tunelaje combinado	77
4.3. Análisis gráfico de los potenciales efectivos	82
4.4. Discusión	88
5. Conclusiones	93
6. Anexos	95
6.1. Anexo A: Derivación de la métrica de RN	95
6.2. Anexo B: Generalización de la ecuación de Klein-Gordon a espacios tipo agujero negro	102
6.2.1. Ecuación de Klein-Gordon en espacio de Schwarzschild	102
6.2.2. Ecuación de Klein-Gordon en el caso de RN (campo no cargado)	104
6.2.3. Ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempo curvo con acoplamiento electro- magnético	108
6.3. Anexo C: Ecuación de Dirac	112
6.3.1. Formalismo de la tétrada y espinores	113
6.3.2. Derivada covariante de un espinor y la conexión de espín	114
6.3.3. La Interacción Electromagnética	115
6.3.4. Las matrices Gamma	116
6.3.5. Ecuación de Dirac en la métrica de Schwarzschild	118
6.3.6. Ecuación de Dirac en RN	122
6.3.7. Ecuación de Onda	124

Índice de figuras

4.1. Potencial efectivo para fermiones y bosones al variar m	83
4.2. Potenciales efectivos para fermiones y bosones $m = 0,1$ cuando variamos q	84
4.3. Barrera de potencial cuando $m \gg 1$	85
4.4. Potencial efectivo para partículas sin masa ni carga ($m = q = 0$)	85
4.5. Distintos valores de ω	86
4.6. Régimen $qQ/r_+ < \omega < \omega_{max}$ con $m = 0,6$ y $q = 0,5$	87

Capítulo 1

Introducción

Los agujeros negros son una de las manifestaciones más extremas de la gravitación en el universo. El descubrimiento de estos enigmáticos y asombrosos objetos fue posible gracias a la teoría de la relatividad general, propuesta por Albert Einstein en 1915, que es la mejor teoría clásica sobre campos gravitacionales formulada hasta la actualidad[1, 2]. En 1974, Hawking[3] hizo un descubrimiento que revolucionaría el estudio de estos objetos masivos, los agujeros negros no eran tan negros como se pensó; emitían radiación[4], una radiación de muy baja energía, sí, pero al fin y al cabo, radiación. Hasta 1974, se pensaba que los agujeros negros no podían emitir ningún tipo de radiación dado que se pensaba que los agujeros negros no seguían las leyes de la termodinámica, pero aplicando principios de teoría cuántica de campos, Hawking logró demostrar que los agujeros negros no solo seguían las leyes de la termodinámica, sino que también poseían una temperatura asociada, por lo tanto debían emitir radiación. Por otra parte, el agujero negro en el que nos centraremos en este trabajo es el de Reissner-Nordström, o agujero negro cargado, aunque veremos primero lo hecho para Schwarzschild, dado que así resultará más sencillo entender los conceptos explorados. El efecto Schwinger[5], descubierto casi un cuarto de siglo antes que la radiación de Hawking, describe la producción de pares en un campo eléctrico intenso. Como es posible que un agujero negro esté cargado, esperaríamos que el agujero negro pierda masa y energía también mediante este proceso. Mientras que ha habido gran cantidad de investigación acerca del espectro de la radiación de partículas no cargadas de los agujeros negros, para lo cual el estudio del efecto Schwinger es irrelevante, así como también sobre la naturaleza de la producción de Schwinger fuera de un agujero negro cargado, con los efectos térmicos ignorados, no ha habido un estudio certero sobre el rol combinado

que poseerían dichos efectos sobre la naturaleza de la emisión desde un agujero negro eléctricamente cargado. Cuando los dos procesos se consideran juntos, usualmente se los aplica para diferentes tipos de partícula, es decir, uno considera la radiación de Hawking de fotones, y la producción de Schwinger de electrones. En este trabajo, se busca tener claro cómo la tasa total de emisión de un tipo particular de partículas cargadas, específicamente bosones y fermiones con espín, viene determinada por los dos procesos de producción. No solamente es interesante entender la naturaleza de la radiación en el caso general, sino que también es importante estudiar cómo se comporta el decaimiento de los agujeros negros en ciertos límites teóricamente interesantes[6].

Este trabajo está dividido en 6 capítulos: en este capítulo introducimos los objetivos del trabajo, así como también la motivación del mismo, en el segundo capítulo veremos tanto las generalidades físicas de la radiación de Hawking y de la producción de Schwinger en espacio-tiempo plano, así como también las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que se vieron involucradas en la elaboración de esta tesis, concretamente la de Schwarzschild y la de Reissner-Nordström. En el tercer capítulo tomaremos en cuenta ambos efectos para dar con una fórmula exacta para la tasa de pérdida de energía de los agujeros negros cargados, así como también estudiaremos la radiación de Hawking como efecto túnel propuesta en [7] y veremos la dependencia exponencial de la transmisión. En el cuarto capítulo presentaremos los resultados y haremos gráficos para los distintos escenarios en el potencial efectivo obtenido a partir de las ecuaciones de onda estudiadas en los anexos, así como también se discuten los resultados obtenidos. Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y el trabajo futuro a realizarse.

En este trabajo nos proponemos realizar un análisis en profundidad del potencial efectivo obtenido para fermiones y bosones, así como también para partículas clásicas dado que el estudio[6] menciona pero no analiza exhaustivamente este potencial efectivo. Hay ciertos límites interesantes en el potencial efectivo que podrían ayudar a entender mejor cómo emergen las partículas cargadas desde un agujero negro.

Usaremos la convención $(- + ++)$ para la métrica. Para simplicidad de los cálculos haremos $c = \hbar = 4\pi\epsilon_0 = G = k_B = 1$ (unidades naturales).

Capítulo 2

Teoría preliminar

En este capítulo se estudiará toda la teoría preliminar requerida para entender el proceso de tunelamiento cuántico, incluyendo ecuaciones de campo de Einstein.

2.1. Soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström a las ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo son un conjunto de 10 ecuaciones, que describen las propiedades geométricas del espacio-tiempo y la interacción entre la materia y la energía, la forma general de las ecuaciones es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, mismo que se obtiene contrayendo el tensor de curvatura de Riemann (éste último mide la curvatura espacio-temporal) y la forma explícita del tensor de Riemann en términos de los símbolos de Christoffel es

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda},$$

para obtener el tensor de Ricci se baja un índice del tensor de curvatura y luego se contraen índices del tensor de Riemann (o viceversa), así pues

$$R_{\mu\nu} = g_{\rho\alpha}g^{\mu\nu}R_{\sigma\mu\nu}^{\alpha},$$

R es el escalar de Ricci (se obtiene contrayendo el tensor de Ricci, así: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ es el inverso de la métrica), $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico determinado por las condiciones espacio-temporales y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momentum que determina el flujo lineal de energía y de momento lineal en este contexto.

La primera solución a la ecuación (2.1) fue encontrada por Schwarzschild. Ésta describe el campo gravitacional exterior a un objeto estático y esféricamente simétrico [1, 8, 9, 10]. La solución de Schwarzschild viene dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.2)$$

donde M es la masa del agujero negro, (t, r, θ, ϕ) son coordenadas esféricas en un espacio-tiempo estático. La derivación de la métrica de RN a partir de las ecuaciones de campo de Einstein se muestra detalladamente en el anexo (6.1), siguiendo los pasos detallados ahí se llega a (2.3)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.3)$$

donde M es la masa mencionada en (2.2) y Q es la carga del agujero negro.

A continuación introduciremos el concepto de superficies y vectores de Killing, esenciales para comprender la física del horizonte de sucesos, así como la temperatura de Hawking, cantidad esencial para los cálculos posteriores.

2.2. Superficies y vectores de Killing

¹ Hipersuperficies y vectores ortogonales

Una hipersuperficie Σ es el conjunto de puntos donde una función escalar f es constante, y su vector ortogonal se define como (con ∇ indicando derivada covariante):

$$\zeta^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f. \quad (2.4)$$

¹Lo estudiado acá se basa en lo hecho en [11]

En el caso especial de hipersuperficie nula, el vector ortogonal también es tangente a la superficie, y sus curvas integrales son geodésicas nulas que generan completamente la hipersuperficie.

Campos vectoriales de Killing

Un campo de Killing \vec{K} es aquel que deja invariante la métrica bajo la derivada de Lie

$$\mathcal{L}_{\vec{K}}g_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\mu}K_{\nu} + \nabla_{\nu}K_{\mu} = 0,$$

estos vectores codifican simetrías del espacio-tiempo. Si un campo de Killing es tipo tiempo y ortogonal al hipersuperficies tipo espacio, el espacio-tiempo se dice estático. Además, si es asintóticamente plano, se puede normalizar como

$$K^{\mu}K_{\mu}(r \rightarrow \infty) = 1.$$

Horizontes de Killing

Un horizonte de Killing es una hipersuperficie nula Σ donde un campo de Killing χ^{μ} se anula:

$$\chi^{\mu}\chi_{\mu}|_{\Sigma} = 0.$$

Este vector es simultáneamente ortogonal y tangente a Σ , y sus curvas integrales son geodésicas nulas.

Corrimiento al rojo y energía de Killing La energía de Killing de una partícula con cuadrimomento p^{μ} a lo largo de una geodésica es

$$E_K = -p^{\mu}K_{\mu}, \tag{2.5}$$

aquí K_{μ} es un vector de Killing, y permanece constante a lo largo de la curva geodésica. La frecuencia ω de un fotón observada por un observador con cuadrivelocidad U^{μ} es

$$\omega = -p^{\mu}U_{\mu}. \tag{2.6}$$

Para observadores estacionarios (proporcionales a K^{μ}), existe un factor de corrimiento al rojo

$$V = \sqrt{-K^{\mu}K_{\mu}}, \tag{2.7}$$

y la relación entre frecuencias observadas en dos puntos es

$$\omega_1 V_1 = \omega_2 V_2 \quad (2.8)$$

En el caso del espacio-tiempo de Reissner-Nordström, cuya métrica tiene la forma derivada en la sección anterior, podemos computar el factor de corrimiento al rojo directamente sabiendo que el campo vectorial de Killing es, $\vec{K} = \partial_t$, dando así

$$V = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}. \quad (2.9)$$

Como los observadores estacionarios no viajan a lo largo de las geodésicas, tienen una cuadiacele-
ración propia definida por

$$a^\mu = U^\sigma \nabla_\sigma U^\mu, \quad (2.10)$$

Gravedad superficial

La gravedad superficial κ se asocia a horizontes de Killing, donde el campo χ^μ cumple con la ecuación de la geodésica

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa \chi^\nu. \quad (2.11)$$

Esta cantidad mide, desde el infinito, la aceleración que un observador estacionario justo fuera del horizonte necesitaría para permanecer allí:

$$\kappa = \lim_{O \rightarrow \Sigma} V a,$$

donde a^μ es la ecuación (2.10), y V es el factor de corrimiento al rojo calculado con (2.7). También puede calcularse mediante (2.12)

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu). \quad (2.12)$$

Este conjunto de conceptos, a saber, hipersuperficies, vectores de Killing, corrimiento al rojo y gravedad superficial es fundamental para entender la estructura causal y térmica de los horizontes de sucesos en relatividad general y teoría cuántica de campos en espacios curvos, como veremos

más adelante. Ahora que ya hemos estudiado los conceptos clave de la matemática detrás de los horizontes de sucesos, estudiaremos brevemente los horizontes de la métrica de RN.

Tenemos que $f(r) = g_{tt}$. Para encontrar los horizontes de sucesos hacemos $f(r) = 0$, dado que por lo visto en la sección anterior, el horizonte de sucesos, que en este caso en particular es equivalente al horizonte de Killing, es una hipersuperficie nula con vectores tipo tiempo perpendiculares a ésta. Esto pasa únicamente cuando $Q^2 \leq M^2$,

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \\ r^2 - 2Mr + Q^2 &= 0 \\ r_{\pm} &= \frac{2M \pm \sqrt{(2M)^2 - 4Q^2}}{2} \\ r_{\pm} &= \frac{2M \pm 2\sqrt{M^2 - Q^2}}{2} \\ r_{\pm} &= M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \end{aligned}$$

Aquí tomamos el signo más, la solución con signo menos correspondería a un horizonte de Cauchy, que no interesa para el propósito del presente estudio, pues el horizonte del cual emanan las partículas es el horizonte de sucesos. Así pues, $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$. Esta métrica, al igual que la de Schwarzschild presenta una singularidad en $r = 0$. Como ya se discutió anteriormente, esta solución tiene que reducirse a la de Schwarzschild si $Q = 0$. Además, si $r = \frac{Q^2}{2M}$ la métrica se reduce a la de Minkowski, por otro lado, si $Q^2 = M^2$, estas hipersuperficies convergen a una única superficie localizada en $r = M$, y si $Q^2 > M^2$ la métrica es singular en todas partes excepto en el origen, en otras palabras es una singularidad desnuda. Luego de haber estudiado estos conceptos clave veremos cómo se aplican en las leyes de la mecánica de agujeros negros.

2.3. Leyes de la mecánica de agujeros negros

En 1973, Jim Bardeen, Brandon Carter y Stephen Hawking[12] propusieron y formularon un conjunto de 4 leyes que gobiernan el comportamiento de los agujeros negros. Estas leyes nos recuerdan a las 4 leyes de la termodinámica. Esta analogía fue percibida inicialmente como puramente formal y una coincidencia, sin embargo un tiempo después se hizo claro que los agujeros negros eran,

de hecho, sistemas termodinámicos. El paso crucial para esta interpretación fue el descubrimiento de Hawking en 1974 [3] que los procesos cuánticos permiten a un agujero negro emitir un flujo térmico de partículas. Es, por lo tanto, posible que un agujero negro esté en equilibrio térmico con otros sistemas termodinámicos. Las leyes de la mecánica de los agujeros negros, entonces, son una descripción de la termodinámica de los agujeros negros. Se explicará la relación entre la mecánica y la termodinámica de los agujeros negros en la siguiente sección, a continuación se dará una breve descripción de las leyes, junto con una aplicación de las leyes en el agujero negro de nuestro interés (de RN).

Ley Cero

La ley cero de la mecánica de los agujeros negros establece que *la gravedad superficial de un agujero negro estacionario es uniforme sobre todo el horizonte de eventos.*

Primera Ley

La primera ley para los agujeros negros estacionarios dice que el cambio de energía está relacionado con el cambio de área, de momento angular, y carga eléctrica por:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (2.13)$$

donde M , es la masa total del agujero negro, κ es la gravedad superficial del agujero negro, A es el área del horizonte de sucesos, Ω es la velocidad angular, J es el momento angular, Φ el potencial electrostático, Q es la carga eléctrica. Antes de estudiar esta primera ley para el agujero negro de nuestro interés, vamos a estudiarla para el caso más simple, el de Schwarzschild, en este caso, tanto Ω como Φ valen cero ya que el agujero negro de Schwarzschild no presenta carga ni movimiento rotatorio. Para Schwarzschild quedaría entonces,

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA.$$

Para calcular κ se tiene

$$\kappa = \frac{f'(r_H)}{2},$$

donde $r_H = 2M$ entonces, $f'(r)$ vendrá dado por la derivada de la componente g_{tt} de (2.2),

$$f'(r) = \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{2M}{r^2}.$$

Usando la expresión para κ :

$$\kappa = \frac{M}{r_H^2}$$

$$\kappa = \frac{M}{(2M)^2} \rightarrow \kappa = \frac{1}{4M}.$$

Sustituyendo en la expresión de la primera ley queda entonces,

$$dM = \frac{dA}{32\pi M}.$$

La solución de Reissner-Nordström es no rotante, pero a diferencia de la de Schwarzschild está cargada, por lo tanto $\Omega = 0$ y $\Phi \neq 0$, entonces $\Omega dJ = 0$ y $\Phi dQ \neq 0$, respectivamente. Quedaría entonces,

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Phi dQ.$$

Usando la expresión para κ se llega a (2.14)

$$\kappa = \frac{M^2 - Q^2}{r_+} \tag{2.14}$$

Sustituyendo el valor de κ , la primera ley queda:

$$dM = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{8\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2} dA + \Phi dQ \rightarrow dM = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{8\pi r_+^2} dA + \Phi dQ \tag{2.15}$$

Ahora hablaremos de la segunda ley de la mecánica de agujeros negros.

Segunda Ley

La segunda ley de la mecánica de agujeros negros establece que si la condición de energía nula se satisface, consistente en que para todo vector nulo k^μ se debe cumplir la siguiente relación

$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$, entonces *el área de un agujero negro no puede decrecer*:

$$\Delta A \geq 0 \tag{2.16}$$

Tercera Ley

La tercera ley establece que si el tensor energía-momentum es acotado y satisface la condición de energía débil, consistente en que para todo vector tipo tiempo v^μ se cumple la condición $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$, entonces *la gravedad superficial de un agujero negro no puede ser reducida a cero dentro de un intervalo finito de tiempo*.

Un agujero negro extremal se da, en el caso de Reissner-Nordström, cuando $M = Q$, y tiene gravedad superficial $\kappa = 0$, ya que cuando $M = Q$, el numerador de la ecuación (2.14) se anula[12, 6]. Un razonamiento equivalente es pensar que bajo las condiciones establecidas en el tensor energía-momentum, es imposible que un agujero negro se vuelva extremal en un intervalo temporal finito. Ahora que ya hemos visto las 4 leyes de la mecánica de agujeros negros, estamos listos para estudiar el paralelismo existente entre dichas leyes y las de la termodinámica.

2.4. Termodinámica de agujeros negros

Las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros recuerdan, a las leyes de la termodinámica, con κ ejerciendo el rol de una temperatura, A el de la entropía y M el de la energía interna. El descubrimiento por parte de Hawking de que los procesos cuánticos (se va a estudiar estos en la siguiente sección) dan lugar a un flujo térmico de partículas desde los agujeros negros implica que se comportan como sistemas termodinámicos [1, 2].

En 1974[13], Bekenstein extendió la analogía termodinámica de los agujeros negros, preguntándose si se podía asignar sentido físico a la entropía y a la temperatura de estos objetos. Consideró distintas formas del intercambio de calor, relacionándolo con la gravedad superficial, el área del horizonte y la masa irreducible. Usando una analogía con una máquina térmica tipo Carnot, argumentó inicialmente que los agujeros negros tendrían eficiencia del 100 %, sugiriendo una temperatura cero. Sin embargo, incorporando efectos cuánticos derivados del principio de incertidumbre, concluyó que debía existir un límite mínimo para el tamaño de una caja de radiación térmica introducida al agujero negro, imponiendo así un límite superior a la eficiencia y estableciendo que el agujero negro

debe tener una temperatura distinta de cero.

Además, usando nuevamente el principio de incertidumbre, Bekenstein[13] mostró que absorber una partícula incrementa inevitablemente el área del horizonte en una cantidad proporcional a \hbar . Este resultado implica que no es posible un proceso perfectamente reversible y confirma una relación fundamental entre la entropía de un agujero negro y su área. Finalmente este resultado abre paso al vínculo entre la entropía y la información contenida dentro de un agujero negro, conectado con la teoría de la información de Shannon.

La conexión entre entropía e información es clave: la entropía mide la incertidumbre sobre el estado interno de un sistema. Shannon demostró que la entropía se expresa como $S = -\sum p_i \ln p_i$ donde p_i es la probabilidad de que se dé el estado i . Cuando se adquiere información nueva sobre un sistema, su entropía disminuye ($\Delta I = -\Delta S$). Por ejemplo, al comprimir isotérmicamente un gas ideal, la entropía baja porque las moléculas están más localizadas y hay mayor información sobre sus posiciones. Aplicando estos conceptos a los agujeros negros, se plantea que su entropía refleja la inaccesibilidad de información acerca de sus configuraciones internas compatibles con sus parámetros macroscópicos (masa, carga y momento angular). Así, Bekenstein propuso que la entropía del agujero negro está relacionada con el área del horizonte de eventos, asumiendo inicialmente una dependencia general $S_{BH} = f(A)$. Diversos argumentos físicos indican que esta función no puede ser proporcional a \sqrt{A} (generaría contradicciones físicas), por lo cual la elección más simple consistente con las leyes físicas es:

$$S_{BH} = \gamma A, \quad (2.17)$$

donde γ es una constante dimensionalmente igual a L^{-2} . Dado que no existe en relatividad general una constante así, recurriendo a la mecánica cuántica surge naturalmente la escala de Planck, estableciendo:

$$S_{BH} = \hat{\alpha} \frac{A}{l_P^2},$$

donde $\hat{\alpha}$ es adimensional y del orden de la unidad.

Utilizando un argumento basado en la mínima pérdida de información[14] (al menos 1 bit cuando una partícula cae dentro del agujero negro), se encuentra que el valor específico podría ser:

$$S_{BH} = \frac{\ln 2}{2l_P^2} A$$

Esto implica que los agujeros negros tienen una temperatura finita, dada por:

$$T_{BH} = \frac{\kappa}{8\pi\hat{\alpha}}, \quad (2.18)$$

donde $\hat{\alpha}$ representa el coeficiente proporcional entre área y entropía.

Aunque inicialmente paradójica, esta temperatura fue confirmada posteriormente por Stephen Hawking mediante cálculos de teoría cuántica de campos en espacios curvos, demostrando así la validez de los argumentos de Bekenstein.

2.5. Radiación de Hawking

En los años 70, surgieron ideas sobre la conexión entre la entropía y el área de un agujero negro, pero inicialmente esto parecía contradictorio porque los agujeros negros clásicos tendrían una temperatura nula. Zel'dovich[15] sugirió que efectos cuánticos podrían resolver esta contradicción. En 1974[3], Hawking mostró que, efectivamente, los agujeros negros irradian térmicamente debido a efectos cuánticos, asignándoles una temperatura definida y confirmando que poseen entropía proporcional al área del horizonte.

Esta radiación de Hawking puede entenderse intuitivamente como partículas que se tunelan cuánticamente a través del horizonte de eventos, aunque el cálculo formal se basa en QFT ² en espacios curvos.

En QFT, las partículas se interpretan como excitaciones de campos cuánticos, descritas por estados en un espacio de Hilbert. El vacío cuántico no es trivial; contiene fluctuaciones del campo que producen una densidad infinita de energía. Además, la elección del vacío depende del marco de referencia utilizado, lo que da lugar a efectos físicos observables.

La elección del vacío depende de cómo se definen los modos del campo. Las transformaciones de Bogolyubov relacionan diferentes expansiones modales, dando lugar a definiciones distintas de vacío.

²Teoría cuántica de campos por sus siglas en inglés.

La consecuencia es crucial: el vacío para un conjunto de observadores puede contener partículas vistas desde otro marco de referencia. Este fenómeno implica que la noción de vacío y partícula no es absoluta, sino relativa al observador y a su elección de coordenadas.

Una situación particularmente importante ocurre con observadores acelerados. Para un observador acelerado uniformemente en espacio-tiempo plano plano, una onda monocromática medida desde un marco inercial experimenta un corrimiento al rojo exponencial, lo que implica que su frecuencia observada disminuye exponencialmente en el tiempo propio del observador acelerado.

Al analizar este fenómeno mediante transformadas de Fourier, se descubre que el espectro observado corresponde exactamente a un espectro térmico tipo Planck con una temperatura bien definida, conocida como la temperatura de Unruh, dada por

$$T_{BH} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi ck_B} \quad (2.19)$$

donde κ es proporcional a la aceleración del observador. Este resultado es una manifestación profunda de la relación entre aceleración, horizontes y radiación térmica que exploraremos en esta sección. La teoría cuántica de campos describe partículas como excitaciones de un campo cuántico³, similar a un conjunto infinito de osciladores armónicos. Un estado con partículas se representa mediante la distribución $n(k)$, que indica el número de partículas con momento k , y puede escribirse en el espacio de Hilbert de la forma que se muestra en (2.20)

$$|\psi\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle = |\{n(k)\}\rangle. \quad (2.20)$$

La energía E y el momento P de este estado cuántico debería ser la suma de las contribuciones de cada una de las partículas y se espera que sea

$$E = \sum n(k)\omega_k; \quad P = \sum n(k)k, \quad \text{donde } \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (2.21)$$

Los resultados en las ecuaciones (2.20) y (2.21) describen la dinámica de una colección de osciladores armónicos independientes, cada uno asociado a un modo de onda k . La acción clásica correspondiente

³Esto es solo un ejemplo del tratamiento estándar de QFT considerando el campo escalar.

es invariante de Lorentz y se muestra en la ecuación (2.22)

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2]. \quad (2.22)$$

Mediante transformadas de Fourier, se conecta directamente la descripción del campo $\phi(x, t)$ con una colección infinita de osciladores armónicos, identificando así claramente cómo surge la invariancia relativista.

El estado fundamental o vacío del campo cuántico se construye multiplicando los estados fundamentales de todos los osciladores

$$\Psi[\phi(x)] = \prod_k \left(\frac{\omega_k}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{1}{2} \omega_k |q_k|^2 \right) = \bar{N} \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k |q_k|^2 \right], \quad (2.23)$$

lo que implica una distribución de probabilidad para las configuraciones del campo. Esto muestra que, incluso en el vacío, existen fluctuaciones cuánticas no triviales y una densidad energética infinita, cuya regularización es problemática en QFT.

En la interpretación de Heisenberg se introducen operadores de creación a^\dagger y destrucción a , con las reglas de conmutación estándar, lo que permite expresar el campo cuántico en términos de estos operadores:

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_k}} [a_k e^{ikx} + a_k^\dagger e^{-ikx}], \quad (2.24)$$

donde $kx = k_i x^i$, y derivar las reglas de conmutación a tiempos iguales:

$$[\phi(x, t), \pi(y, t)] = i\delta^3(x - y); \quad [\phi(x, t), \phi(y, t)] = [\pi(x, t), \pi(y, t)] = 0. \quad (2.25)$$

Esta formulación es el punto de partida convencional para estudiar fenómenos cuánticos en teoría de campos[1].

En teoría cuántica de campos es posible realizar diferentes expansiones modales del campo escalar usando diferentes conjuntos de soluciones a la ecuación diferencial del oscilador armónico. Considerando un campo escalar $\phi(t, x)$ de la forma que se presenta en (2.26):

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [a_k v_k(t) e^{ikx} + a_k^\dagger v_k^*(t) e^{-ikx}], \quad (2.26)$$

donde $v_k(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\ddot{v}_k + \omega_k^2 v_k = 0$ con la condición de normalización $i(\dot{v}_k v_k^* - v_k \dot{v}_k^*) = 1$.

Una transformación particularmente útil es la llamada transformación de Bogolyubov, definida por (2.27)

$$u_k(t) = \alpha_k v_k(t) + \beta_k v_k^*(t), \quad \text{con } |\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (2.27)$$

Esta transformación genera nuevos operadores de creación y destrucción, relacionados con los originales por

$$a_k = \alpha_k b_k + \beta_k^* b_k^\dagger; \quad b_k = \alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger.$$

Como consecuencia de estas transformaciones, surgen diferentes definiciones del estado de vacío: el vacío asociado al conjunto original de operadores (a_k) y otro vacío asociado a los nuevos operadores (b_k). El estado fundamental original no es vacío respecto al nuevo conjunto de operadores, y viceversa. En particular, el valor esperado del número de partículas del nuevo conjunto en el vacío original es:

$${}_v \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle_v = |\beta_k|^2.$$

Este hecho implica que el concepto de vacío no es absoluto ni universal: depende de cómo definamos los modos de frecuencia positiva y negativa. Aunque la definición de vacío basada en frecuencias estrictamente positivas es invariante bajo transformaciones lorentzianas (observadores inerciales), esta propiedad no se mantiene al considerar sistemas acelerados o presencia de campos externos. En conclusión, la noción de vacío y partícula no es generalmente covariante, sino que depende de la elección de las coordenadas temporales y los modos de frecuencia asociados. Esto es crucial para comprender fenómenos como la radiación de Hawking en presencia de campos gravitacionales y aceleraciones.

En teoría cuántica de campos en espacios curvos, la aparición de efectos térmicos está estrechamente relacionada con el corrimiento al rojo exponencial observado por observadores acelerados. Para ilustrar esto consideramos dos casos:

1. Observador en movimiento uniforme (Relatividad especial)

Un observador que se mueve con velocidad constante v respecto a un marco inercial observa

una onda monocromática de frecuencia Ω como

$$\phi[T(\tau), X(\tau)] = \phi[\tau] = \exp -i\tau\Omega\gamma(1-v) = \exp \left(-i\tau\Omega\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \right).$$

Esto es simplemente el efecto Doppler relativista, donde la frecuencia observada se corre hacia el rojo (disminuye), pero sigue siendo monocromática

$$\Omega_{\text{obs}} = \Omega_{\text{in}} \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}.$$

2. Observador en movimiento acelerado uniforme

Consideraremos ahora un observador con aceleración constante κ . Su trayectoria es:

$$X(\tau) = \frac{1}{\kappa} \cosh(\kappa\tau); \quad T(\tau) = \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa\tau).$$

Una onda originalmente monocromática, vista por este observador acelerado, presenta un corrimiento exponencial al rojo. La frecuencia instantánea medida decrece exponencialmente con el tiempo propio τ :

$$\omega(\tau) = \Omega \exp(-\kappa\tau).$$

Al calcular la transformada de Fourier del campo con respecto al tiempo propio, aparece un espectro de potencia de tipo Planck dado por:

$$\nu |f(-\nu)|^2 = \frac{\beta}{e^{\beta\nu} - 1}, \quad \text{con} \quad \beta = \frac{2\pi}{\kappa} \quad (2.28)$$

Este resultado revela la existencia de una temperatura asociada a la aceleración dada por (2.19). La aceleración constante induce un espectro térmico sobre el vacío cuántico, lo que muestra que la noción del vacío depende del observador. Este fenómeno es la base del Efecto Unruh y explica la radiación de Hawking en agujeros negros.

La teoría cuántica de campos (QFT) en espacio-tiempo curvo predice que el vacío depende del sistema de referencia usado. En particular, para observadores acelerados uniformemente (observadores de Rindler), los modos del campo escalar experimentan un corrimiento al rojo exponencial, lo que

implica que ondas monocromáticas observadas desde un marco inercial parecen decrecer exponencialmente en frecuencia respecto al tiempo propio del observador acelerado. Este fenómeno lleva a un espectro térmico tipo Planck caracterizado por la temperatura de Bekenstein-Hawking (2.19).

Para un agujero negro de RN (con masa M y carga Q), la temperatura específica es

$$T_{BH} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi r_+^2} \quad (2.29)$$

Es resultado de transformaciones modales de Bogolyubov, que hacen que el vacío inicial se perciba como lleno de partículas en un marco futuro o un efecto túnel cuántico[7]: pares partícula-antipartícula son creados cerca del horizonte, y una partícula puede escapar (radiación Hawking) mientras la otra es absorbida por el agujero negro.

La radiación térmica pura obtenida hasta ahora es idealizada. En situaciones reales, la emisión Hawking es modulada por el factor de cuerpo gris, asociado al potencial efectivo que rodea al agujero negro. Para estudiar estos efectos, se emplea el método WKB aplicado a barreras de potencial que permiten obtener la radiación efectiva observada a grandes distancias.

El vacío cuántico en presencia de horizontes (acelerados o gravitacionales) se manifiesta como un estado térmico para observadores restringidos por estos horizontes. Esta propiedad fundamental explica fenómenos esenciales como la radiación de Hawking, estableciendo profundas conexiones entre gravedad, aceleración, termodinámica y teoría cuántica de campos que describen una situación en equilibrio térmico a una temperatura $T = \kappa/2\pi$ (donde κ es la gravedad superficial del horizonte de eventos) tanto como un observador confinado a una región \mathcal{D} es concebido.

En su derivación original, Hawking analizó un campo cuántico en el espacio-tiempo de un agujero negro en formación (colapso gravitacional), demostrando que el estado inicial de vacío no permanece en la misma configuración de vacío en el futuro lejano. Matemáticamente, esto se estudia mediante transformaciones de Bogolyubov, que relacionan los modos del campo definidos antes (pasado) y después (futuro) del colapso. Un modo de frecuencia ω definido en el futuro lejano puede expresarse como combinación lineal de modos del pasado con una ecuación similar a la ecuación (2.26)

$$a_{\omega}^{\text{out}} = \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\text{in}} + \beta_{\omega} a_{\omega}^{\text{in}\dagger}.$$

El coeficiente $\beta_\omega \neq 0$ indica que el vacío inicial contiene partículas reales al final del proceso.

El número medio de partículas emitidas en cada modo ω es

$$n(\omega) = \frac{1}{\exp \frac{\omega}{T_H} \mp 1}, \quad (2.30)$$

- Signo $(-)$ para bosones (estadística de Bose-Einstein).
- Signo $(+)$ para fermiones (estadística de Fermi-Dirac).

La ecuación (2.30) es exactamente la distribución térmica esperada para un objeto que emite radiación como un cuerpo negro a temperatura (2.19) donde κ es la gravedad superficial del agujero negro (para RN, T_{BH} está dada por (2.29)). Cerca del horizonte, fluctuaciones cuánticas producen pares partícula-antipartícula. Una partícula cae dentro del agujero negro, mientras que la otra escapa hacia el infinito, apareciendo como radiación térmica para un observador distante.

Esto implica que la emisión sigue una distribución de Bose-Einstein (bosones) o Fermi-Dirac (fermiones) así mismo confirma que los agujeros negros son objetos termodinámicos con temperatura T_{BH} y entropía $S = \frac{A}{4}$ (proporcional al área del horizonte). El resultado final permite calcular tasas de emisión de energía, masa y carga del agujero negro integrando sobre todos los modos, determinando así su evolución en el tiempo.

En resumen, el cálculo original de Hawking revela que los agujeros negros emiten espontáneamente partículas según el espectro térmico dado en (2.30), comportándose como cuerpos negros cuánticos con una temperatura bien definida por la ecuación (2.19). [3, 1]

Un agujero negro cargado de masa M puede entenderse como la combinación de:

$$M = M_{\text{irr}} + U,$$

donde

- M_{irr} es la masa irreducible, asociada al núcleo inextraíble del agujero negro
- U es la energía almacenada en el campo eléctrico externo $\left(U = \frac{Q^2}{2r_+}\right)$, la cual puede extraerse parcialmente de manera clásica sin disminuir M_{irr} .

El área del horizonte, A , depende monótonamente de M_{irr} . De la segunda ley de la mecánica de agujeros negros (2.16) se sigue que $dM_{\text{irr}} \geq 0$. Únicamente la energía ligada al campo exterior puede ser extraída íntegramente sin reducir el área.

Para la emisión de una partícula con energía ω y carga q , la primera ley toma la forma:

$$-\omega = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{8\pi r_+^2} dA - \frac{qQ}{r_+}, \quad (2.31)$$

si $\omega \leq q\Phi$ (Φ es el potencial electrostático), no se requiere disminuir el área ($dA \geq 0$); es un proceso clásicamente permitido. Por otro lado, si $\omega > q\Phi$, se necesita $dA < 0$, lo cual solo es posible mediante efectos cuánticos (radiación de Hawking).

Para un agujero negro extremal, ($M = Q$), se anula la gravedad superficial κ y el área deja de ser diferenciable en ese punto. En ese límite, la ecuación (2.31) sugiere $\omega = q$, pero físicamente no es factible que el agujero negro emita estas partículas si $\kappa = 0$. La tercera ley de la mecánica de agujeros negros impide el decrecimiento del área hasta ese extremo.

El régimen cuántico (radiación de Hawking) permite emisiones con $\omega > q\Phi$. Tras establecer este marco heurístico de emisión de agujeros negros cargados, se explorará el efecto Schwinger (producción de pares debida a campos intensos) y su interacción con la radiación de Hawking.

2.6. Producción de Schwinger en espacio-tiempo curvo

El efecto Schwinger es una descripción semi-clásica de la creación de pares de partícula-antipartícula en el vacío en presencia de campo eléctricos intensos. Se supone que el campo eléctrico alrededor de un agujero negro de RN posee una intensidad elevada y alrededor pueden surgir pares de partículas, ¿Qué pasaría si eso sucede justo en el horizonte de eventos? Esta pregunta es la que nos planteamos aquí y daremos con la respuesta. Debido a la magnitud y complejidad de los cálculos que se hacen en esta sección solo incluiremos una breve descripción matemática de éstos y los resultados. A continuación presentaremos el Lagrangiano de Euler - Heisenberg y una breve descripción de cómo se obtiene este Lagrangiano matemáticamente y así mismo usaremos este Lagrangiano para derivar la acción efectiva para fermiones de espín 1/2 en campos electromagnéticos uniformes, así como describir la polarización del vacío y la producción de pares en espacio-tiempo plano. Este

Lagrangiano es la base de lo que hizo Schwinger en 1951[5]. ⁴.

2.6.1. Lagrangiano de Euler-Heisenberg

El Lagrangiano de Euler-Heisenberg (1936)[17] describe las correcciones no lineales a la electrodinámica clásica de Maxwell debido a efectos cuánticos, especialmente la creación de pares electrón-positrón y la polarización del vacío en campos electromagnéticos intensos. Se parte del Hamiltoniano de Dirac en presencia de un campo electromagnético externo:

$$\hat{H} = \gamma^\mu (p_\mu - eA_\mu) - m_e \quad (2.32)$$

donde A_μ es el potencial vector del campo electromagnético, e es la carga del electrón, y γ^μ son las matrices de Dirac. La idea es resolver estas ecuaciones para electrones y positrones en presencia de un campo externo constante.

El vacío cuántico no es trivial; campos fuertes generan fluctuaciones del vacío (pares electrón-positrón virtuales), lo que altera la estructura del vacío y, por tanto, las propiedades del campo electromagnético. Debido a la invariancia de Lorentz, el Lagrangiano efectivo solo puede depender de dos invariantes:

- $\mathcal{F} = \vec{E}^2 - \vec{B}^2$ (que también es $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, la contracción de los tensores de campo electromagnético).

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{G} = \vec{E} \cdot \vec{B}$ (que también es $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, donde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ es el tensor dual que explícitamente está dado por $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$).

Euler y Heisenberg derivaron[17], usando principios de la recién creada QED (Electrodinámica cuántica por sus siglas en inglés), la forma general del Lagrangiano efectivo como una función de

⁴Los cálculos realizados se basan en lo presentado por Kim en [16]

los invariantes de Lorentz

$$\mathcal{L}(F_{\mu\nu}) = f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

Para campos electromagnéticos débiles comparados con la intensidad crítica (alrededor de $1,3 \times 10^{-18} \text{V/m}$), se obtiene la expansión en potencias de los invariantes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \frac{8\alpha^2}{45m_e^4}((E^2 - B^2)^2 + 7(E \cdot B)^2), \quad (2.33)$$

donde el primer término es el lagrangiano clásico de Maxwell, mientras que el segundo es la corrección cuántica, donde α es la constante de estructura fina, y m_e es la masa del electrón.

En 1951, Julian Schwinger[5] propuso un método elegante para derivar esta acción efectiva mediante la integración de campos fermiónicos usando la representación del tiempo propio. Luego de seguir los pasos de Schwinger, especificados en [5], concluimos que el resultado final para la acción efectiva es:

$$S_{eff} = \int d^4x \mathcal{L}_{eff}(F_{\mu\nu}),$$

donde el lagrangiano efectivo \mathcal{L}_{eff} para fermiones de espín 1/2 es similar al que encontraron Heisenberg y Euler, pero con diferentes coeficientes que dependen de los fermiones y de las correcciones cuánticas.

El lagrangiano efectivo es (es es la multiplicación de la carga del electrón por el tiempo propio)

$$\mathcal{L}_{eff} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty ds \frac{e^{-m^2 s}}{s^3} \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)} - 1 - \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} \right], \quad (2.34)$$

donde

$$X = [2(\mathcal{F} - i\mathcal{G})]^{1/2} = X_r - iX_i.$$

La parte real es $\text{Re} \cosh(esX) = \cosh(esX_r) \cos(esX_i)$ y la parte imaginaria es $\text{Im} \cosh(esX) = \sinh(esX_r) \sin(esX_i)$. Usando estas expresiones se puede reescribir el cociente $\frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)}$ como:

$$\frac{\text{Re} \cosh(esX)}{\text{Im} \cosh(esX)} = \frac{\cosh(esX_r) \cos(esX_i)}{\sinh(esX_r) \sin(esX_i)} = \coth(esX_r) \cot(esX_i)$$

Sustituyendo esto en la acción efectiva de la ecuación (2.34) obtenemos:

$$\mathcal{L}_{eff} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \left[(es)^2 \mathcal{G} \coth(esX_r) \cot(esX_i) - 1 - \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} \right], \quad (2.35)$$

La parte imaginaria describe la producción real de pares electrón-positrón desde el vacío (efecto Schwinger). Por otra parte, la parte real de (2.35) da lugar a la polarización del vacío, que modifica las propiedades clásicas del campo electromagnético.

Para un campo eléctrico puro $B = 0, X_r = 0, X_i = E$, la ecuación (2.35) conduce a la tasa de producción de pares dada en (2.36):

$$2\text{Im}\mathcal{L}_e = \frac{1}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{eE}{n} \right)^2 e^{-\frac{n\pi m^2}{eE}}. \quad (2.36)$$

Estas partes imaginarias determinan la persistencia del vacío (transición de vacío a vacío) durante un tiempo T y un volumen V es:

$$|\langle 0, \text{fuera} | 0, \text{dentro} \rangle|^2 = e^{-2VT\text{Im}\mathcal{L}_e}, \quad (2.37)$$

por lo tanto conducen a la creación de un par antipartícula-partícula. Cabe destacar que las tasas de producción de pares (2.33), (2.36) y la polarización del vacío son válidas únicamente para campos uniformes. Estas fórmulas obtenidas pueden ser utilizadas tanto como los campos varíen muy lentamente en la región de interés. Hay muchas situaciones, incluyendo los agujeros negros cargados, donde los campos son intensos pero no uniformes. En las siguientes subsecciones, usando un método canónico, derivaremos las tasas de producción válidas incluso cuando el campo no es homogéneo.

2.6.2. Método canónico para la producción de pares

El método canónico ofrece una forma directa y general para estudiar la producción de pares partícula-antipartícula, ya que no sólo aplica para bosones, sino para fermiones también, resolviendo explícitamente las ecuaciones de movimiento. A diferencia de enfoques basados en integrales de camino, este método permite una interpretación inmediata del proceso de creación cuántica de pares.

Considerando un campo eléctrico en la dirección z , con vector potencial $A = -Et\hat{k}$, la ecuación de

Klein - Gordon que gobierna el comportamiento temporal de cada modo de Fourier se reduce a:

$$[\partial_t^2 - (k_z + qEt)^2 - (m^2 + k_x^2 + k_y^2)]\phi_k = 0. \quad (2.38)$$

Esta ecuación describe una partícula en un potencial tipo oscilador invertido dependiente del tiempo. Las soluciones de esta ecuación se expresan en términos de funciones paraboloidales, y al analizar sus comportamientos asintóticos se deducen los coeficientes de Bogolyubov μ_k y ν_k , mismos que permiten calcular el número de partículas creadas:

$$N_k = |\nu_k|^2 = e^{-2\pi a_{k_\perp}}, \quad a_{k_\perp} = \frac{k_\perp^2 + m^2}{2qE}. \quad (2.39)$$

Por otro lado, la persistencia del vacío (2.37), definida como la probabilidad de no producir partículas, está dada por:

$$|\langle 0, sal | 0, en \rangle|^2 = \frac{1}{|\mu_k|^2} = \frac{1}{1 + |\nu_k|^2}. \quad (2.40)$$

Dado que por $|\mu_k|^2 - |\nu_k|^2 = 1$, ambas cantidades están ligadas, mostrando claramente que la creación de partículas es complementaria a la persistencia del vacío. Mayor creación de partículas implica menor persistencia del vacío, y viceversa. Visto de otra manera, si se crean partículas el vacío ya no es vacío y pasa a ser ocupado por las partículas creadas recientemente debido al efecto Schwinger.

La tasa de producción total de pares (acción efectiva imaginaria en un espacio $d + 1$ dimensional es:

$$2\text{Im}\mathcal{L}_{eff}^b = \frac{1}{VT} \sum_{k_\perp} \ln(1 + e^{-2\pi a_{k_\perp}}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{eE}{n}\right)^{(d+1)/2} e^{-\frac{n\pi m^2}{eE}},$$

relacionando elegantemente la estructura matemática con el proceso físico de producción cuántica de pares partícula-antipartícula en presencia de campos eléctricos intensos dependientes del tiempo.

Con un potencial escalar $A_0 = -Ez$, la ecuación de Klein-Gordon se reduce a (2.41)

$$[-\partial_z^2 - (\omega + qEz)^2 + (m^2 + k_\perp^2)]\phi_{\omega \mathbf{k}_\perp} = 0. \quad (2.41)$$

Esta ecuación describe un potencial parabólico invertido. La solución general de esta ecuación puede expresarse en términos de funciones paraboloidales $E(a_{k_\perp})$ dadas por la ecuación (2.42), dependientes del parámetro adimensional $\xi = \sqrt{\frac{2}{qE}}(\omega + qEz)$:

$$\phi_{\omega \mathbf{k}_\perp}(\xi) = cE(a_{\mathbf{k}_\perp}, \xi) \quad (2.42)$$

con $a_{k_\perp} = \frac{k_\perp^2 + m^2}{2qE}$. Estas soluciones son especialmente útiles para estudiar el efecto túnel cuántico asociado a la producción de pares partícula-antipartícula en campos eléctricos intensos.

Al analizar el comportamiento asintótico de esta solución, se encuentra que cuando $z \rightarrow -\infty$ (antes de la barrera):

$$\phi_{\omega \mathbf{k}_\perp} = A_{k_\perp} \sqrt{\frac{2}{|\xi|}} e^{-\frac{i}{4}\xi^2} + B_{k_\perp} \sqrt{\frac{2}{|\xi|}} e^{i\frac{\xi^2}{4}}. \quad (2.43)$$

y cuando $z \rightarrow \infty$ (después de la barrera):

$$\phi_{\omega \mathbf{k}_\perp} = C_{k_\perp} \sqrt{\frac{2}{\xi}} e^{i\frac{\xi^2}{4}} \quad (2.44)$$

Estos términos representan ondas incidentes (A_{k_\perp}), reflejadas (B_{k_\perp}), y transmitidas (C_{k_\perp}). Las amplitudes A_{k_\perp} , B_{k_\perp} y C_{k_\perp} se relacionan directamente con los coeficientes de Bogolyubov μ_k y ν_k , controlando así la creación de partículas. Concretamente:

- Probabilidad de transmisión (tunelaje):

$$P_{k_\perp}^b = \left| \frac{C_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2 = \frac{1}{1 + e^{2\pi a_{k_\perp}}}. \quad (2.45)$$

- Probabilidad de reflexión (no tunelaje):

$$P_{k_\perp}^{nb} = \left| \frac{B_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2 = \frac{1}{1 + e^{-2\pi a_{k_\perp}}}. \quad (2.46)$$

Estas probabilidades pueden ser entendidas de forma semiclásica utilizando la acción instantónica, que representa el costo energético para que la partícula atraviese la barrera de potencial mediante

túnel cuántico. La acción instantónica para este sistema está dada por

$$S_{k_\perp} = \frac{1}{2} \oint dz \sqrt{(m + k_\perp)^2 - (\omega + qEz)^2}. \quad (2.47)$$

Considerando múltiples eventos de tunelamiento (instantones y anti-instantones), la probabilidad total de producción de pares (transmisión) se escribe como una suma geométrica alternante en términos de la acción instantónica:

$$P_{k_\perp}^b = \frac{1}{1 + e^{2S_{k_\perp}}}, \quad P_{k_\perp}^{nb} = \frac{1}{1 + e^{-2S_{k_\perp}}},$$

para bosones, mientras que para fermiones es posible obtener unas relaciones similares (teniendo en cuenta el principio de exclusión de Pauli):

$$P_{k_\perp}^f = e^{-2\pi a_{k_\perp}}, \quad P_{k_\perp}^{nf} = 1 - e^{-2\pi a_{k_\perp}}$$

Finalmente, la parte imaginaria de la acción efectiva, que cuantifica directamente la tasa de producción de pares en ambos casos, está dada por

$$2\text{Im}\mathcal{L}_e^b = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{eE}{n} \right)^{(d+1)/2} e^{-\frac{n\pi m^2}{eE}}. \quad (2.48)$$

para el caso bosónico, en el caso fermiónico, la parte imaginaria de la acción efectiva es

$$2\text{Im}\mathcal{L}_e^f = \frac{2}{(2\pi)^d} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{eE}{n} \right)^{(d+1)/2} e^{-\frac{n\pi m^2}{eE}}. \quad (2.49)$$

En resumen, en el calibre dependiente del espacio, la producción de pares en campos eléctricos intensos se interpreta naturalmente como un efecto túnel cuántico, donde la acción instantónica determina exponencialmente la tasa de creación de partículas, mientras que los coeficientes de Bogolyubov proporcionan la conexión entre el enfoque semiclásico y el tratamiento cuántico riguroso. Para partículas de espín σ , se añade un término de acople espín-campo como se muestra en (2.50),

$$[-\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu) + m^2 + 2i\sigma qE]\Phi(t, x) = 0. \quad (2.50)$$

Las soluciones siguen conservando estructura paraboloidal, pero con el parámetro a_{k_\perp} modificado $a_{k_\perp} = \frac{k_\perp^2 + m^2 + 2i\sigma q E}{2qE}$. Las formas asintóticas de la función de onda son las mismas que obtuvimos

para (2.43) y (2.44), de tal manera que para $\xi = -\infty$ (con $\varphi_{\omega k_\perp} = \sqrt{\frac{2}{|\xi|}} e^{-\frac{i}{4}\xi^2}$)

$$\phi_{\omega k_\perp} = A_{k_\perp} \varphi_{\omega k_\perp} - B_{k_\perp} \varphi_{\omega k_\perp}^*,$$

y para $\xi = \infty$

$$\phi_{\omega k_\perp} = C_{k_\perp} \varphi_{\omega k_\perp}^*.$$

Sin embargo, la principal diferencia para partículas con espín radica en la forma en que se manifiesta la conservación del flujo debido a la naturaleza de cada partícula:

- Bosónica (sin restricción por principio de exclusión):

El flujo conservado es:

$$J_b(\phi) = i\phi \partial_x \phi^* - i\phi^* \partial_x \phi, \quad |A_{k_\perp}|^2 = |B_{k_\perp}|^2 + |C_{k_\perp}|^2, \quad (2.51)$$

de modo que la reflexión es mayor a 1:

$$\left| \frac{B_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2 = 1 + \left| \frac{C_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2. \quad (2.52)$$

- Fermiónica (Restringidas por el principio de exclusión):

El flujo conservado es la corriente de Dirac

$$J_f(\phi) = \bar{\phi} \gamma^1 \phi, \quad |A_{k_\perp}|^2 + |C_{k_\perp}|^2 = |B_{k_\perp}|^2, \quad (2.53)$$

lo que implica una reflexión menor que uno:

$$\left| \frac{B_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2 = 1 - \left| \frac{C_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2 < 1. \quad (2.54)$$

Si se definen los coeficientes de transmisión $T = |C/A|^2$ y reflexión $R = |B/A|^2$, a partir de (2.52) o (2.54), surge una aparente paradoja al considerar la reversión temporal del problema (el llamado

conjunto simple)

$$\tilde{R} = \frac{1}{R} \quad (2.55)$$

Esta aparente inconsistencia se conoce como la paradoja de Klein y surge del hecho de que en este conjunto invertido temporalmente, los coeficientes de reflexión pueden tomar valores mayores que uno para fermiones. Sin embargo, al analizar correctamente la situación física[18], se aclara que dicha amplificación por reflexión superior a la unidad realmente ocurre con bosones (no con fermiones), destacando que la producción de pares partícula-antipartícula es esencial para la correcta interpretación del fenómeno.

Para relacionar los coeficientes de transmisión y reflexión con el fin de resolver el problema, necesitamos comprender la naturaleza de las ecuaciones de conservación de flujo. Para bosones, hay una corriente conservada,

$$J_b(\phi) = i\phi\partial_x\phi^* - i\phi^*\partial_x\phi \quad (2.56)$$

la cual se conserva en el sentido de que $\partial_x J_b = 0$. Para las condiciones de borde simples descritas anteriormente, esto da la ley de conservación

$$k_l|\tilde{A}|^2 - k_l|\tilde{B}|^2 = k_r|\tilde{C}|^2 \quad (2.57)$$

Para fermiones, el hecho de que el potencial efectivo en la ecuación (2.50) es complejo implica que esta cantidad no se conserva. En este caso, debemos usar la conservación de la corriente de Dirac

$$J_f = \bar{\psi}\gamma^1\psi \quad (2.58)$$

En las regiones asintóticas $x = \pm\infty$, las soluciones a la ecuación de Dirac son ondas planas. Escribiendo $\Omega = \omega + qA_t$ y numerando las componentes del espinor ψ como ψ_i se puede demostrar que

$$J_f(\psi) \propto \frac{1}{\Omega} \sum_i J_b(\psi_i) \quad (2.59)$$

Como Ω es negativa en la asíntota derecha, vemos que, aunque una partícula en la izquierda con dependencia espacial $\exp(ikx)$ corresponde a un flujo positivo, una partícula a la derecha con dependencia espacial $\exp(ikx)$ corresponde a un flujo negativo. Para las condiciones de borde simples,

esta ley de conservación se convierte en

$$\frac{k_l}{\Omega_l}|\tilde{A}|^2 - \frac{k_l}{\Omega_l}|\tilde{B}|^2 = \frac{k_r}{\Omega_r}|\tilde{C}|^2,$$

el término en la derecha es negativo. En el caso más simple que $k_l = k_r$ las dos ecuaciones de conservación simples se reducen a

$$\begin{aligned} |\tilde{A}|^2 - |\tilde{B}|^2 &= |\tilde{C}|^2, \\ |\tilde{A}|^2 - |\tilde{B}|^2 &= -|\tilde{C}|^2. \end{aligned}$$

Dividiendo las ecuaciones simples de conservación de la energía para $|A|^2$, las leyes de conservación para bosones y fermiones respectivamente pueden ser escritas en términos de los coeficientes de transmisión y reflexión como

$$n_b = KT := \frac{k_r}{k_l}T = R - 1 \quad (2.60)$$

donde $R = \left| \frac{B_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2$ y $T = \left| \frac{C_{k_\perp}}{A_{k_\perp}} \right|^2$ ($R > 1$ implica amplificación de modos por el campo, de forma similar a las transformaciones de Bogolyubov)

$$n_f = KT = \left| \frac{k_r \Omega_l}{k_l \Omega_r} \right|^2 T = 1 - R \quad (2.61)$$

donde denotamos por K a los prefactores positivos que involucran ratios de momento. Podemos relacionar el coeficiente de transmisión simple con el físico usando la relación dada en (2.55):

$$T = \frac{\tilde{T}}{1 - K\tilde{T}}, \quad \text{Bosónico} \quad (2.62)$$

$$T = \frac{\tilde{T}}{1 + K\tilde{T}} \quad \text{Fermiónico} \quad (2.63)$$

para el número de bosones y fermiones creados simplemente multiplicamos el T obtenido por el factor K recuperando así las forma presentadas en (2.60 y 2.61) Estos 2 últimos resultados se pueden agrupar elegantemente en la ecuación

$$n = \pm(R - 1) \quad (2.64)$$

La ecuación (2.64) en términos de teoría cuántica de campos, estaría relacionado con el valor esperado del operador número, o equivalentemente con el cuadrado del coeficiente de Bogolyubov que mezcla estados de partículas y antipartículas debido al campo eléctrico. Nikishov [18], demostró que este número se puede obtener analizando las soluciones de scattering: un coeficiente de reflexión mayor que 1 implica que el campo inyectó partículas adicionales, cuyo conteo es precisamente $R - 1$ (bosónicos).

La creación de pares partícula-antipartícula en campos eléctricos intensos puede analizarse en términos de probabilidades de transición entre estados de vacío y estados con pares creados. La estadística de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac determinan diferencias fundamentales en estas probabilidades debido al principio de exclusión de Pauli.

Veremos primero qué pasa con el caso bosónico, en este caso, no existe límite en la ocupación de estados, permitiendo múltiples pares en un mismo estado cuántico. La conservación total de probabilidad se expresa mediante una serie geométrica:

$$1 = P_0(1 + P_1 + P_1^2 + P_1^3 + \dots) = \frac{P_0}{1 - P_1}, \quad (2.65)$$

donde

- P_0 es la probabilidad de transición vacío-vacío (ningún par creado),
- P_1 es la probabilidad de creación de un par en un estado específico.

El número medio de pares creados (N_b) está dado por la serie ponderada

$$N_b = P_0(P_1 + 2P_1^2 + 3P_1^3 + \dots) = \frac{P_0 P_1}{(1 - P_1)^2}. \quad (2.66)$$

Las relaciones explícitas entre probabilidades y número medio de pares para bosones son (2.67) y (2.68):

$$P_0 = \frac{1}{1 + N_b}, \quad (2.67)$$

$$P_1 = \frac{N_b}{1 + N_b} \quad (2.68)$$

donde N_b es el número medio de pares creados.

Por otra parte, para el caso fermiónico, se debe tomar en cuenta el principio de exclusión, debido a esto cada estado cuántico únicamente puede alojar un solo par fermiónico. Por tanto, solo dos eventos son posibles en cada estado: la no producción de pares (P_0) o la creación de exactamente un par (P_1). La conservación total de la probabilidad es entonces simplemente:

$$P_0 + P_0 \cdot P_1 = 1 \implies P_0(1 + P_1) = 1. \quad (2.69)$$

El número medio de pares creados N_f para fermiones se reduce a:

$$N_f = P_0 \cdot P_1, \quad (2.70)$$

y, resolviendo (2.70) en términos explícitos, se obtiene

$$P_0 = 1 - N_f, \quad P_1 = \frac{N_f}{1 - N_f} \quad (2.71)$$

Estas ecuaciones reflejan la relación entre las probabilidades y el número medio de pares en el contexto de la estadística de Fermi-Dirac, donde la creación de pares está limitada a un máximo de un par por estado cuántico debido al principio de exclusión de Pauli.

Matemáticamente, también se puede relacionar n con T . Usando las 2 relaciones derivadas en (2.64) para los distintos casos, en ambos casos tenemos $n = T$. En literatura del efecto Schwinger se suele expresar la tasa de producción en función de la probabilidad de transmisión a través de la barrera. Si T es la probabilidad de que ocurra la creación de 1 par, entonces para bosones:

- La probabilidad de no producir pares es $N = 1 - P$ (con $P = T$) porque se pueden crear múltiples bosones.
- Para fermiones la probabilidad de no producir pares es $N = \frac{1}{1 + P}$ debido a que solo 1 par puede ser creado.

De estas distribuciones se deduce que el número medio n de pares creados es $\frac{P}{1 - P}$ (bosónico) y $\frac{P}{1 + P}$ (fermiónico) Si despejamos $P = K\tilde{T}$, esto coincide con $n = K\tilde{T}$ cuando P es pequeño, pero

tenemos que

$$n_b = \frac{\tilde{T}}{1 - K\tilde{T}} \quad \text{bosónico} \quad (2.72)$$

$$n_f = \frac{\tilde{T}}{1 + K\tilde{T}} \quad \text{fermiónico} \quad (2.73)$$

Sin embargo, en el límite de baja ocupación (una producción rara de pares, $T \ll 1$), ambas se reducen a $n \approx T$. Entonces $R - 1 \approx T$.

Hasta aquí se ha estudiado el concepto de creación de pares en el espacio plano de Minkowski, sin embargo debido a que no estamos en espacio plano sino en espacio curvo (estamos estudiando radiación de Hawking debido a creación de pares en el agujero negro de RN), se tiene que generalizar la ecuación de Klein-Gordon y de Dirac a espacios curvos y eso es lo que haremos en el siguiente capítulo tanto para Schwarzschild, pero antes de pasar a estudiar las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac introduzcamos el cálculo de la tasa total de radiación.

Capítulo 3

Tasa total de radiación

3.1. Factor de cuerpo gris

En la derivación ideal de la radiación de Hawking se supone inicialmente que cualquier partícula puede escapar al infinito, pero en la práctica esto es imposible, puesto que para ello las partículas emitidas deben atravesar el campo gravitatorio del agujero negro. El espacio-tiempo exterior actúa como un potencial de dispersión: algunas componentes de las ondas emitidas son reflejadas de vuelta al agujero negro y solo una fracción de estas ondas llega realmente a ser transmitidas hacia el infinito. A esa fracción de escape se le conoce como factor de cuerpo gris $\sigma(\omega)$. Matemáticamente, $\sigma(\omega)$ puede relacionarse con coeficientes de transmisión $T(\omega)$ y reflexión $R(\omega)$ obtenidos al resolver la ecuación de onda radial del campo en el fondo del agujero negro (veremos esto más en detalle en las siguientes secciones). Por ejemplo, para un modo dado, si $R(\omega)$ es la probabilidad de que la partícula sea reflejada hacia el agujero negro (absorbida inversamente), entonces $1 - R(\omega)$ es la probabilidad de transmisión hacia el infinito; este $1 - R(\omega)$ corresponde a $\sigma(\omega)$. En el cálculo de Hawking, estos coeficientes aparecen cuando se convierte el número medio de partículas en **tasa de escape observada**: antes de integrar sobre todos los modos se multiplica la ecuación (2.30) por $\sigma(\omega)$ para incorporar el hecho de que solo una parte de las partículas de frecuencia ω logra escapar al infinito. Si no hubiera dispersión (es decir, si $\sigma(\omega) = 1$ para todos los modos), el agujero negro sería un emisor perfectamente negro y la potencia emitida seguiría exactamente la ley de Stefan-Boltzmann para un área emisora igual a la del horizonte. En la práctica, $\sigma(\omega)$ depende de ω (y del espín de la partícula), modulando el espectro puro de cuerpo negro. Para agujeros de Schwarzschild,

$\sigma(\omega)$ tiende a ser cercana a 1 (débilmente dependiente de ω salvo a muy baja energía), por lo que el espectro Hawking es casi térmico. En agujeros cargados o considerando partículas con carga, $\sigma(\omega)$ puede suprimir fuertemente ciertas frecuencias. En resumen, los coeficientes de transmisión y reflexión no alteran la forma básica de $n(\omega)$ dada por la distribución térmica, pero escalan la intensidad efectiva de cada modo que logra escapar, convirtiendo el espectro en gris en vez de perfectamente negro.

Para calcular esta tasa total a la que un agujero negro pierde energía (masa) debido a la radiación de Hawking, se incorpora el factor de cuerpo gris $\sigma(\omega)$ que modifica la emisión térmica pura. A continuación se detalla matemáticamente paso a paso. Primero se parte desde la ecuación (2.30) y se la convierte en una tasa de pérdida de energía multiplicando la cantidad de partículas emitidas en cada modo por su energía ω y se suma sobre los modos permitidos

$$-\frac{dM}{dt} = \int d\omega \omega n(\omega) (\text{factor de modulación}),$$

donde M es la masa del agujero negro, el factor de modulación aquí es el factor de cuerpo gris $\sigma(\omega)$, que describe cuántas de estas partículas emitidas en el horizonte logran escapar al horizonte. En el caso ideal, este factor sería 1, pero en la práctica depende del tipo de partícula y de las condiciones del agujero negro.

En un análisis más detallado, el factor de cuerpo gris $\sigma(\omega)$ se introduce en la expresión para corregir el espectro de emisión. De manera general:

$$-\frac{dM}{dt} = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega n(\omega) \sigma(\omega),$$

aquí g es el número de grados de libertad internos del campo.

Usando la relación de dispersión relativista:

$$d^3k = 4\pi k^2 dk = 4\pi k \omega d\omega,$$

y considerando $k = \sqrt{\omega^2 - m^2}$, la integral se expresa en términos de ω :

$$-\frac{dM}{dt} = g \int \frac{d\omega \omega^2 k}{2\pi^2} \frac{\sigma(\omega)}{e^{\omega/T_H} \mp 1}. \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) describe la tasa total de pérdida de energía del agujero negro. En ausencia de un campo gravitatorio que module la emisión $\sigma(\omega)$ se aproxima por la sección eficaz del horizonte, lo que llevaría a la ley de Stefan-Boltzmann en el caso de un agujero negro de Schwarzschild.

La ecuación (3.1) se obtiene integrando la energía ω de los modos emitidos, ponderada por la ocupación térmica $n(\omega)$ y el factor de cuerpo gris $\sigma(\omega)$. La presencia de $\sigma(\omega)$ modifica la intensidad de la radiación respecto a un espectro puramente térmico y tiene un impacto crucial en el espectro observado.

3.2. Radiación de Hawking como efecto túnel

La radiación de Hawking puede interpretarse como un proceso de tunelaje cuántico[7, 19]: pares partícula-antipartícula se crean cerca del horizonte, y uno de los miembros del par logra cruzar el horizonte –ya sea hacia fuera o hacia dentro– cambiando el balance energético del sistema. Esta imagen es análoga a la producción de pares en un campo eléctrico intenso (efecto Schwinger), discutido en el capítulo anterior, y difiere de las derivaciones originales, donde la conservación de la energía no se impone explícitamente.

Para describir fenómenos en el horizonte, es necesario elegir coordenadas que, a diferencia de las coordenadas de Schwarzschild, no son singulares en el horizonte. Si recordamos relatividad especial, vemos que la métrica para un cuerpo en movimiento relativista en coordenadas esféricas puede escribirse de la siguiente manera:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.2)$$

Comparando esto con la métrica de Schwarzschild, véase la ecuación (2.2) con $c = 1$ obtenemos que $v^2 = \frac{2M}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2M}{r}}$. Siguiendo los pasos de Painlevé y Gullstrand se obtiene la métrica de Painlevé-Gullstrand, misma que sigue siendo singular en $r = 0$ y es regular en $r = 2M$, el horizonte de eventos ya no es una singularidad y se puede tratar problemas de horizonte con esta métrica(3.2).

Ahora, la relación diferencial entre coordenadas es

$$dt = dT - \frac{\sqrt{\frac{2M}{r}}}{1 - \frac{2M}{r}} dr. \quad (3.3)$$

La solución a la ecuación diferencial es

$$t = u + 2\sqrt{2Mr} + 2M \ln \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}}, \quad (3.4)$$

u en esta ecuación es el tiempo de Schwarzschild. Con esta elección el elemento de línea es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} du dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.5)$$

Ahora ya no hay singularidad en $r = 2M$, y el verdadero carácter del espacio-tiempo, siendo estacionario, pero no estático, se manifiesta. Estas coordenadas fueron introducidas por Painlevé. Su utilidad en estudios sobre la mecánica cuántica de los agujeros negros se hace evidente en este estudio y en el trabajo en el cual se basa este.

Para nuestros propósitos, una de las características cruciales de estas coordenadas es que son estacionarias y no singulares a lo largo del horizonte. Entonces, es posible definir un estado de vacío efectivo requiriendo que aniquile los modos que llevan frecuencia negativa con respecto a t ; dicho estado va a verse esencialmente vacío para un observador en caída libre mientras este pasa a través del horizonte de eventos. Las geodésicas nulas radiales son dadas por la condición $dt = 0$, finalmente llegamos a

$$\frac{dr}{du} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}. \quad (3.6)$$

La solución con signo positivo corresponde a geodésicas salientes, mientras que la solución con signo negativo corresponde a geodésicas entrantes, bajo la asunción implícita de que u se incrementa en el futuro.

En el límite $r \rightarrow \infty$, $\frac{dr}{du} = \pm 1$. $c = 1$ entonces recuperamos la velocidad de la luz.

En el horizonte de eventos $r = 2M$, la velocidad de la luz saliente del centro del agujero negro es $\frac{dr}{dt} = 0$. No puede escapar del horizonte de eventos, en su lugar la luz queda atrapada dentro

del horizonte de eventos (como ya demostramos anteriormente, un agujero negro sí puede emitir radiación, si suponemos efectos cuánticos en el horizonte de sucesos). Como la luz se mueve más rápido que cualquier otra cosa, la materia solo puede caer hacia dentro en el horizonte de eventos. Cualquier cosa que cruce el horizonte hacia el interior queda irrevocablemente aislada del exterior. A continuación, consideramos la dinámica de una partícula libre para obtener la acción, denotada por S , ignorando la parte angular, en un escenario curvado como

$$S = \int p_\mu dx^\mu \quad p_\mu = mg_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau},$$

donde τ es el tiempo propio a lo largo de la línea de mundo de la partícula y p^μ es su cuadrimomento físico. La dinámica radial de partículas masivas en el espacio-tiempo de Schwarzschild está determinado por las ecuaciones:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{u}^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \dot{u} \dot{r} + \dot{r}^2 = 1 \quad (3.7)$$

Esta es la condición de normalización para el cuadvivector velocidad.

La segunda ecuación proviene de la conservación de la energía. Se sabe que, para una métrica con una coordenada temporal u que no depende del tiempo (es decir, es estacionaria), la cantidad conservada asociada a la energía de la partícula es el momento conjugado con respecto a esa coordenada u .

El momento conjugado p_u es

$$p_u = m(g_{uu}\dot{u} + g_{ur}\dot{r}). \quad (3.8)$$

Dado que la energía es una cantidad conservada definimos ω como el valor constante del momento conjugado dividido por la masa:

$$\omega = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{u} + \sqrt{\frac{2M}{r}} \dot{r} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) es la geodésica correspondiente a la independencia temporal de la métrica; en términos del momento definido en la ecuación (3.8), puede ser escrito como $p_u = -\omega$, y entonces ω tiene la interpretación de la energía de la partícula medida desde el infinito. Resolviendo estas

ecuaciones para \dot{u} y \dot{r} da:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\omega^2 - 1 + \frac{2M}{r}} \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) en (3.9) da

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{u} = \omega \pm \sqrt{\frac{2M}{r}} \sqrt{\omega^2 - 1 + \frac{2M}{r}} \quad (3.11)$$

Estas ecuaciones describen la dinámica radial de una partícula masiva en el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Gullstrand-Painlevé. La elección de los signos \pm está relacionada con la dirección radial del movimiento de la partícula. $+$ se corresponde con partículas saliendo del horizonte de sucesos, mientras que $-$ se corresponde con partículas entrantes, y como ya se dijo anteriormente, ω es un parámetro que se corresponde con la energía medida por un observador en reposo ubicado en el infinito.

Como la longitud de onda típica de la radiación está en el orden del tamaño del agujero negro, uno podría dudar de una descripción de ésta como una partícula puntual. Sin embargo, cuando la onda saliente es seguida del revés hacia el horizonte, su longitud de onda, medida por observadores locales se corre de manera creciente hacia el azul. Cerca del horizonte, el número cuántico asociado al radio se aproxima hacia el infinito y la aproximación de partícula puntual o semiclásica WKB se justifica.

La radiación de Hawking se puede comprender como un efecto túnel de una partícula (por ahora consideremos una partícula sin carga, desprovista de momento angular y de espín) de energía ω que cruza el horizonte desde una posición inicial r_0 hasta la posición final r_f mientras la masa del agujero negro decrece en ω unidades de energía y como la energía es masa, y como ya vimos que la masa está relacionada con el tamaño del agujero negro, entonces la conclusión es que el agujero negro decrece de M a $M - \omega$, por lo que, el horizonte de eventos decrece de $2M$ a $2(M - \omega)$. La barrera de potencial no existe antes de la salida de la partícula del horizonte de eventos, sino que es la propia partícula la que al provocar la contracción del horizonte, crea la barrera. La acción clásica S para la trayectoria está dada por

$$S = \int_{r_0}^{r_f} dr p_r = \int_{r_0}^{r_f} dr \int_0^{p_r} dp'_r = \int_{r_0}^{r_f} dr \int_M^{M-\omega} \frac{dH}{\dot{r}}, \quad (3.12)$$

donde p_r es el momento radial de una partícula, p'_r es una variable muda y se ha usado la ecuación de Hamilton-Jacobi $\left(\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}\right)$ para obtener la última igualdad.

Haciendo el cambio de variable $H = M - \omega$ y utilizando la ecuación (3.10) para partículas salientes se obtiene

$$S = \int_0^\omega \int_{r_0}^{r_f} \frac{dr}{1 - \sqrt{1 - 1 - \frac{2M}{r}}} = \int_0^\omega \int_{r_0}^{r_f} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}} \quad (3.13)$$

Tomando en cuenta que $r_0 > r_H > r_f$ y que $f(r_H) = 0$, esta integral será compleja y asumiendo que la parte imaginaria de la acción puede ser atribuida completamente al residuo del polo, ésta puede ser calculada fácilmente haciendo $r - r_H = \varepsilon e^{i\theta}$. Para el agujero negro de Schwarzschild con $f(r) = 1 - \frac{2(M - \omega)}{r}$ la integral (3.13) quedaría, para la parte imaginaria de la acción, que es la que nos interesa, porque está relacionada con la tasa de emisión mediante efecto túnel, o semiclásica Γ

$$\text{Im}S = \int_0^\omega \int_{r_f}^{r_i} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M - \omega')}{r}} \pm i\epsilon} d\omega' \quad (3.14)$$

Aunque esta trayectoria radial hacia adentro parecería, a simple vista, ser clásicamente permitida, es una trayectoria que clásicamente está prohibida porque es el mismo horizonte aparente el que se está contrayendo. De hecho, los límites de la integral (3.14) indican que, a lo largo de la trayectoria que no está permitida de manera clásica, la partícula saliente empieza en $r = 2M - \epsilon$, justo dentro de la posición inicial del horizonte, y atraviesa el horizonte que se contrae para materializarse en $r = 2(M - \omega) + \epsilon$, justo afuera de la posición final del horizonte.

De manera alternativa, y siguiendo los mismos pasos que se ha seguido hasta ahora, la radiación de Hawking también puede ser entendida como una creación de pares justo en el borde del horizonte, con la partícula de energía negativa tunelando hacia el agujero negro. Como dicha partícula se propagaría hacia atrás en el tiempo, tenemos que revertir el tiempo en las ecuaciones de movimiento. Del elemento de línea de la ecuación (3.5), vemos que el tiempo revertido corresponde a $\sqrt{\frac{2M}{r}} \rightarrow -\sqrt{\frac{2M}{r}}$. Además, como la antipartícula cae hacia dentro del agujero negro, y por lo tanto, añade energía al agujero negro, se reemplaza $M \rightarrow M + \omega$. Entonces la partícula con energía negativa

entrante tiene, haciendo la misma integral (3.14):

$$\text{Im}S = \text{Im} \int_0^{-\omega} \int_{r_f}^{r_0} \frac{dr}{-1 + \sqrt{\frac{2(M + \omega')}{r}}} d\omega' = 4\pi\omega(M - \frac{\omega}{2}),$$

Los dos canales, tunelaje de partículas o antipartículas, contribuyen a la tasa del proceso de Hawking entonces, en un cálculo más detallado, uno tendría que sumar sus amplitudes para obtener la tasa semiclásica de tunelaje. Sea como sea, dichas consideraciones únicamente afectarían al prefactor. En cualquier caso, la parte exponencial de la tasa semiclásica de emisión, de acuerdo con [20], es

$$\Gamma \sim e^{-2\text{Im}S} = e^{-8\pi\omega\left(M - \frac{\omega}{2}\right)} = e^{+\Delta S_{BH}}, \quad (3.15)$$

donde se ha expresado el resultado de manera más natural en términos del cambio de la entropía de Bekenstein-Hawking. Cuando el término cuadrático en ω es despreciado, la ecuación (3.15) se reduce al factor de Boltzmann para una partícula con energía ω con $\beta = \frac{1}{T_H} = 8\pi M$. La corrección de ω^2 proviene de la física de la conservación de la energía, la cual eleva por sí misma la temperatura efectiva del agujero mientras radia. Que este resultado exacto deba ser correcto puede ser visto en términos físicos considerando el límite en el cual la partícula emitida se lleve la masa entera del agujero negro (correspondiente a la transformación del agujero negro en una capa saliente. Solamente puede existir un único estado así. Por otro lado, hay $e^{S_{BH}}$ estados en total. La mecánica estadística entonces avala que la probabilidad de encontrar una capa conteniendo toda la masa de un agujero negro es proporcional a $e^{-S_{BH}}$.

Siguiendo la matemática de la ecuación (2.28) y suponiendo que el término cuadrático es despreciable, esto implica que hay un flujo espectral propio de una temperatura inversa de $8\pi M$:

$$\rho(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \frac{|T(\omega)|^2}{e^{8\pi M\omega} - 1}, \quad (3.16)$$

donde $|T(\omega)|^2$ es el coeficiente de transmisión dependiente de la frecuencia ω para una partícula saliente que alcanza la infinidad futura sin dispersión hacia atrás. Surge de un análisis más completo de los modos, cuyo comportamiento semi-clásico se ha estado discutiendo en [7].

La técnica anterior puede ser aplicada también a la emisión desde un agujero negro cargado. Cuando

la radiación lleva consigo la carga del agujero negro, los cálculos son complejos por el hecho de que la trayectoria ahora también está sujeta a fuerzas electromagnéticas. Por ahora nos restringiremos a radiación no cargada proveniente de un agujero negro de Reissner-Nordström. La derivación de esta radiación sigue los mismos pasos que el anterior caso.

Partimos de la métrica de Reissner-Nordström (Véase la ecuación (2.3)), como ya se mencionó anteriormente esta métrica presenta una singularidad en el horizonte $r_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$, y el objetivo es transformar las coordenadas de tal manera que ya no exista esa singularidad.

Para eliminar la singularidad en el horizonte, realizamos una transformación de coordenadas a un nuevo tiempo u que será regular en $r = r_H$. La forma general de la transformación de coordenadas es:

$$u = t + f(r)$$

donde $f(r)$ es una función de r que se elegirá adecuadamente para eliminar la singularidad.

Para simplificar la métrica y eliminar la singularidad, elegimos $f(r)$ de tal forma que el término dr^2 cancele la singularidad en el horizonte. Para ello se escoge

$$\frac{df}{dr} = \frac{\sqrt{2Mr - Q^2}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$$

Con esta elección, la métrica toma la forma no singular:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.17)$$

Finalmente integramos $\frac{df}{dr}$ para calcular la forma de u :

$$u = t + 2\sqrt{2Mr - Q^2} + M \ln \left(\frac{r - \sqrt{2Mr - Q^2}}{r + \sqrt{2Mr - Q^2}} \right) + \frac{Q^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{M^2 - Q^2} \sqrt{2Mr - Q^2}}{Mr} \right) \quad (3.18)$$

Este término es el que transforma el tiempo de RN t al tiempo regularizado de Painlevé u , eliminando así la singularidad en el horizonte.

La ecuación de movimiento para una partícula saliente (sin masa y sin carga), siguiendo el mismo

proceso que ya hemos hecho para Schwarzschild, es

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 1 - \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}} \quad (3.19)$$

con $M \rightarrow M - \omega$ cuando la gravitación propia de la partícula es incluida. La parte imaginaria de la acción (siguiendo lo ya hecho para Schwarzschild) es:

$$\text{Im}S = \text{Im} \int_0^\omega \int_{r_f}^{r_0} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M - \omega')}{r} - \frac{Q^2}{r^2}}} (-d\omega'),$$

La integral en r presenta una singularidad en el horizonte del agujero negro, $r_H = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$. Para evaluar la parte imaginaria de la acción, deformamos el contorno en el plano complejo alrededor de esta singularidad (de manera similar a lo ya hecho para Schwarzschild). La contribución a la acción proviene de los polos en r_H .

La singularidad en r_H produce un término de residuo que es responsable de la parte imaginaria de la acción. Al evaluar la integral de residuo obtenemos

$$\text{Im}S = 4\pi \left(\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right) - (M - \omega) \sqrt{(M - \omega)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2} \right).$$

La tasa de emisión de Hawking está relacionada con la acción imaginaria a través de

$$\Gamma \sim e^{-2\text{Im}S}$$

Sustituyendo el valor de $\text{Im}S$ calculado en el paso anterior, se obtiene la tasa de emisión Hawking para el agujero negro de RN,

$$\Gamma \sim e^{-8\pi \left(\omega \left(M - \frac{\omega}{2} \right) - (M - \omega) \sqrt{(M - \omega)^2 - Q^2} + M \sqrt{M^2 - Q^2} \right)} = e^{\Delta S_{BH}}, \quad (3.20)$$

La presencia de carga en el agujero negro de RN introduce un término adicional dependiente de la carga que no existía en la expresión que se obtuvo para Schwarzschild.

Expandiendo para $\omega \ll M$, se puede aproximar la variación de la entropía ΔS_{BH} al primer orden en ω . Retomando lo que ya se hizo para Schwarzschild, es posible concluir que la ecuación (3.20),

a primer orden, es consistente con el resultado de la emisión térmica a la temperatura de Hawking, para un agujero negro cargado.

Nuevamente, la conservación de la energía implica que el resultado exacto tiene correcciones de más alto orden en ω , esto es lo que vamos a hacer más adelante, considerando también la contribución debido a la producción de Schwinger en el campo eléctrico del agujero negro. Además de eso, como la tasa de emisión tiene que ser real, la presencia de la raíz cuadrada en la ecuación (3.20) asegura que la radiación más allá de la extremalidad no es posible. Al contrario que en las derivaciones anteriores, aquí la tercera ley de la termodinámica actúa obligando al agujero negro a tener $M \geq Q$. Veremos ahora el tunelaje de partículas cargadas a través del horizonte en RN antes de combinar los 2 procesos de tunelamiento.

3.2.1. Tunelaje a través del horizonte en RN

Ahora emulemos lo ya hecho para Schwarzschild para una partícula cargada moviéndose en un fondo de RN. En las coordenadas de Painlevé-Gullstrand, definidas por el elemento de línea (3.17). Las ecuaciones análogas a (3.7) y (3.9), se derivan de manera análoga, para partículas cargadas en un fondo de RN son:

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2, \quad (3.21)$$

esta es la condición de dispersión relativista para una partícula masiva en un espacio-tiempo curvo. Es decir, el cuadrimomento p_μ de una partícula de masa m debe cumplir con (3.21). Esta condición es la generalización en espacio-tiempo curvo de la relación de dispersión clásica $E^2 - p^2 = m^2$.

La segunda ecuación es

$$P_u := p_u + qA_u = -\omega. \quad (3.22)$$

En (3.22) se introduce la noción de momento canónico en presencia de un campo electromagnético. En este caso, la partícula está acoplada débilmente a un potencial electromagnético A_μ , por lo que su momento canónico es la suma del momento físico p_μ y el término qA_μ . Debido a que el fondo es estacionario, la componente correspondiente a la dirección temporal (la coordenada u en PG) se conserva. Esta cantidad conservada se identifica con $-\omega$, donde ω es la energía medida en el infinito. En resumen (3.21) y (3.22) son la condición de masa para una partícula en un espacio-tiempo curvo, y la condición de conservación de la energía (incluyendo el acople electromagnético) para la partícula

en un fondo estático. Estas ecuaciones son el punto de partida para el análisis de la emisión por tunelaje, ya que permiten expresar la dinámica del proceso en términos de cantidades conservadas y condiciones de borde en el horizonte del agujero negro.

Estas ecuaciones se pueden resolver simultáneamente para obtener explícitamente el momento radial p_r . Recordemos que tenemos (3.21) y (3.22), partiendo de allí, se busca una expresión explícita para p_r (momento radial), asumiendo movimiento netamente radial, en coordenadas de Painlevé-Gullstrand. La métrica en estas coordenadas tiene la forma presentada en (3.17), la condición (3.21), haciendo explícitos los términos relevantes, toma la forma general (para movimiento radial):

$$g^{uu}p_u^2 + 2g^{ur}p_up_r + g^{rr}p_r^2 = -m^2.$$

La condición (3.22) permite sustituir $p_u = -\omega - qA_u$. Haciendo esta sustitución, obtenemos una ecuación cuadrática en términos de p_r :

$$g^{uu}p_u^2 + 2g^{ur}p_up_r + g^{rr}p_r^2 = -m^2,$$

resolviendo esta ecuación cuadrática para p_r , se obtiene la ecuación (3.23)

$$p_r = \frac{1}{f} \sqrt{1-f}(\omega + qA_u) + \frac{1}{f} \sqrt{(\omega + qA_u)^2 - fm^2} \quad (3.23)$$

La expresión obtenida corresponde al momento radial necesario para describir la dinámica radial de una partícula cargada en el fondo de RN. En síntesis, la ecuación (3.23) es simplemente la solución explícita para el momento radial, obtenida al despejar p_r a partir de las ecuaciones fundamentales (3.21) y (3.22).

El potencial electromagnético del agujero negro de RN está escrito en coordenadas estándar (t, r) , debemos llevarlo a una forma regular en coordenadas de Painlevé-Gullstrand. Inicialmente, el potencial electromagnético de un agujero negro de RN en coordenadas estándar es conocido y dado por

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{Q}{r} dt$$

Sin embargo al pasar a coordenadas de Painlevé-Gullstrand definidas por (3.17), el término dt resulta singular en el horizonte, porque allí $f = 0$. Por lo tanto, aunque la métrica en coordenadas de Painlevé-Gullstrand es regular en el horizonte, el potencial electromagnético en la forma original $-\frac{Q}{r}dt$ no lo es.

Para resolver esta situación, se realiza una transformación de calibre usando una función escalar adecuada. La transformación de calibre general es:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi,$$

donde elegimos precisamente χ para compensar la singularidad en el horizonte, de modo que el potencial electromagnético quede regular allí. Concretamente, se elige

$$\chi = t - u,$$

al reorganizar términos y escoger adecuadamente esta transformación, se obtiene la forma simplificada y regular

$$A = -\frac{Q}{r}du \quad (3.24)$$

De este modo, la ecuación (3.24) no es más que el potencial electromagnético original del agujero negro cargado, expresado ahora en coordenadas de Painlevé-Gullstrand luego de una transformación de calibre especialmente elegida para eliminar singularidades espurias en el horizonte. Como A ahora está bien definido y es real en todas partes, no contribuye una parte imaginaria a la acción de tunelaje. Únicamente tenemos que preocuparnos de la contribución de p_r .

La idea general es describir el proceso de emisión de partículas por el agujero negro mediante un proceso de tunelamiento. Este proceso se describe mediante la acción clásica de la partícula, que en el formalismo semiclásico se escribe como

$$S = \int P_\mu dx^\mu, \quad (3.25)$$

donde el momento canónico en presencia de un campo electromagnético viene dado por (3.22). En este caso particular, como se explicó anteriormente, el potencial electromagnético A_μ es regular

en el horizonte (3.24), por lo que no introduce contribuciones imaginarias adicionales al integrarse alrededor del horizonte. Así, para evaluar la parte imaginaria de la acción al atravesar el horizonte, basta con considerar únicamente el término del momento físico p_μ

$$\text{Im } S = \text{Im} \int p_\mu dx^\mu$$

Para movimiento netamente radial, la acción relevante es radial, es decir, $dx^\mu = (du, dr, 0, 0)$. Dado que la coordenada relevante para estudiar el cruce del horizonte es la coordenada radial r , la acción imaginaria radial se reduce a evaluar la integral

$$\text{Im } S = \text{Im} \int p_r dr,$$

utilizando la ecuación previa (3.23), la función que representa una singularidad en el horizonte es precisamente $\frac{1}{f(r)}$, puesto que en el horizonte del agujero negro de RN, $f(r_+) = 0$. Por lo que, la única contribución imaginaria viene de evaluar esta integral en la vecindad del horizonte, donde existe un polo en $1/f(r)$.

Para calcular esta contribución imaginaria, usamos el método estándar de variable compleja: al encontrar un polo en $r = r_+$, integramos alrededor del polo mediante un pequeño contorno en el plano complejo, tomando la semicircunferencia en el semiplano complejo superior, la parte imaginaria de la acción queda finalmente como

$$\text{Im} S = \frac{2\pi(\omega - qQ/r_+)}{f'(r_+)}. \quad (3.26)$$

Esta ecuación es una forma compacta y elegante que encapsula la física del tunelaje mediante un residuo sencillo en la estructura de la métrica del agujero negro.

La temperatura de Hawking está relacionada directamente con esta derivada en el horizonte por la expresión estándar de termodinámica de agujeros negros

$$T_H = \frac{f'(r_+)}{4\pi},$$

por tanto, se puede expresar el residuo directamente en términos de la temperatura del agujero negro

$$\text{Res} \left(\frac{1}{f} \right)_{r=r_+} = \frac{1}{f'(r_+)} = \frac{1}{4\pi T_H},$$

sustituyendo esto en la expresión (3.26), tenemos inmediatamente

$$\text{Im}S = 2\pi(\omega - q\Phi) \frac{1}{f'(r_+)} = \frac{\omega - q\Phi}{2T_H}.$$

Ahora sabemos que la probabilidad de tunelamiento semiclásica P está relacionada con la acción imaginaria mediante:

$$P = e^{-2\text{Im}S},$$

sustituyendo la expresión anterior llegamos directamente a la ecuación (3.27)

$$\exp[-2\text{Im}S] = \exp[-(\omega - q\Phi)/T_H]. \quad (3.27)$$

Esta expresión muestra claramente que el proceso de emisión de partículas cargadas desde el horizonte del agujero negro es análogo al factor de Boltzmann estándar que se observa en sistemas termodinámicos clásicos, con temperatura T_H y energía corregida por el potencial eléctrico $q\Phi$.

La ecuación (3.27) es el resultado inmediato de relacionar la acción de tunelaje (3.26) con la temperatura de Hawking mediante la derivada de la métrica en el horizonte, nótese que aquí T_H es la temperatura calculada en el capítulo anterior. Es, en definitiva, un factor de Boltzmann generalizado que incluye la energía electromagnética asociada a la carga de la partícula emitida por el agujero negro.

3.3. Ecuación bosónica

En el caso de partículas bosónicas cargadas en este escenario la de Klein-Gordon (6.10) rige, haciendo lo especificado en la sección 6.2 es posible reducir la ecuación de Klein-Gordon a una ecuación tipo Schrödinger véase la ecuación (3.28)

$$-\frac{d^2 R}{dr_*^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4}\right) R + \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 R = 0. \quad (3.28)$$

De la misma manera, se puede proceder con la ecuación de Dirac.

3.4. Ecuación fermiónica

La ecuación que gobierna el comportamiento de partículas fermiónicas cargadas en este escenario es la de Dirac, haciendo los pasos mostrados en (6.3) se llega a una expresión de onda análoga a 6.23:

$$-\left(\partial_t + \frac{iqQ}{r}\right)^2 \Psi_i + \partial_*^2 \Psi_i = f\left(m + \frac{(j+1/2)^2}{r^2}\right) \Psi_i + \left(\frac{M^2}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\right) \left(\partial_* - \sigma\left(\partial_t + \frac{iqQ}{r}\right)\right) \Psi_i - i\sigma f \frac{qQ}{r^2} \Psi_i. \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) es una ecuación diferencial radial que incluye la dependencia temporal, términos de derivadas radiales usando la coordenada tortuga r_* y términos de potencial asociados a la masa, momento angular de espín y cargas del agujero negro y la partícula, respectivamente. Esta ecuación se puede simplificar aún más con el procedimiento que seguiremos a continuación.

El primer paso es suponer una dependencia armónica en el tiempo para la función de onda, lo cual permite hacer separación de variables. Se toma un ansatz de la forma

$$\Psi_i(r, t) = e^{-i\omega t} \psi_i(r),$$

donde ω es la frecuencia angular asociada. Esto es, hemos factorizado la dependencia temporal como $e^{-i\omega t}$. Al hacer esto, cualquier derivada temporal ∂_t actuando sobre Ψ_i se puede reemplazar por un factor algebraico en términos de ω .

Se sustituye explícitamente la dependencia temporal en la ecuación (3.29). Con esta sustitución, se pasa del dominio temporal al dominio de las frecuencias, convirtiendo así, las derivadas temporales en potencias de ω .

En (3.29) aparece el operador $-\left(\partial_t + \frac{iqQ}{r}\right)^2$ actuando sobre Ψ_i . Luego de una sustitución de la solución temporal de la ecuación diferencial se llega a:

$$-\left(\partial_t + \frac{iqQ}{r}\right)^2 \Psi_i = \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 \Psi_i,$$

Así el término temporal de la ecuación (3.29) se transforma en un término algebraico $\left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2$ multiplicando a Ψ_i . Al mismo tiempo, la derivada radial de segundo orden permanece igual (pues no hemos alterado la parte espacial).

Después de ese paso, la parte izquierda de (3.29) se convierte en

$$\left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2 \Psi_i + \partial_*^2 \Psi_i.$$

La parte derecha sigue conteniendo los términos de potencial y acoplamiento, que trataré en el siguiente paso. El siguiente paso es aplicar la aproximación WKB al orden dominante para simplificar la ecuación diferencial. Pero antes de aplicar la aproximación WKB al orden dominante, veremos condiciones de borde de la ecuación diferencial.

3.5. Condiciones de borde

En el caso de los campos (bosónicos o fermiónicos) en el fondo de un agujero negro de RN, las condiciones de borde más importantes en el análisis de las ecuaciones de segundo orden, tanto la de Klein-Gordon como la de Dirac reducidas a un problema radial, se suelen imponer en

- El horizonte externo ($r = r_+$),
- el infinito $r_* \rightarrow \infty$.

En las ecuaciones diferenciales (3.28 y 3.29), al aproximarnos al horizonte ($r = r_+$) el factor de la métrica $f(r)$ tiende a cero, lo cual simplifica la ecuación cerca de r_+ . En el análisis habitual, la clave es:

- Causalidad: las ondas físicas cerca del horizonte deben ser únicamente entrantes si pensamos en un proceso de *scattering* desde el punto de vista de un observador externo. Sin embargo, cuando hay un potencial eléctrico, la noción de entrante o saliente requiere más cuidado.
- Signo de la energía: si la energía efectiva en el horizonte, $\omega - q\Phi_H$ es positiva, una onda con momento entrante (momento radial negativo implica un flujo hacia el agujero); si esa energía es negativa, el sentido se invierte.

En [6] se concluye que la condición física es que, al horizonte, solo haya un modo con momento entrante (o dicho de otra manera, un modo que viaja hacia el agujero negro, y no una combinación de ondas entrantes y salientes). Eso se traduce a que la solución cerca del horizonte tenga la forma

$$\Psi_H(r_*) = Ce^{-i(\omega - qQ/r_+)r_*}.$$

descartando el término con exponencial $e^{+i(\omega - qQ/r_+)r_*}$. Tal simplificación fija $D = 0$ en $\Psi = Ce^{-i\Omega r_*} + De^{+i\Omega r_*}$. Esta es la condición de borde en el horizonte.

- Si $\Omega = \omega - qQ/r_+ > 0$, la onda $e^{-i\Omega r_*}$ representa un modo entrante al agujero negro.
- Si $\Omega < 0$, esa misma exponencial corresponde a momento radial negativo, pero la velocidad de grupo sigue siendo entrante por la relación de dispersión (son burbujas que se mueven hacia el horizonte).

En cualquiera de los casos, el criterio es no incluir la solución que físicamente representaría onda saliente desde el horizonte, la cual sería no causal en este planteamiento.

Para $r \rightarrow \infty$, o equivalentemente $r_* \rightarrow \infty$, el potencial gravitatorio y eléctrico se debilitan, y la ecuación diferencial tiende a una forma parecida a

$$-\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} = k^2\Psi,$$

donde $k = \sqrt{\omega^2 - m^2}$. La solución asintótica típica es una combinación de exponentes

$$\Psi_\infty(r_*) = Ae^{-ikr_*} + Be^{+ikr_*}.$$

En un análisis de transmisión, interpretamos

- Ae^{-ikr_*} como la onda saliente (hacia $+\infty$),
- Be^{+ikr_*} como la onda entrante (desde $+\infty$).

Para hallar la tasa de transmisión, se compara la amplitud de la onda en el horizonte con la amplitud de la onda saliente a infinito. A menudo se fijan convenios como:

- Solo onda saliente a infinito: se impone $B = 0$ si estamos pensando en la solución de transmisión pura desde el horizonte.
- Más comúnmente, se realiza un análisis inverso de dispersión: se hace incidir una onda Be^{+ikr_*} desde $+\infty$ y se mira cuánta fracción atraviesa el horizonte y cuánta se refleja.

En la derivación de la radiación, se invoca la imagen con tiempo reverso para relacionar el coeficiente de reflexión R con la sección eficaz de absorción. Así, dependiendo de la convención, a veces se toma onda pura incidiendo desde infinito y onda saliente hacia el horizonte o al revés.

Interpretación física

- Si se estudia la emisión espontánea desde el agujero negro, Ψ representa el modo que sale a infinito y no se incluye un modo entrante desde infinito.
- Si se hace dispersión inversa (onda incidiendo desde lejos, la condición es $B \neq 0, A \neq 0$, y uno relaciona los flujos para obtener R y T).

Recapitulando, en el modo entrante se descarta la componente que correspondería a una onda saliente cerca del horizonte. Esto se traduce en

$$\Psi \sim e^{-i(\omega - qQ/r_+)r_*}.$$

En la condición en el infinito, la solución asintótica es $\Psi \sim Ae^{-ikr_*} + Be^{ikr_*}$. Dependiendo del problema físico:

- Para emisión espontánea, usualmente se considera únicamente la onda saliente a infinito (es decir, $B = 0$).
- Para dispersión inversa, se incluye una onda entrante ($B \neq 0$) y se determina el coeficiente de reflexión y transmisión comparado con la onda saliente A .

Estas son las condiciones de borde que se aplican a la ecuación diferencial radial en un agujero negro, tanto para campos bosónicos y fermiónicos. Cada una refleja la causalidad y la interpretación del flujo de energía cerca del horizonte, así como la naturaleza libre de la onda a grandes distancias. El

coeficiente de transmisión T está dado simplemente por $|C/A|^2$ para bosones y $\sum_i |C_i|^2 / \sum_i |A_i|^2$, donde el índice representa la componente espinorial.

Ahora que ya hemos visto las condiciones de borde de la ecuación diferencial a resolver, estamos listos para abordar el método WKB.

3.6. Método WKB

Para comenzar con el método primero supongamos que tenemos una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + U(x) \frac{dy}{dx} + V(x) = 0, \quad (3.30)$$

donde $V(x)$ es, en esencia, grande, del orden $\mu^2 = M$. Entonces tratamos una solución de la forma

$$y = \exp(iW(x)),$$

y expandimos $W(x) = \mu W_0 + W_1 + \dots$ y $V = \mu^2 V_0 + \mu V_1 + \dots$ y $U = U_0 + \dots$ en potencias de μ .

Las ecuaciones a orden cero y primer orden vienen dadas por

$$\begin{aligned} -\mu^2 (W_0')^2 + \mu^2 V_0 &= 0, \\ i\mu W_0'' - 2\mu W_0' W_1' + i\mu U_0 W_0' + \mu V_1 &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación de orden cero se resuelve por

$$W_0 = \pm \int \sqrt{V_0} dx = \int k dx, \quad (3.31)$$

y la ecuación de primer orden queda

$$ik' - 2kW_1' + iU_0 k + V_1 = 0$$

$$2kW_1' = ik' + iU_0 k + V_1$$

$$W_1' = i \frac{k'}{k} + iU_0 + \frac{V_1}{k} \quad (3.32)$$

Si V_1 es imaginario y U_0 y k son reales, esto significa que W_1 es un imaginario puro, y por lo tanto la ecuación de primer orden dicta cómo la amplitud de la onda varía con la posición. Por ejemplo, podemos considerar la ecuación de Dirac anterior con $\lambda = q = 0$ para simplificar. Entonces

$$V_0 = \omega^2 - fm^2 \quad (3.33)$$

$$V_1 = -\frac{i\omega\sigma}{2f} \frac{df}{dr_*} \quad (3.34)$$

$$U_0 = -\frac{1}{2f} \frac{df}{dr_*} \quad (3.35)$$

Con estos componentes, el número de onda local es

$$k(r^*) = \sqrt{V_0(r^*)} = \sqrt{\omega^2 - f(r^*)m^2}$$

este $k(r^*)$ es real para las regiones donde $\omega^2 > fm^2$ (que incluye el horizonte y el exterior del agujero negro si ω es la energía es la energía del modo emitido). Además, si consideramos $\sigma = -1$, sabemos de la ecuación (6.66) que una onda con este espín debe ser saliente en el horizonte, lo que corresponde con tomar $k > 0$. En este caso se puede resolver la ecuación (3.32) para W_1 reemplazando los valores de (3.33-3.35):

$$\begin{aligned} 2W_1' &= i\frac{k'}{k} - i\frac{1}{2f} \frac{df}{dr_*} - \frac{i\omega(-1)}{2fk} \frac{df}{dr_*}, \\ &= i\frac{k'}{k} - \frac{i}{2f} \left(1 - \frac{\omega}{k}\right) \frac{df}{dr_*}, \end{aligned}$$

Integrando queda

$$2W_1 = i \ln k - \frac{i}{2} \int dr_* \frac{1}{f} \frac{df}{dr_*} \left(1 - \frac{\omega}{k}\right). \quad (3.36)$$

Esta ecuación se puede integrar directamente y queda

$$\int \frac{1}{f} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{fm^2}{\omega^2}}}\right) df = \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{fm^2}{\omega^2}}\right) + C.$$

Tomando la constante $C = 0$ (se absorberá en la normalización de la solución), reemplazamos en la expresión de $2W_1$

$$2W_1 = i \ln k - \frac{i}{2} \left[2 \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{fm^2}{\omega^2}} \right) \right] = i \ln k - i \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{fm^2}{\omega^2}} \right)$$

Dividiendo ambos lados por 2, obtenemos W_1

$$W_1(r_*) = \frac{i}{2} \ln k - \frac{i}{2} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{fm^2}{\omega^2}} \right) = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{k}{1 + \sqrt{1 - \frac{fm^2}{\omega^2}}} \right). \quad (3.37)$$

Recordemos que W_1 es puramente imaginario, por lo que se puede escribir $W_1 = iA(r_*)$ donde $A(r_*) \in \mathbb{R}$. En efecto definimos

$$A(r_*) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k}{1 + \sqrt{1 - \frac{fm^2}{\omega^2}}} \right),$$

que es real. Así, $W_1 = iA(r_*)$. Entonces la solución WKB hasta primer orden es

$$\Psi(r_*) = \frac{1}{\sqrt{k(r_*)}} \left(\frac{\omega + k(r_*)}{k(r_*)} \right)^{1/2} \exp \left(i \int^{r_*} dr_* \sqrt{\omega^2 - f(r_*)m^2} \right) \quad (3.38)$$

Ahora que ya hemos visto la aproximación WKB de primer orden veremos los resultados obtenidos y la discusión.

Capítulo 4

Resultados y Discusión

4.1. Tunelamiento a través del campo eléctrico

Hemos ya establecido que el número medio de partículas emitidas por el agujero negro depende del coeficiente de transmisión con las condiciones de borde entrantes en el horizonte. Generalmente, determinar este coeficiente de transmisión requiere que se resuelva numéricamente las ecuaciones (6.20) y (3.29). Sin embargo, usando el método WKB se puede encontrar aproximaciones para T . Para regiones clásicamente prohibidas (donde $V_{\text{eff}} > E$), el momento clásico se vuelve imaginario y definimos un parámetro S (acción de túnel)

$$S = \int_{r_{in}}^{r_{out}} dr^* \sqrt{V_{\text{eff}}(r^*) - E} \quad (4.1)$$

donde los límites r_{in} y r_{out} son los puntos de retorno clásicos (donde la raíz cuadrada se anula). Entonces, siguiendo los pasos de la actual sección (WKB estándar), la probabilidad de tunelamiento es

$$K\tilde{T} \approx e^{-2S}. \quad (4.2)$$

En este artículo en particular la barrera V_{eff} surge tanto por efectos gravitacionales como electromagnéticos. Al aplicar la aproximación WKB a la ecuación de Klein-Gordon (6.16) o a la de Dirac (3.29), se obtiene directamente esta relación fundamental del método WKB para la transmisión, que precisamente es (4.2), donde \tilde{T} es la cantidad relevante que mide la transmisión a través de la barrera. La diferencia con la forma estándar de T es solo en la definición precisa de las variables

involucradas (como el factor K), pero en esencia es la misma expresión general obtenida por aproximación WKB.

La ecuación (4.2) es la aproximación WKB al orden más básico (primer orden). Sin embargo, es bien conocido en mecánica cuántica y en QFT que este método puede mejorarse mediante correcciones sucesivas. En particular, para ciertos tipos de potenciales (como aquellos que se reducen localmente a osciladores armónicos invertidos cerca de puntos de retorno clásicos), la aproximación WKB puede ser exacta si se consideran ciertas correcciones adicionales.

De hecho, como el artículo lo menciona explícitamente (y lo hemos estudiado ya), se sabe (por ejemplo, en problemas clásicos como la producción de pares en un campo eléctrico constante - efecto Schwinger- o la radiación Hawking) que la forma exacta de la transmisión puede escribirse en términos de factores estadísticos como

$$K\tilde{T} = \frac{1}{e^{2S} \mp 1}, \quad (4.3)$$

siendo el $+$ para fermiones y el $-$ para bosones. Este resultado aplica al problema de la transmisión ingenua. Esto ocurre cuando el problema original se reduce efectivamente a un potencial cuadrático cerca de los puntos de retorno clásicos, lo cual es exactamente lo que sucede en la cercanía del horizonte de un agujero negro y en la presencia de campos eléctricos intensos.

Este resultado tiene una interpretación física. La expresión WKB simple e^{-2S} se interpreta como la probabilidad de atravesar una barrera clásica de potencial; sin embargo, en un contexto cuántico completo, considerando efectos cuánticos adicionales (como reflexiones internas en la barrera o interacción con el campo electromagnético), la transmisión se modifica y adopta una forma más general tipo distribución estadística (Bose-Einstein o Fermi-Dirac).

En otras palabras, la ecuación (4.3) introduce explícitamente el carácter estadístico cuántico de las partículas emitidas; para bosones, la probabilidad aumenta debido al efecto de emisión estimulada (factor Bose-Einstein -1 en el denominador), mientras que para fermiones, la probabilidad disminuye debido al principio de exclusión de Pauli (factor Fermi-Dirac $+1$ en el denominador). El artículo [6] señala que aunque la aproximación WKB original (4.2) es útil y correcta a primer orden, la forma exacta conocida en problemas estándar, como emisión de partículas en un campo constante, sugiere que esta corrección (4.3) es más apropiada.

De hecho, el artículo [6] menciona explícitamente que esta expresión coincide con la transmisión exacta para el caso de un potencial tipo oscilador invertido, por lo que representa una mejora significativa respecto a la expresión original más sencilla del método WKB.

En resumen, la ecuación (4.3) surge al considerar correcciones exactas del método WKB para ciertos potenciales efectivos típicos de producción cuántica de partículas (como el efecto Schwinger y radiación Hawking). Tiene una clara interpretación física en términos de estadísticas cuánticas (Bose-Einstein o Fermi-Dirac), así como también representa una mejora con respecto a la fórmula básica WKB (4.2), siendo una aproximación más precisa (y a veces exacta) del fenómeno estudiado (radiación de partículas cargadas).

\tilde{T} es el coeficiente de transmisión simple, obtenido directamente de la aproximación WKB para el problema original de la barrera de potencial. T es el coeficiente de transmisión físico, que incorpora correctamente las condiciones físicas de borde y flujo, especialmente cruciales cuando se tiene emisión de partículas en presencia de campos gravito-electromagnéticos. K es el factor geométrico o cinemático que relaciona los flujos de partículas entre diferentes regiones del espacio-tiempo. Recordando las ecuaciones de flujo para bosones (2.62) y fermiones (2.63), si ahora usamos la expresión exacta (4.3) y sustituimos estas relaciones en la ecuación ya mencionada, resulta un fenómeno muy especial:

- Para bosones, sustituyendo $K\tilde{T} = \frac{1}{e^{2S} - 1}$:

$$T = \frac{\tilde{T}}{1 - K\tilde{T}} = \frac{\frac{1}{K(e^{2S} - 1)}}{1 - \frac{1}{e^{2S} - 1}} = \frac{1}{K(e^{2S} - 1) - 1 + 1} = \frac{1}{K(e^{2S} - 1)}$$

Pero como este cálculo puede complicarse debido a los factores adicionales (K), [6] expone claramente que después de realizar esta sustitución, el resultado que se obtiene es simplemente (se anula el -1 y el $+1$)

$$KT = e^{-2S}. \quad (4.4)$$

- De manera similar, para fermiones se llega nuevamente a la misma expresión al realizar la sustitución correcta. La complejidad se simplifica de manera elegante llegando nuevamente a (4.4).

Es decir, la estructura del problema es tal que, aunque uno empieza con una distribución de Bose-Einstein o Fermi-Dirac exacta (4.3) para el coeficiente simple, al introducir las correcciones físicas de condiciones de borde y factores de flujo correctos (2.62 y 2.63), se recupera finalmente la forma sencilla del WKB estándar (4.4). Esta aparente simplificación es destacada de manera explícita como engañosamente sencilla, puesto que encapsula de manera elegante todas las correcciones físicas anteriores.

La ecuación (4.4) representa un resultado importante y útil del análisis del artículo:

Indica que, después de considerar correctamente todas las correcciones físicas (estadísticas cuánticas, efectos del campo electromagnético, factores cinemáticos de flujo, etc.), el resultado neto es que la probabilidad de transmisión física a través del potencial efectivo (agujero negro y campo electromagnético) queda dada, en la aproximación WKB más precisa, por una forma exponencial simple tipo WKB clásico (4.4). Esto implica que, aunque los efectos estadísticos (bosones o fermiones) son relevantes inicialmente, se incorporan finalmente en los factores externos del problema (definición correcta de flujos y condiciones de frontera), simplificando la expresión final a una forma exponencial estándar, las integrales de tunelaje vienen dadas por

$$S = \int \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(m^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4}\right) - \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2} dr_* \quad (4.5)$$

en el caso bosónico, mientras en el caso fermiónico, por

$$S = \int \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(m^2 + \frac{(j+1/2)^2}{r^2}\right) - \left(\omega - \frac{Qq}{r}\right)^2} dr_* \quad (4.6)$$

Las ecuaciones (4.5-4.6) surgen directamente del potencial efectivo que aparece en las ecuaciones tipo Schrödinger obtenidas anteriormente, véase (6.16) y (6.60). Recordemos que el método WKB establece que la acción clásica asociada al tunelamiento cuántico a través de una barrera potencial efectiva se calcula integrando el momento imaginario clásico a través de la región prohibida (donde el potencial efectivo es positivo

$$S = \int_{r_{en}}^{r_{sal}} \sqrt{V_{eff}(r_*)} dr_*,$$

al sustituir explícitamente el potencial efectivo $V_{eff}(r)$ encontrado anteriormente, obtenemos exactamente las ecuaciones (4.5) y (4.6).

Las integrales representan el esfuerzo clásico requerido para que la partícula atraviese la barrera de potencial formada conjuntamente por el campo gravitacional y el campo eléctrico del agujero negro cargado. Las raíces del integrando definen los puntos clásicos de retorno, donde la partícula cambia de una región permitida a una prohibida, delimitando así, la región de tunelamiento. El término $\omega - qQ/r$ muestra explícitamente cómo el campo eléctrico modifica la energía efectiva de la partícula al moverse en el fondo cargado.

Por otro lado, el término $(j + 1/2)^2/r^2$ refleja directamente la presencia del momento angular total j del fermión, característico de la ecuación de Dirac. Este término diferencia claramente la ecuación fermiónica (4.6) de la ecuación bosónica (4.5), que involucra un término diferente, $\ell(\ell + 1)/r^2$, característico de campos escalares o bosónicos. La estructura general de estas acciones muestra claramente cómo la geometría del agujero negro, la masa m de la partícula, la carga q de la partícula, y la carga Q del agujero negro modifican conjuntamente el potencial de tunelamiento.

La principal diferencia entre (4.5) y (4.6) radica en los términos de potencial, mientras que los bosones poseen potencial

$$m^2 + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4},$$

los fermiones poseen potencial

$$m^2 + \frac{(j + 1/2)^2}{r^2}.$$

Esto refleja explícitamente el origen espinorial frente al origen escalar del campo analizado. Los términos adicionales gravitacionales aparecen naturalmente para bosones debido a la estructura específica de la ecuación de Klein-Gordon; para fermiones estos términos no aparecen en la simplificación WKB a primer orden por razones algebraicas (relacionadas con la forma de la ecuación de Dirac y los términos subdominantes descartados).

Consideremos la forma general de la acción WKB obtenida anteriormente, por ejemplo para fermiones (4.6), si tomamos el límite en que la masa de la partícula es muy grande comparada con la curvatura local. Típicamente se toma el límite puntual, donde la longitud de Compton $1/m$ es muy pequeña respecto a la escala característica del agujero negro, entonces los términos que contienen factores $1/r^2$ (como $(j + 1/2)^2/r^2$, y términos análogos para bosones) son despreciables frente al término m^2 . En este límite simplificado, el término dominante dentro del primer paréntesis es claramente m^2 , ya que es mucho más grande que cualquier término con $1/r^2$, $1/r^3$, etc. Por tanto, se

puede realizar la simplificación

$$m^2 + \frac{(j + 1/2)^2}{r^2} \approx m^2,$$

realizando exactamente la misma aproximación en el caso bosónico (4.5), también obtenemos el mismo resultado, pues todos los términos adicionales son subdominantes en el mismo límite. Entonces, la integral de acción se reduce a:

$$S = \int \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) m^2 - \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2} dr_* \quad (4.7)$$

la ecuación (4.7) corresponde exactamente a lo que se obtendría analizando el movimiento de una partícula puntual relativista cargada (con masa m y carga q) en un espacio-tiempo curvo de RN, sin considerar efectos cuánticos o espinoriales explícitos. En este límite, la partícula puede entenderse clásicamente como moviéndose con una energía efectiva $\omega - qQ/r$, influenciada tanto por la gravedad del agujero negro (término métrico) como por su campo electromagnético (potencial eléctrico qQ/r). La interpretación física es clara y directa: esta integral representa la acción clásica asociada al túnel cuántico en la aproximación semiclásica (WKB), donde el efecto dominante es simplemente la masa (energía de reposo grande) de la partícula. Los efectos adicionales (espín, efectos gravitacionales menores de orden superior, etc.) se desprecian en este límite.

Este límite es especialmente útil porque simplifica significativamente los cálculos y permite obtener fórmulas analíticas explícitas para la tasa de emisión de partículas masivas desde agujeros negros cargados. Esta simplificación ayuda a extraer conclusiones físicas claras sobre cómo se comporta la emisión de partículas cargadas, tanto mediante radiación Hawking como mediante la producción de pares tipo Schwinger.

En el límite que el agujero negro es más grande que la longitud de onda de la partícula, esperaríamos ser capaces de entender la emisión desde la perspectiva de una partícula puntual, sin referencia a las ecuaciones de campo. De hecho, notamos que una partícula puntual en movimiento relativista en nuestro fondo de agujero negro tiene relación de dispersión

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2$$

La ecuación anterior es la relación general para la dinámica clásica relativista de una partícula de masa m . La métrica de RN tiene la forma presentada en (2.3), por lo que, la ecuación para una partícula moviéndose de manera radial se simplifica a:

$$g_{tt}(p^t)^2 + g_{rr}(p^r)^2 = -m^2,$$

sustituyendo los elementos métricos explícitamente tenemos

$$-f(r)(p^t)^2 + \frac{1}{f(r)}(p^r)^2 = -m^2.$$

El momento conjugado generalizado, en presencia del campo electromagnético con potencial A_μ , viene dado por (3.8). Para la componente temporal, considerando que el potencial electromagnético tiene la forma

$$A_\mu = -\frac{Q}{r}dt,$$

entonces

$$P_t = p_t + qA_t = -\omega,$$

donde ω es la energía total observada en el infinito, despejando, tenemos el momento temporal original p^t

$$p^t = g^{tt}p_t = \frac{\omega - qQ/r}{f(r)},$$

con esta relación, se puede reescribir la ecuación de la geodésica radial que describimos anteriormente

$$-f(r) \left(\frac{\omega - qQ/r}{f(r)} \right)^2 + \frac{1}{f(r)}(p^r)^2 = -m^2,$$

simplificando este resultado se obtiene la ecuación explícita

$$\frac{1}{f(r)} \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 - f(r)p^{r^2} = m^2. \quad (4.8)$$

Esta ecuación describe la conservación relativista de la energía para una partícula puntual con masa m y carga q , que se mueve en el espacio-tiempo curvo generado por el agujero negro cargado con masa M y carga Q . Esta es la condición que determina las regiones clásicamente permitidas

($p^{r^2} > 0$) y prohibidas del movimiento radial, fundamentales para analizar procesos cuánticos como el túnel a través de barreras de potencial asociadas a la métrica y al campo electromagnético.

El momento radial p^r entonces es imaginario entre los dos radios r_1 y r_2 determinados al resolver la ecuación (4.8) con $p^r = 0$, determinemos esos radios. Hacemos $p^r = 0$ en dicha ecuación y queda

$$\frac{1}{f(r)} \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 = m^2$$

$$r_{1,2} = -\frac{(Mm^2 - \omega qQ) \pm \sqrt{(Mm^2 - \omega qQ)^2 - (m^2 - \omega^2)(q^2 Q^2 - Qm^2)}}{2(m^2 - \omega^2)}. \quad (4.9)$$

La acción para una partícula moviéndose desde el horizonte hasta el infinito entonces adquiere una parte imaginaria dada por

$$\text{Im}S = \int_{r_1}^{r_2} |p(r)| dr = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) m^2 - \left(\omega - \frac{qQ}{r}\right)^2} dr_*, \quad (4.10)$$

donde r_1 y r_2 son los radios calculados en (4.9) a partir de (4.8).

Hagamos un análisis detallado de la integral de túnel WKB en el límite de partícula puntual masiva, donde la masa de la partícula es suficientemente grande como para simplificar considerablemente el análisis. La integral que aparece en (4.10) es

$$\text{Im}S = \int_{r_1}^{r_2} |p(r)|,$$

con el momento radial dado por

$$p^{r^2} = \frac{1}{f(r)} [(\omega - qQ/r)^2 - m^2 f(r)]$$

este momento radial se obtiene despejando p^r de la ecuación (4.8). En el límite considerado ($mM \gg 1$), esta integral puede ser evaluada analíticamente, dando lugar a una expresión que derivó Khriplovich en su artículo [21]. La fórmula exacta obtenida en [6] proviene directamente del análisis realizado en [21], especializado en el caso donde la energía ω es menor que el potencial eléctrico del

agujero negro en el horizonte, qQ/r_+ , proporcionando así la forma explícita presentada

$$\text{Im}S = \frac{\pi m^2 (qQ - (\omega - k)M)}{k(k + \omega)}, \quad k = \sqrt{\omega^2 - m^2} \quad (4.11)$$

La expresión derivada por Khriplovich muestra claramente cómo la acción imaginaria, y por ende, la probabilidad de túnel, depende de la masa m , la carga Q del agujero negro, la carga q de la partícula y la energía ω . Esta expresión también representa la acción para un proceso específico de emisión con una barrera de tunelamiento que surge de la combinación del campo gravitacional y electromagnético del agujero negro, destacando especialmente el efecto de la masa grande en la dinámica cuántica del proceso.

Determinaremos explícitamente el valor máximo de energía ω_{max} para la cual existe una barrera de tunelamiento adicional en el potencial efectivo para partículas cargadas masivas en el espacio-tiempo de RN al imponer la condición crítica para la existencia del máximo en la barrera que corresponde a la transición entre las regiones permitida y prohibida clásicamente, ($p^r = 0$ en la ecuación (4.8)) y realizando la derivada de la ecuación correspondiente con respecto a r , se obtiene una expresión para la energía máxima, así pues

$$\omega_{max} = m^2 \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{Q^2(q^2 - m^2)} + \frac{q}{Q} \frac{q^2 Q^2 - m^2 M^2}{M(q^2 - m^2) + q\sqrt{(q^2 - m^2)(M^2 - Q^2)}}. \quad (4.12)$$

Esta energía máxima ω_{max} representa el umbral superior de energías para las cuales una partícula cargada emitida desde el agujero negro experimenta una barrera adicional, generando una supresión exponencial adicional en la emisión de radiación de Hawking. La existencia de este límite superior implica que partículas con energía por encima de este umbral no tendrán dicha barrera de potencial, por lo que su emisión no será suprimida adicionalmente por este mecanismo específico.

Se puede obtener una posición radial en la cual el valor de la energía ω sea (4.12) y esta posición radial se obtiene a partir del análisis del potencial efectivo para partículas cargadas masivas en el límite de masa grande $mM \gg 1$. Para ciertas energías ($\omega < \omega_{max}$) existe una barrera adicional que separa la región clásicamente prohibida de la permitida. La posición de esta barrera está determinada por la condición de máximo del potencial efectivo, es decir, imponiendo la condición de primer orden sobre la derivada del potencial efectivo. Al realizar este procedimiento explícitamente, resolviendo

la ecuación resultante para la posición radial r , se obtiene justamente la ecuación (4.13)

$$r_{max} = M \frac{\alpha^2 - Q^2}{\alpha^2 - M^2} + \alpha \frac{\sqrt{M^2 - Q^2} \sqrt{\alpha^2 - Q^2}}{\alpha^2 - M^2}, \quad \alpha = \frac{qQ}{m} \quad (4.13)$$

Este radio es el radio específico donde se ubica la barrera de potencial máxima, relevante para el análisis del túnel cuántico. Esta posición depende específicamente de los parámetros físicos del problema: la masa m y la carga q de la partícula, así como de la masa M y carga Q del agujero negro. La existencia de este radio específico implica que las partículas emitidas desde el agujero negro deben superar una barrera adicional para escapar al infinito, lo que genera una supresión exponencial adicional en la tasa de emisión. La ecuación (4.13) refleja así la geometría específica del potencial efectivo, resaltando cómo los parámetros físicos determinan la estructura del potencial alrededor del agujero negro cargado.

Ahora que ya tenemos la energía máxima evaluamos explícitamente la integral de túnel WKB en el régimen específico de partículas con energías en el rango

$$\frac{qQ}{r_+} < \omega < \omega_{max},$$

en el límite de masa grande ($mM \gg 1$). Esta integral originalmente se expresa como el lado izquierdo de (4.10), donde los puntos r_1 y r_2 vienen dados por (4.9) que son soluciones de la ecuación (4.8). En el límite de masa grande y usando métodos analíticos y aproximaciones en el régimen indicado, esta integral se puede resolver exactamente, resultando en la expresión explícita de acá abajo

$$\Im S/\pi = \frac{\omega qQ - 2\omega^2 M + m^2 M}{k} + \frac{qMQ + \omega Q^2 - 2\omega M^2}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \quad (4.14)$$

La ecuación (4.14) describe la acción imaginaria para el tunelamiento cuántico en presencia de un agujero negro cargado. Este resultado es clave para entender cómo la probabilidad de emisión (a través del factor exponencial $e^{2\Im S}$) está influenciada por los parámetros físicos del sistema (energía, carga, masa y parámetros del agujero negro). Esta ecuación muestra claramente la dependencia no trivial del resultado del tunelamiento respecto a las características físicas tanto del agujero negro como de las partículas emitidas.

Enfatizamos el resultado cualitativo de que, al menos en el límite de partícula puntual, habrá una

supresión adicional exponencial de radiación con energía menor a ω_{max} , comparado con el espectro predicho por las distribuciones de bosones y fermiones.

4.2. Un proceso de tunelaje combinado

Hemos visto cómo los factores de distribución térmicos y los coeficientes de transmisión en (2.52) y (2.54) pueden ser calculados tratando la emisión como un proceso de tunelamiento. En esta sección final, aplicaremos el razonamiento probabilístico estudiado en la sección de probabilidades para proveer una interpretación de tasa total de emisión, que involucra el producto de esos dos factores, como un proceso combinado de tunelamiento, primero a través del horizonte y luego del campo eléctrico.

Vemos la emisión como un proceso de dos fases. Primero, la partícula tunela a través del horizonte. Para partículas con $\omega > q\Phi$, la partícula resultante es real (en términos de que esta posee energía positiva en el horizonte) y pueden escapar al infinito. Para partículas con energía negativa en el horizonte, podemos ver este proceso de tunelamiento como un reajuste del número de partículas en el mar de Dirac afuera del horizonte. Las partículas en este mar de Dirac después pueden tunelar hasta el infinito. Haremos este análisis en términos de matrices densidad aunque solo pueden ser pensadas como descripciones de las distribuciones de probabilidad. En el caso fermiónico este proceso es claro, mientras que en el caso bosónico este proceso es algo más oscuro debido a la ausencia de una descripción tipo mar de Dirac del vacío bosónico veamos más a detalle primero el caso fermiónico, debido a que es más sencillo de entender.

En el caso fermiónico la matriz densidad es

$$\rho_H = N_H |\bar{0}\rangle \langle \bar{0}| + N_H P_H |\bar{1}\rangle \langle \bar{1}| \quad (4.15)$$

La acción de tunelaje $P_H = \exp[-(\omega - q\Phi)/T_{BH}]$ corresponde a la probabilidad relativa de producción de un par partícula-antipartícula (interpretada en términos del mar de Dirac) debido al túnel cuántico a través del horizonte. Esta probabilidad da lugar a un estado mixto representado por la matriz densidad ρ_H . La matriz densidad describe las probabilidades relativas de que no se produzca ninguna partícula ($|\bar{0}\rangle$) y de que se produzca exactamente una partícula en el mar de Dirac ($|\bar{1}\rangle$). El factor N_H es un factor de normalización que garantiza que las probabilidades sumen 1, y se

determina imponiendo la condición

$$N_H + N_H P_H = 1 \Rightarrow N_H = \frac{1}{1 + P_H}.$$

La ecuación (4.15) muestra explícitamente cómo el proceso cuántico de tunelamiento desde el agujero negro genera una distribución probabilística en la producción de partículas, particularmente clara para fermiones (debido a la interpretación del vacío en términos del mar de Dirac). La matriz densidad ρ_H refleja el estado del sistema justo después del túnel por el horizonte, pero antes de considerar el segundo paso del proceso, que es el tunelamiento adicional a través del campo eléctrico hacia el infinito.

Ahora, considerando el segundo paso del proceso, al principio, la partícula tunela a través del horizonte, este paso se describe con la matriz densidad (4.15). Luego, únicamente el estado $|\bar{1}\rangle$, que representa la presencia de una partícula en el mar de Dirac, puede realizar un segundo túnel a través del campo eléctrico externo para convertirse en una partícula real que llegue hasta el infinito. Este segundo túnel está descrito por la probabilidad relativa $P_S = K\tilde{T}$. Al considerar este segundo proceso, el estado $|\bar{1}\rangle$ se convierte parcialmente en el estado $|1\rangle$, que representa una partícula real en el infinito. Esto produce la matriz densidad total en el infinito:

$$\rho_\infty = N_H |\bar{0}\rangle \langle \bar{0}| + N_H P_H N_S |\bar{1}\rangle \langle \bar{1}| + N_H P_H N_S P_S |1\rangle \langle 1|. \quad (4.16)$$

Los factores de normalización N_H y N_S garantizan la correcta normalización de probabilidades en cada paso. N_S se determina imponiendo la misma condición anterior, así pues

$$N_S + N_S P_S = 1 \Rightarrow N_S = \frac{1}{1 + P_S}.$$

La ecuación (4.16) indica cómo el estado final detectado en el infinito resulta del proceso combinado de tunelamiento (a través del horizonte y posteriormente a través del campo eléctrico). Los términos corresponden explícitamente a un estado de vacío (ninguna partícula detectada), un estado con una partícula en el mar de Dirac que no alcanza el infinito y finalmente, un estado en el que una partícula escapa exitosamente hacia el infinito. La estructura refleja claramente cómo el proceso de emisión es una secuencia probabilística de eventos, enfatizando el carácter mixto del estado final.

Ahora, a partir de (4.15) y (4.16), podemos evaluar el número de partículas fermiónicas detectadas en el infinito luego del proceso combinado de tunelamiento cuántico a través del horizonte y el campo eléctrico externo del agujero negro cargado.

Para ello, primero recordamos que la matriz densidad final viene dada por (4.16), aquí, el operador número n únicamente cuenta las partículas reales detectadas en el infinito. Por lo tanto, al tomar la traza del producto del operador número n con la matriz densidad ρ_∞ , solo el término con el estado $|1\rangle$ contribuye, ya que los estados con barra (representando partículas en el mar de Dirac) no corresponden a partículas reales detectadas, realizando la traza se obtiene

$$n_f = \text{Tr}(n\rho_\infty) = N_H P_H N_S P_S,$$

sustituyendo explícitamente las definiciones anteriores resulta en la forma compacta

$$n_f = \frac{1}{1 + e^{(\omega - q\Phi)/T_{BH}}} \frac{K\tilde{T}}{1 + K\tilde{T}}. \quad (4.17)$$

La expresión muestra claramente que la tasa de emisión fermiónica final es un producto de dos factores, por un lado, un factor térmico estilo Fermi-Dirac, que describe la emisión térmica debida al horizonte del agujero negro, mientras que, por otro lado hay un factor adicional, que representa la probabilidad de transmisión a través del campo eléctrico fuera del agujero negro. Esto indica claramente que la emisión total no es simplemente térmica, sino que es modificada adicionalmente por la presencia del campo eléctrico externo al horizonte.

Ahora, haremos el análisis para el caso bosónico, que como ya se mencionó anteriormente, es más complejo debido a la inexistencia de una descripción sencilla del vacío bosónico (no existe un "mar de Dirac" bosónico estándar). En el artículo [6], se adopta una interpretación alternativa para los bosones en la cual se introducen estados con números negativos de partículas (denotados con una barra, como $|\bar{n}\rangle$), donde el vacío bosónico corresponde al estado con -1 partículas por modo, el proceso de tunelamiento a través del horizonte se interpreta como una repoblación de estos estados de energía negativa, generando una serie infinita de estados posibles con números crecientes de partículas y la estructura específica de esta matriz densidad surge al considerar que cada estado bosónico con $-n$ partículas tiene una probabilidad relativa dada por potencias inversas de P_H .

Con esta interpretación, la matriz densidad es

$$\rho_H = N_H \left(|\bar{1}\rangle \langle \bar{1}| + \frac{1}{P_H} |\bar{2}\rangle \langle \bar{2}| + \frac{1}{P_H^2} |\bar{3}\rangle \langle \bar{3}| + \cdots + \text{etc} \right), \quad (4.18)$$

con condición de normalización dada por

$$N_H = 1 - \frac{1}{P_H}, \quad P_H = e^{-(\omega - q\Phi)/T_{BH}}.$$

La ecuación (4.18) describe la matriz densidad ρ_H que representa un estado mixto en el horizonte del agujero negro, formado tras el primer paso de tunelamiento. Cada término de la suma corresponde a la probabilidad relativa de encontrar un número específico de partículas (negativas, en esta interpretación particular del vacío bosónico) después del túnel inicial a través del horizonte. La forma explícita refleja cómo la probabilidad de ocupación de estos estados decrece con factores de $1/P_H$, mostrando claramente la estructura geométrica de estas probabilidades.

Para hallar la expresión bosónica análoga a (4.16) se tiene que recordar que los bosones no cumplen con el principio de exclusión de Pauli, por lo que varios bosones pueden estar en el mismo estado cuántico, entonces tomemos el estado $|\bar{1}\rangle$

$$|\bar{1}\rangle \langle \bar{1}| \rightarrow N_S(|0\rangle \langle 0| + P_S|1\rangle \langle 1| + P_S^2|2\rangle \langle 2| + \cdots), \quad (4.19)$$

Esta ecuación describe cómo evoluciona el estado inicial $|\bar{1}\rangle$, que representa una ocupación negativa del vacío bosónico en el contexto del tunelamiento, hacia el estado final. Inicialmente, el estado bosónico $|\bar{1}\rangle$ (que contiene partículas con energías negativas como estados vacíos rellenos) puede generar partículas reales en el infinito a través del tunelamiento. La probabilidad de producir n partículas reales en el infinito sigue una distribución geométrica dada por el factor P_S , de modo que el estado inicial se convierte en una suma probabilística sobre todos los estados posibles $|n\rangle$. El factor $N_S = 1 - P_S$ se introduce para garantizar que la distribución probabilística esté correctamente normalizada.

La ecuación (4.19) muestra explícitamente que, partiendo del estado $|\bar{1}\rangle$, la probabilidad de generar ningún estado de partícula real ($|0\rangle$) es N_S , la probabilidad de generar exactamente una partícula real ($|1\rangle$) es $N_S P_S$, y así sucesivamente, formando una distribución infinita en términos de P_S . Esto

refleja que, en el contexto bosónico, puede producirse un número arbitrario de partículas debido al carácter ilimitado de la estadística bosónica.

A continuación nos preguntamos qué pasa con el estado resultante en el infinito para el estado doblemente ocupado $|\bar{2}\rangle$, después de tunelar a través del campo eléctrico. Si cada partícula en este estado es independiente de la otra, esperamos que la distribución de probabilidad sea la suma de 2 distribuciones con la misma media. Similarmente, esperamos que el estado $|\bar{n}\rangle$ tunele a un estado descrito por n distribuciones geométricas independientes. La suma de distribuciones geométricas independientes e idénticas es descrita por la distribución binomial negativa, así pues

$$|\bar{n}\rangle \langle \bar{n}| \rightarrow (1 - P_S)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} P_S^k |k\rangle \langle k|, \quad (4.20)$$

Este resultado indica que, partiendo del estado $|\bar{n}\rangle$ (con n partículas negativas, la probabilidad final de detectar exactamente k partículas reales es dada por la distribución binomial negativa. El factor binomial $\binom{n+k-1}{k}$ refleja la multiplicidad combinatoria del proceso, mostrando cómo múltiples partículas bosónicas contribuyen independientemente a la creación final de partículas reales detectadas en el infinito. Esta expresión proporciona un entendimiento claro del carácter probabilístico del proceso de emisión bosónica desde un agujero negro cargado, destacando cómo múltiples partículas negativas inicialmente presentes pueden contribuir a la generación de múltiples partículas reales observadas.

Ahora, que ya hemos explorado las implicaciones de que no haya un claro análogo al mar de Dirac fermiónico en bosones, estamos listos para ver la matriz densidad total en el infinito, y de manera similar al caso fermiónico, aquí se combinan los dos procesos de tunelamiento, el tunelamiento a través del horizonte y el posterior tunelamiento a través del campo eléctrico, para ello combinamos directamente las dos ecuaciones (4.18) y (4.20), sustituyendo (4.20) en cada término de la matriz densidad (4.18), y se obtiene

$$\rho_{\infty} = N_H \sum_{n=1}^{\infty} P_H^{1-n} (1 - P_S)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} P_S^k |k\rangle \langle k|. \quad (4.21)$$

Esta expresión describe de forma exacta cómo la distribución final observada en el infinito resulta de la combinación probabilística del proceso de emisión de partículas bosónicas desde un agujero negro

cargado. Se puede interpretar directamente como una suma doble sobre todas las configuraciones posibles, indicando cómo la probabilidad es resultado de la combinación de múltiples procesos de tunelamiento. La complejidad de la expresión refleja el carácter puramente bosónico del proceso, en el que un número arbitrario de partículas puede producirse con distribuciones probabilísticas claramente identificadas.

De manera similar a lo hecho en el caso fermiónico, evaluamos el número medio de partículas bosónicas detectadas en el infinito, luego del proceso combinado de tunelamiento cuántico desde un agujero negro cargado, descrito previamente en las ecuaciones (4.18)-(4.21), para ello tomamos la traza del operador número n , que solo cuenta estados con k partículas reales sobre la matriz densidad

$$n_b = \text{tr}(n\rho_\infty) = N_H \sum_{n=1}^{\infty} P_H^{1-n} (1 - P_S)^n \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{n+k-1}{k} P_S^k.$$

Al realizar esta suma explícitamente (que se simplifica usando propiedades de distribuciones binomiales negativas y series geométricas), se obtiene

$$n_b = \frac{1}{1 - \exp((\omega - q\Phi)/T_{BH})} \frac{K\tilde{T}}{1 - K\tilde{T}}. \quad (4.22)$$

La expresión resultante muestra que la emisión bosónica está descrita por un factor similar a una distribución tipo Bose-Einstein modificada por la probabilidad de tunelamiento a través del campo eléctrico externo. El factor $\frac{K\tilde{T}}{1 - K\tilde{T}}$ representa la modificación adicional debida al segundo proceso de tunelamiento a través del potencial eléctrico externo. Esta ecuación contrasta directamente con el resultado fermiónico (4.17), resaltando la diferencia fundamental entre estadísticas bosónicas y fermiónicas en el proceso de emisión desde agujeros negros cargados.

4.3. Análisis gráfico de los potenciales efectivos

Ahora haremos un análisis gráfico de los potenciales efectivos para diferentes casos con el potencial efectivo siendo lo que se encuentra dentro de la raíz que a su vez es integrando de las ecuaciones (4.5,4.6,4.7), en el primero variamos m mientras q se mantiene fijo ($q = 0,1$) para $\ell = j = 0,1$ nos enfocaremos en agujeros negros subextremales con estos parámetros ($M = 1, Q = 0,8$), adicionalmente, la frecuencia de oscilación $\omega = 0,5$

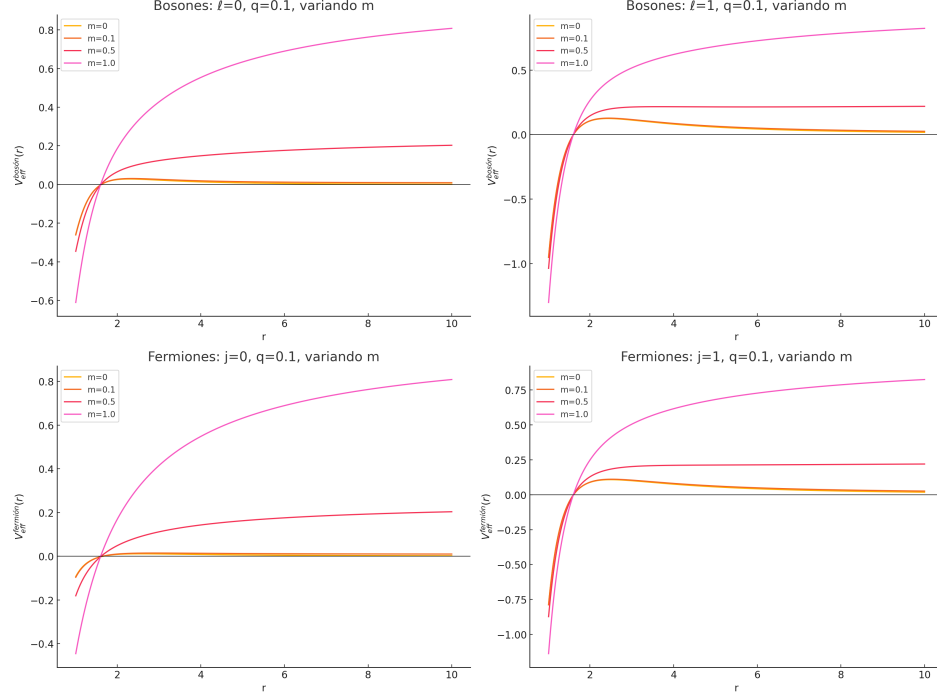


Figura 4.1: Potencial efectivo para fermiones y bosones al variar m

En la figura (4.1) vemos claramente la distinción entre bosones y fermiones. Para el caso bosónico ($\ell = 0, 1$) vemos que la masa m posee un impacto considerable en la altura y forma del potencial efectivo. A medida que la masa aumenta, la barrera se incrementa notablemente, dificultando el aún más el paso de partículas masivas desde el agujero negro. La presencia de momento angular no nulo amplifica este efecto. Por otra parte, para el caso fermiónico ($j = 0, 1$) existe un comportamiento similar con respecto a la masa, aunque nuevamente es más simple en comparación con el bosónico. El incremento de la masa m provoca un aumento en la barrera, pero la estructura del potencial es más simple debido a que únicamente depende del término cuadrático en $(j + 1/2)^2$.

En el segundo análisis variamos q mientras m se mantiene fijo y se muestra en 4.2

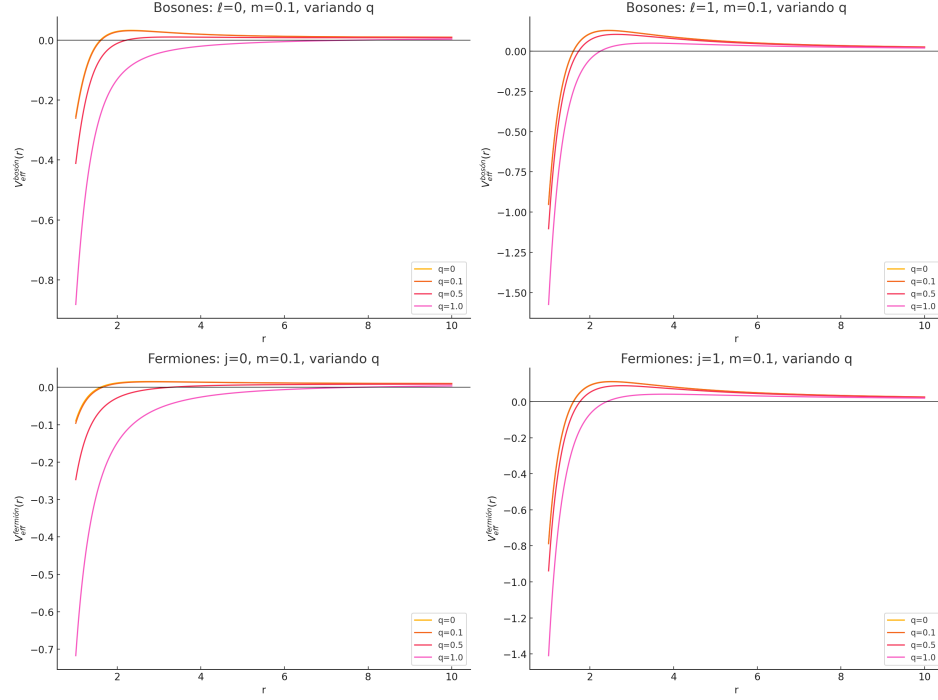


Figura 4.2: Potenciales efectivos para fermiones y bosones $m = 0,1$ cuando variamos q

La barrera potencial aumenta significativamente con q . Para $\ell = 1$, la barrera potencial es notablemente más alta debido al término del momento angular, mostrando cómo partículas cargadas con momento angular enfrentan una mayor resistencia al túnel cuántico. Por otro lado, para el caso fermiónico similarmente, al aumentar la carga q , la barrera del potencial crece claramente. Sin embargo, en comparación con el caso bosónico, la barrera para fermiones es menos compleja, debido a la inexistencia de los términos adicionales gravitacionales. El potencial fermiónico es más sencillo estructuralmente, y el efecto de la carga es más directo.

Estos gráficos destacan claramente las diferencias entre partículas bosónicas y fermiónicas al interactuar con el campo gravito-electromagnético de un agujero negro de RN, proporcionando una visión clara del papel que juegan la carga, la masa y el momento angular.

Ahora haremos el análisis para $m \gg 1$ (el caso de la ecuación (4.7)), nótese que acá los fermiones y los bosones son indistinguibles debido al dominio del término $f(r)m^2$:

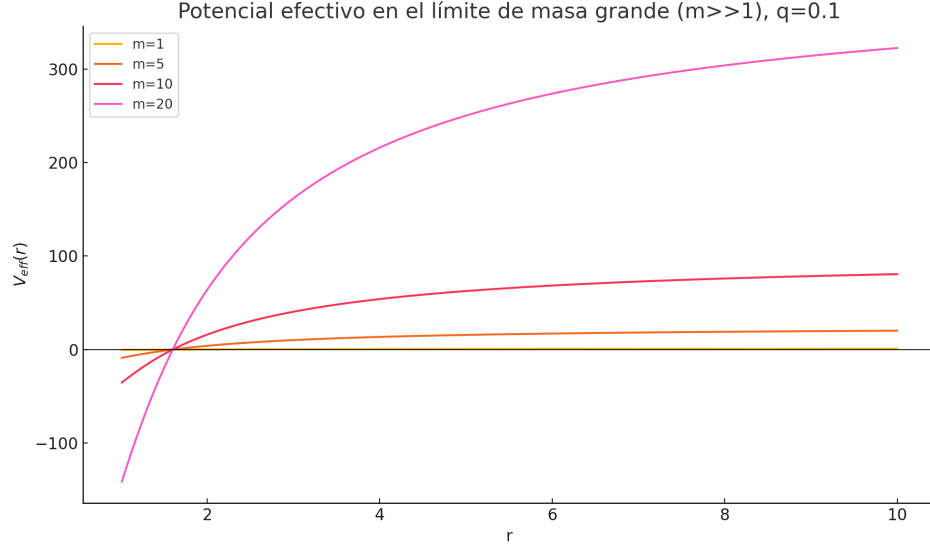


Figura 4.3: Barrera de potencial cuando $m \gg 1$

Notamos que, al incrementar la masa m , la barrera potencial se vuelve extremadamente pronunciada. Esto significa que partículas masivas encuentran mayores dificultades para escapar mediante túnel cuántico desde el horizonte del agujero negro. La carga q en este caso (fijada a 0.1) juega un papel menor siendo la masa m el factor determinante del comportamiento del potencial. En resumen, este límite representa claramente un escenario clásico o cuasi-clásico, donde la dinámica cuántica se reduce a un comportamiento muy cercano al de una partícula clásica masiva en un campo gravito-electromagnético intenso, haciendo que la distinción entre bosones y fermiones desaparezca. Ahora analizamos un caso donde $m = q = 0$ como el caso de fotones (bosones) o neutrinos sin masa (fermiones). En este caso simplificado extremo, el potencial efectivo se reduce principalmente a efectos puramente gravitacionales y dependientes del momento angular ℓ y j , además del término constante relacionado con la frecuencia ω .

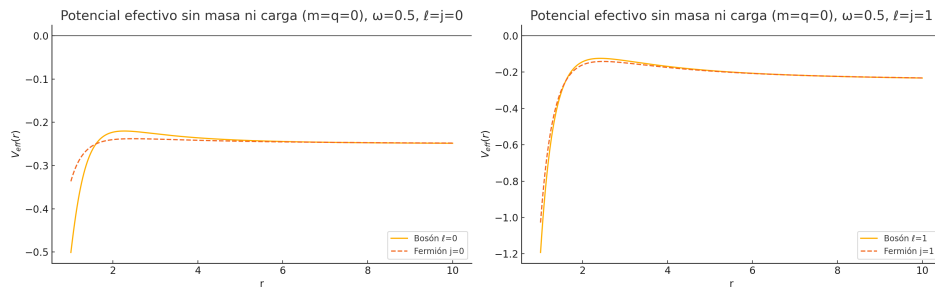


Figura 4.4: Potencial efectivo para partículas sin masa ni carga ($m = q = 0$)

Para $\ell = j = 0$, tanto el potencial bosónico como el fermiónico, son casi idénticos y presentan una estructura bastante sencilla. La barrera de potencial es originada exclusivamente por la geometría del agujero negro (efectos gravitacionales) y a la energía de la onda incidente ω . Por otro lado, para $\ell = j = 1$, se observa una barrera potencial gravitacional más pronunciada debido al momento angular. Los potenciales bosónico y fermiónico son muy similares, destacando la relevancia primordial del momento angular sobre los otros efectos que hemos considerado anteriormente. El análisis mostrado en (4.4) corresponde a partículas sin masa ni carga, por ejemplo fotones, gravitones o neutrinos sin masa, mostrando cómo estas partículas se propagan únicamente en presencia del campo gravitacional del agujero negro cargado. La barrera de potencial depende exclusivamente del momento angular y de la frecuencia, determinando cómo estas ondas puramente gravitacionales o electromagnéticas son dispersadas por el agujero negro.

En resumen, al eliminar la masa y la carga, los potenciales efectivos se simplifican enormemente, resaltando que la dinámica del campo en este caso depende únicamente de la geometría del espacio-tiempo y del momento angular.

Ahora haremos un análisis en el caso $m = 3$ bajo distintos valores de frecuencia comenzando con $\omega = 0,2$ hasta $\omega = 1,2$, el análisis se muestra en

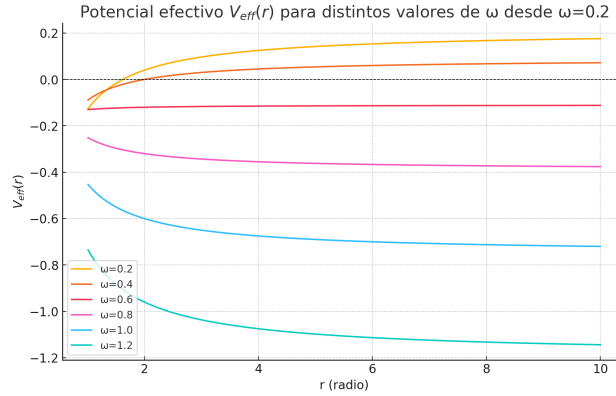


Figura 4.5: Distintos valores de ω

A frecuencias bajas ($\omega = 0,2$), la barrera de potencial es pequeña y existe una amplia región clásicamente prohibida (positiva). Conforme aumenta la frecuencia ω , la barrera de potencial evoluciona claramente, desplazándose y modificando su estructura de manera notable. Las regiones clásicamente permitidas (donde $V_{\text{eff}} < 0$) se hacen más amplias conforme aumenta ω , indicando que

partículas con energías más altas tienen mayor probabilidad de superar esta barrera de potencial. La figura (4.5) proporciona una clara visualización del efecto de la frecuencia sobre la estructura del potencial efectivo y permite una mayor comprensión de cómo la emisión de partículas depende directamente de su energía ω .

Hay un régimen $qQ/r_+ < \omega < \omega_{max}$ donde ω_{max} está dado por (4.12), donde el tunelamiento cuántico es menos probable debido a la existencia de una barrera adicional que debe atravesar la partícula fuera del horizonte. El artículo original [6] demostró analíticamente que si la frecuencia de la partícula ω se sitúa por encima de qQ/r_+ (es decir, la energía electrostática en el horizonte) pero por debajo de cierta energía máxima ω_{max} , entonces la partícula enfrenta un obstáculo potencial en el exterior.

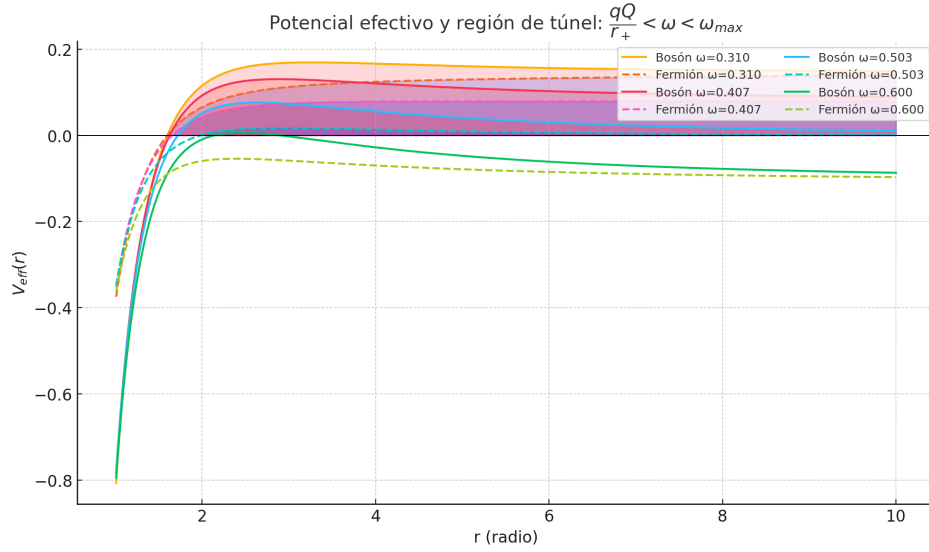


Figura 4.6: Régimen $qQ/r_+ < \omega < \omega_{max}$ con $m = 0,6$ y $q = 0,5$

La figura (4.6) confirma este resultado: para ω apenas mayor que qQ/r_+ , $V_{eff}(r)$ exhibe un máximo local positivo. En este rango, aunque la partícula tiene energía suficiente para ser real en el horizonte ($\omega > q\Phi_H$) por lo que no necesita tunelizar el horizonte mismo, aún encuentra una barrera más afuera, debida a la competencia entre la atracción gravitatoria y la repulsión o atracción eléctrica.

4.4. Discusión

En esta sección discutimos la estructura del potencial efectivo en varios regímenes físicos, incorporando un análisis gráfico complementario. En particular, examinamos el límite de masa grande, los casos de masa y carga nula, así como también analizamos el caso en que ω varía. Esta discusión subraya cómo varía la barrera de potencial efectiva con los parámetros ω , m y q , clarificando y enriqueciendo las conclusiones del artículo original[6].

En el límite clásico ($m \gg 1$), en este régimen (4.3) (mucho mayores que la escala de energía considerada), se recupera el comportamiento clásico del potencial. La figura (4.3) muestra que al tomar $m \rightarrow \infty$, las expresiones para la acción de túnel y la forma del potencial efectivo de bosones y fermiones coinciden, eliminándose las diferencias debidas al espín. Esto concuerda con la expectativa de que una partícula con longitud de onda de Compton muy pequeña (masa elevada) puede tratarse como un punto clásico atravesando la región de campo, independiente de su estadística cuántica. Así, la barrera de potencial experimentada por partículas bosónicas o fermiónicas resulta esencialmente la misma. Físicamente, esto implica que en el límite $m \gg 1$ el proceso de emisión ya no distingue entre bosones y fermiones - ambos tipos de partículas siguen la misma trayectoria clásica fuera del agujero negro, con tasas de transmisión prácticamente idénticas. De hecho, la distribución de ocupación se acerca al régimen de Maxwell-Boltzmann (clásico), donde los factores de estímulo bosónico o la exclusión fermiónica son irrelevantes, coherente con la desaparición de diferencias estadístico-cuánticos en este límite.

En el caso $m = q = 0$, el potencial efectivo es negativo en todo el exterior, como se puede apreciar en la figura (4.4) y no presenta un punto de retorno - el campo no ejerce fuerza eléctrica ni hay masa en reposo que genere una barrera, por lo que la partícula se propaga libremente desde el horizonte hasta el infinito una vez creada. En suma, la presencia de una barrera de potencial exterior está ligada a $m, q > 0$; si ambos desaparecen, el potencial efectivo se torna trivial y no impide la emisión de partículas (consistente con la radiación de Hawking usual para fotones neutros).

Se identifica además un régimen de energías en el cual aparece una barrera de potencial adicional fuera del horizonte (4.6). De hecho, inmediatamente fuera del horizonte ($r \gtrsim r_+$) el término $(\omega - qQ/r)$ puede superar a m en la condición de movimiento, permitiendo una región inicialmente permitida; sin embargo, a distancias mayores el potencial electrostático qQ/r disminuye y el

término de masa m^2 domina localmente, generando un pico en V_{eff} que actúa como una segunda barrera de potencial. La posición de esta segunda barrera r_{max} dado por la ecuación (4.13) y su altura disminuyen al incrementar ω : a medida que ω se aproxima a ω_{max} , el pico de V_{eff} se reduce y se desplaza hacia el horizonte, hasta finalmente desaparecer cuando $\omega \geq \omega_{max}$. En $\omega = \omega_{max}$ la barrera se vuelve tangencial al eje de la energía (altura cero) y para ω superiores el potencial efectivo es completamente negativo fuera del horizonte (ninguna región prohibida clásicamente). Este comportamiento concuerda con la figura 4 del artículo original ([6]), donde se ilustró la región en el plano (ω, r) en que existe momento radial imaginario: por debajo de $\omega = q\Phi_H$ (línea punteada) hay siempre una región de túnel, y notablemente también aparece una región estrecha de túnel levemente por encima de $q\Phi_h$, la cual termina en ω_{max} . Los resultados gráficos hacen vívida esta característica: mostrando cómo, en dicho intervalo, el perfil de V_{eff} posee un doble punto de retorno (r_1, r_2) que delimita una barrera finita. La partícula debe tunelar a través de esta barrera exterior para alcanzar el infinito, incluso cuando su energía supera la carga del agujero negro por partícula en el horizonte. Ahora vamos a discutir la dependencia con ω , m , q , las gráficas del potencial efectivo permiten observar de forma clara cómo varía la barrera con los parámetros físicos de la partícula.

- Frecuencia ω : Como se aprecia en la figura (4.6), una mayor energía ω del modo tiende a disminuir la altura y anchura de la barrera. Para $\omega \ll qQ/r_+$ (o por debajo de m si $q = 0$), la barrera es pronunciada y amplia, pudiendo incluso extenderse desde el horizonte hasta el infinito (caso extremo en que la partícula no tiene energía para escapar clásicamente. Al cruzar $\omega = qQ/r_+$, la barrera ya no toca el horizonte pero sigue presente más afuera; conforme ω se incrementa dentro del rango permitido, la amplitud de la barrera decrece hasta anularse en ω_{max} . Para $\omega > \omega_{max}$ no queda rastro de barrera: el potencial efectivo es negativo en todo el exterior, indicando que la partícula con energía sobre-umbral puede escapar libremente (aparte del decaimiento exponencial típico de la distribución de Hawking a alta energía).
- Masa m : Una mayor masa en reposo favorece la aparición de barreras. Incluso en ausencia de carga eléctrica ($q = 0$), un valor grande de m implica que se requerirá $\omega \geq m$ para que la partícula sea libre a infinito; si $\omega < m$, la diferencia $m^2 - \omega^2$ actúa como una barrera gravitacional (asociada a la energía de ligadura necesaria para extraer una partícula masiva

del pozo gravitatorio del agujero negro. Cuando además $q \neq 0$, un m grande extiende el régimen de existencia de la barrera adicional: se encuentra que ω_{max} aumenta con m (para q fijo), lo que significa que para partículas más masivas requieren energías mayores para que la barrera exterior desaparezca. En nuestros gráficos (4.3) se observa que, manteniendo ω fijo por debajo de qQ/r_+ , al incrementar m el pico de V_{max} crece ($V_{max}^{eff} \approx m^2$) y la región prohibida se ensancha. Por el contrario, en el límite $m \rightarrow 0$ la barrera tiende a desaparecer como ya se discutió y se muestra en (4.4).

- **Carga q :** La carga de la partícula influye en la forma del potencial a través del término qQ/r . Un q mayor (en valor absoluto) implica una interacción electrostática más fuerte con el campo eléctrico del agujero negro. Si q tiene el mismo signo que Q (repulsión eléctrica), un valor grande de q eleva la energía electrostática qQ/r_+ en el horizonte, aumentando el umbral qQ/r_+ que ω debe superar para no comenzar con energía negativa. Esto, como se aprecia en la figura (4.2), tiende a desplazar la barrera hacia regiones más externas: efectivamente una partícula muy cargada siente una fuerza eléctrica intensa, de modo que cerca del horizonte es fuertemente impulsada hacia afuera (reduciendo temporalmente la barrera allí), pero puede quedar frenada más lejos donde la repulsión decrece. El resultado es que para q grandes, la barrera adicional aparece a distancias mayores y suele ser más estrecha en r (con un intervalo $[r_1, r_2]$ más cercano entre sí), aunque persiste en un rango más amplio de energías (pues ω_{max} también crece con q en términos absolutos cuando $q > m$). Por otro lado, si q tiene signo opuesto al de Q (atracción eléctrica), una $|q|$ grande profundiza la barrera efectiva: la partícula es atraída hacia el horizonte, aumentando la altura de V_{eff} y dificultando su escape. En cualquier caso $q = 0$ elimina por completo esta barrera electrostática adicional volviendo al escenario puramente gravitacional ya descrito.

Este análisis gráfico complementa las afirmaciones de [6], proporcionando una visión clara de los procesos de emisión. En particular confirma que existe una supresión adicional exponencial en las tasas de emisión para energías $\omega < \omega_{max}$ atribuible precisamente a la presencia de la barrera de potencial exterior identificada en $V_{eff}(r)$. Las gráficas presentadas aquí hacen tangible cómo dicha barrera bloquea parcialmente las partículas salientes obligando a un proceso de túnel (análogo al

efecto Schwinger) incluso después del tunelaje a través del horizonte. Esto aclara la interpretación física: la radiación de partículas desde agujeros negros cargados puede verse como un proceso de doble túnel - primero a través del horizonte (radiación de Hawking) y luego a través de la barrera electrostática exterior - consistente con la descripción combinada que propone el artículo. Asimismo, la confluencia entre los casos fermiónico y bosónico en el límite $m \rightarrow \infty$ corroborada en (4.3) refuerza la idea de que las diferencias de espín (como la amplificación bosónica o la exclusión fermiónica) se manifiestan únicamente cuando los efectos cuánticos son importantes; en el régimen clásico ambas estadísticas producen el mismo potencial efectivo y por tanto, la misma física de emisión. En resumen, el análisis gráfico presentado no sólo ilustra cuantitativamente las dependencias de V_{eff} con ω , m , q ; sino que también ofrece un respaldo visual de los mecanismos discutidos en el trabajo original[6] - desde la desaparición de la distinción bosón/fermión en altas masas, hasta la aparición de una barrera de potencial suplementaria que explica la reducción en la emisión para ciertas energías. Estas observaciones fortalecen la interpretación del proceso de emisión de partículas cargadas como un fenómeno túnel en 2 etapas y aportan una comprensión más intuitiva de los distintos regímenes físicos involucrados.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha llevado a cabo un análisis detallado del potencial efectivo asociado a partículas cargadas, tanto bosónicas como fermiónicas, propagándose en el entorno de un agujero negro de Reissner-Nordström. El estudio se centró en las diferencias entre los perfiles del potencial efectivo para distintas configuraciones angulares, así como el impacto que tienen la masa m , la carga q y la frecuencia ω de la partícula sobre la forma del potencial.

En primer lugar, se confirmó que los términos angulares introducen diferencias sustanciales entre bosones y fermiones. En el caso $\ell = j = 0$, la ausencia de una barrera centrífuga da lugar a un potencial dominado por la competencia entre la atracción gravitacional y la repulsión (o atracción) electrostática. Por otro lado, para $\ell = j = 1$, el potencial presenta una barrera pronunciada cuyo perfil depende sensiblemente de los parámetros m , q , ω . Se observó que el término angular $(j+1/2)^2$ en el caso fermiónico genera una barrera sistemáticamente más baja que su contraparte bosónica $\ell(\ell+1)$, con lo cual los fermiones encuentran una región de túnel más angosta, implicando una menor supresión exponencial en el escape.

El análisis gráfico realizado para diferentes valores de masa y carga mostró que, al aumentar la masa de la partícula, el potencial efectivo se eleva globalmente, aumentando la altura y anchura de la barrera. Esto sugiere que la emisión espontánea de partículas masivas está más suprimida, coherente con lo esperado en el contexto del mecanismo de Schwinger y de la distribución térmica de Hawking. Así mismo, se verificó que el aumento de la carga q incrementa el término electrostático en el potencial efectivo, debilitando o eliminando la barrera para partículas de la misma carga que el agujero negro, y reforzándola para partículas de carga opuesta. Especial atención se prestó al régimen

$\frac{qQ}{r_+} < \omega < \omega_{\max}$, donde se generaron gráficos comparativos entre bosones y fermiones para distintos valores de ω dentro de ese intervalo. En dicho régimen, se encontró que es posible distinguir entre estadística bosónica y fermiónica mediante la forma del potencial efectivo: los fermiones enfrentan barreras más bajas y más permeables, lo que potencialmente puede reflejarse en una mayor tasa de emisión. Se introdujo además una visualización explícita de las regiones de efecto túnel (donde $V_{\text{eff}}(r) > 0$) mediante sombreado gráfico, ilustrando claramente cómo varía la probabilidad de escape de acuerdo a la naturaleza de la partícula.

Finalmente, se exploró el límite clásico $m \gg 1$, en el cual se verificó que el término dominante en el potencial efectivo es $f(r)m^2$, tanto para bosones como para fermiones. En este régimen, las diferencias debidas al espín o al momento angular se tornan despreciables, y los potenciales efectivos se unifican en una forma universal, determinada casi exclusivamente por la métrica de fondo y el valor de m . Esto justifica que, para partículas muy masivas, la emisión espontánea esté fuertemente suprimida y que las diferencias entre bosones y fermiones sean irrelevantes.

Queda como trabajo pendiente un análisis del potencial efectivo en los tres regímenes geométricos del agujero negro: subextremal ($Q < M$), extremal ($Q = M$) y superextremal ($Q > M$). Este análisis permitirá una identificación con mayor precisión del papel del horizonte de sucesos y su degeneración en la formación de barreras de potencial, así como el efecto de la ausencia de horizonte en la dinámica de propagación de partículas cargadas.

Por último sería relevante investigar si el marco metodológico aquí empleado -basado en el análisis gráfico, la clasificación de acuerdo al espín de las partículas, y la expansión WKB- es aplicable a otras soluciones de agujeros negros, tales como las geometrías de Kerr-Neumann, RN-AdS o incluso modelos de agujeros negros regulares. Explorar dichas extensiones permitiría evaluar la robustez del trabajo y contrastar cómo la rotación, la constante cosmológica o la regularización cuántica afectan la emisión de partículas cargadas y el perfil de los potenciales efectivos asociados.

Capítulo 6

Anexos

6.1. Anexo A: Derivación de la métrica de RN

Se resolverá las ecuaciones de campo de Einstein y se derivará la solución de RN. Hay simetría esférica, por lo tanto el sistema de coordenadas elegido será el esférico. Cuando $Q \rightarrow 0$ la solución deberá aproximarse a la de Schwarzschild, misma que se muestra en (6.1)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (6.1)$$

Otra propiedad que debería tener la métrica es que el espacio-tiempo debe ser asintóticamente plano. En otras palabras, la métrica debería aproximarse al espacio-tiempo de Minkowski cuando $r \rightarrow \infty$, esto quiere decir que la métrica, usando coordenadas esféricas debería aproximarse a

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Un espacio-tiempo curvo (pero que todavía presenta simetría esférica) en general tiene la forma

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

se puede asumir que A y B no son dependientes del tiempo, sin embargo, el caso general puede depender del tiempo así que en este caso lo tendremos en cuenta hasta que posteriormente se haya demostrado que no depende explícitamente del tiempo. Como se está trabajando en el vacío con un

campo electromagnético se debería usar el tensor energía-momentum electromagnético dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\mu}. \quad (6.2)$$

Este tensor describe el flujo de energía electromagnética y momento en el espacio-tiempo. Las propiedades de este tensor incluyen simetría ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) y no tener traza:

$$\begin{aligned} T = T_{\mu}^{\mu} &= g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F_{\beta}^{\mu} \\ &= \frac{1}{4}(4F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) - F^{\alpha\mu}F_{\alpha\mu} \\ &= F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - F^{\alpha\mu}F_{\alpha\mu} = 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Einstein, entonces, se ven reducidas a:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Donde

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \quad (6.3)$$

Calcular los símbolos de Christoffel de la métrica es tedioso y ocupa tiempo así que los símbolos de Christoffel y el tensor de Ricci fueron generados con la ayuda de un software de algebra computacional. Los símbolos de Christoffel diferentes a cero son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{A}}{2A} \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{B}}{2B}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{B}}{2A} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'}{2B} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{B'}{2B} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{r}{B} \\ \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \cot\theta, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r\sin^2\theta}{B} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

donde el punto representa derivada con respecto a t y la prima con respecto a r . Para el tensor de Ricci las componentes no nulas son:

$$R_{00} = -\frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{Br} - \frac{\ddot{B}}{2B} + \frac{\dot{B}}{4B} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \quad (6.4)$$

$$R_{11} = -\frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A''}{2A} + \frac{B'}{Br} - \frac{\ddot{B}}{2B} - \frac{\dot{B}}{4A} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \quad (6.5)$$

$$R_{22} = -\frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} + 1 \quad (6.6)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (6.7)$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{\dot{B}}{Br} \quad (6.8)$$

Esto es lo más lejos que podemos llegar generalizando a un campo gravitacional esféricamente simétrico. Para determinar A y B necesitamos resolver las ecuaciones de campo de Einstein, esto quiere decir que es necesario especificar el tensor energía-momentum. En este caso en particular el tensor energía-momentum viene dado en términos de la métrica y el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$. Dada la simetría esférica del objeto de estudio, el campo eléctrico sólo presenta componente radial. Además esta componente radial no debe depender de θ o ϕ , entonces se tiene que:

$$E_r = E_1 = E_1(t, r) = F_{01} = -F_{10}$$

Todas las demás componentes son cero puesto que no hay corrientes ni monopolos magnéticos. En forma matricial esto es

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 & 0 \\ -E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Las componentes del tensor energía-momentum pueden ser calculadas mediante la ecuación 6.2.

Considere el primer término en los paréntesis. Llevando a cabo la suma da:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(F_{\alpha 0}F^{\alpha 0} + F_{\alpha 1}F^{\alpha 1}) \\
 &= \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(F_{10}F^{10} + F_{01}F^{01}) \\
 &= \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(2F_{01}F^{01}) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{01}F^{01}.
 \end{aligned}$$

Para el segundo término queda:

$$g_{\nu\beta}F_{\mu\alpha}F^{\mu\nu} = g_{\nu\beta}F_{\mu 0}F^{\beta 0} + g_{\nu\beta}F_{\mu 1}F^{\beta 1} = g_{\nu 1}F_{\mu 0}F^{10} + g_{\nu 0}F_{\mu 1}F^{01},$$

entonces se puede escribir la ecuación 6.2 como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{01}F^{01} - g_{\nu 1}F_{\mu 0}F^{10} - g_{\nu 0}F_{\mu 1}F^{01}.$$

Las componentes del tensor energía-momentum son fáciles de obtener. Se tiene:

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= \frac{1}{2}g_{00}F_{01}F^{01} - g_{00}F_{01}F^{01} \\
 &= -\frac{1}{2}g_{00}F_{01}F^{01} = -\frac{A}{2}F_{01}F^{01} \\
 T_{11} &= \frac{1}{2}g_{11}F_{01}F^{01} - g_{11}F_{01}F^{01} \\
 &= -\frac{1}{2}g_{11}F_{01}F^{01} = \frac{B}{2}F_{01}F^{01} \\
 T_{22} &= \frac{1}{2}g_{22}F_{01}F^{01} = -\frac{r^2}{2}F_{01}F^{01} \\
 T_{33} &= \frac{1}{2}g_{33}F_{01}F^{01} = T_{22}\sin^2\theta
 \end{aligned}$$

Las demás componentes del tensor energía momento son cero. Como $T_{01} = 0$, entonces $R_{01} = 0$ y con la ecuación 6.8 concluimos que $\dot{B} = 0$, mismo que implica que B no puede depender de t .

Notamos que

$$\frac{T_{00}}{A} + \frac{T_{11}}{B} = 0$$

Por lo tanto esto implica que

$$0 = \frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B} = \frac{1}{rB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right)$$

De lo anterior se obtiene:

$$0 = \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = \frac{\partial}{\partial r} \ln(AB)$$

Lo cual implica que el producto AB es constante con respecto a r . Se puede escribir esto como

$$AB = f(t),$$

donde $f(t)$ es alguna función que no depende de r . Como ahora tenemos la relación $g_{00} = -f/g_{11}$ (como $A = -g_{00}$ y $B = g_{11}$, se puede demostrar fácilmente que

$$F_{01} = g_{00}g_{11}F^{01} = -fF^{01}.$$

Ahora resolveremos las ecuaciones de Maxwell. La ecuación 6.2 no provee de información adicional debido a la inexistencia de monopolos magnéticos, y note que es directamente satisfecha considerando el caso $\mu = 0$, $\nu = 1$ y $\rho = 0$:

$$\partial_0 F_{01} + \partial_0 F_{10} + \partial_1 F_{00} = \partial_0 F_{01} - \partial_0 F_{01} = 0.$$

Similarmente para otros casos puede ser demostrado que $\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\mu\rho}$ es cero. Usando la definición de derivada covariante de un tensor contravariante, nos quedaría

$$0 = \partial_\nu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu F^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu F^{\alpha\mu}$$

Para $\mu = 1$ lo anterior se convierte en

$$0 = \partial_0 F^{10} + \Gamma_{\alpha\nu}^1 F^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu F^{1\alpha}.$$

El segundo término de la ecuación anterior se va

$$\Gamma_{\alpha\nu}^1 F^{\alpha\nu} = \Gamma_{\alpha 0}^1 F^{\alpha 0} + \Gamma_{\alpha 1}^1 F^{\alpha 1} = \Gamma_{10}^1 F^{10} + \Gamma_{01}^1 F^{01} = 0,$$

porque $\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = 0$. El tercer término también se anula

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\nu F^{1\alpha} = F^{10}(\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) = 0$$

porque todos los símbolos de Christoffel dentro del paréntesis son nulos. Entonces terminamos con

$$0 = \partial_0 F^{10}.$$

Esto es, F^{10} o E_r no debe depender del tiempo, entonces tenemos $E_r = E_r(r)$. Usando $\mu = 0$ la ecuación se convierte en

$$0 = \partial_1 F^{01} + \Gamma_{\alpha\nu}^0 F^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu F^{0\alpha}.$$

Similarmente el segundo término se anula aunque el tercero no. Tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\nu}^\nu F^{0\alpha} &= \Gamma_{1\nu}^\nu F^{01} = F^{01}(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ &= F^{01} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right) = \frac{2}{r} F^{01} \end{aligned}$$

como

$$\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} = \frac{1}{2} \partial_r \ln(AB) = \frac{1}{2} \partial_r \ln(f) = 0$$

La ecuación ahora luce como

$$0 = \partial_r F^{01} + \frac{2}{r} F^{01}$$

La cual es una ecuación diferencial de primer orden con solución

$$F^{01} = \frac{cte}{r^2},$$

lo que permite escribir

$$E_r = \frac{cte}{r^2}.$$

Si se usa el teorema de Gauss se llega a la conclusión de que la constante de integración es Q , y tenemos

$$E_r = \frac{Q}{r^2}$$

Esto es, se obtuvo la ley de Coulomb.

Se está muy cerca de obtener la forma final de la métrica de RN. Solo necesitamos hallar una forma más explícita de A y B en términos de r . Esto puede ser hecho considerando una de las ecuaciones de campo,

$$R_{22} = 8\pi T_{22}.$$

Para el lado izquierdo se tiene:

$$R_{22} = -\frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} + 1 = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r}(rA) + 1$$

las cuales se obtienen sustituyendo $B = -f/A$ y $B' = fA'/A^2$ y usando la regla del producto. Para el lado derecho usamos la ecuación 6.9 y se obtiene

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r}(rA) + 1 = \frac{8\pi}{f} r^2 E_r^2$$

Con $E_r^2 = Q^2/r^4$ esto puede ser escrito como

$$\partial_r(rA) = f - 8\pi \frac{Q^2}{r^2}$$

Si ahora integramos esto se convierte en

$$A = f + \frac{C(t)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

donde $C(t)$ es una función que puede depender del tiempo. Cuando $Q = 0$ la métrica debe reducirse a la métrica de Schwarzschild. Cuando la gravedad es débil (cuando r es grande) la componente g_{00} del tensor métrico debe aproximarse a $1 - 2M/r$. Entonces en este límite, si la geodésica debe ser como el movimiento de la gravedad Newtoniana, debemos tener que $f = 1$ (lo que implica que

$AB = 1$) y que $C(t) = -2M$. A y B pueden ser escritos como

$$A = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)$$

$$B = -\frac{1}{A} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1}$$

y el tensor métrico en forma matricial como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

y en forma de ecuación es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Ahora se tiene la métrica completa de RN obtenida desde las ecuaciones de campo de Einstein junto a las ecuaciones de Maxwell.

6.2. Anexo B: Generalización de la ecuación de Klein-Gordon a espacios tipo agujero negro

6.2.1. Ecuación de Klein-Gordon en espacio de Schwarzschild

La ecuación de Klein-Gordon describe el comportamiento de un campo escalar ϕ en el espacio-tiempo y es fundamental en la teoría cuántica de campos. En presencia de un campo gravitacional, como el de un agujero negro, el espacio-tiempo es curvo y la ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo curvo debe ser formulada usando la relatividad general. La forma general de la ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo es:

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2)\phi = 0 \tag{6.10}$$

Donde ∇_μ es la derivada covariante asociada a la métrica del espacio-tiempo $g^{\mu\nu}$, m es la masa de la partícula escalar y los índices μ, ν corren sobre las coordenadas espaciotemporales.

Para un espacio-tiempo tipo agujero negro, la métrica $g_{\mu\nu}$ describe la geometría alrededor de un agujero negro. Consideremos, por ahora, la métrica de Schwarzschild, que representa un agujero negro no rotante y no cargado de la forma que se muestra en (2.2). En este escenario la ecuación de Klein-Gordon se transforma en

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + m^2 \phi = 0, \quad (6.11)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu}) = -r^4 \sin^2 \theta$, y $g^{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico contravariante. Expandiendo la ecuación (6.11) en coordenadas de Schwarzschild tenemos

$$-\frac{1}{f(r)} \partial_t^2 \phi + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f(r) \partial_r \phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \phi + m^2 \phi = 0, \quad (6.12)$$

La ecuación (6.12) toma en cuenta la curvatura del espacio-tiempo debido al campo gravitatorio del agujero negro y se reduce a la forma estándar de la ecuación de Klein-Gordon en el espacio-tiempo plano cuando $f(r) \rightarrow 1$, en términos de M cuando $M \rightarrow 0$.

Para el caso de agujeros negros rotantes o cargados, la métrica $g_{\mu\nu}$ difiere, y la ecuación (6.11) deberá ser ajustada según el caso. El procedimiento general sigue el mismo patrón:

1. Escribir la métrica específica para el agujero negro en cuestión.
2. Calcular las derivadas covariantes usando dicha métrica.
3. Sustituimos en la ecuación de Klein-Gordon.

La ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo tipo agujero negro incorpora los efectos de la curvatura del espacio-tiempo y es esencial para estudiar campos escalares en campos gravitacionales intensos, tales como los que se encuentran cerca de agujeros negros. Sus soluciones pueden proveer visión sobre fenómenos como la radiación de Hawking y el comportamiento del campo cuántico en espacio-tiempo curvo.

6.2.2. Ecuación de Klein-Gordon en el caso de RN (campo no cargado)

De manera similar a lo ya hecho para Schwarzschild se puede obtener la ecuación de Klein-Gordon en el espacio de RN, que no sólo incluye efectos de curvatura debido a la masa, sino que también incluye los efectos debido a la carga del agujero negro. Partimos de la ecuación (6.11) adaptando la ecuación a la situación actual.

Al expandir la ecuación en coordenadas esféricas, obtenemos

$$-\frac{1}{f(r)}\partial_t^2\phi + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f(r)\partial_r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2\phi + m^2\phi = 0, \quad (6.13)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}.$$

Se calcula explícitamente cada término, para el término temporal queda

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_t(\sqrt{-g}g^{tt}\partial_t\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_t\left(r^2 \sin\theta \left(-\frac{1}{f(r)}\right)\partial_t\phi\right),$$

dado que $r^2 \sin\theta$ no depende de t , se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_t\left(-\frac{r^2 \sin\theta}{f(r)}\partial_t\phi\right) = -\frac{1}{f(r)}\partial_t^2\phi.$$

Para el término radial tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r(\sqrt{-g}g^{rr}\partial_r\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r(r^2 \sin\theta \cdot f(r)\partial_r\phi),$$

se simplifica a

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_r(r^2 \sin\theta \cdot f(r)\partial_r\phi) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f(r)\partial_r\phi).$$

Para el término angular en θ queda

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\theta(\sqrt{-g}g^{\theta\theta}\partial_\theta\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\theta\left(r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{r^2}\partial_\theta\phi\right),$$

simplificando:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \phi).$$

Para el término angular en φ :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\varphi (\sqrt{-g} g^{\varphi\varphi} \partial_\varphi \phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\phi \left(r^2 \sin \theta \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi \phi \right),$$

simplificando queda

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\varphi \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \phi \right) = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \phi.$$

Uniendo todos los términos se obtiene la ecuación de Klein-Gordon completa y es

$$-\frac{1}{f(r)} \partial_t^2 \phi + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f(r) \partial_r \phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad (6.14)$$

La ecuación (6.14) muestra explícitamente cómo la presencia de la masa M y la carga eléctrica del agujero negro afectan al comportamiento del campo escalar ϕ .

Podemos notar que en el término temporal, el factor $\frac{1}{f(r)}$ modula la evolución temporal del campo debido al potencial gravitacional y electrostático, mientras que, la derivada radial está influenciada por $f(r)$, misma que incluye los efectos gravitacionales debidos a la masa y carga del agujero negro, así mismo, los términos angulares reflejan la simetría esférica del espacio-tiempo y $f(r)$ no influye sobre ellos, finalmente, el término $m^2 \phi$ representa la contribución de la masa del campo escalar.

El siguiente paso es incorporar el operador de momento angular en la ecuación (6.14). Esto permite separar variables y simplificar las derivadas angulares. Partimos de (6.14) y sustituimos el operador de momento angular al cuadrado L^2 que en coordenadas esféricas es

$$L^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right],$$

por lo tanto, las derivadas angulares en la ecuación de Klein-Gordon pueden escribirse como

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] = - \frac{L^2}{r^2} \phi,$$

la ecuación finalmente se transforma en

$$-\frac{1}{f(r)}\partial_t^2 + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f(r)\partial_r\phi) - \frac{L^2}{r^2}\phi + m^2\phi = 0. \quad (6.15)$$

Proponemos una solución a la ecuación (6.15) mediante separación de variables

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

donde:

- $e^{-i\omega t}$ es la dependencia temporal con frecuencia ω ,
- $R(r)$ es la función radial a determinar,
- $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos, que satisfacen

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}.$$

Al sustituir ϕ en la ecuación:

$$-\frac{1}{f(r)}(-\omega^2)R(r)Y_{lm} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\frac{dR(r)}{dr}\right)Y_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)Y_{lm} + m^2 R(r)Y_{lm} = 0,$$

dividimos ambos lados por Y_{lm}

$$-\frac{1}{f(r)}(-\omega^2)R(r) + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) + m^2 R(r) = 0,$$

Reescribimos la ecuación (6.15) de forma que la ecuación diferencial solo conserva la parte radial y queda

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 f(r)\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left[\frac{\omega^2 r^2}{f(r)} - l(l+1) - m^2 r^2\right] R(r) = 0. \quad (6.16)$$

La ecuación (6.16) es una ecuación diferencial ordinaria para $R(r)$ que incluye tanto los efectos del momento angular como los del potencial gravito-electrostático. Esta ecuación puede interpretarse como la de una partícula bajo un potencial efectivo, que incluye términos debido a la curvatura espacio-temporal y al momento angular. Los valores de l representan los diferentes modos angulares

del campo escalar, análogos a los orbitales en mecánica cuántica. La ecuación (6.16) puede resolverse utilizando técnicas estándar, como métodos numéricos o analíticos aproximados, dependiendo de los valores de M , Q , ω , m y l .

Al considerar que el momento angular se relaciona con las derivadas angulares, hemos simplificado la ecuación de Klein-Gordon en el fondo de RN a una forma que separa la variable radial de las angulares. Esto nos permite analizar el comportamiento del campo escalar ϕ en términos de modos radiales y angulares, facilitando el estudio de la radiación de Hawking de bosones cargados.

Ahora introducimos la coordenada tortuga r_* en la ecuación (6.15). La coordenada tortuga es una herramienta esencial para estudiar la propagación de ondas cerca del horizonte de eventos de un agujero negro.

Partimos de la ecuación (6.15), sustituyendo L^2 por $l(l+1)$, a continuación proponemos una solución de la forma

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Sustituimos la solución propuesta en la ecuación de Klein-Gordon:

$$-\frac{\omega^2}{f(r)} \frac{R(r)}{r} Y_{lm} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 f(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{R(r)}{r} \right) \right) Y_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{R(r)}{r} Y_{lm} + m^2 \frac{R(r)}{r} Y_{lm}$$

Simplificamos utilizando las propiedades de los armónicos esféricos y reorganizamos la ecuación, después de simplificar, obtenemos la ecuación radial

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[\frac{\omega^2}{f(r)^2} - \frac{l(l+1)}{r^2 f(r)} - \frac{f'(r)}{f(r)} \frac{dR(r)}{dr} - m^2 \frac{1}{f(r)} \right] R(r) = 0,$$

ahora sí introducimos la coordenada tortuga al cálculo y queda

$$f(r) \frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[\omega^2 - f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right) \right] R(r) = 0.$$

Sustituimos $\frac{d}{dr} = f(r) \frac{d}{dr_*}$, y obtenemos

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{eff}(r)] R(r) = 0,$$

donde el potencial efectivo $V_{eff}(r)$ es

$$V_{eff}(r) = f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \frac{f'(r)}{r} \right). \quad (6.17)$$

Calculamos la derivada de $f(r)$:

$$f'(r) = \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) = \frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3}.$$

Sustituimos $f(r)$ y $f'(r)$ en V_{eff} (6.17) y queda

$$V_{eff}(r) = f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \right). \quad (6.18)$$

Recordando la derivación de la coordenada tortuga, queda que la ecuación radial se reduce a:

$$\frac{d^2 R(r_*)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{eff}(r(r_*))]R(r_*) = 0, \quad (6.19)$$

la ecuación (6.19) es una ecuación de onda 1D, lo que facilita el análisis de soluciones y la aplicación de condiciones de contorno.

Al introducir la coordenada tortuga, se ha transformado la ecuación de Klein-Gordon en una ecuación de onda 1D que es más adecuada para el análisis de fenómenos físicos en el entorno de un agujero negro de RN. Este enfoque es esencial para profundizar en la comprensión de los procesos cuánticos en espacio-tiempos curvos. También vemos que si hacemos $M = Q = 0$ recuperamos la forma minkowskiana de la ecuación de Klein-Gordon. En la siguiente sección veremos la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar cargado teniendo en cuenta el acoplamiento mínimo del agujero negro.

6.2.3. Ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempo curvo con acoplamiento electromagnético

La ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar cargado en un espacio tiempo curvo es:

$$(g^{\mu\nu}(\nabla_\mu - iqA_\mu)(\nabla_\nu - iqA_\nu) - m^2)\phi = 0, \quad (6.20)$$

donde A_μ son las componentes del cuadvivector potencial y en el caso de RN se reducen a (debido a la ausencia de rotación, el campo eléctrico del agujero negro no genera un campo magnético y por lo tanto las componentes asociadas al campo magnético son cero)

$$A_\mu = \left(\frac{Q}{r}, \vec{0} \right), \quad (6.21)$$

sustituimos los componentes de la métrica inversa y el potencial electromagnético en la ecuación (6.20), expresamos la ecuación en términos de las coordenadas

$$-\frac{1}{f(r)}(\partial_t - iqA_t)^2\phi + f(r)(\partial_r - iqA_r)^2\phi + \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 \right) - m^2\phi = 0,$$

notamos en la ecuación (6.21) que $A_r = A_\theta = A_\varphi = 0$, por lo que estos términos desaparecen.

El término temporal es

$$-\frac{1}{f(r)}(\partial_t - iqA_t)^2\phi = -\frac{1}{f(r)} \left(\partial_t - iq\frac{Q}{r} \right)^2 = -\frac{1}{f(r)} \left(\partial_t - i\frac{qQ}{r} \right)^2 \phi.$$

El término radial es

$$f(r)(\partial_r)^2\phi,$$

pero se debe considerar la forma correcta para preservar la hermiticidad y la conservación de la corriente. En coordenadas esféricas y espacio-tiempo curvo, el operador radial adecuado es

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r(\sqrt{-g}g^{rr}\partial_r\phi),$$

como $g^{rr} = f(r)$, el término radial se convierte en

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2f(r)\partial_r\phi).$$

El término angular se estableció que es igual al operador momento angular al cuadrado, entonces reunimos todos los términos de la expresión y queda

$$-\frac{1}{f(r)} \left(\partial_t - i\frac{qQ}{r} \right)^2 \phi + \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2f(r)\partial_r\phi) - \frac{L^2}{r^2}\phi - m^2\phi = 0,$$

todos los términos se están multiplicando por ϕ por lo que podemos reescribir esta ecuación

$$\left[-\frac{1}{f(r)} \left(\partial_t - i \frac{qQ}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f(r) \partial_r) - \frac{L^2}{r^2} - m^2 \right] \phi = 0. \quad (6.22)$$

La ecuación de Klein-Gordon obtenida se muestra en (6.22), esto es, para un campo escalar cargado en el fondo de un agujero negro de RN, y resulta crucial para el estudio de la interacción del campo escalar cargado con el entorno gravitacional y electromagnético de un agujero negro cargado, así como también para hacer análisis de cómo las ondas escalares cargadas son dispersadas o absorbidas por el agujero negro.

Ahora, demostraremos que al expandir el campo escalar cargado en armónicos esféricos y al introducir la coordenada tortuga r_* , la parte radial de la ecuación de Klein-Gordon en el fondo de un agujero negro de RN se puede escribir de la siguiente manera

$$\left[-\frac{d^2}{dr_*^2} + V_{eff}(r) \right] R(r) = \epsilon R(r) \quad (6.23)$$

con

$$V_{eff} = f(r) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} \right) - \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 + (\omega^2 - m^2),$$

$$\epsilon = \omega^2 - m^2.$$

Partimos de la ecuación (6.22) y proponemos una separación de variables del tipo

$$\phi = e^{-i\omega t} \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

usando el valor propio del operador angular y usando el hecho de que $\partial_t \phi = -i\omega \phi$ se reemplaza en la ecuación (6.22), entonces obtenemos

$$\left[-\frac{1}{f(r)} \left(-i\omega - i \frac{qQ}{r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f(r) \partial_r) - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^2 \right] \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0,$$

la dependencia angular se factoriza y simplifica con los armónicos esféricos. Enfocándonos en la ecuación radial para $R(r)$:

$$-\frac{1}{f(r)} \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 R(r) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 f(r) \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R - m^2 R = 0.$$

Definimos la coordenada tortuga r_* mediante

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{f(r)} \Rightarrow dr = f(r) dr_*$$

La segunda derivada con respecto a r se convierte en

$$\frac{d}{dr} = f(r) \frac{d}{dr_*} \Rightarrow \frac{d^2}{dr^2} = f(r)^2 \frac{d^2}{dr_*^2} + f'(r) f(r) \frac{d}{dr_*},$$

al reorganizar el operador radial es común introducir un factor de $R(r)$ sobre r para simplificar la forma, pero aquí ya hemos factorado $R(r)/r$ desde el principio.

Después de sustituir y reorganizar los términos, la ecuación radial se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - m^2 - \left(f(r) \frac{l(l+1)}{r^2} + f(r) m^2 + f(r) \frac{2M}{r^3} - f(r) \frac{2Q^2}{r^4} - f(r) \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 \right) \right] R(r) = 0,$$

movemos todos los términos excepto el primero al otro lado

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} = (\omega^2 - m^2) R(r) - f(r) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} + \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 \right) R(r),$$

reescribimos esta ecuación como:

$$-\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + f(r) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} - \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 \right) R(r) = -(\omega^2 - m^2) R(r),$$

multiplicando por -1 queda

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} - f(r) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} - \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 \right) R(r) = (\omega^2 - m^2) R(r),$$

definimos $\epsilon = \omega^2 - m^2$, así, la ecuación queda

$$-\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + f(r) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} - \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 + (\omega^2 - m^2) \right) R(r) = \epsilon R(r),$$

observamos que $(\omega^2 - m^2) = \epsilon$, por lo que podemos agruparlos

$$-\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + f(r) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} - \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 + (\omega^2 - m^2) \right) R(r) = \epsilon R(r),$$

definimos el potencial efectivo $V_{eff}(r)$

$$V_{eff}(r) = f(r) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} - \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 + (\omega^2 - m^2) \right), \quad (6.24)$$

con esta definición, la ecuación toma la forma presentada en (6.23). Al expandir el campo escalar cargado en armónicos esféricos y cambiar a la coordenada tortuga, la ecuación radial de Klein-Gordon en el fondo de un agujero negro de RN se reduce a una ecuación tipo Schrödinger con un potencial efectivo $V_{eff}(r)$ y un término $\epsilon = \omega^2 - m^2$. La cual es equivalente a (3.28)

$$-\frac{d^2 R}{dr_*^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(m^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} \right) R + \left(\omega - \frac{qQ}{r} \right)^2 R = 0,$$

La ecuación (3.28) es útil para analizar la dispersión, modos cuasinormales, estados ligados y otros fenómenos físicos asociados con la propagación de campos escalares en campos gravitacionales y electromagnéticos intensos. Ahora que hemos obtenido la ecuación tipo Schrödinger para el caso bosónico, haremos lo mismo para el caso fermiónico, asociando los fermiones a su ecuación característica, la ecuación de Dirac, de igual manera que lo hicimos a lo largo de estas tres subsecciones.

6.3. Anexo C: Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac, en relatividad especial, es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (6.25)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac que satisfacen el álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Sin embargo, cuando pasamos a un espacio-tiempo curvo con métrica $g_{\mu\nu}$, ya no se puede usar directamente γ^μ como en el caso plano, ni la derivada parcial ∂_μ como si nada. Para generalizar la ecuación de Dirac a un espacio-tiempo curvo, se introducen 2 conceptos clave

- Campo de la tétrada (o vierbein) e_μ^a , que relaciona el índice μ del espacio-tiempo curvo con el índice plano a .
- Conexión de espín Γ_μ adecuada para campos de espín 1/2.

Lo presentado aquí sigue el razonamiento de [22] hasta el procedimiento para sacar la ecuación de onda, de ahí en más es razonamiento del anexo de [6].

6.3.1. Formalismo de la tétrada y espinores

Hasta ahora, hemos usado bases asociadas a coordenadas específicas para describir vectores y covectores. Sin embargo, podemos elegir bases más generales que no estén ligadas a un sistema coordenado particular. Estas bases generales se denominan tétradas (o *vielbein*), formadas por vectores e_a que cumplen la condición de ortonormalidad respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$g(e_a, e_b) = \eta_{ab} \quad (6.26)$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski en espacio-tiempo Lorentziano. Las tétradas permiten relacionar índices curvos (coordenados) con índices planos (locales). En particular, relacionan las matrices de Dirac curvas ($\bar{\gamma}^\mu$) con las matrices planas γ^a mediante (6.27)

$$\bar{\gamma}^\mu = e_a^\mu \gamma^a. \quad (6.27)$$

Si cambiamos una tétrada inicial por otra, las bases están relacionadas por una matriz Λ :

$$e_A^\mu = \Lambda_A^B h_B^\mu, \quad (6.28)$$

y se demuestra que Λ es necesariamente una matriz de Lorentz. Por ello, estas transformaciones se llaman transformaciones locales de Lorentz.

Al introducir espinores en relatividad general, estos transforman como objetos escalares bajo transformaciones de coordenadas, pero requieren una transformación especial bajo rotaciones de tétradas. La derivada parcial no preserva esta propiedad, por lo cual es necesario reemplazarla por una derivada covariante, lo cual será abordado en la sección siguiente.

6.3.2. Derivada covariante de un espinor y la conexión de espín

Al generalizar la derivada parcial ∂_μ a la derivada covariante D_μ para campos espinoriales en relatividad general, introducimos correcciones debidas a la curvatura mediante la conexión espinorial Γ_μ , escribiendo:

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \Gamma_\mu \psi,$$

Esta derivada covariante debe transformar adecuadamente bajo transformaciones locales de Lorentz, cumpliendo con la ecuación (6.29)

$$\tilde{D}_\mu \tilde{\psi} = L D_\mu \psi, \quad (6.29)$$

Lo que determina cómo Γ_μ cambia bajo dichas transformaciones.

Para que la derivada covariante sea consistente (preserve la métrica y la estructura del álgebra de Clifford generada por las matrices de Dirac curvadas $\bar{\gamma}^\mu = e_a^\mu \gamma^a$, se impone la condición de compatibilidad métrica:

$$D_\mu \bar{\gamma}^\nu = 0. \quad (6.30)$$

Esto implica que la conexión espinorial Γ_μ debe tener la forma específica:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4} \omega_{AB\mu} \gamma^A \gamma^B \quad (6.31)$$

donde $\omega_{AB\mu}$ es la conexión de espín (coeficientes de Fock-Ivanenko) dada por las tétradas e_μ^a y los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

$$\omega_{\mu ab} = e_a^\nu \nabla_\mu e_{\nu b} = e_a^\nu (\partial_\mu e_{\nu b} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_{\lambda b}). \quad (6.32)$$

. Estos coeficientes son antisimétricos en los índices planos (a, b) . Finalmente, la ecuación de Dirac en espacios curvos para partícula libre con masa m es:

$$(i\gamma^C D_C - m)\psi = 0. \quad (6.33)$$

que puede escribirse explícitamente en términos de coordenadas generales como

$$(i\bar{\gamma}^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \quad (6.34)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$. Esta ecuación incorpora naturalmente la estructura geométrica del espacio-tiempo mediante las tétradas y la conexión espinorial

6.3.3. La Interacción Electromagnética

Generalmente uno deberá añadir un vector múltiplo de la matriz unidad a la solución (6.31). De esta manera se puede generalizar los Γ_μ para el caso donde un potencial electromagnético arbitrario A_μ está presente. Simplemente hacemos los reemplazos:

$$\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu + iqA_\mu I, \quad (6.35)$$

$$D_\mu \rightarrow D_\mu + iqA_\mu I, \quad (6.36)$$

donde q es la carga de la partícula descrita por ψ . Por lo que, la ecuación (6.34) ahora se generaliza a

$$\begin{aligned} i\bar{\gamma}^\mu D_\mu \psi - m\psi &= 0, \\ i\bar{\gamma}^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu + \Gamma_\mu) \psi - m\psi &= 0, \\ i\gamma^C \left(e_C + \frac{1}{4} \omega_{ABC} \gamma^A \gamma^B + iqA_C \right) - m\psi &= 0, \end{aligned} \quad (6.37)$$

donde

$$\bar{\gamma}^\mu A_\mu = e_C^\mu \gamma^C A_\mu = \gamma^C e_C^\mu A_\mu = \gamma^C A_C.$$

Esto es consistente con el procedimiento de acople mínimo que se estudió en la sección anterior cuando lo estudiamos para el caso de Klein-Gordon. Como ya vimos en el caso de la ecuación de Klein-Gordon, para RN el potencial electromagnético las componentes A_C del potencial electromagnético debido al campo eléctrico del agujero negro son

$$A = (A_0, A_1, A_2, A_3) = \left(\frac{Q}{r}, \vec{0} \right),$$

de tal manera que $iqA_0 = i\frac{qQ}{r}$. Habiendo visto las herramientas necesarias para el estudio de la ecuación de Dirac en espacios curvos, antes de estudiar la ecuación de Dirac en Schwarzschild haremos un breve repaso de las matrices Gamma, pues esto es crucial para entender cómo cambia la ecuación de Dirac en las diferentes métricas.

6.3.4. Las matrices Gamma

Las matrices de Pauli 2×2 vienen dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

Para una partícula libre de espín $1/2$ de masa m escribimos la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Minkowski como se muestra en la ecuación (6.25), donde ψ es un espinor de 4 componentes y las matrices γ 4×4 satisfacen la relación de anticonmutación de las matrices γ , pero recordando que estamos en el espacio-tiempo de Minkowski y por lo tanto $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \rightarrow \{\gamma^A, \gamma^B\}$, $g^{\alpha\beta} \rightarrow \eta^{AB}$, donde $\epsilon = \pm 1$ y las condiciones de hermiticidad

$$(\gamma^A)^\dagger = \gamma^0 \gamma^A \gamma^0,$$

elevamos y bajamos los índices usando la métrica η , $\gamma^A = \eta^{AB} \gamma_B$.

Representación estándar de Dirac-Pauli

En la representación estándar, tenemos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \gamma^K = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^K \\ -\sigma^K & 0 \end{pmatrix}, K = (1, 2, 3). \quad (6.39)$$

Es fácil verificar, y lo vamos a hacer aquí, que

$$(\gamma^0)^2 = I, \quad (\gamma^K)^2 = -I \quad (6.40)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 I_2 + 0 \times 0 & I_2 \times 0 + 0 \times (-I_2) \\ 0 \times I_2 + (-I_2) \times 0 & 0 \times 0 + (-I_2)(-I_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para probar la segunda parte de (6.40), usamos la ecuación (6.38) y la segunda parte de (6.39), concretamente con $K = 1$.

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

elevamos al cuadrado la matriz

$$(\gamma^1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

Ahora que ya vimos la representación matricial de las matrices γ estamos listos para emprender un viaje al horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild y de RN.

6.3.5. Ecuación de Dirac en la métrica de Schwarzschild

En esta sección se estudiará y calcularán los coeficientes de Fock-Ivanenko y las ecuaciones de Dirac resultantes para la métrica de Schwarzschild dada en (2.2). Las matrices γ están en la representación estándar, sin embargo, debido a la signatura elegida, debemos multiplicar cada una de las matrices por $+i$. La métrica de Schwarzschild viene dada por (2.2) y elegimos las 1-formas y vectores correspondientes que satisfacen la ecuación (6.26),

$$\begin{aligned} e^0 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt, & e_0 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \partial_t, \\ e^1 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr, & e_1 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_r, \\ e^2 &= r d\theta, & e_2 &= \frac{1}{r} \partial_\theta, \\ e^3 &= r \sin \theta d\phi, & e_3 &= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi. \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores son los campos de la tétrada de un observador estacionario. El índice $a = 0, 1, 2, 3$ denota la componente local de Lorentz (o del espacio de Minkowski) con $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Las inversas cumplen

$$e_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad (6.41)$$

Calculamos los coeficientes de espín no nulos y recordamos la antisimetría de la conexión espinorial. A continuación calcularemos las derivadas covariantes de e_B^β y para no alargar excesivamente, se indica la idea:

1. Calcular $\partial_\mu(e_B^\beta)$. Casi todas son cero excepto cuando la componente e_B^β depende de la coordenada μ .
2. Sumar $\Gamma_{\mu\nu}^\beta e_B^\nu$.
3. Determinar las combinaciones para cada par (A, B) y cada μ .

En la métrica de Schwarzschild, los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ no nulos se concentran en expresiones con (t, r) y (θ, ϕ) . Por ejemplo,

- $\Gamma_{tt}^r, \Gamma_{tr}^t,$
- $\Gamma_{\theta\theta}^r, \Gamma_{r\theta}^\theta,$
- $\Gamma_{\phi\phi}^r, \Gamma_{r\phi}^\phi,$
- $\Gamma_{\phi\phi}^\theta, \Gamma_{\theta\phi}^\phi,$ etc.

De la forma de e_B^β , se ve que:

- $e_0^t = \frac{1}{\sqrt{f(r)}}$ depende sólo de r .
- $e_1^r = \sqrt{f(r)}$ depende de r .
- $e_2^\theta = \frac{1}{r}$ depende de r .
- $e_3^\phi = \frac{1}{r \sin \theta}$ depende de r y θ .

Por tanto al examinar $\nabla_\mu e_B^\beta$ para $\mu = t, r, \theta, \phi$, se ve que no todas las combinaciones son distintas de cero. Solo surgen un puñado de componentes no triviales.

Del cálculo, se obtiene que las únicas combinaciones (A, B, μ) no nulas son (salvo antisimetría) las siguientes:

1. ω_{10} con $\mu = t$.
2. ω_{21} con $\mu = \theta$.
3. ω_{31} con $\mu = \phi$.
4. ω_{32} con $\mu = \phi$.

Todas las demás se anulan (veremos abajo el por qué).

1. Par $(1, 0)$ con $\mu = t$

- Se encuentra que $\omega_{10,t} \neq 0$ porque $e_0^t = \frac{1}{\sqrt{f(r)}}$ depende de r , y $\Gamma_{tt}^t = 0$ pero $\Gamma_{tt}^r \neq 0$ puede intervenir cuando se combina con e_1^r .

- El resultado da

$$\omega_{10t} = \frac{M}{r^2}, \quad (6.42)$$

2. Par $(2, 1)$ con $\mu = \theta$

- Al tomar $\nabla_\theta e_1^\beta$, la única parte que no se anula proviene de ∂_θ si e_1^β dependiese de θ o si $\Gamma_{\theta\nu}^\beta e_1^\nu$ fuera no cero.
- Se halla esquemáticamente

$$\omega_{21\theta} = \sqrt{f(r)} \quad (6.43)$$

3. Pares $(3, 1)$ y $(3, 2)$ con $\mu = \phi$

- Análogamente, los términos $\omega_{31\phi}$ y $\omega_{32\phi}$ surgen de la dependencia de e_3^β en θ y de los Christoffel $\Gamma_{\phi r}^\phi$, $\Gamma_{\phi\theta}^\phi$.
- Se obtiene

$$\omega_{31\phi} = \sqrt{f(r)} \sin \theta, \quad (6.44)$$

$$\omega_{32\phi} = \cos \theta \quad (6.45)$$

Conceptualmente, los demás coeficientes se anulan por dos razones principales:

1. La tétrada no depende de ciertas coordenadas:

- e_0^t y e_1^r no dependen de θ o ϕ .
- e_2^θ y e_3^ϕ no dependen de t .

Por lo tanto, $\partial_\mu e_B^\beta = 0$ en muchos casos. También, muchos símbolos de Christoffel se anulan para combinaciones que mezclarían, por ejemplo, t con θ en Schwarzschild.

2. Simetría esférica y diagonalidad:

Al no haber términos cruzados $dt d\theta$, $dt d\phi$, $dr d\theta$ en la métrica, los $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ que conectarían direcciones disjuntas desaparecen (o no aportan a $\nabla_\mu e_B^\beta$).

Así, por ejemplo ω_{20} y ω_{30} no tienen forma de encenderse pues no hay manera de producir esos emparejamientos a través de la derivada covariante.

En pocas palabras:

Los coeficientes nulos son aquellos para los cuales la derivada covariante se anula.

Ahora vamos a calcular los coeficientes de Fock-Ivanenko de la métrica usando (6.31) y proyectando sobre el espacio plano de Minkowski, para ello utilizamos la proyección $\Gamma_C = e_C^\mu \Gamma_\mu$, usando eso en la ecuación (6.31) queda

$$\Gamma_C = e_C^\mu \Gamma_\mu = \frac{1}{4} e_C^\mu \omega_{AB\mu} \gamma^A \gamma^B \quad (6.46)$$

Ahora, hacemos el cálculo con $\mu = t, r, \theta, \phi$ y los pares AB no nulos que nos quedaron, para ello usamos las relaciones derivadas anteriormente (ecuaciones (6.42-6.45)).

Para $C = \mu = t, A = 1, B = 0$ quedaría

$$\Gamma_t = \frac{1}{4} e_t^t \omega_{10t} \gamma^1 \gamma^0 = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \frac{M}{r^2} \gamma^1 \gamma^0,$$

notamos que $\gamma^A \gamma^B = \frac{1}{2} [\gamma^A, \gamma^B] + \frac{1}{2} \{\gamma^A, \gamma^B\}$ y nos queda

$$\Gamma_t = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \frac{M}{r^2} 2\gamma^1 \gamma^0.$$

entonces simplificando queda

$$\Gamma_t = \frac{M}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^1 \gamma^0. \quad (6.47)$$

Para $C = \mu = r, A = 2, B = 0$ quedaría

$$\Gamma_r = \frac{1}{4} e_r^r \omega_{20r} \gamma^2 \gamma^0 = 0$$

entonces

$$\Gamma_r = 0. \quad (6.48)$$

Para $C = \mu = \theta, A = 2, B = 1$ queda

$$\Gamma_\theta = \frac{1}{4} e_\theta^\theta \omega_{21\theta} \gamma^2 \gamma^1$$

quedaría entonces

$$\Gamma_\theta = \frac{1}{4} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} 2\gamma^2 \gamma^1 = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^2 \gamma^1 \quad (6.49)$$

Finalmente para $C = \mu = \phi$ hay una suma debido a que 2 parejas de coeficientes sobreviven $A = 3, B = 1$ y $A = 3, B = 2$:

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &= \frac{1}{4} e_\phi^\phi \omega_{31\phi} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{1}{4} e_\phi^\phi \omega_{32\phi} \gamma^3 \gamma^2 \\ \Gamma_\phi &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \sin \theta \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \theta \gamma^3 \gamma^2 \right] \end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad previamente mencionada y simplificando términos queda:

$$\Gamma_\phi = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2r} \gamma^3 \gamma^2 \quad (6.50)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (6.47-6.49) llegamos a

$$[\gamma^0(e_0^t \partial_t + \Gamma_0) + \gamma^1(e_1^r \partial_r + \Gamma_1) + \gamma^2(e_2^\theta \partial_\theta + \Gamma_2) + \gamma^3(e_3^\phi \partial_\phi + \Gamma_3)]\psi - m\psi = 0. \quad (6.51)$$

6.3.6. Ecuación de Dirac en RN

Para RN es análogo, únicamente se añade el término de la carga del agujero negro, así pues

$$\begin{aligned} e_0^t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}} \\ e_1^r &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \\ e_2^\theta &= r \\ e_3^\phi &= r \sin \theta \end{aligned}$$

De nuevo calculamos los coeficientes de la conexión de espín $\omega_{AB\mu}$ de acuerdo con la ecuación de la conexión de espín y análogamente sale, para $A = 1$, $B = 0$, $\mu = t$

$$\omega_{10t} = \frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}, \quad (6.52)$$

mientras que, para $A = 2$, $B = 1$, $\mu = \theta$

$$\omega_{21\theta} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} = \sqrt{f(r)}, \quad (6.53)$$

para $A = 3$, $B = 1, 2$, $\mu = \phi$ queda

$$\omega_{31\phi} = \sqrt{f(r)} \sin \theta \quad (6.54)$$

$$\omega_{32\phi} = \cos \theta \quad (6.55)$$

con $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$. De la misma manera que en el caso anterior, usando la ecuación (6.31) y las ecuaciones (6.52-6.55), encontramos los coeficientes de Fock-Ivanenko de la métrica de RN:

$$\Gamma_t = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^1 \gamma^0, \quad (6.56)$$

análogamente al caso de Schwarzschild, en la métrica de RN,

$$\Gamma_r = 0, \quad (6.57)$$

$$\Gamma_\theta = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma^2 \gamma^1, \quad (6.58)$$

$$\Gamma_\phi = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2r} \gamma^3 \gamma^2. \quad (6.59)$$

Finalmente combinando las ecuaciones (6.56-6.59), llegamos a una expresión análoga para RN (sin acoplamiento electromagnético) de la ecuación de Dirac, para tener una expresión para el caso con acoplamiento electromagnético se usa la ecuación (6.37) en la que se promueve la derivada covariante a otra derivada covariante que incluye el término con acoplamiento electromagnético (véase la ecuación (6.37) pero el procedimiento para obtener los coeficientes de conexión de espín es

análogo, así que no se volverá a repetir el procedimiento. Ahora que hemos obtenido la ecuación de Dirac explícitamente para la métrica de Schwarzschild y de RN (con o sin acople electromagnético), se puede elevar al cuadrado para obtener una ecuación tipo Klein-Gordon, eso es lo que se hará en la siguiente subsección.

6.3.7. Ecuación de Onda

Para obtener una ecuación de onda tipo Klein-Gordon (parecida a (6.12)) se tiene que elevar al cuadrado la ecuación de Dirac. Este procedimiento es el mismo para las 2 métricas en particular, pero en general resulta aplicable a cualquier métrica.

En una métrica curva, la ecuación de Dirac puede escribirse, usando la notación de tétradas y la derivada covariante de un espinor Ψ como se muestra en (6.34). Para elevar al cuadrado la ecuación de Dirac, se multiplica por el operador conjugado

$$(i\gamma^\nu D_\nu + m).$$

Así partiendo de la ecuación (6.34), se obtiene

$$(i\gamma^\mu D_\mu + m)(i\gamma^\mu D_\mu - m) = 0,$$

el producto de operadores se desarrolla como

$$(i\gamma^\nu D_\nu + m)(i\gamma^\mu D_\mu - m) = -(\gamma^\nu D_\nu \gamma^\mu D_\mu - m^2).$$

El signo $-$ adicional proviene de la multiplicación $i \times i$. Por consiguiente, la ecuación resultante es

$$(\gamma^\nu D_\nu \gamma^\mu D_\mu - m^2) = 0. \tag{6.60}$$

El término clave es

$$\gamma^\nu D_\nu \gamma^\mu D_\mu,$$

en espacio-tiempo se cumple la identidad

$$\gamma^\nu D_\nu \gamma^\mu D_\mu = D^\mu D_\mu + \frac{1}{4} R, \quad (6.61)$$

donde D_μ es la derivada covariante de espín y R es el escalar de Ricci, mismo que ya se demostró que es cero en el caso de las métricas de Schwarzschild y RN, por lo que (6.61) se reduce a

$$\gamma^\nu D_\nu \gamma^\mu D_\mu = D^\mu D_\mu. \quad (6.62)$$

La derivada covariante D_μ que actúa sobre un espinor es $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ donde Γ_μ son matrices que codifican la conexión de espín. Cuando en la expresión compacta se escribe $D^\mu D_\mu$, se está aplicando dos veces esta derivada de espín:

$$D^\mu D_\mu \Psi = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \Psi.$$

Si desglosamos $D_\mu D_\nu$ en derivadas ordinarias y en Γ_μ , surgen exactamente los términos:

- la parte que corresponde al laplaciano escalar ∇_S^2 sobre Ψ ,
- términos lineales en Γ_μ que se combinan como $2\Gamma \cdot \partial$,
- términos cuadráticos $\Gamma_\mu \Gamma^\mu$,
- términos con $\nabla_\mu \Gamma^\mu$ (derivada de la conexión de espín, que puede incluir conmutadores y también la parte debida a la conexión de Levi-Civita).

Por eso en la literatura, a veces se ve la identidad (en notación bastante esquemática):

$$D^\mu D_\mu \Psi = \nabla_S^2 \Psi + 2(\Gamma^\mu \partial_\mu) \Psi + \Gamma^2 \Psi + (\nabla_\mu \Gamma^\mu) \Psi$$

Ambas formas son representaciones del mismo operador: la primera es la forma compacta y la otra es la forma expandida explícitamente en términos de la conexión de Fock-Ivanenko.

En el caso de las métricas de Schwarzschild o de RN en el vacío, ocurre que:

1. La curvatura escalar $R = 0$.
2. La forma específica de Γ_μ se simplifica bastante debido a la simetría esférica y a la ausencia de otras fuentes de curvatura (salvo la masa central).

En muchas referencias, al elevar al cuadrado la ecuación de Dirac se llega a:

$$(D^\mu D_\mu + m^2)\Psi \Leftrightarrow (\nabla_S^2 + 2\Gamma \cdot \partial + \Gamma^2 + \nabla_\mu \Gamma^\mu + m^2)\Psi$$

El desglose en ∇_S^2 , $\Gamma \cdot \partial$, Γ^2 y $\nabla_\mu \Gamma^\mu$ es la misma operación, solo que escrita paso a paso.

Ahora haremos explícitamente la sustitución usando la coordenada tortuga, la forma de la derivada covariante y los 4 coeficientes de Fock-Ivanenko Γ que obtuvimos (6.47-6.50) queda

$$\frac{1}{f}(-\partial_t^2 + \partial_*^2) + \frac{2}{r}\partial_* + \frac{L_S^2}{r^2} - \frac{1}{4f}\frac{M^2}{r^4} - \frac{f}{2r^2} - \frac{\cot^2 \theta}{4r^2} - \frac{2}{f}\frac{M}{r^2}i\sigma^{01}\partial_t + \frac{\sqrt{f}}{r^2}i\sigma^{12}(\cot \theta + 2\partial_\theta) + 2\frac{\cot \theta}{r^2 \sin \theta}i\sigma^{23}\partial_\phi + \frac{2\sqrt{f}}{r^2 \sin \theta}\sigma^{13}\partial_\phi, \quad (6.63)$$

donde L_S es el operador momento angular usual de la mecánica cuántica. Esta ecuación tan difícil de manejar, no solo no es diagonal en el espacio espinorial, al contrario de la contraparte plana, sino que no se reduce a la ecuación de onda en el horizonte o el infinito espacial. Para obtener una ecuación manejable y reducible a la ecuación de onda se hace la sustitución en la ecuación diferencial de primer orden

$$\tilde{\Psi} = rf^{1/4}\sqrt{\sin \theta}\Psi \quad (6.64)$$

donde $rf^{1/4}\sqrt{\sin \theta} = S(r, \theta)$, definimos un nuevo campo espinorial dado por

$$\Psi = S^{-1}(r, \theta)\tilde{\Psi},$$

i.e.

$$\Psi = \frac{1}{rf(r)^{1/4}\sqrt{\sin \theta}}\tilde{\Psi}. \quad (6.65)$$

Nuestro objetivo es sustituir (6.65) en la ecuación de Dirac que obtuvimos y ver como la parte relacionada con la conexión de espín se cancela.

Debido a que $\Psi = S^{-1}\tilde{\Psi}$, cualquier derivada $\partial_\mu \psi$ tiene 2 términos:

$$\partial_\mu \Psi = \partial_\mu [S^{-1}\tilde{\Psi}] = -S^{-2}(\partial_\mu S)\tilde{\Psi} + S^{-1}\partial_\mu \tilde{\Psi}$$

Consideramos cada coordenada

1. Derivada temporal (dirección t):

Como $S(r, \theta)$ no depende de t ,

$$\gamma^t \partial_t \Psi = \gamma^t S^{-1} \partial_t \tilde{\Psi}.$$

2. Derivada azimutal (dirección ϕ):

De manera similar, $S(r, \theta)$ no depende de ϕ ,

$$\gamma^\phi \partial_\phi \Psi = \gamma^\phi S^{-1} \partial_\phi \tilde{\Psi}.$$

3. Derivada radial: para la derivada radial, obtenemos 2 partes:

$$\gamma^r \partial_r \Psi = \gamma^r [-S^{-2}(\partial_r S) \tilde{\Psi} + S^{-1} \partial_r \tilde{\Psi}]$$

El término $-\gamma^r S^{-2}(\partial_r S) \tilde{\Psi}$ se combinará con la parte de $\Gamma(r, \theta)$ que depende de $f(r)$ y su derivada $f'(r)$. Debido a que la conexión de espín para Schwarzschild posee un término proporcional a $f'(r) = \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, uno encuentra que todas esas contribuciones se cancelan si se sigue el factor $S^{-2}(\partial_r S)$.

4. Derivada polar: similar a la anterior se obtienen dos partes

$$\gamma^\theta \partial_\theta \Psi = \gamma^\theta [-S^{-2} \partial_\theta S \tilde{\Psi} + S^{-1} \partial_\theta \tilde{\Psi}].$$

Mientras tanto, $\Gamma(r, \theta)$ tiene una pieza proporcional a $\gamma^\theta \cot \theta$, el término $-\frac{1}{2} \cot \theta$ proveniente de la derivada de S se combina con $+\frac{1}{2} \cot \theta$ presente en la conexión de espín y se cancelan. Cuando todas las piezas se combinan, vemos que los términos extra de la derivada de $S(r, \theta)$ precisamente cancelan lo términos de conexión de espín de $\Gamma(r, \theta)$. Concretamente,

$$\gamma^\mu \partial_\mu [S^{-1} \tilde{\Psi}] + \Gamma(r, \theta) [S^{-1} \tilde{\Psi}] = S^{-1} \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\Psi},$$

una vez que las cancelaciones se efectúan.

Por lo tanto, la ecuación de Dirac se convierte en

$$S^{-1} \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\Psi} = m S^{-1} \tilde{\Psi}$$

o después de multiplicar ambos lados por S se obtiene una ecuación análoga a (6.25)

Por lo tanto, después de aplicar la transformación del campo a Ψ la ecuación de Dirac en Schwarzschild colapsa a

$$\gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\Psi} = m \tilde{\Psi} \quad (6.66)$$

comportándose así, de manera muy similar al operador de Dirac en el espacio plano. Esto simplifica enormemente el análisis subsecuente.

Uno siempre puede elegir los espinores de tal forma que sean funciones propias del operador momento angular

$$L\Psi := \left(\partial_\theta + \frac{\partial_\phi}{\sin \theta} \right) \Psi = -i\lambda \gamma^0 \gamma^1 \Psi, \quad (6.67)$$

donde el autovalor λ satisface $\lambda^2 = \left(j + \frac{1}{2} \right)^2$ como la partícula posee espín medio, el momento angular total j puede ser cualquier medio entero, de forma que λ^2 puede ser cualquier entero positivo. Para obtener una ecuación de onda diagonalizable se multiplica por \sqrt{f} . Definimos el operador

$$\mathfrak{d} = \sqrt{f} \gamma^\mu \partial_\mu.$$

Al multiplicar (6.66) por \sqrt{f} , queda

$$d\Psi = \sqrt{f} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = m \sqrt{f} \Psi,$$

llamaremos a este último lado $\bar{m}\Psi$ con $\bar{m} = m\sqrt{f}$ para abreviar en el siguiente paso.

Para aislar algo que luzca como $-\partial_t^2 + \partial_*^2$ (es decir, un operador tipo onda), se toma la ecuación anterior y se aplica de nuevo un operador tipo $\gamma^\nu \partial_\nu$ o, de forma análoga, se contempla $\mathfrak{d}^2 \Psi$.

De manera esquemática:

1. Partimos de

$$\mathfrak{d}\Psi = \bar{m}\Psi.$$

2. Aplicamos nuevamente \mathfrak{d} u otra combinación equivalente (teniendo cuidado con los conmutadores, pues \sqrt{f} y ∂_μ no conmutan). El objetivo es que al expandir surjan

- un término $-\partial_t^2 + \partial_*^2$ (el término de "onda" de la izquierda,

- un término que recoja $f(m^2 + \dots)$ (típico de los potenciales efectivos en la ecuación resultante),
- correcciones adicionales que, tras agruparse y usar las propiedades de $\gamma^\mu \gamma^\nu$, dan la pieza $\gamma^1 \partial_*(\dots) \Psi$.

3. De este modo se obtiene una ecuación con la estructura

$$(-\partial_t^2 + \partial_*^2) \Psi = (\text{términos con } f(\dots) \Psi) + (\text{términos que involucran } \partial_* \text{ y } \gamma^1).$$

Tras realizar estas expansiones el resultado es

$$(-\partial_t^2 + \partial_*^2) \Psi = f \left(m^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right) \Psi + \gamma^1 \partial_* \left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \Psi. \quad (6.68)$$

Podemos simplificar aún más esta ecuación sustituyendo en la forma de primer orden. El objetivo es desplegar el término $\gamma^1 \partial_* \left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \Psi$ y reorganizarlo para que aparezcan derivadas de Ψ (del tipo $\partial_* \Psi$ y $\partial_t \Psi$ y factores que, en última instancia, adoptan la forma proporcional a $\frac{M}{r^2}$). Se verá el procedimiento de manera esquemática:

1. Separar y expandir la derivada ∂_* :

El término crítico en (6.68) es

$$\gamma^1 \partial_* \left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \Psi,$$

podemos expandir la derivada de un producto de función por Ψ así:

- Derivada de la parte escalar $m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1$.
- Derivada de Ψ , ya que en general $\partial_*[\phi(r)\Psi(r)] = \phi'(r)\Psi + \phi(r)\partial_*\Psi$.

Es decir

$$\gamma^1 \partial_* \left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \Psi = \gamma^1 \left[\left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right)' \Psi + \left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \partial_* \Psi \right]$$

La notación $\left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right)'$ denota la derivada de esta función escalar respecto de r_* .

Recordemos que $\frac{d}{dr_*} = f(r) \frac{d}{dr}$.

2. Agrupar los términos con $\partial_* \Psi$

Al expandir aparece un término $\gamma^1 \left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \partial_* \Psi$. Buena parte de la forma final de la ecuación consiste en reconocer que $\left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right)$ está construida para combinarse con $\partial_* \Psi$ o, en ciertos textos, con la combinación $\partial_* - \sigma \partial_t$.

En la versión final a la que queremos llegar, a menudo se define $\sigma = \pm 1$ (el signo del espín radial) y se aprovecha que $i\gamma^0 \gamma^1$ puede intercambiarse por $\sigma \partial_t$ o $\sigma \omega$ cuando se sustituye la dependencia temporal $e^{-i\omega t}$. Aunque los detalles exactos varían de acuerdo a la convención de las matrices γ^μ , la clave es que

- $\gamma^0 \gamma^1$ actúa como una matriz, que al proyectarse en los componentes espinoriales, puede convertirse en una derivada temporal efectiva $\partial_t \Psi$ (o un factor $\omega \Psi$) cuando el modo tiene la forma $e^{-i\omega t}$.
- Aparecen factores proporcionales a $\frac{M}{r^2}$ porque $\partial_* \sqrt{f}$ y $\sqrt{f} \partial_* \left(\frac{1}{r} \right)$ generan combinaciones como $\frac{M}{r^2} \dots$.

3. En Schwarzschild, como no hay más términos adicionales, queda únicamente el factor $\frac{M}{r^2}$ que multiplica la combinación de derivadas $\partial_* \Psi$ (y, en ciertos textos, $\partial_t \Psi$).

El resultado final, tras reordenar, se puede escribir como

$$(-\partial_t^2 + \partial_*^2) \Psi = f \left(m^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right) \Psi + \frac{M}{r^2} \mathcal{D} \Psi,$$

donde \mathcal{D} es un operador de primer orden (por ejemplo $\partial_* - \sigma \partial_t$ dependiente de cómo se absorban los γ^μ). El término con $\gamma^1 \partial_* \left(\left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \Psi \right)$ se rompe en una parte $\left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right)' \Psi$ que pasa al "potencial efectivo" y otra parte $\left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \gamma^1 \partial_* \Psi$ (que, junto con proyecciones espinoriales, se reescribe como $\frac{M}{r^2} \left(m\sqrt{f} + \frac{i\lambda\sqrt{f}}{r} \gamma^0 \gamma^1 \right) \partial_* \Psi$ o similar).

La razón de que se obtenga esta forma de la ecuación es que, tras esas expansiones y el uso de la condición de espín $\sigma = \pm 1$ se diagonaliza la acción de $\gamma^0 \gamma^1$ en los componentes de Ψ . Para cada

componente espinorial se obtiene, en esencia,

$$(-\partial_t^2 + \partial_*^2)\Psi_i = f\left(m^2 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right)\Psi_i + \frac{M}{r^2}(\partial_* - \sigma\partial_t) + \frac{i\lambda f^{3/2}}{r^2}(\gamma^0\Psi)_i \quad (6.69)$$

El último término de esta última ecuación es el único que no es diagonal en el espacio espinorial. Como analizaremos esta ecuación usando el método WKB, este último término no contribuye al orden dominante de la solución en la aproximación WKB y adicionalmente este término únicamente introduce correcciones subdominantes que, en última instancia, para el cálculo de la tasa de emisión o el factor exponencial de tunelaje, son irrelevantes.

Para RN (sin acople electromagnético) el proceso es análogo, únicamente se añade el término de la carga a la conexión de espín, así pues llegamos a

$$(-\partial_t^2 + \partial_*^2)\Psi_i = f\left(m^2 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right)\Psi_i + \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\right)(\partial_* - \sigma\partial_t)\Psi_i + \frac{\lambda f^{3/2}}{r^2}(\gamma^0\Psi)_i \quad (6.70)$$

Reintroduciendo el potencial electromagnético da una ecuación muy similar a esta. Hay un término de acople espín-campo, es decir, el término σE de la ecuación (2.50) que actúa de manera análoga y redefinimos la derivada covariante para incluir el potencial electromagnético de la forma que se muestra en (6.36)

$$-\left(\partial_t + \frac{iqQ}{r}\right)^2 \Psi_i + \partial_*^2 \Psi_i = f\left(m + \frac{(j+1/2)^2}{r^2}\right)\Psi_i + \left(\frac{M^2}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\right)\left(\partial_* - \sigma\left(\partial_t + \frac{iqQ}{r}\right)\right)\Psi_i - i\sigma f \frac{qQ}{r^2}\Psi_i$$

Bibliografía

- [1] T Padmanabhan. “Gravitation: Foundations and Frontiers”. En: Cambridge University Press, 2010. Cap. Quantum Field Theory in curved spacetime, págs. 591-624.
- [2] Eric Poisson. “A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black Hole Mechanics”. En: Cambridge University Press, 2007. Cap. Black Holes, págs. 163-216.
- [3] S Hawking. “Black Hole Explosions”. En: *Nature* (1974).
- [4] Chau T et al. “Hawking radiation under generalized uncertainty principle”. En: *The European Physical Journal C* (2023). URL: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1140/epjc/s10052-023-12302-3.pdf>.
- [5] J Schwinger. “On Gauge invariance and vacuum polarization”. En: *Physical Review* (1951).
- [6] G Johnson. “Tunneling of charged particles from black holes”. En: *Journal of high Energy Particles* (2020). URL: [https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP03\(2020\)038](https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP03(2020)038).
- [7] F Parikh M & Wilczek. “Hawking Radiation as Tunneling”. En: *Physical Review Letters* (2000).
- [8] Sean Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. Institute for theoretical physics, 1997.
- [9] Robert Wald. “General Relativity”. En: The University of Chicago Press, 1984. Cap. Black Holes, págs. 298-339.
- [10] Kip Thorne & John Wheeler Charles Misner. “Gravitation”. En: W. H. Freeman y Company, 1971. Cap. Part VII: Gravitational Collapse and Black Holes, págs. 871-940.
- [11] D Scevola. *Derivation of Hawking radiation by analogy with the Unruh effect*. 2023.

- [12] Bardeen J. Carter B & Hawking S. “The Four Laws of Black Hole Mechanics”. En: *Springer Verlag* (1973).
- [13] Jacob Bekenstein. “Black Holes and Entropy”. En: *Physical Review D* (1972).
- [14] C Shannon. “A mathematical Theory of Communication”. En: *The Bell System Technical Journal* (1948).
- [15] Zel’dovich Y. & Starobinsky A. “Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field”. En: *Soviet Physics JETP* (1972).
- [16] D Kim S & Page. “Remarks on Schwinger Pair Production by Charged Black Holes”. En: *8th Italian-Korean Symposium on Relativistic Astrophysics* (2018).
- [17] H Heisenberg W & Euler. “Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons”. En: *Zeitschrift für Physik* (1936).
- [18] A.I. Nikishov. “Barrier Scattering in field theory removal of Klein Paradox”. En: *Nuclear Physics B* (1970).
- [19] J Fernández. “Radiación de Hawking”. En: *Revista Mexicana de Física* (2010).
- [20] Massar S & Parentani R. “How the change in horizon area drives black hole evaporation”. En: *Nuclear Physics B* (2000).
- [21] I. Khriplovich. “Particle creation by charged black holes”. En: *Physics Reports* (1999).
- [22] Peter Collas & David Klein. *The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations*. Springer, 2019.