



**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO**

**COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERÍA**

**Relatividad General: Cálculo del Retardo de Señales de Radar  
con Aproximación a Segundo Orden, y Radiación Gravitacional**

**Valerio Joaquin Grefa Jumbo**

**Carlos Marín, PhD., Director de Tesis**

Tesis de grado presentada como requisito  
para la obtención del título de Licenciado en Física

Quito, 12 de Diciembre del 2013

Universidad San Francisco de Quito  
Colegio de Ciencias e Ingeniería

## HOJA DE APROBACIÓN DE TESIS

Relatividad General: Cálculo del Retardo de Señales de Radar con  
Aproximación a Segundo Orden, y Radiación Gravitacional.

**Joaquin Grefa**

Carlos Marín, PhD. ....  
Director de la Tesis

Edgar Carrera, PhD. ....  
Miembro del Comité de Tesis

Carlos Montúfar, PhD. ....  
Miembro del Comité de Tesis

Darío Niebieskikwiat, PhD. ....  
Director Dep. Física

César Zambrano, Ph.D. ....  
Decano de Ciencias  
Colegio de Ciencias e Ingeniería

Quito, 12 de Diciembre del 2013

## © DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad San Francisco de Quito y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo de investigación quedan sujetos a lo dispuesto en la Política.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo de investigación en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma:

-----

Nombre: Valerio Joaquin Grefa Jumbo

C.I.: 172274129-3

Fecha: 12 de Diciembre del 2012

## AGRADECIMIENTOS

*A todos los profesores que me han guiado a lo largo de mi vida universitaria, en especial, al profesor Carlos Marín por su apoyo, dedicación, asistencia y confianza al encomendarme la realización de este trabajo.*

*A mi familia y amigos por su apoyo incondicional, y en general a todos los que me brindaron la oportunidad de estudiar física en la mejor universidad del Ecuador, y a quienes impulsaron la realización de este proyecto.*

## DEDICATORIA

*Dedico este trabajo a todos los héroes de la física; en especial, a aquellos que no recibieron el reconocimiento que se merecían en su tiempo. Entre ellos, destaca la figura de Nikola Tesla, el hombre que iluminó al mundo.*

## Resumen

La primera parte de este trabajo trata acerca del retraso de la luz en presencia de un campo gravitacional. A partir de la métrica de Schwarzschild, se calculó el retardo de las señales de radar debido al campo gravitacional de una estrella con aproximación a segundo orden en el potencial gravitacional. Debido a que los términos de segundo orden en el potencial gravitacional del retardo son despreciables para campos gravitacionales débiles, como es el caso del sistema solar, se calculó la contribución de estos términos al retardo para el caso de campos gravitacionales fuertes como los causados por agujeros negros. Adicionalmente, se derivó la dependencia angular del retardo para una fuente distante de señales como un pulsar. La dependencia angular concuerda con las gráficas obtenidas para el retardo de las señales enviadas entre la Tierra y los planetas Mercurio, Venus y Marte.

En la segunda parte de este trabajo se calculó el decaimiento orbital de un sistema binario de estrellas a partir de la fórmula del cuadrupolo obtenida a partir de la Teoría General de la Relatividad (con aproximación de campo lineal). De la misma forma se obtuvo las expresiones para el decrecimiento del semieje mayor y la distancia radial entre los cuerpos, y la pérdida de momento angular orbital. Se utilizó los resultados anteriores para realizar un análisis del sistema PSR1913+16 y confirmar las predicciones de la TGR. Se analizó brevemente la falta de concordancia entre los datos obtenidos de PSR1913+16 y las predicciones alternativas de gravitación. Finalmente, se analizó otros pulsares binarios para contrastar las predicciones de la TGR.

## Abstract

The first part of this work treats the problem of signal retardation in the presence of a gravitational field. The light delay due to a gravitational field was calculated from the Schwarzschild metric with a second order approximation of the gravitational potential. Because the second order terms of the delay are negligible for weak gravitational fields, which is the case for the solar system, the contribution of these terms to the light delay for strong gravitational fields was calculated, in particular, for the fields produced by black holes. In addition, the angular dependency of the delay for a distant source, a pulsar for example, is derived. This angular dependency is in agreement with the graphics obtained for the delay of signals sent from Earth to Mercury, Venus and Mars.

In the second part of this work, the orbital decay of a binary system was calculated by using the quadrupole formula obtained from The General Theory of Relativity (linear field approximation). Similarly, the expressions for the semi-major axis and radial distance decay, and angular momentum loss were also obtained. With the previous results, an analysis of the binary pulsar PSR1913+16 was performed to confirm the predictions of The General Theory of Relativity. Furthermore, a brief comparison between the data obtained from PSR1913+16 and the predictions of alternative gravity theories shows that they are in evident disagreement. Finally, other binary pulsars were also analyzed to contrast the predictions of The General Theory of Relativity.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Teoría General de la Relatividad	11
1.1.1. Fundamentos Básicos	11
1.1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein y Ecuaciones de las Geodésicas	12
1.1.3. Métrica de Schwarzschild	14
1.2. Predicciones y Pruebas de la Teoría General de la Relatividad	16
1.2.1. Pruebas Clásicas	17
1.2.2. Pruebas, predicciones y observaciones modernas	18
<b>2. Retardo de las Señales de Radar Producido por un Campo Gravitacional</b>	<b>20</b>
2.1. Introducción	20
2.2. Cálculo del Retardo de las señales de radar a segundo orden	21
2.2.1. Retardo de las Señales de Radar Producido por Agujeros Negros	29
2.3. Cálculo del retardo de una señal proveniente de una fuente distante	30
2.4. Conclusiones	35
<b>3. Radiación Gravitacional proveniente de un Sistema Binario</b>	<b>37</b>
3.1. Ondas Gravitacionales	38
3.2. Radiación de un Sistema Binario	40
3.2.1. Órbitas elípticas	40
3.2.2. Período Orbital	43
3.2.3. Momento Cuadrupolar	46
3.2.4. Luminosidad, la fórmula del cuadrupolo	50
3.2.5. Derivadas con respecto al tiempo del momento cuadrupolar	51
3.2.6. Tasa de Pérdida de Energía	54
3.2.7. Decaimiento del Período Orbital	56
3.2.8. Decrecimiento del semieje mayor	57
3.2.9. Decrecimiento de la distancia entre ambas estrellas ( $r$ )	58
3.2.10. Pérdida de momentum angular orbital a lo largo del eje $z$	60
3.3. PSR1913+16	63
3.3.1. Emisión de radiación gravitacional	65
3.3.2. Decaimiento del período orbital, observación experimental	69
3.3.3. Comentarios adicionales acerca del púlsar binario y otras teorías de gravitación	73
3.4. Otros Sistemas Binarios y la TGR	74
3.4.1. PSR J0737-3039A/B	74
3.4.2. PSR B1534+12	75

3.4.3. PSR B2127+11C . . . . .	76
3.4.4. PSR J1756-2251 . . . . .	77
3.4.5. PSR J1906+0746 . . . . .	77
3.4.6. PSR J1141-6545 . . . . .	78
3.4.7. Resumen . . . . .	79
3.5. Conclusiones . . . . .	80

# 1. Introducción

## 1.1. Teoría General de la Relatividad

### 1.1.1. Fundamentos Básicos

Después de la publicación en 1905 de la Teoría Especial de la Relatividad (TER), Albert Einstein se dedicó a buscar una teoría de gravitación que fuera compatible con la misma. La TER calzaba muy bien con las leyes del electromagnetismo; sin embargo, difería de las predicciones de la ley de gravitación de Newton. Después de darse cuenta de la estrecha relación entre aceleración y campo gravitacional, en 1915, Einstein por fin pudo obtener una teoría del espacio-tiempo curvo a la que denominó Teoría General de la Relatividad (TGR) para diferenciarla de la primera en la que no se consideraban campos gravitacionales [1].

Para el desarrollo de su teoría (TGR), Einstein se basó en 5 principios [2]:

1. Principio de Mach.- Las propiedades inerciales de un objeto están definidas por la presencia de otros cuerpos en el universo. Un enunciado general de este principio sería: “Las leyes de la física a nivel local están determinadas por la estructura del universo a gran escala” [3].
2. Principio de equivalencia.- La masa gravitacional de un objeto es equivalente a su masa inercial [2].
3. Principio de Covarianza.- En la TER, todos los observadores inerciales son equivalentes. En la TGR el principio de covarianza establece que todos los observadores, ya sea que estén en marcos de referencia inerciales o no, deben observar las mismas leyes de la física [2]. Esto nos permite expresar las leyes de la física por medio de tensores (entes que son invariantes en las transformaciones de coordenadas).
4. Principio de Correspondencia.- Este principio establece que bajo la influencia de campos gravitacionales débiles y a velocidades muy inferiores a la velocidad de la luz, las predicciones de la TGR deben ser aproximadamente las mismas que las predicciones de la teoría clásica de Newton. Cuando los campos gravitacionales sean cero, la TGR se debe reducir a la TER [2].
5. Principio de mínimo acoplamiento gravitacional.- Ningún término que contenga explícitamente la curvatura debe ser añadido al hacer la transición de la TER a la TGR [2].

El principio de equivalencia entre la masa gravitacional y la masa inercial imposibilita la distinción entre aceleración y gravedad. En un experimento mental, Einstein menciona que una persona dentro de un ascensor no podría distinguir si se encuentra en reposo o moviéndose con movimiento rectilíneo uniforme dentro de un campo gravitacional estático o si el ascensor esta desplazándose con aceleración constante en el espacio libre debido a fuerzas que actúan sobre él.

Einstein se dió cuenta que para que el principio de equivalencia fuera válido, la geometría del espacio-tiempo debería ser curva y no plana. Por lo tanto, la gravedad debe ser un fenómeno del espacio-tiempo curvo, es decir, los efectos de la gravedad deben ser equivalentes a los efectos de estar en un espacio curvo [4]. Como consecuencia, en la Teoría General de la Relatividad, el espacio-tiempo está dotado de una métrica no Euclídeana, y las trayectorias de los objetos son geodésicas relacionadas con esa métrica. Como dice Hawking, objetos como manzanas o planetas tratarían de moverse en líneas rectas a través del espacio-tiempo, pero sus caminos parecerían ser doblados por el campo gravitacional debido a que el espacio-tiempo es curvo [1].

La distancia más corta entre dos puntos en una superficie curva es una geodésica. Tomando como ejemplo la superficie de la Tierra, la distancia más corta entre dos ciudades, por ejemplo Quito y Londres, no sería una línea recta, sino un arco de círculo máximo, una geodésica. Al decir que la gravedad es un fenómeno puramente geométrico, el concepto de fuerza no tiene que entrar en discusión; de tal manera que, los planetas se mueven en trayectorias elípticas alrededor de la estrellas no debido a una fuerza gravitacional, sino debido a que la estrella curva el espacio-tiempo a su alrededor por su distribución de masa y energía. De esta manera, los planetas recorren una trayectoria lo más parecida a una recta en el espacio-tiempo curvo, una elipse [5].

Aunque la formulación del primer principio, principio de Mach, pueda ser no muy clara, este principio guió a Einstein a la idea de que la distribución total de materia determina el tensor métrico. El principio de covarianza generaliza la idea de que cualquier lugar en el universo se encuentra sometido a las mismas leyes de la física; no hay ningún lugar o marco de referencia en especial que esté exento de estas leyes. Finalmente, los principios de Correspondencia y de mínimo acoplamiento gravitacional establecen que no se debería tener problemas al hacer la transición de la Teoría General de la Relatividad hacia la Teoría Especial de la Relatividad o a La ley de Gravitación Universal y viceversa.

### 1.1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein y Ecuaciones de las Geodésicas

A la Teoría General de la Relatividad se la puede resumir en 14 ecuaciones [5, 6]. Las ecuaciones de Campo de Einstein (10 ecuaciones) escritas en forma tensorial son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde  $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$  es el escalar de curvatura. A  $R_{\mu\nu}$  se le conoce como Tensor de Ricci definido a partir del Tensor de Riemann-Christoffel,  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ , que determina la curvatura del espacio-tiempo. El tensor de Ricci es:  $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$  donde

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho}(\Gamma^\mu_{\nu\sigma}) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\nu\rho}\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \quad (1.2)$$

$g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico que determina las propiedades geométricas del espacio-tiempo.  $G$  es la constante de gravitación universal cuyo valor es  $6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ N(m/kg)}^2$ [7];  $c$  es la

velocidad de la luz en el vacío,  $c = 299792458$  m/s, y  $\lambda$  es la constante cosmológica que Albert Einstein introdujo en 1917 debido a sus concepciones de un universo estático. Ahora sabemos que el universo se está expandiendo; sin embargo, la constante cosmológica no es cero y representa la contribución a la densidad de energía del universo debido a las fluctuaciones del vacío. Su valor es  $|\lambda| < 3 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ . El inverso de la raíz cuadrada de la constante cosmológica es una medida de la escala de distancia en la cual la geometría del espacio-tiempo es afectada por fluctuaciones del vacío [5, 1].

$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}$  son los símbolos de Christoffel de segunda especie:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \right\} \quad (1.3)$$

Finalmente  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-cantidad de movimiento que tiene en cuenta todos los campos de materia y radiación.

Las ecuaciones de las geodésicas (4 ecuaciones) son:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \left( \frac{dx^{\rho}}{ds} \right) \left( \frac{dx^{\sigma}}{ds} \right) = 0 \quad (1.4)$$

donde  $x^{\mu}$  es el cuadrivector posición de la partícula. Los índices  $\alpha, \beta, \mu, \rho$ , etc. toman los valores 0, 1, 2 y 3. En particular para coordenadas esféricas  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  y  $x^3 = \phi$ .

En la ecuación (1.4),  $s$  es el arco de curva que cumple con la siguiente relación:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (1.5)$$

En todas las ecuaciones se debe tomar en cuenta la convención de suma de Einstein en la que se debe sumar sobre índices que se repiten dos veces.

Si en la ecuación (1.1) hacemos que la constante cosmológica sea cero,  $\lambda = 0$ , obtenemos:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein. Podemos claramente notar a partir de la ecuación (1.6) que la curvatura del espacio-tiempo está afectada por la distribución de materia y energía representada por  $T_{\mu\nu}$ .

Las ecuaciones de Campo de Einstein se deducen formalmente a partir de la “Acción de Einstein-Hilbert” [5, 8]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (L_G - 2kL_F + 2\lambda) \quad (1.7)$$

donde  $L_G = R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ,  $L_F$  es el lagrangiano de todos los campos de materia y radiación,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , y  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$  [5].

Al aplicar cálculo variacional se puede obtener la forma del tensor energía-cantidad de momento  $T_{\mu\nu}$ .

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)} \right) \right] \quad (1.8)$$

### 1.1.3. Métrica de Schwarzschild

Las ecuaciones de campo de Einstein (1.1) son ecuaciones diferenciales parciales no lineales difíciles de resolver de forma exacta. En un principio, Albert Einstein usó soluciones aproximadas para encontrar las primeras predicciones de la teoría. Sin embargo, Karl Schwarzschild encontró una solución exacta para (1.1) en 1916, la llamada métrica de Schwarzschild que se usa para analizar un campo gravitacional estático con simetría esférica [5, 6, 9]. El cuadrado de elemento de arco es:

$$(ds)^2 = \gamma (cdt)^2 - \gamma^{-1} (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2(\sin\theta d\phi)^2 \quad (1.9)$$

de tal forma que el tensor métrico covariante esta dado por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

y el contravariante:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

donde  $\gamma = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$ ,  $M$  es la masa del cuerpo que genera el campo gravitacional.  $r$ ,  $\theta$ , y  $\phi$  son las coordenadas esféricas de un punto alrededor de la masa  $M$  y  $t$  es el tiempo coordenado. El intervalo invariante también se puede escribir en términos del tiempo propio,  $\tau$ . El tiempo propio es el tiempo medido por un observador que se encuentra dentro del campo gravitacional, mientras que el tiempo coordenado es el medido por un observador que se encuentra muy lejos de dicho campo:

$$ds = cd\tau \quad (1.12)$$

La ecuación (1.9) tiene dos singularidades. La primera es cuando  $\gamma = 0$ , es decir, cuando el

radio es igual al radio de Schwarzschild.

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

El radio de Schwarzschild define el horizonte de sucesos para un agujero negro. Esta singularidad puede ser removida mediante un cambio de coordenadas, tal como lo hicieron Eddington en 1924 o Finkelstein en 1958 [5]:

$$\hat{t} = t \pm \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (1.13)$$

Con lo cual el cuadrado del intervalo invariante se escribe:

$$(ds)^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (d\hat{t})^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) (dr)^2 \mp 2c \frac{r_s}{r} d\hat{t}dr - r^2 (d\Omega)^2 \quad (1.14)$$

en la cual ya no se presenta la singularidad y donde  $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2$  es el cuadrado del elemento de ángulo sólido.

La otra singularidad se presenta cuando  $r = 0$  y no puede ser removida matemáticamente. En esta singularidad la curvatura del espacio-tiempo es infinita y todas las leyes de la física fallan [5].

La primera transformación en (1.13)

$$\hat{t} - t = \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (1.15)$$

Representa a un agujero negro, mientras que la segunda transformación

$$\hat{t} - t = -\frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (1.16)$$

representa un “agujero blanco” que emite material desde la singularidad  $r = 0$ .

Es necesario resaltar que en ausencia de un campo gravitacional, la métrica se reduce a la métrica de un espacio-tiempo plano. A esta métrica se la conoce como métrica de Minkowski [8, 6, 10] que no es más que un espacio-tiempo descrito por la geometría euclideana, y en coordenadas cartesianas es:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

## 1.2. Predicciones y Pruebas de la Teoría General de la Relatividad

Cuando la Teoría General de la Relatividad fue presentada por primera vez, la confirmación experimental fue una cuestión secundaria, aunque Einstein calculó efectos observables como por ejemplo el avance del perihelio del planeta Mercurio, que para aquel tiempo era un problema sin resolver, y el desvío de los rayos de luz producido por el campo gravitacional del sol que fue confirmado posteriormente. Hoy en día la gravitación experimental es un componente muy activo dentro de la teoría que se caracteriza por la búsqueda de nuevas oportunidades para probar las predicciones de la TGR y otras teorías relacionadas. Tal es el caso del esfuerzo por encontrar agujeros de gusano (wormholes) o detectar ondas gravitacionales, etc [4].

Desde el punto de vista experimental la Teoría de la Relatividad se puede dividir en cuatro períodos[4]:

1. Génesis (1887-1919).- Este es el período en el que se llevaron a cabo dos experimentos que representaron el inicio de la física relativista: el experimento de Michelson-Morley y el experimento de Eötvös. En esta misma época se confirmó dos predicciones de la TGR: la desviación de los rayos de luz provocados por el campo gravitacional del sol y el avance del perihelio del planeta Mercurio.
2. Hibernación (1920-1960).- En esta época las predicciones, cálculos y en general el trabajo teórico no pudo ser puesto a prueba experimentalmente debido a limitaciones tecnológicas.
3. Era Dorada (1960-1980).- Algunos descubrimientos astronómicos como pulsares, cuántares, la radiación de fondo de microondas hicieron que la TGR y otras teorías alternativas de gravedad fueran puestas a prueba. Nuevos experimentos a nivel mundial junto con las predicciones de la TGR y otras teorías de gravedad fueron contrastados. Todos los resultados de estos experimentos respaldaron la TGR de Einstein, pero la mayoría de teorías alternativas no concordaron con la evidencia experimental [11]. A este período pertenecen la confirmación experimental del cambio en la frecuencia de la luz producido por un campo gravitacional (1960) y el decaimiento del período orbital del pulsar Hulse-Taylor (1979) debido a emisión de ondas gravitacionales.
4. Búsqueda de Campos Gravitatorios Fuertes (Desde 1980).- A pesar de que ya se han conducido muchos experimentos que involucran nuestro propio sistema solar, varios experimentos y predicciones de la teoría en campos gravitatorios débiles aún están limitados por nuestra tecnología y requieren un desarrollo previo de la misma. Ejemplo de estos experimentos son el uso de átomos enfriados por láser y trampas de iones para pruebas ultra-precisas de la TER, la propuesta de una “quinta fuerza” que guió a nuevas pruebas del principio de equivalencia, e ideas acerca de dimensiones extra. En lugar de esto, la atención se ha centrado en experimentos que puedan probar los efectos de campos gravitatorios fuertes [4].

Para poder diferenciar entre los regímenes de campos gravitatorios débiles y fuertes, analizamos el factor  $\varepsilon \sim GM/(Rc^2)$ , donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  es la escala de masa característica del fenómeno a analizar,  $R$  es una distancia característica, y  $c$  es la velocidad de la luz. Para el sistema solar  $\varepsilon < 10^{-5}$ , este es el régimen de campos gravitatorios débiles. Cerca del horizonte de sucesos de un agujero negro desprovisto de rotación  $\varepsilon \sim 0.5$ , y para una estrella de neutrones  $\varepsilon \sim 0.2$ . Estos ejemplos pertenecen al régimen de campos gravitatorios fuertes.

### 1.2.1. Pruebas Clásicas

#### Avance del Perihelio de Mercurio

La explicación del avance del eje mayor de la órbita del planeta Mercurio fue uno de los mayores triunfos de la TGR. El fenómeno anómalo del avance del perihelio de Mercurio había sido un problema sin resolver por más de medio siglo. Le Verrier en 1859, después de haber hecho las correcciones correspondientes a los datos tomados de la órbita de Mercurio, reportó que aún había un corrimiento del perihelio de la órbita del planeta que no podía ser explicado [4]. En aquel tiempo se propusieron varias teorías sin mayor fundamento ni éxito, por ejemplo, la existencia de un planeta, al cual se le nombró Vulcano, en las cercanías del Sol, una nube de asteroides alrededor del Sol o una desviación en el exponente de la ley del Newton del inverso del cuadrado de la distancia [12]. Las órbitas de los planetas predichas por la TGR son casi las mismas que la teoría de Newton predice. Sin embargo, la teoría de Einstein predice que el eje mayor de la órbita de un planeta también debe girar alrededor del Sol. Mercurio, al ser el planeta más cercano al Sol, debe estar mucho más expuesto a sus efectos gravitacionales en comparación con los demás planetas. El eje mayor de la elipse de Mercurio avanza a una razón de un grado cada 10.000 años [5]. La expresión matemática para el avance del perihelio de cualquier planeta es la siguiente:

$$\chi = \frac{6\pi M_{\odot} G}{a(1 - \epsilon^2)c^2} \quad (1.18)$$

donde  $M_{\odot}$  es la masa de la estrella,  $a$  es el semieje mayor de la órbita del planeta, y  $\epsilon$  es la excentricidad de la órbita.

La medida del avance del perihelio de Mercurio es conocida exactamente y tan solo difiere cerca de un 0.5 % del valor medido mediante observaciones de radar durante la década de los 70 [13].

#### Desviación de la Luz provocada por el Sol

La teoría de gravitación de Newton predecía que un rayo de luz podría ser desviado por acción del campo gravitacional del Sol. De hecho aquel fenómeno fue calculado por Cavendish en 1784 y por von Soldner en 1803. Sin embargo, estos cálculos solo produjeron 1/2 del valor real. La TGR

predijo el valor completo de la desviación de los rayos de luz y fue uno de los mayores éxitos de la teoría. La confirmación experimental estuvo a cargo de Eddington, en la cual, durante un eclipse solar, se observó y se midió la desviación de los rayos de luz provenientes de una Estrella. Aunque Eddington solo pudo obtener un 30 % de exactitud, experimentos posteriores confirmaron con mayor exactitud la predicción de la teoría [13].

Para un rayo de luz que pasa cerca del limbo del Sol, su desviación está dada por la expresión [5]:

$$\Phi = \frac{4GM_{\odot}}{R_{\odot} c^2} \quad (1.19)$$

donde  $R_{\odot}$  es el radio del Sol. Para el Sol  $\Phi = 1.7505$  segundos de arco.

### Corrimiento al Rojo Gravitacional

El corrimiento al rojo de una onda de luz fue predicha por Albert Einstein en 1907 a partir del principio de equivalencia. Por lo tanto, no sólo representa una prueba de la TGR sino que también es un fenómeno predicho por las teorías alternativas de gravedad formuladas a partir del mismo principio de equivalencia. Sin embargo, la confirmación de la existencia de este fenómeno apoyó la validéz de uno de los principios fundamentales en los que se basan estas teorías de gravedad [13]. El experimento de corrimiento al rojo gravitacional básicamente mide el cambio de la longitud de onda o su frecuencia  $Z = -\Delta\nu/\nu = \Delta\lambda/\lambda$  entre dos señales idénticas o relojes colocados en reposo a diferentes alturas en un campo gravitacional estático. A este experimento se le conoce como corrimiento al rojo gravitacional porque cuando un fotón se propaga hacia arriba, alejándose del campo gravitacional de la Tierra, pierde energía y su longitud de onda se incrementa de manera que la luz se torna rojiza.

#### 1.2.2. Pruebas, predicciones y observaciones modernas

##### Lentes Gravitacionales

Como resultado de la desviación de la luz por los campos gravitacionales, la TGR predice la existencia de lentes gravitacionales. Si tenemos una zona con un campo gravitacional muy fuerte, como es el caso de una galaxia, ubicada entre una fuente muy luminosa, como un quásar, y la Tierra, veremos que los rayos de luz provenientes de dicha fuente son enfocados debido al campo gravitacional de la galaxia produciéndose varias imágenes de la fuente [5].

##### Agujeros de Gusano (Wormholes)

Una de las fantásticas predicciones de la TGR es la probable existencia de los wormholes. Un wormhole es una especie de túnel en el hiperespacio que conecta dos puntos en el universo. Fueron

descubiertos matemáticamente como una de las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en un artículo escrito en 1935 por Albert Einstein y Nathan Rosen en el *Physical Review*. Hoy en día son objeto de estudio de varios científicos alrededor del mundo. Los wormholes serían muy útiles para realizar viajes a través del universo. Este viaje se podría realizar recorriendo unos pocos kilómetros a través de un túnel en el hiperespacio. Hoy en día se continúa investigando las condiciones para crear un agujero de gusano que sea practicable [5, 14, 15, 16].

También se debe mencionar en esta sección a otras pruebas de la TGR que fueron posibles gracias al desarrollo de la tecnología y que serán abordadas profundamente en los siguientes capítulos: El retardo de las señales de Radar producido por un Campo Gravitacional, y la radiación gravitacional proveniente de un sistema binario de Estrellas.

## 2. Retardo de las Señales de Radar Producido por un Campo Gravitacional

### 2.1. Introducción

Uno de los experimentos que bien podría incluirse dentro del grupo de pruebas clásicas es el retardo de la luz. Este retardo está íntimamente relacionado con el experimento de desviación de los rayos de luz. A partir de la teoría electromagnética uno puede esperar que cualquier mecanismo que doble o desvíe la luz (en nuestro caso un campo gravitacional) también retrase o “disminuya” la velocidad de la luz. Como lo menciona Will, es un misterio el por qué Einstein no descubrió este fenómeno [13]. Sin embargo, este efecto fue descubierto en 1964 por Irwin Shapiro [17] y lo postuló como la cuarta prueba a la que debería ser sometida la TGR. Este fenómeno fue bautizado y es conocido como “Shapiro Delay” o Retardo de Shapiro.

A pesar de su descubrimiento tardío en comparación con las otras tres pruebas clásicas, este experimento llegó de la mano con el desarrollo de la tecnología de los radares que en ese tiempo se utilizaban para detectar misiles soviéticos. Como Shapiro mismo lo reconoce, fue el avance en la tecnología lo que permitió que las señales de radar que fueron enviadas a planetas como Marte, Mercurio y Venus fueran detectadas a su regreso a la Tierra; fue una ventaja que Einstein no poseía en su época [12, 17, 18, 19, 13].

De acuerdo con la TGR, una señal de radar enviada a través del sistema solar hacia un planeta o satélite sufre un retraso producido por el campo gravitacional del Sol. En conjunción superior, es decir, cuando el planeta y la Tierra se encuentran en lados opuestos con el Sol en su centro, el retraso que sufre una señal de radar que pasa muy cerca del limbo del Sol en su viaje de ida y vuelta es [5]:

$$\Delta t = \frac{4GM_{\odot}}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{4r_e r_p}{R_{\odot}^2} \right) + 1 \right] \quad (2.1)$$

donde  $M_{\odot}$  es la masa del sol o estrella,  $r_e = 1.5 \times 10^{11} m$  es la distancia de la Tierra al Sol,  $r_p$  es la distancia del Sol al planeta, y  $R_{\odot}$  es el radio del Sol. Tomando como ejemplo particular el planeta Mercurio con  $r_p = 5.79 \times 10^{10} m$ , la ecuación (2.1) produce  $\Delta t = 239.84 \mu s$ .

Como se dijo anteriormente, la ecuación (2.1) es solo válida en conjunción superior, es decir, sólo para una posición específica. Sin embargo, es posible obtener una expresión general que considera las diferentes distancias entre el planeta y la fuente (la Tierra) tal como lo hace Will [13]:

$$\Delta t = \frac{4GM_{\odot}}{c^3} \ln \left[ \frac{(r_e + \vec{x}_e \cdot \hat{n})(r_p - \vec{x}_p \cdot \hat{n})}{b^2} \right] \quad (2.2)$$

donde  $\vec{x}_p$ ,  $\vec{x}_e$  son los vectores y  $r_p$ ,  $r_e$  son las distancias del Sol al planeta y a la Tierra

respectivamente,  $\hat{n}$  es la dirección del rayo de luz de regreso a la Tierra, y  $b$  es la distancia de máxima aproximación del rayo de luz al sol. Haciendo las aproximaciones necesarias, es decir, que  $b \approx R_{\odot}$ ,  $\vec{x}_e \cdot \hat{n} \approx r_e$ , y  $\vec{x}_p \cdot \hat{n} \approx -r_p$  obtenemos la ecuación (2.1).

En décadas siguientes a la postulación del experimento se realizaron varias medidas de alta precisión enviando señales hacia diferentes objetivos. Como se mencionó anteriormente, se enviaron señales a Venus y Mercurio usando el radio-telescopio de Arecibo con el fin de detectar sus ecos. También se usó satélites artificiales, como los Mariner 6, 7 y 9, Voyager 2, y las sondas Vikingo que fueron enviadas hacia Marte. Todas estas medidas dieron como resultado la confirmación de la predicción de la teoría dentro del 0.1% [18, 19, 20, 21]. Sin embargo, el margen de error disminuyó enormemente a partir del reporte de la nave Cassini en el 2003 mientras viajaba cerca de Saturno, en el cual se reportó que la predicción de la teoría está dentro del 0.0012% [22].

## 2.2. Cálculo del Retardo de las señales de radar a segundo orden

Como se ha visto, los resultados de la ecuación 2.1 son más que satisfactorios para el caso del sistema solar que es un régimen de campo gravitacional débil ya que  $\varepsilon < 10^{-5}$ . Las relaciones (2.1) y (2.2) se obtienen usando una aproximación de primer orden en la métrica de Schwarzschild (1.9). En esta sección se procederá a calcular el retardo de las señales de radar pero con términos de hasta segundo orden para conjunción superior. Empezaremos el cálculo a partir de (1.9):

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \gamma^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

El intervalo de un rayo de luz es cero, es decir,  $ds = 0$  y tomando, sin pérdida de generalidad,  $\theta = \pi/2$  (es decir, trabajando en el plano ecuatorial), reemplazando en (1.9) y dividiendo para  $dt$  se obtiene

$$\gamma c^2 - \gamma^{-1} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = 0 \quad (2.3)$$

utilizando la regla de la cadena

$$r^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = r^2 \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right) \left( \frac{d\tau}{dt} \right) \quad (2.4)$$

y considerando que  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{\gamma m_0 c^2}{E}$  y  $\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2}$  donde  $E$  es la energía y  $J$  el momento angular por unidad de masa del sistema.

Si se reemplaza en (2.4)

$$r^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{J \gamma m_0 c^2}{E} \quad (2.5)$$

Definiendo  $\sqrt{w} = \frac{m_0 c^2 J}{E}$  ( $w$  es una constante porque  $J$  y  $E$  son constantes), con lo cual  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{\gamma^2 w}{r^4}$ , y reemplazando en (2.3).

$$\gamma c^2 - \gamma^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \gamma^2 \frac{w}{r^2} = 0$$

y se evalúa para  $r = b$  en particular, siendo  $b$  la distancia de máxima aproximación del rayo de luz al sol, se anula el segundo término. Con estos reemplazos tenemos que

$$w = \frac{b^2 c^2}{\gamma_b} \quad (2.6)$$

En la expresión anterior  $\gamma_b = \gamma|_{r=b} = 1 - \frac{2GM}{bc^2}$ , de manera que podemos escribir:

$$\gamma^2 c^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{\gamma^3 b^2 c^2}{r^2 \gamma_b} = 0$$

Ahora se despeja el segundo término y se obtiene la raíz cuadrada del mismo

$$\frac{dr}{dt} = \gamma c \left(1 - \frac{b^2 \gamma}{r^2 \gamma_b}\right)^{1/2}$$

De la expresión anterior se obtiene el diferencial de tiempo que nos interesa

$$dt = \frac{dr}{c \gamma \left(1 - \frac{b^2 \gamma}{r^2 \gamma_b}\right)^{1/2}} \quad (2.7)$$

Utilizando la serie  $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$ . Los términos  $\gamma$  y  $\gamma_b^{-1}$  se escriben conservando términos de hasta segundo orden

$$\gamma^{-1} \approx 1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 + \dots$$

$$\gamma_b^{-1} \approx 1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2 + \dots$$

con lo cual

$$dt = \frac{dr \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right)}{c \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2\right)\right]^{1/2}}$$

multiplicando por  $r$  el numerador y el denominador

$$dt = \frac{dr \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right) r}{c \left[r^2 - b^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2\right)\right]^{1/2}}$$

ahora

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2\right) &\approx 1 + \frac{2GM}{bc^2} + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2 - \frac{2GM}{rc^2} - \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{rb} \\ &\approx 1 + \frac{2GM}{c^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \end{aligned}$$

y reemplazando de nuevo en el diferencial de tiempo se obtiene.

$$dt = \frac{dr \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right) r}{c \left[r^2 - b^2 - \frac{2GM}{c^2} b^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right) - \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right)\right]^{1/2}}$$

Los siguientes pasos son simplificaciones algebraicas.

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right) r dr}{c \left\{ (r^2 - b^2) + \frac{r^2 - b^2}{r^2 - b^2} \frac{2GM}{c^2} \left[ \left(\frac{b^2}{r} - b\right) - \frac{2GM}{c^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right] \right\}^{1/2}} \\ dt &= \frac{\left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right) r dr}{c (r^2 - b^2)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{(r+b)(r-b)} \frac{2GM}{c^2} \left[ -b \left(\frac{r-b}{r}\right) - \frac{2GM}{c^2} \left(\frac{r-b}{r}\right) \right] \right\}^{1/2}} \\ dt &= \frac{\left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right) r dr}{c (r^2 - b^2)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{2GM}{(r+b)c^2} \left[ -\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r} \right] \right\}^{1/2}} \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la serie de  $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$  y conservando de nuevo sólo hasta términos de segundo orden se obtiene

$$\left\{ 1 + \frac{2GM}{(r+b)c^2} \left[ -\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r} \right] \right\}^{-1/2} \approx 1 - \frac{GM}{(r+b)c^2} \left[ -\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r} \right] + \frac{3}{8} \left\{ \frac{2GM}{(r+b)c^2} \left[ -\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r} \right] \right\}^2 - \dots$$

Los siguientes pasos son simplificaciones algebraicas.

$$\begin{aligned} &\approx 1 - \frac{GM}{(r+b)c^2} \left[ -\frac{b}{r} - \frac{2GM}{c^2 r} \right] + \frac{3}{2} \left[ \frac{GM}{(r+b)c^2} \right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2 \\ &\approx 1 + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} + \frac{3}{2} \left[ \frac{GM}{(r+b)c^2} \right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

Se procede a reemplazar el resultado anterior en el diferencial del tiempo,

$$dt \approx \frac{\left[1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2\right] \left[1 + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2\right] r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2}}$$

y obtenemos la expresión final de (2.7)

$$dt \approx \frac{\left\{1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2\left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 \frac{b}{r+b} + 2\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2\right\} r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2}} \quad (2.8)$$

Debido a que se considera el tiempo que se demora la señal en ir desde la fuente al planeta y regresar se debe integrar dos veces la misma expresión del diferencial de tiempo, entonces

$$t = 2 \int_b^{r_E} \frac{\left\{1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2\left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 \frac{b}{r+b} + 2\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2\right\} r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2}} \\ + 2 \int_b^{r_P} \frac{\left\{1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 + \frac{GMb}{(r+b)rc^2} + 2\left(\frac{GM}{rc^2}\right)^2 \frac{b}{r+b} + 2\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r(r+b)} + \frac{3}{2} \left[\frac{GM}{(r+b)c^2}\right]^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2\right\} r dr}{c(r^2 - b^2)^{1/2}} \quad (2.9)$$

Donde  $r_E$  y  $r_P$  son las distancias de la estrella a la Tierra y al planeta, respectivamente. No olvidemos que  $b$  es la distancia de máxima aproximación de la trayectoria del rayo de luz al centro de la estrella. Estas variables se pueden visualizar en la figura 2.1.

Las integrales que se presentan en (2.9) y sus respectivas antiderivadas son:

$$\int \frac{r dr}{(r^2 - b^2)^{1/2}} = (r^2 - b^2)^{1/2} + C$$

$$\int \frac{dr}{(r^2 - b^2)^{1/2}} = \ln \left( r + (r^2 - b^2)^{1/2} \right) + C$$

$$\int \frac{dr}{r (r^2 - b^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} \arctan \left[ \frac{(x^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] + C$$

$$\int \frac{dr}{(r+b) (r^2 - b^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} \left( \frac{r-b}{r+b} \right)^{1/2} + C$$

Sin embargo, las siguientes integrales no poseen solución analítica

$$\int \frac{dr}{r(r+b)(r^2-b^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2-b^2)^{1/2}}$$

haciendo uso de los resultados anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned}
t = & \frac{2}{c} (r^2 - b^2)^{1/2} \Big|_b^{r_E} + \frac{2}{c} (r^2 - b^2)^{1/2} \Big|_b^{r_P} + \frac{4GM}{c^3} \ln \left| r + (r^2 - b^2)^{1/2} \right|_b^{r_E} + \frac{4GM}{c^3} \ln \left| r + (r^2 - b^2)^{1/2} \right|_b^{r_P} \\
& + \frac{8(GM)^2}{c^5 b} \arctan \left[ \frac{(r^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right]_b^{r_E} + \frac{8(GM)^2}{c^5 b} \arctan \left[ \frac{(r^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right]_b^{r_P} \\
& + \frac{2GM}{c^3} \left( \frac{r-b}{r+b} \right)^{1/2} \Big|_b^{r_E} + \frac{2GM}{c^3} \left( \frac{r-b}{r+b} \right)^{1/2} \Big|_b^{r_P} \\
& + \frac{4(GM)^2 b}{c^5} \int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)(r^2-b^2)^{1/2}} + \frac{4(GM)^2 b}{c^5} \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)(r^2-b^2)^{1/2}} + \frac{4(GM)^2}{c^5 b} \left( \frac{r-b}{r+b} \right)^{1/2} \Big|_b^{r_E} \\
& + \frac{4(GM)^2}{c^5 b} \left( \frac{r-b}{r+b} \right)^{1/2} \Big|_b^{r_P} + \frac{3(GMb)^2}{c^5} \int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2-b^2)^{1/2}} + \frac{3(GMb)^2}{c^5} \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2-b^2)^{1/2}}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Por otro lado, según la figura 2.1, el tiempo que la señal se tomaría en realizar el viaje de ida y vuelta sin efecto del campo gravitacional del Sol es:

$$t' = \frac{2x_E}{c} + \frac{2x_P}{c}$$

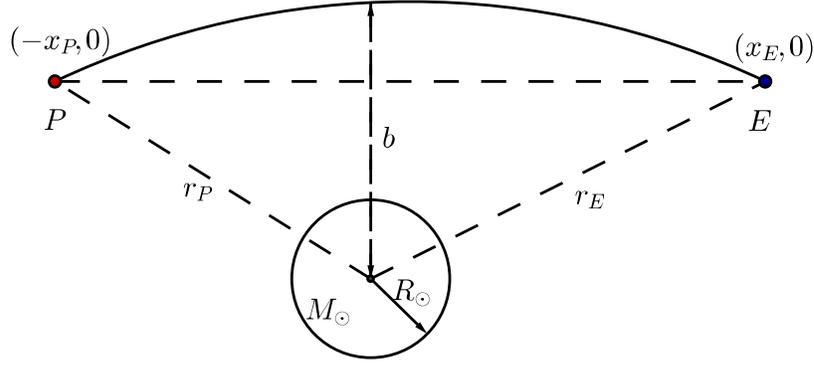


Figura 2.1: Geometría para el cálculo del retardo de la señal a segundo orden para un rayo de luz que se envía desde la Tierra  $E$  que se encuentra en  $(x_E, 0)$  hacia un planeta  $P$  en la posición  $(-x_P, 0)$  en conjunción superior.  $M_\odot$  es la masa del Sol,  $R_\odot$  es el radio del Sol,  $r_E$  y  $r_P$  es la distancia del Sol a la Tierra y del Sol al planeta, respectivamente.

A partir de la figura 2.1 es evidente que

$$t' = \frac{2}{c} \left[ (r_E^2 - b^2)^{1/2} + (r_P^2 - b^2)^{1/2} \right] \quad (2.11)$$

El retardo de las señales de radar no es más que  $\Delta t = t - t'$ . En otras palabras, la diferencia entre el tiempo que se demora la señal en ir y regresar considerando el campo gravitacional del sol, es decir, la geodésica correspondiente al espacio-tiempo curvo producido por el campo gravitacional del sol, menos el tiempo que se demoraría despreciando la gravedad del mismo que corresponde a una trayectoria recta correspondiente a un espacio-tiempo plano en ausencia de campos gravitacionales.

$$\begin{aligned} \Delta t = & \frac{4GM}{c^3} \ln \left( \frac{\left[ r_E + (r_E^2 - b^2)^{1/2} \right] \left[ r_P + (r_P^2 - b^2)^{1/2} \right]}{b^2} \right) + \frac{2GM}{c^3} \left[ \left( \frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \\ & + \frac{8(GM)^2}{c^5 b} \left( \arctan \left[ \frac{(r_E^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] + \arctan \left[ \frac{(r_P^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] \right) + \frac{4(GM)^2}{c^5 b} \left[ \left( \frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \\ & + \frac{4(GM)^2 b}{c^5} \left[ \int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \\ & + \frac{3(GMb)^2}{c^5} \left[ \int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \quad (2.12) \end{aligned}$$

Los primeros dos términos pertenecen a la aproximación de primer orden, es decir,

$$\Delta t_1 = \frac{4GM}{c^3} \ln \left( \frac{[r_E + (r_E^2 - b^2)^{1/2}][r_P + (r_P^2 - b^2)^{1/2}]}{b^2} \right) + \frac{2GM}{c^3} \left[ \left( \frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \quad (2.13)$$

y los términos de la corrección a segundo orden sin tener en cuenta las cuatro últimos integrales son

$$\begin{aligned} \Delta t_2 = & \frac{8(GM)^2}{c^5 b} \left( \arctan \left[ \frac{(r_E^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] + \arctan \left[ \frac{(r_P^2 - b^2)^{1/2}}{b} \right] \right) \\ & + \frac{4(GM)^2}{c^5 b} \left[ \left( \frac{r_E - b}{r_E + b} \right)^{1/2} + \left( \frac{r_P - b}{r_P + b} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Finalmente, expresaremos los términos con las integrales como la contribución final al cálculo del retardo a segundo orden.

$$\begin{aligned} \Delta t_I = & + \frac{4(GM)^2 b}{c^5} \left[ \int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)(r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \\ & + \frac{3(GMb)^2}{c^5} \left[ \int_b^{r_E} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} + \int_b^{r_P} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2 - b^2)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es necesario conocer cual es la contribución de cada término al resultado final, para ello tomaremos un ejemplo en particular para analizar las tres ecuaciones anteriores. Para una señal enviada al planeta Mercurio,  $r_E$  es la distancia de la Tierra al Sol,  $r_P$  la distancia del planeta Mercurio al Sol y en el caso en que el rayo de luz pase muy cerca del limbo del Sol  $b = R_\odot = 6.9551(4) \times 10^8$  m que es el radio del Sol. Entonces se justifican las aproximaciones  $r_E \approx x_E = 1.5 \times 10^{11}$  m,  $r_P \approx x_P = 5.79 \times 10^{10}$  m y  $r_E, r_P \gg b$ .

Como se mencionó anteriormente, se expresa el retardo de las señales de radar como la suma de tres términos:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_I \quad (2.16)$$

donde  $\Delta t_1$  corresponde a la aproximación a primer orden,  $\Delta t_2$  corresponde a los términos de la aproximación a segundo orden sin incluir las integrales y  $\Delta t_I$  corresponde a los términos con las integrales que se calcularon numéricamente usando Mathematica. Entonces, para nuestro caso en particular:

$$\Delta t_1 \approx \frac{4GM}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{4x_E \cdot x_P}{R_\odot^2} \right) + 1 \right] \quad (2.17)$$

y se recupera la ecuación (2.1) correspondiente al retardo de la señal a primer orden que se mostró al inicio del capítulo. Reemplazando los datos del caso particular se obtiene

$$\Delta t_1 = 239.84342 \mu sec$$

Los terminos de  $\Delta t_2$  se pueden aproximar como:

$$\Delta t_2 = \frac{8(GM)^2}{c^5 R_\odot} \left[ \arctan \left( \frac{x_E}{R_\odot} \right) + \arctan \left( \frac{x_P}{R_\odot} \right) + 1 \right] \quad (2.18)$$

que una vez introducidos los valores numéricos representan

$$\Delta t_2 = 3.443928 \times 10^{-10} sec$$

Por lo tanto, El retardo debido a las dos primeras contribuciones es

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 239.843769 \mu sec$$

Las integrales de  $\Delta t_I$  fueron calculadas usando Mathematica y sus valores son

$$\int_{R_\odot}^{x_E} \frac{dr}{r(r+b)(r^2-b^2)^{1/2}} = 1.17994 \times 10^{-18}$$

$$\int_{R_\odot}^{x_P} \frac{dr}{r(r+b)(r^2-b^2)^{1/2}} = 1.17982 \times 10^{-18}$$

$$\int_b^{x_E} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2-b^2)^{1/2}} = 7.05794 \times 10^{-28}$$

$$\int_b^{x_P} \frac{dr}{r(r+b)^2(r^2-b^2)^{1/2}} = 7.05793 \times 10^{-28}$$

con lo cual,

$$\Delta t_I = 6.264739232 \times 10^{-11} sec$$

dando como resultado que el retardo de una señal enviada al planeta Mercurio desde la Tierra es,

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_I = 239.843832 \mu sec$$

La contribución de  $\Delta t_I$  es menor que  $\Delta t_2$  y a medida que aumenten las distancias entre la fuente o el planeta y el Sol  $\Delta t_I \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el retardo de la señal de radar con las justificadas aproximaciones para un rayo de luz que pasa muy cerca del limbo del sol se expresará como

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{4x_E \cdot x_P}{R_\odot^2} \right) + 1 \right] + \frac{8(GM)^2}{c^5 R_\odot} \left[ \arctan \left( \frac{x_E}{R_\odot} \right) + \arctan \left( \frac{x_P}{R_\odot} \right) + 1 \right] \quad (2.19)$$

### 2.2.1. Retardo de las Señales de Radar Producido por Agujeros Negros

Anteriormente se comprobó que en el caso del sistema solar, los últimos cuatro términos en la ecuación (2.12) que contienen las integrales, son despreciables. Usando los datos de las distancias de la Tierra y Mercurio, y el radio del Sol se obtuvo que  $\Delta t = 239.84 \mu s$  con lo cual se establece que el cálculo de retraso a primer orden es muy preciso para regímenes de campo débil, i.e.  $\varepsilon < 10^{-5}$ . No obstante, es interesante analizar los casos en los que se presentan campos gravitacionales fuertes, i.e. cuando  $\varepsilon \gtrsim 0.5$ , como los producidos por agujeros negros.

Cuando una estrella agota su combustible nuclear y ya no le es posible contener la presión ejercida por la fuerza gravitacional se convertirá en un agujero negro siempre y cuando la masa del núcleo que colapsa sea mayor a 3.2 veces la masa del sol, es decir, cuando  $M > 3.2M_\odot$ . El contorno que rodea a un agujero negro se le conoce como horizonte de sucesos. Un rayo de luz proveniente del interior de la estrella en colapso no puede atravesar el horizonte de sucesos porque la velocidad de escape llega ser igual o mayor que la velocidad de la luz. Al radio del horizonte de sucesos se le conoce como radio de Schwarzschild y es  $r_s = 2GM/c^2$ . La posible existencia de agujeros negros fue predicha usando las ecuaciones de Campo de Einstein por Karl Schwarzschild en el año de 1916, aunque la idea de la existencia de estrellas desde las cuales la luz no puede escapar se remonta a 1783 [5].

En el cuadro 1 se analiza el valor del retardo de las señales para diversos valores de masas solares, asumiendo que los planetas entre los cuales se envía la señal de radar se encuentran a igual distancia de la estrella. Para este análisis se tomará como referencia la distancia a la que se encuentra Saturno desde el Sol ( $x_E = x_P = 1,433,000,000 km$ ). A estas distancias las integrales en (2.12) se vuelven totalmente despreciables por lo tanto la contribución de  $\Delta t_I$  es nula. También se considera que la distancia más próxima del rayo de luz al centro del agujero negro es el radio de Schwarzschild, es decir,  $b = r_s$ .

Cuadro 1: Retardo de las señales de Radar para diferentes valores de Masa de la Estrella

Masa Estrella ( $M_{\odot}$ )	Primer Orden (s)	Segundo Orden (s)	Retardo total (s)
10	0.0074436963	$8.1597760348 \times 10^{-4}$	0.0082596739
100	0.0653638455	0.008159775	0.0735236205
1,000	0.5629072417	0.0815976397	0.6445048814
10,000	4.721756986	0.8159654346	5.5377224207
100,000	38.1440866628	8.1585580857	46.3026447484
1'000,000	290.67314551	81.475991985	372.14913749
10'000,000	1995.7644852	803.83690371	2799.6013889
100'000,000	10510.893483	6970.1163737	17481.009857
1,000'000,000	$r_s > r_p$	$r_s > r_p$	$r_s > r_p$

Como se observa en el cuadro 1, a medida que aumenta la masa del agujero negro que produce el campo gravitacional, la contribución de los términos de segundo orden se hace cada vez más importante y deja de ser despreciable.

### 2.3. Cálculo del retardo de una señal proveniente de una fuente distante

El cálculo del retardo de las señales de radar enviadas o recibidas hacia o desde un objeto dentro del sistema solar está expresado por la ecuación (2.2). Sin embargo, debido a objetos o cuerpos celestes que se encuentran fuera o muy distantes del sistema solar (estrellas, pulsares, fuentes de radiación, etc), y en vista de la necesidad de analizar las señales que provienen de ellos también resulta necesario calcular el retardo sufrido por los fotones provenientes de dichas fuentes. Tomaremos el caso de la ondas electromagnéticas que un pulsar emite periódicamente.

Para empezar se utiliza de nuevo la métrica de Schwarzschild con una aproximación a primer orden que representa un campo gravitacional débil y estático como lo es el sistema solar. El cuadrado de elemento de arco se escribe como:

$$(ds)^2 = + \left[ 1 - \frac{2GM_{\odot}}{rc^2} \right] c^2 (dt)^2 - \left[ 1 + \frac{2GM_{\odot}}{rc^2} \right] (\vec{dr})^2 \quad (2.20)$$

debido a que el intervalo para los fotones es  $ds = 0$ , podemos igualar

$$cdt = \pm \left[ 1 + \frac{2GM_{\odot}}{rc^2} \right] |\vec{dr}| \quad (2.21)$$

Si  $\vec{r}_p$  es la posición fija del pulsar,  $\vec{r}_{obs}$  es la posición del observador cuando llega la señal al tiempo  $t_{obs}$ , y  $t_e$  es el tiempo de emisión de la señal del pulsar, entonces la diferencia entre el tiempo  $t_{obs}$  medido por el observador y el tiempo de emisión del pulsar  $t_e$  es:

$$c(t_{obs} - t_e) = \int_{\vec{r}_{obs}}^{\vec{r}_p} \left[ 1 + \frac{2GM_{\odot}}{rc^2} \right] |\vec{dr}| = |\vec{r}_p - \vec{r}_{obs}| + \frac{2GM_{\odot}}{c^2} \int_{\vec{r}_{obs}}^{\vec{r}_p} \frac{|\vec{dr}|}{r} \quad (2.22)$$

Podemos escribir,

$$|\vec{r}_p - \vec{r}_{obs}| = |(\vec{r}_p - \vec{r}_s) + (\vec{r}_s - \vec{r}_{obs})| \quad (2.23)$$

donde  $\vec{r}_s$  es la posición del centro de masa del sistema solar. Si definimos un vector unitario  $\hat{n}$  que apunte desde el centro de masa del sistema solar al pulsar,  $\hat{n} = \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|}$ , y teniendo en cuenta que  $|\vec{r}_p - \vec{r}_s| \gg |\vec{r}_s - \vec{r}_{obs}|$  podemos notar que  $\vec{r}_s - \vec{r}_{obs} \approx -r_{obs} \hat{n}$ . Por lo tanto, es posible escribir la relación (2.23) como:

$$|\vec{r}_p - \vec{r}_{obs}| \approx |\vec{r}_p - \vec{r}_s| + (\vec{r}_s - \vec{r}_{obs}) \cdot \hat{n} \quad (2.24)$$

y la ecuación (2.22) se expresa como:

$$t_{obs} = \left( t_e + \frac{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|}{c} \right) - \frac{r_{obs} \cdot \hat{n}}{c} + \frac{2GM_\odot}{c^3} \int_{r_{obs}}^{\vec{r}_p} \frac{|\vec{dr}|}{r} \quad (2.25)$$

El primer término corresponde al tiempo que tarda la señal en llegar al centro de masa del sistema solar. Se puede interpretar a este término como si fuera el tiempo en que llegaría la señal si no hubieran efectos gravitacionales debido al sistema solar. El segundo término es definido como el Retardo de Roemer (Roemer delay) y se debe al movimiento del observador. El tercer término es el que realmente nos interesa ya que corresponde al retardo de la señal debido al campo gravitacional de sol.

$$\Delta t = \frac{2GM_\odot}{c^3} \int_{r_{obs}}^{\vec{r}_p} \frac{|\vec{dr}|}{r} \quad (2.26)$$

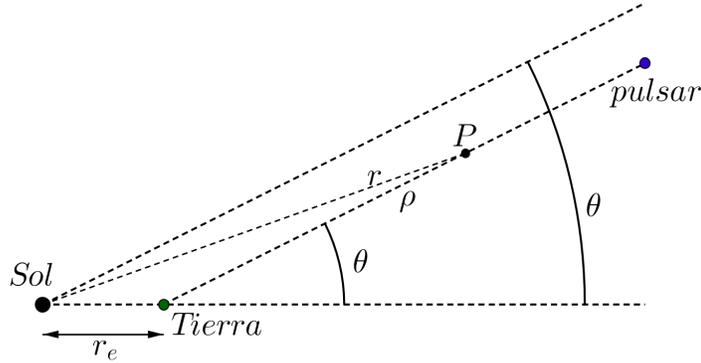


Figura 2.2: Geometría para el cálculo del retardo de una señal proveniente de una fuente distante, en este caso un pulsar.  $r_e$  es la distancia entre la Tierra y el Sol,  $P$  es un punto de referencia entre la línea que une la Tierra con el pulsar,  $\rho$  es la distancia del punto  $P$  a la Tierra, y  $r$  representa la distancia del punto  $P$  al sol.

Para realizar el cálculo correspondiente consideramos un rayo de fotones emitido por el pulsar que llega a la Tierra cuando el ángulo formado por el pulsar, el Sol y la Tierra tiene un valor  $\theta$ ; Sea un punto  $P$  cualesquiera sobre la línea recta que une la tierra con el pulsar, podemos expresar

$$r^2 = (r_e + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \quad (2.27)$$

donde  $r$  es la distancia del Sol a  $P$ ,  $r_e$  es la distancia entre el sol y la Tierra,  $\rho$  es la distancia de la Tierra a  $P$ . Se puede observar el planteamiento del problema en la figura 2.2. Para mayor comodidad se realiza la sustitución  $u = \frac{\rho}{r_e}$  de tal forma que modificamos la ecuación anterior como:

$$r = r_e (u^2 + 1 + 2u \cos \theta)^{1/2} \quad (2.28)$$

Entonces, tenemos que (2.26) es:

$$\Delta t = \frac{2GM_\odot}{c^3} \int_0^d \frac{d\rho}{r}$$

donde  $d$  es la distancia de la Tierra al pulsar. Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.26).

$$\Delta t = \frac{2GM_\odot}{c^3} \int_0^v \frac{du}{(u^2 + 1 + 2u \cos \theta)^{1/2}} \quad (2.29)$$

donde  $v = d/r_e$ . Por razones de facilidad y conveniencia al integrar se sustrae el término cuando  $\theta = \pi/2$ , entonces

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \left( \int_0^v \frac{du}{(u^2 + 1)^{1/2}} + \int_0^v \left[ \frac{1}{(u^2 + 1 + 2u \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(u^2 + 1)^{1/2}} \right] du \right) \quad (2.30)$$

El primer término es fácil de integrar y de hecho resulta ser una constante ya que no depende de la variable  $\theta$ ,

$$\frac{2GM_{\odot}}{c^3} \int_0^v \frac{du}{(u^2 + 1)^{1/2}} = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \sinh^{-1}(v) \approx \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \ln \left( \frac{2d}{r_e} \right) \quad (2.31)$$

teniendo en cuenta que  $d$  es muy grande. Este término simplemente es un corrimiento rígido. El término verdaderamente interesante es el segundo pues involucra la variable  $\theta$ . Para integrar consideramos que  $v = d/r_e \rightarrow \infty$  de tal forma que el término converge a

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(u^2 + 1 + 2u \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(u^2 + 1)^{1/2}} \right] du = -\ln(1 + \cos \theta) \quad (2.32)$$

Finalmente es posible escribir la expresión del Retardo debido al campo gravitacional del Sol (2.26) como

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \ln \left( \frac{2d}{r_e} \right) - \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \ln(1 + \cos \theta) \quad (2.33)$$

La gráfica de la dependencia angular  $-\ln(1 + \cos \theta)$  se muestra en la figura 2.3. Se puede observar que la función diverge cuando  $\theta = \pi$ , es decir, cuando la señal debería atravesar el Sol para llegar a la Tierra. Sin embargo, esta divergencia no existe en realidad ya que la señal simplemente es absorbida por el Sol y nunca llega a la Tierra. El máximo retardo de la señal se produce en conjunción superior cuando la señal del pulsar pasa muy cerca del limbo del Sol. Es necesario resaltar que la misma dependencia de la figura 2.3 se puede observar en las curvas experimentales obtenidas por Shapiro y sus colegas además de las diversas sondas y satélites artificiales que se han usado para medir el retardo dentro del sistema solar. En particular, para contrastar estas curvas podemos citar la figura 3 de [18], la figura 1 de [19], y la figura 3 de [21].

Para demostrar que el retardo de la señal es la suma de dos términos positivos, se puede expresar el resultado pasado (2.26) de la siguiente forma

$$\Delta t = \frac{2GM_{\odot}}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{d}{r_e} \right) - \ln \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \right] \quad (2.34)$$

ya que  $0 \leq (1 + \cos \theta)/2 \leq 1$  por lo tanto  $\ln \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)$  es negativo. Como conclusión podemos observar que el retardo  $\Delta t > 0$  siempre como resultado de que la señal sea afectada por el campo gravitacional del Sol.

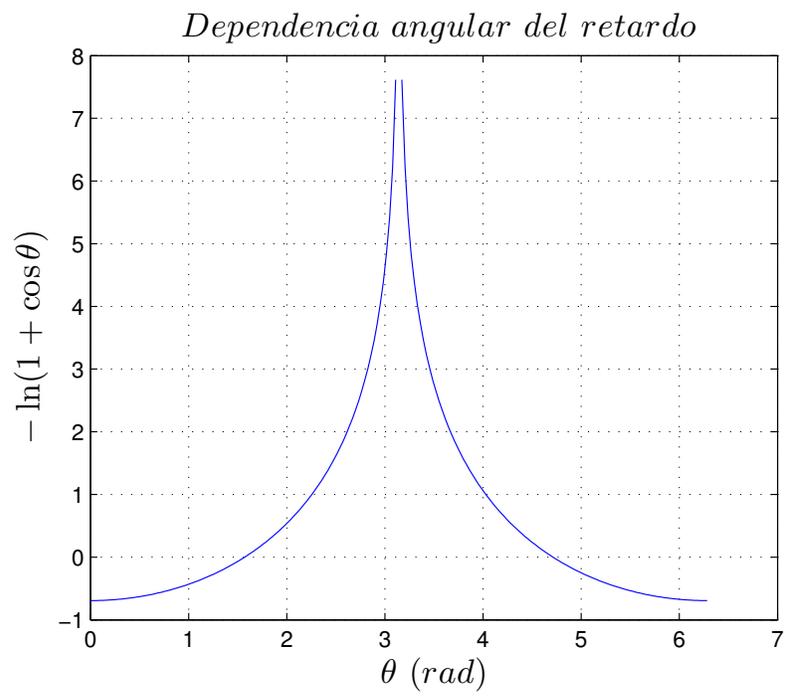


Figura 2.3: Dependencia angular del Retardo de la señal  $-\ln(1 + \cos\theta)$

## 2.4. Conclusiones

La TGR y sus predicciones han sido puestas a prueba un sinnúmero de ocasiones. La tres pruebas clásicas que dieron inicio al campo de la experimentación en física gravitacional fueron el avance del perihelio de Mercurio, el corrimiento al rojo gravitacional y la desviación de los rayos de luz debido a campos gravitacionales. Después de una temporada de hibernación en el campo experimental debido a limitaciones tecnológicas, Shapiro propuso una cuarta prueba de la TGR que fue bautizada con el nombre de Shapiro delay. Esta predicción, en estrecha relación con la desviación de la luz, es el retardo que las ondas electromagnéticas sufren al viajar de un punto a otro debido a un campo gravitacional. Gracias al desarrollo de la tecnología de radares fue posible medir este fenómeno dentro de nuestro sistema solar con gran éxito y con una precisión que fue mejorando con el paso de los años.

Originalmente el cálculo de este fenómeno se realizó a primer orden en el potencial gravitacional utilizando la métrica de Schwarzschild, la adecuada para este caso, y se probó que sus resultados son más que satisfactorios para potenciales gravitacionales débiles como lo es el potencial gravitacional del Sol. En particular, se han realizado y repetido experimentos similares enviando señales de radar hacia planetas como Mercurio, Venus y Marte, e inclusive se ha utilizado sondas espaciales como fuente de señales como la nave Cassini. Para nuestro sistema solar, se encontró que la predicción del cálculo de este fenómeno a primer orden discrepa con los resultados experimentales en un 0.0012 %. Esto demuestra que, para el sistema solar, cualquier contribución al retardo debida a términos de segundo orden es totalmente despreciable y no se necesita tomar en cuenta.

Sin embargo, fuera de nuestro sistema solar y debido a que en el universo abundan fuentes de campos gravitacionales fuertes se realizó el cálculo del retardo de señales de radar con aproximación a segundo orden en el potencial gravitacional. Dichas fuentes pueden ser agujeros negros masivos y supermasivos en los que las contribuciones de los términos del cálculo del retardo a segundo orden son relevantes. Se encontró que el retardo que sufre una onda electromagnética cuando los cuerpos celestes, uno de los cuales es la fuente, y la estrella se encuentran en conjunción superior es

$$\Delta t = \frac{4GM}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{4x_E \cdot x_P}{R_\odot^2} \right) + 1 \right] + \frac{8(GM)^2}{c^5 R_\odot} \left[ \arctan \left( \frac{x_E}{R_\odot} \right) + \arctan \left( \frac{x_P}{R_\odot} \right) + 1 \right]$$

siendo  $x_E$  y  $x_P$  las distancias del Sol al planeta  $E$  y  $P$  respectivamente, y  $M$  y  $R_\odot$  la masa de la estrella y su radio. Se recuperó el resultado del cálculo a primer orden que es el primer término de la ecuación mas el término de segundo orden en el potencial gravitacional.

Ya que está comprobado que para potenciales gravitacionales débiles, como el caso del sistema solar, la contribución de los términos de segundo orden son despreciables, se procedió a calcular

el retardo y la contribución de estos términos al mismo a medida que se aumenta el potencial gravitacional de la estrella tomando como ejemplo agujeros negros masivos. Los resultados del retardo en estos casos se presentan en el cuadro 1 en el cual se evidencia que es necesario tomar en cuenta los términos de segundo orden inclusive cuando la masa del agujero negro es 10 veces la masa del Sol. Debido a que se ha comprobado exitosamente este fenómeno para el caso del sistema solar, el próximo paso es medir este retardo para campos gravitacionales fuertes cuando se presente la oportunidad.

Finalmente, cuando se toma en cuenta el retardo de las señales para cualquier posición del planeta fuente y el planeta receptor, y no solo para conjunción superior, el retardo tiene una dependencia del ángulo formado entre el planeta, el Sol y la fuente que no es evidente a partir de la ecuación (2.2). Para demostrar esta dependencia se tomó en cuenta un caso particular en el cual la onda electromagnética proviene de un objeto distante como un pulsar de tal forma que su posición se puede aproximar como fija con respecto al Sol, mientras que la posición de la Tierra, donde se recibe la señal, varía de acuerdo a su órbita. Se encontró que esta dependencia angular está descrita por la función  $-\ln(1 + \cos\theta)$  que, por cierto, está en completo acuerdo con las gráficas del retardo de la luz medido en el sistema solar para señales enviadas a Venus, Mercurio y Marte como se puede confirmar en los artículos respectivos[18, 19, 21].

### 3. Radiación Gravitacional proveniente de un Sistema Binario

La existencia de la radiación gravitacional fue predicha por Albert Einstein como consecuencia de la TGR [10]. A partir de las Ecuaciones de Campo de Einstein (1.1) se puede inferir que el espacio-tiempo no es un actor pasivo en la dinámica de materia y energía, sino que interfiere e interactúa directamente con los mismos; es así que si simplemente se toma una perturbación muy pequeña de un espacio-tiempo plano, el descrito por la Métrica de Minkowski (1.17), a partir de las Ecuaciones de Campo de Einstein se obtienen soluciones en forma de onda que se propaga a la velocidad de la luz. La aproximación de pequeñas perturbaciones de un espacio-tiempo plano es apropiada para ondas que llegan al sistema solar provenientes de una fuente distante. Estas ondas gravitacionales son ondas transversales que se autosustentan y transportan energía y momentum angular. Estas ondas gravitacionales son oscilaciones de la geometría del espacio-tiempo y provocan que la distancia entre dos puntos oscile, es decir, no existe efecto observable sobre un solo punto. En contraste, las ondas electromagnéticas que también viajan a la velocidad de la luz provocan que el campo eléctrico y magnético oscilen en un punto por el que cruzan. Otra diferencia fundamental entre ondas electromagnéticas y las ondas gravitacionales predichas por la TGR es que mientras las primeras son de carácter predominantemente dipolar, las ondas gravitacionales son predominantemente de carácter cuadrupolar debido a la inexistencia de los dipolos gravitacionales. Sin embargo, existen teorías alternativas de la gravedad que predicen la existencia de radiación gravitacional dipolar, pero aquel caso se comentará posteriormente.

Las ondas gravitacionales son muy difíciles de detectar. De hecho, hasta el momento no se han detectado de manera directa. La razón de esto es simple; para provocar una pequeña curvatura o perturbación en el espacio tiempo se requiere de cantidades inmensas de energía como las producidas por colapsos estelares en el núcleo de una galaxia. Se predice que las ondas gravitacionales generadas por aquellos eventos tan sólo producirían una perturbación del orden de  $10^{-18}$  m en una longitud de 1 m [5, 10]. No obstante, esto no ha desalentado a la comunidad científica. Los primeros intentos de detectar radiación gravitacional se dieron en los 60 con el uso de barras resonantes. Weber trató de usar estas barras, aisladas de vibraciones mecánicas externas, como una especie de resonador acústico [23], pero no han sido capaces de detectar radiación gravitacional.

Ya que las ondas gravitacionales provocan pequeñas oscilaciones entre la distancia de dos puntos también se ha ideado un sistema de detectar estas perturbaciones usando interferometría láser. El sistema LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Detector) construido en los EE.UU. que consta de dos interferómetros en forma de L es un ejemplo. Los interferómetros son similares al utilizado por Michelson y Morley para detectar variaciones en la velocidad de la luz. El principio es simple, cuando una onda gravitacional atraviesa el detector, uno de los brazos se alarga y el otro se comprime. Esto genera una diferencia en las distancias que los rayos de luz provenientes de un láser tienen que recorrer en cada brazo provocando un patrón de

interferencia[5].

La misión espacial LISA (Laser Interferometer Space Antenna), que se encuentra en desarrollo, está diseñada para medir radiación gravitacional en banda ancha y a baja frecuencia y usa el mismo principio de interferometría láser. LISA consta de tres sondas idénticas cuyas posiciones forman un triángulo equilátero de 5 millones de  $km$  de lado en una órbita alrededor del Sol de manera que se comporte como un gigantesco interferómetro de Michelson de tres brazos. Se espera que esta misión pueda medir señales provenientes de diferentes fuentes como: agujeros negros fusionándose a cualquier distancia, agujeros negros super masivos consumiendo objetos más pequeños, estrellas binarias compactas y remanentes estelares [5, 24].

Como se ha visto, hasta la fecha no ha sido posible detectar ondas gravitacionales de forma directa. Sin embargo, los físicos han comprobado su existencia de manera indirecta en pulsares binarios tales como el pulsar binario PSR1913+16 descubierto por Hulse y Taylor en 1974 [25]. Se observó que el período orbital de este pulsar estaba decayendo a una tasa que concordaba con la predicha por la TGR debido a la emisión de ondas gravitacionales. El cálculo, análisis y discusión de la fórmula que predice el decrecimiento del período orbital en un sistema binario es el tema principal de este capítulo.

### 3.1. Ondas Gravitacionales

Las ondas gravitacionales son perturbaciones del campo gravitacional que se propagan a la velocidad de la luz. En la TGR la curvatura del espacio-tiempo está determinada por la distribución de materia y energía como se observa en la ecuación (1.6). Para describir un espacio-tiempo vacío igualamos la ecuación (1.6) a cero:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

Ahora simplemente se aplica una perturbación al espacio-tiempo plano que representa una pequeña curvatura. Se aplicará únicamente una aproximación lineal a la métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski (1.17) que representa el espacio-tiempo plano y  $h_{\mu\nu}$  es una perturbación cuyas componentes en magnitud son muy pequeñas comparadas con la unidad, es decir,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Escogiendo un sistema de coordenadas apropiado [10], se puede encontrar una solución a (1.6) de la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial z^2} \quad (3.3)$$

que representa una ecuación de onda con velocidad de propagación  $c$ . Aplicando las condiciones

y restricciones necesarias, una solución para la ecuación (3.3) para una onda que se propaga a lo largo del eje  $z$  es una combinación lineal de dos estados ortogonales:

$$h_{\mu\nu} = h_+(e_+)_{\mu\nu} \cos(\omega t - kz) \quad (3.4)$$

y

$$h_{\mu\nu} = h_\times(e_\times)_{\mu\nu} \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad (3.5)$$

donde  $\varphi$  es una fase arbitraria y

$$(e_+)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$(e_\times)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donde  $h_+$  y  $h_\times$  son las amplitudes de las ondas.  $e_+$  y  $e_\times$  son los dos estados de polarización de las ondas gravitacionales. Estos dos estados de polarización, en forma tensorial, son algo más complicado que los estados de polarización para las ondas electromagnéticas. La mejor manera de averiguar cuáles son los efectos de estos estados de polarización es investigar el comportamiento de masas de prueba que estén a lo largo de la trayectoria de la onda.

El efecto de los dos estados de polarización de las ondas gravitacionales es mostrado en la figura 3.1. Es evidente que no es posible construir el patrón formado por la polarización  $e_+$  a partir de  $e_\times$  y viceversa. Como se había mencionado anteriormente, la distancia entre dos puntos es la que oscila. Por este motivo es que resulta útil observar los efectos de las ondas gravitacionales sobre un conjunto de masas puntuales y no sólo sobre un punto en el espacio.

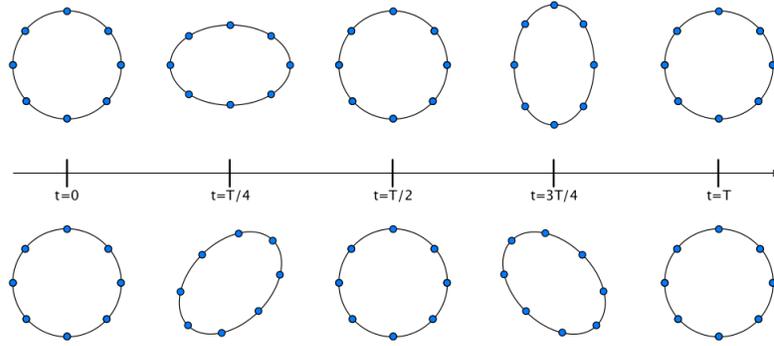


Figura 3.1: Efectos de los dos estados de polarización de las ondas gravitacionales sobre círculos de masas de prueba en el espacio libre. El estado de polarización  $e_+$  se muestra en la fila superior y el estado  $e_\times$  en la fila inferior.  $T$  es el período de oscilación. La onda se propaga en dirección perpendicular al plano donde reposan las masas.

## 3.2. Radiación de un Sistema Binario

### 3.2.1. Órbitas elípticas

Por razones de conveniencia y para simplificar los cálculos, se considera que la primera estrella describe una órbita elíptica alrededor de la otra que se encuentra en uno de los focos de la elipse. En el caso de órbitas elípticas, la distancia  $r$  entre las masas y el ángulo  $\theta$  dependen del tiempo.

Para el problema de los dos cuerpos en presencia de un potencial central, la ecuación de la órbita es [2]

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} (1 + \epsilon \cos \theta) \quad (3.8)$$

donde  $k = Gm_1m_2$  para el caso gravitacional y  $G$  es la constante de gravitación universal,  $l$  es el momentum angular orbital y  $\epsilon$  es la excentricidad que para el caso de una elipse es  $0 < \epsilon < 1$ . Esta es una ecuación que no toma en cuenta los efectos de la TGR. Al tomar en cuenta dichos efectos existe un avance del periastro similar al avance del perihelio de Mercurio alrededor del Sol. Sin embargo, para efectos de calcular la emisión de radiación gravitacional de un sistema binario es suficiente.

Ver la figura 3.2 para los detalles de la órbita.

La excentricidad está expresada por [2]

$$\epsilon = \left( 1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

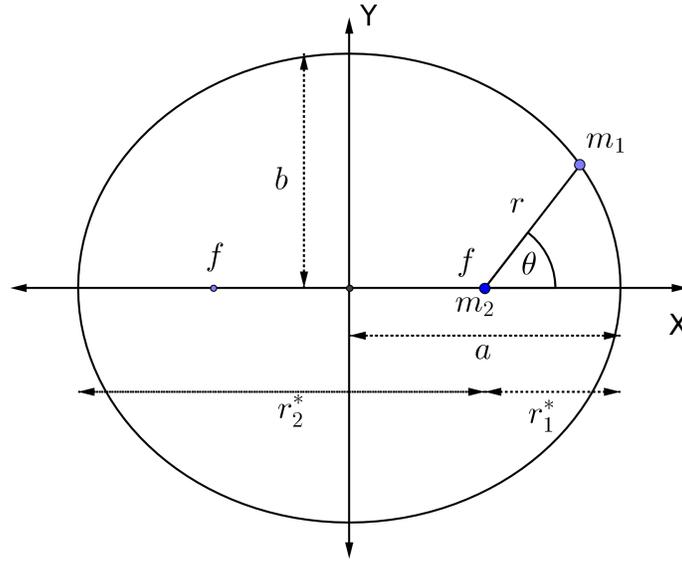


Figure 3.2: La órbita elíptica y sus elementos: La masa  $m_2$  se encuentra en uno de los focos  $f$  de la elipse, mientras que la masa  $m_1$  orbita alrededor de la otra masa a una distancia  $r$  formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal,  $a$  es el semieje mayor de la elipse,  $b$  es el semieje menor,  $r_1^*$  es el perigeo o la distancia más cercana a  $m_2$ , y finalmente  $r_2^*$  es el afelio o la distancia más alejada de la trayectoria.

donde  $E$  es la energía del sistema y, como se verá a continuación, es menor a cero para trayectorias elípticas.

La energía total del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = cte \quad (3.10)$$

donde  $V(r)$  es el potencial central que en nuestro caso es  $-\frac{Gm_1m_2}{r}$ , pero por comodidad lo expresaremos como  $-\frac{k}{r}$ .

Teniendo en cuenta que  $\dot{r} = 0$  en  $r_1^*$  o  $r_2^*$ , entonces

$$E = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (3.11)$$

y

$$2\mu r^2 E + 2\mu k r - l^2 = 0$$

Resolviendo para  $r$  usando la fórmula de la ecuación cuadrática,

$$r = \frac{-2\mu k \pm \sqrt{4\mu^2 k^2 + 8\mu l^2 E}}{4\mu E}$$

con lo cual podemos encontrar las expresiones para  $r_1^*$  y  $r_2^*$ ,

$$r_1^* = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{k}{E} - \left[ \left( \frac{k}{E} \right)^2 + \frac{2l^2}{\mu E} \right]^{1/2} \right\} \quad (3.12)$$

$$r_2^* = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{k}{E} + \left[ \left( \frac{k}{E} \right)^2 + \frac{2l^2}{\mu E} \right]^{1/2} \right\} \quad (3.13)$$

Además, a partir de la geometría de la elipse (figura 3.2) se puede notar que

$$r_1^* + r_2^* = 2a \quad (3.14)$$

y si se reemplaza las expresiones anteriores se obtiene

$$E = -\frac{k}{2a}$$

Por lo tanto,

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a} \quad (3.15)$$

La energía total para el caso de órbitas elípticas es menor a cero.

Regresando a la expresión de la excentricidad (3.9) y reemplazando la expresión de la energía (3.11) se encuentra que

$$\epsilon = \left( 1 - \frac{l^2}{\mu k a} \right)^{1/2}$$

con lo cual

$$\frac{\mu k}{l^2} = \frac{1}{(1 - \epsilon^2) a} \quad (3.16)$$

y si ahora se reemplaza en la ecuación de la órbita (3.8) se obtiene:

$$r(\theta) = \frac{(1 - \epsilon^2) a}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (3.17)$$

que nos da la separación entre las masas como función de  $\theta$ .

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene la relación para el momentum angular orbital  $l$

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (3.18)$$

Si se despeja  $l$  a partir de la ecuación anterior con los valores de las constantes  $\mu$  y  $k$  se obtiene:

$$\dot{\theta} = \frac{[G(m_1 + m_2)(1 - \epsilon^2) a]^{1/2}}{r^2} \quad (3.19)$$

Ahora derivando  $r(\theta)$  con respecto al tiempo y utilizando  $\dot{\theta}$  y  $r(\theta)$  se obtiene:

$$\dot{r} = \epsilon \sin \theta \left[ \frac{G(m_1 m_2)}{(1 - \epsilon^2) a} \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

Las expresiones (3.19) y (3.20) serán de mucha utilidad en el cálculo de las derivadas con respecto al tiempo de los elementos del momento cuadrupolar.

### 3.2.2. Período Orbital

Una de las derivaciones clásicas del período orbital es considerar la segunda ley de Kepler que menciona que el radio vector que une una estrella con su planeta  $r$  barre áreas iguales en tiempos iguales. Usando esta ley es posible derivar el período orbital de una planeta en función de las masas del sistema,  $m_1$  y  $m_2$ , y su semieje mayor  $a$  cuyo resultado se conoce como la tercera ley de Kepler. No obstante, este cálculo no se hará a partir de la segunda ley de Kepler, sino mas bien utilizando un método de integración.

Para hallar el período orbital del sistema utilizaremos la siguiente relación:

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \quad (3.21)$$

La ecuación (3.19) nos ayuda a encontrar el período orbital si la reemplazamos en la ecuación (3.21)

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{[G(m_1 + m_2)(1 - \epsilon^2) a]^{1/2}}{r^2}}$$

si ahora reemplazamos  $r$  por la relación (3.17) se obtiene

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1 - \epsilon^2)^2}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{[G(m_1 + m_2)(1 - \epsilon^2) a]^{1/2}}$$

Simplificando

$$\tau = \frac{a^{3/2}(1 - \epsilon^2)^{3/2}}{[G(m_1 + m_2)]^{1/2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \quad (3.22)$$

Para calcular la expresión

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \quad (3.23)$$

utilizaremos integración compleja realizando la siguiente sustitución

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (3.24)$$

teniendo en cuenta que  $z = e^{i\theta}$  y recalando que  $|z| = 1$ .

Con la sustitución anterior podemos encontrar que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 + 1}{z} \right) \quad (3.25)$$

y

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \quad (3.26)$$

con lo cual

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (3.27)$$

Sustituyendo en (3.23) se obtiene

$$I = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{z \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{z^2 + 1}{z} \right) \right]^2} \quad (3.28)$$

Simplificando

$$I = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{z \left( \frac{2z + \epsilon z^2 + \epsilon}{2z} \right)^2} = \frac{1}{i} \oint \frac{4z dz}{(\epsilon z^2 + 2z + \epsilon)^2}$$

Ahora factoramos el denominador para encontrar los polos de la función

$$\epsilon z^2 + 2z + \epsilon = \epsilon \left( z + \frac{1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \right) \left( z + \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \right) \quad (3.29)$$

Es decir, los polos de la función son

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \quad (3.30)$$

y

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \quad (3.31)$$

Sin embargo, nuestro camino de integración es la circunferencia unitaria ya que  $|z| = 1$  y es evidente que  $|z_2| \geq 1$  debido a que para una órbita elíptica  $0 < \epsilon < 1$ . Por lo tanto  $z_2$  está fuera de nuestra zona de integración.

La expresión de la integral tiene la forma

$$I = \frac{4}{i} \oint \frac{zdz}{\epsilon^2 \left(z + \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^2 \left(z + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^2} = \frac{4}{i} \oint f(z)dz \quad (3.32)$$

siendo

$$f(z) = \frac{zdz}{\epsilon^2 \left(z + \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^2 \left(z + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^2} \quad (3.33)$$

Para calcular la integral utilizamos el teorema del residuo de Cauchy, por lo tanto, para nuestro problema en particular

$$\oint f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) \quad (3.34)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ \left(z + \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^2 \frac{z}{\epsilon^2 \left(z + \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^2 \left(z + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^2} \right] \right\} \quad (3.35) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[ z \left(z + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^{-2} \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \lim_{z \rightarrow z_1} \left\{ \left(z + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^{-2} - 2z \left(z + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^{-3} \right\} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \lim_{z \rightarrow z_1} \left\{ \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2} - z}{\left(z + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^3} \right\} \end{aligned}$$

si se recuerda que  $z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}$ , entonces

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon} + \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}}{\left(\frac{-1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon} + \frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^3} = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{2/\epsilon}{\left(\frac{2\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right)^3}$$

Con lo cual

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{4(1-\epsilon^2)^{3/2}} \quad (3.36)$$

Reemplazando en (3.32) se obtiene:

$$I = \frac{4}{i} \oint f(z) dz = \frac{4}{i} 2\pi i \frac{1}{4(1-\epsilon^2)^{3/2}}$$

$$I = \frac{2\pi}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} \quad (3.37)$$

Utilizando este resultado en la expresión del período orbital (3.22) se obtiene

$$\tau = \frac{a^{3/2}(1-\epsilon^2)^{3/2}}{[G(m_1+m_2)]^{1/2}} \frac{2\pi}{(1-\epsilon^2)^{3/2}}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\frac{[G(m_1+m_2)]^{1/2}}{a^{3/2}}} \quad (3.38)$$

Si se recuerda que

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.39)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular, encontramos que

$$\omega = \frac{[G(m_1+m_2)]^{1/2}}{a^{3/2}} \quad (3.40)$$

Esta es la tercera ley de Kepler.

### 3.2.3. Momento Cuadrupolar

La Teoría General de la Relatividad predice que masas acelerándose emiten radiación gravitacional. En el caso de estrellas binarias, como por ejemplo estrellas de neutrones, se puede demostrar indirectamente la presencia de radiación gravitacional. En un sistema binario, la energía radiada en forma de ondas gravitacionales provoca una disminución de su período orbital conforme avanza el tiempo.

Podemos representar las posiciones de ambas estrellas en el espacio mediante la figura 3.3.

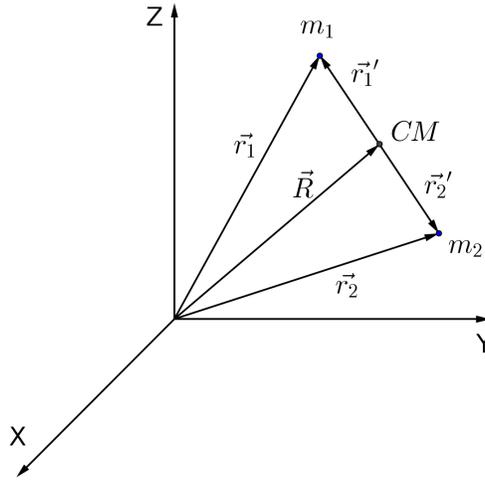


Figura 3.3: Posición de las dos estrellas en el espacio:  $m_1$  y  $m_2$  es la masa de la primera y segunda estrella respectivamente,  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los vectores posición de las estrellas,  $CM$  es el centro de masa,  $\vec{R}$  es el vector posición del centro de masa y  $\vec{r}_1'$  y  $\vec{r}_2'$  son los vectores las masas 1 y 2 con respecto al centro de masa.

De la figura 3.3 podemos observar que los vectores posición de las masas 1 y 2 con respecto al centro de masa están dados por las siguientes expresiones:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} \quad (3.41)$$

y

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R} \quad (3.42)$$

donde el vector posición del centro de masa es:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.43)$$

y las distancias de las estrellas al centro de masa son:

$$r_1' = \frac{\mu r}{m_1} \quad (3.44)$$

y

$$r_2' = \frac{\mu r}{m_2} \quad (3.45)$$

donde  $r$  es la distancia de separación entre los dos cuerpos y  $\mu$  es la masa reducida cuya expresión es

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.46)$$

Ahora analizando el sistema con su centro de masa en el origen y suponiendo que el plano orbital está sobre el plano  $xy$ , las posiciones de ambas masas estaría representado según la figura 3.4.

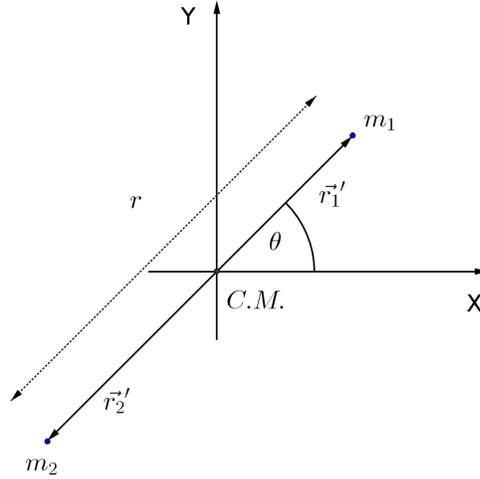


Figura 3.4: Posición de ambas estrellas con respecto al centro de masa

Debido a la no existencia de dipolos gravitacionales, la expresión de la tasa de pérdida de energía gravitacional por unidad de tiempo esta dada en términos de la tercera derivada del momento cuadrupolar del sistema con respecto al tiempo.

El momento cuadrupolar está definido como

$$Q^{kl} = \int \left( 3x'^k x'^l - (r')^2 \delta^{kl} \right) \rho_m d^3 \vec{x}' \quad (3.47)$$

donde  $x'^k$  es la coordenada  $k$ -ésima,  $r'$  es la distancia al centro de masa,  $\rho_m$  es la densidad de masa y  $\delta^{kl}$  es la delta de Kronecker.

Para un sistema discreto de dos masas como el que estamos analizando, la expresión anterior se reduce a

$$Q^{kl} = \sum_{\alpha=1}^2 m_{\alpha} \left[ 3x'_{\alpha}{}^k x'_{\alpha}{}^l - (r'_{\alpha})^2 \delta^{kl} \right] \quad (3.48)$$

donde los índices  $k, l$  van de 1 a 3,  $m_{\alpha}$  es la masa de la partícula  $\alpha$ ,  $x'_{\alpha}{}^k$  es la coordenada  $k$  de la masa  $\alpha$  y  $r'_{\alpha}$  es la distancia de la masa  $\alpha$  al centro de masa.

Si desarrollamos la expresión anterior obtenemos:

$$Q^{kl} = m_1 [3x_1'^k x_1'^l - r_1'^2 \delta^{kl}] + m_2 [3x_2'^k x_2'^l - r_2'^2 \delta^{kl}]$$

por consiguiente,

$$Q^{11} = m_1 [3x_1'^1 x_1'^1 - r_1'^2] + m_2 [3x_2'^1 x_2'^1 - r_2'^2]$$

$$Q^{22} = m_1 [3x_1'^2 x_1'^2 - r_1'^2] + m_2 [3x_2'^2 x_2'^2 - r_2'^2]$$

$$Q^{12} = Q^{21} = m_1 [3x_1'^1 x_1'^2] + m_2 [3x_2'^1 x_2'^2]$$

y finalmente

$$Q^{33} = -m_1 r_1'^2 - m_2 r_2'^2$$

Parametrizando las coordenadas de las masas con respecto a sus distancias al centro de masa  $r_1'$  y  $r_2'$ , y el ángulo  $\theta$  entre el eje  $x$  y la recta  $r$  que une las masas encontramos las siguientes relaciones

$$x_1'^1 = r_1' \cos \theta$$

$$x_1'^2 = r_1' \sin \theta$$

$$x_2'^1 = r_2' \cos(\theta + \pi) = -r_2' \cos \theta$$

$$x_2'^2 = r_2' \sin(\theta + \pi) = -r_2' \sin \theta$$

Si se reemplaza estas relaciones para  $Q^{11}$  obtenemos:

$$Q^{11} = \left[ m_1 (r_1')^2 + m_2 (r_2')^2 \right] (3 \cos^2 \theta - 1)$$

y usando las ecuaciones (3.44) y (3.45)

$$Q^{11} = \left[ m_1 \frac{\mu^2 r^2}{m_1^2} + m_2 \frac{\mu^2 r^2}{m_2^2} \right] (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Q^{11} = \mu r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (3.49)$$

de igual manera para  $Q^{22}$

$$Q^{22} = m_1 \left[ 3 (r'_1)^2 \sin^2 \theta - (r'_1)^2 \right] + m_2 \left[ 3 (r'_2)^2 \sin^2 \theta - (r'_2)^2 \right]$$

$$Q^{22} = \mu r^2 (3 \sin^2 \theta - 1) \quad (3.50)$$

para  $Q^{12}$  o  $Q^{21}$

$$Q^{12} = m_1 \left[ 3 (r'_1)^2 \cos \theta \sin \theta \right] + m_2 \left[ 3 (r'_2)^2 \cos \theta \sin \theta \right]$$

$$Q^{12} = Q^{21} = \frac{3}{2} \mu r^2 \sin 2\theta \quad (3.51)$$

y finalmente

$$Q^{33} = -m_1 \frac{\mu^2 r^2}{m_1^2} - m_2 \frac{\mu^2 r^2}{m_2^2} = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mu^2 r^2$$

$$Q^{33} = -\mu r^2 \quad (3.52)$$

de tal modo que el tensor momento cuadrupolar para dos masas orbitando la una respecto a la otra es:

$$Q^{kl} = \begin{pmatrix} \mu r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) & \frac{3}{2} \mu r^2 \sin 2\theta & 0 \\ \frac{3}{2} \mu r^2 \sin 2\theta & \mu r^2 (3 \sin^2 \theta - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu r^2 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

### 3.2.4. Luminosidad, la fórmula del cuadrupolo

La luminosidad  $L$  o la energía gravitacional radiada por unidad de tiempo es:

$$L = -\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{Q}^{kl} \ddot{Q}^{kl} \quad (3.54)$$

Esta ecuación fue derivada por primera vez en 1917 por Einstein y representa la energía perdida del sistema cuyos efectos se puede observar en el decaimiento del período orbital, pérdida de momento angular y decaimiento del semieje mayor. En contraste con el caso electrodinámico en el cual el multipolo más bajo es el dipolo, la radiación gravitacional en la TGR es predominantemente cuadrupolar.

En términos de los elementos del momento cuadrupolar (3.53), la pérdida de energía por unidad de tiempo es

$$L = -\frac{G}{45c^5} \left( \ddot{Q}^{11} \ddot{Q}^{11} + \ddot{Q}^{22} \ddot{Q}^{22} + 2 \ddot{Q}^{12} \ddot{Q}^{12} + \ddot{Q}^{33} \ddot{Q}^{33} \right) \quad (3.55)$$

Por lo tanto, para obtener la energía perdida por unidad de tiempo del sistema se tiene que calcular la tercera derivada con respecto al tiempo de cada elemento del momento cuadrupolar.

### 3.2.5. Derivadas con respecto al tiempo del momento cuadrupolar

A continuación se procederá a calcular las derivadas con respecto al tiempo de los elementos del momento cuadrupolar (3.53). Comenzaremos con  $Q^{11} = \mu r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)$ ,

$$\dot{Q}^{11} = 6\mu r \dot{r} \cos^2 \theta - 2\mu r \dot{r} - 6\mu r^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}$$

Introduciendo las relaciones (3.19) y (3.20) excepto para el término que no depende de  $\theta$  se obtiene,

$$\dot{Q}^{11} = 6\mu \epsilon r \cos^2 \theta \sin \theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} - \frac{6\mu r \cos \theta \sin \theta}{r} [G(m_1 + m_2)(1 - \epsilon^2)a]^{1/2} - 2\mu r \dot{r}$$

Para simplificar los cálculos no se ha simplificado completamente  $r$  en el segundo término; de hecho, utilizaremos la expresión para  $r$  (3.17).

$$\begin{aligned} \dot{Q}^{11} &= 6\mu \epsilon r \cos^2 \theta \sin \theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} - 6\mu r \cos \theta \sin \theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} \\ &\quad - 6\mu \epsilon r \cos^2 \theta \sin \theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} - 2\mu r \dot{r} \end{aligned}$$

simplificando y haciendo uso de la identidad trigonométrica  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

$$\dot{Q}^{11} = -3\mu r \sin 2\theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} - 2\mu r \dot{r} \quad (3.56)$$

derivando de nuevo

$$\ddot{Q}^{11} = -3\mu \dot{r} \sin 2\theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} - 6\mu r \cos 2\theta \dot{\theta} \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} - 2\mu \dot{r}^2 - 2\mu r \ddot{r}$$

y usando (3.19) y (3.20) nuevamente, obtenemos luego de simplificar

$$\ddot{Q}^{11} = \frac{\mu G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} [-6 \cos 2\theta - 6\epsilon \cos^3 \theta] - 2\mu \dot{r}^2 - 2\mu r \ddot{r}$$

Ahora se procederá a calcular los términos  $2\mu \dot{r}^2 + 2\mu r \ddot{r}$  en función de  $\theta$  usando las relaciones (3.19), (3.20) y (3.17).

$$2\mu\dot{r}^2 + 2\mu r\ddot{r} = 2\mu\epsilon^2 \sin^2 \theta \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} + 2\mu\epsilon \cos \theta \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} (1 + \epsilon \cos \theta)$$

simplificando:

$$2\mu\dot{r}^2 + 2\mu r\ddot{r} = \frac{\mu G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} [2\epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta] \quad (3.57)$$

De modo que, reemplazando la expresión de  $\mu$ , la segunda derivada de  $Q^{11}$  con respecto al tiempo es:

$$\ddot{Q}^{11} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} (-6 \cos 2\theta - 6\epsilon \cos^3 \theta - 2\epsilon \cos \theta - 2\epsilon^2) \quad (3.58)$$

A partir de (3.58) es muy fácil encontrar  $\ddot{Q}^{11}$

$$\ddot{Q}^{11} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} (12 \sin 2\theta + 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta + 2\epsilon \sin \theta) \dot{\theta} \quad (3.59)$$

Realizando el mismo procedimiento para  $Q^{22} = \mu r^2 (3 \sin^2 \theta - 1)$

$$\dot{Q}^{22} = 2\mu r \dot{r} (3 \sin^2 \theta - 1) + 6\mu r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}$$

Simplificando y haciendo uso de las relaciones (3.19) y (3.20)

$$\dot{Q}^{22} = 6\mu\epsilon r \sin^3 \theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} + \frac{6\mu r \sin \theta \cos \theta}{r} [G(m_1 + m_2) (1 - \epsilon^2)a]^{1/2} - 2\mu r \dot{r}$$

Usando (3.17) y usando la identidad trigonométrica  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  obtenemos

$$\dot{Q}^{22} = \mu \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} r (3 \sin 2\theta + 6\epsilon \sin \theta) - 2\mu r \dot{r} \quad (3.60)$$

Derivando de nuevo y usando (3.17), (3.19) y (3.20) tenemos

$$\ddot{Q}^{22} = \mu \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} (6 \cos 2\theta + 6\epsilon \cos^3 \theta + 6\epsilon \cos \theta + 6\epsilon^2) - 2\mu \dot{r}^2 - 2\mu r \ddot{r}$$

Los dos últimos términos ya fueron calculados anteriormente en (3.57) y pueden ser reemplazados junto con  $\mu$  para obtener

$$\ddot{Q}^{22} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} (6 \cos 2\theta + 6\epsilon \cos^3 \theta + 4\epsilon \cos \theta + 4\epsilon^2) \quad (3.61)$$

Derivando (3.61) una vez más con respecto al tiempo se obtiene

$$\ddot{Q}^{22} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} (-12 \sin 2\theta - 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta - 4\epsilon \sin \theta) \dot{\theta} \quad (3.62)$$

Ahora para  $Q^{12} = \frac{3}{2}\mu r^2 \sin 2\theta$ , la primera derivada es

$$\dot{Q}^{12} = 3\mu r \sin 2\theta \dot{r} + 3\mu r^2 \cos 2\theta \dot{\theta}$$

Utilizando las ecuaciones (3.19) y (3.20) junto con (3.17) y la identidad  $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$  resulta que

$$\dot{Q}^{12} = \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} (6\mu\epsilon r \sin^2 \theta \cos \theta + 3\mu r \cos 2\theta + 3\mu\epsilon r \cos \theta - 6\mu\epsilon r \sin^2 \theta \cos \theta)$$

Simplificando

$$\dot{Q}^{12} = \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} \mu r (3 \cos 2\theta + 3\epsilon \cos \theta) \quad (3.63)$$

Derivando nuevamente y reemplazando las ecuaciones (3.19) y (3.20) obtenemos

$$\ddot{Q}^{12} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} (-6 \sin 2\theta - 12\epsilon \sin \theta + 6\epsilon \sin^3 \theta) \quad (3.64)$$

Derivando (3.64) se obtiene

$$\ddot{Q}^{12} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} (-12 \cos 2\theta + 18\epsilon \sin^2 \theta \cos \theta - 12\epsilon \cos \theta) \dot{\theta} \quad (3.65)$$

Finalmente se calculará las derivadas para  $Q^{33} = -\mu r^2$ . La primera derivada es

$$\dot{Q}^{33} = -2\mu r \dot{r}$$

y la segunda derivada es

$$\ddot{Q}^{33} = -2\mu \dot{r}^2 - 2\mu r \ddot{r}$$

que ya se calculó anteriormente (3.57), entonces si se sustituye  $\mu$

$$\ddot{Q}^{33} = -\frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} [2\epsilon^2 + 2\epsilon \cos \theta] \quad (3.66)$$

Derivando una última vez se halla

$$\ddot{Q}^{33} = \frac{2\epsilon m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2)a} \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.67)$$

Los resultados anteriores los podemos resumir en

$$\ddot{Q}^{kl} = \Lambda \begin{pmatrix} -6 \cos 2\theta - 6\epsilon \cos^3 \theta - 2\epsilon \cos \theta - 2\epsilon^2 & -6 \sin 2\theta - 12\epsilon \sin \theta + 6\epsilon \sin^3 \theta & 0 \\ -6 \sin 2\theta - 12\epsilon \sin \theta + 6\epsilon \sin^3 \theta & 6 \cos 2\theta + 6\epsilon \cos^3 \theta + 4\epsilon \cos \theta + 4\epsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\epsilon^2 - 2\epsilon \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

y

$$\ddot{\dot{Q}}^{kl} = \Lambda \dot{\theta} \begin{pmatrix} 12 \sin 2\theta + 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta + 2\epsilon \sin \theta & -12 \cos 2\theta + 18\epsilon \sin^2 \theta \cos \theta - 12\epsilon \cos \theta & 0 \\ -12 \cos 2\theta + 18\epsilon \sin^2 \theta \cos \theta - 12\epsilon \cos \theta & -12 \sin 2\theta - 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta - 4\epsilon \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\epsilon \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

siendo  $\Lambda = \frac{m_1 m_2 G}{(1-\epsilon^2)a}$ .

### 3.2.6. Tasa de Pérdida de Energía

Una vez calculados los  $\ddot{Q}^{kl}$  (3.69) podemos reemplazar los términos correspondientes en la ecuación (3.55) para hallar la tasa de pérdida de energía.

$$L = -\frac{G}{45c^5} \left( \ddot{Q}^{11}\ddot{Q}^{11} + \ddot{Q}^{22}\ddot{Q}^{22} + 2\ddot{Q}^{12}\ddot{Q}^{12} + \ddot{Q}^{33}\ddot{Q}^{33} \right)$$

Insertando los siguientes términos:

$$\ddot{Q}^{11}\ddot{Q}^{11} = \frac{(m_1 m_2 G)^2 \dot{\theta}^2}{(1-\epsilon^2)^2 a^2} (12 \sin 2\theta + 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta + 2\epsilon \sin \theta)^2$$

$$\ddot{Q}^{22}\ddot{Q}^{22} = \frac{(m_1 m_2 G)^2 \dot{\theta}^2}{(1-\epsilon^2)^2 a^2} (-12 \sin 2\theta - 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta - 4\epsilon \sin \theta)^2$$

$$\ddot{Q}^{12}\ddot{Q}^{12} = \frac{(m_1 m_2 G)^2 \dot{\theta}^2}{(1-\epsilon^2)^2 a^2} (-12 \cos 2\theta + 18\epsilon \sin^2 \theta \cos \theta - 12\epsilon \cos \theta)^2$$

$$\ddot{Q}^{33}\ddot{Q}^{33} = \frac{(m_1 m_2 G)^2 \dot{\theta}^2}{(1-\epsilon^2)^2 a^2} (4\epsilon^2 \sin^2 \theta)$$

reemplazando (3.55) tenemos

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G^3 (m_1 m_2)^2 \dot{\theta}^2}{45c^5 (1-\epsilon^2)^2 a^2} (288 + 576\epsilon \cos \theta + 288\epsilon^2 \cos^3 \theta + 24\epsilon^2 \sin^2 \theta)$$

que se puede escribir

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{8G^3 (m_1 m_2)^2 \dot{\theta}^2}{15c^5 (1 - \epsilon^2)^2 a^2} \left[ 12 (1 + \epsilon \cos \theta)^2 + \epsilon^2 \sin^2 \theta \right] \quad (3.70)$$

Ahora si se reemplaza  $\dot{\theta}$  dado por la ecuación 3.19 y 3.17 para dejar la expresión anterior en términos solo de  $\theta$  se considera que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{G (m_1 + m_2) (1 - \epsilon^2) a}{r^4}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{G (m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)^3 a^3} (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \quad (3.71)$$

Sustituyendo (3.71) en (3.70) se obtiene

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{8 (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) G^4}{15c^5 (1 - \epsilon^2)^5 a^5} \left[ 12 (1 + \epsilon \cos \theta)^6 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \right] \quad (3.72)$$

Esta es una función que oscila con respecto al tiempo, por tal motivo es necesario promediarla para conocer la pérdida de energía en cada período. Para ello utilizaremos la ecuación (3.70). El promedio de la tasa de pérdida de energía esta expresado por la siguiente relación:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left( \frac{dE}{dt} \right) dt \quad (3.73)$$

donde  $\tau$  es el período orbital cuyo valor está dado por la ecuación (3.38)

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{[G(m_1 + m_2)]^{1/2}}$$

teniendo en cuenta que

$$dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

Entonces

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{[G(m_1 + m_2)]^{1/2}}{2\pi a^{3/2}} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{8G^3 (m_1 m_2)^2}{15c^3 (1 - \epsilon^2)^2 a^2} \right) \left[ 12 (1 + \epsilon \cos \theta)^2 + \epsilon^2 \sin^2 \theta \right] \dot{\theta}^2 \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

Con ayuda de las ecuaciones (3.19) y (3.20)

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{8(m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) G^4}{15 \cdot 2\pi c^5 (1 - \epsilon^2)^{7/2} a^5} \int_0^{2\pi} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^4 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^2 \right] d\theta$$

Integrando y simplificando,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32(m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) G^4}{5 a^5 c^5} \frac{[1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4]}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}} \quad (3.74)$$

Esta es la energía promedio que el sistema pierde en cada período orbital.

Si la órbita de las estrellas fuera circular, es decir, si  $\epsilon = 0$  entonces (3.74) se reduce a

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32(m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) G^4}{5 a^5 c^5} \quad (3.75)$$

En este caso  $a$  es la distancia de separación entre las estrellas que permanece constante debido a la órbita circular.

Si las masas de las estrellas son iguales, es decir,  $m_1 = m_2 = m$  entonces la expresión anterior se reduce una vez mas a

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{64m^5 G^4}{5a^5 c^5} \quad (3.76)$$

### 3.2.7. Decaimiento del Período Orbital

Para hallar la tasa de decaimiento del período orbital, es necesario comparar la tasa de pérdida de energía con la energía total del sistema.

Como se dedujo anteriormente la energía total del sistema es (3.15):

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2a}$$

A partir de la tercera ley de Kepler (3.38) podemos despejar el semieje mayor en función del período orbital

$$a = \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right]^{1/3} \tau^{2/3} \quad (3.77)$$

E introduciendo la relación para el semieje mayor en la energía se obtiene

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2} \left[ \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \right]^{1/3} \tau^{-2/3} \quad (3.78)$$

Si se calcula la diferencial de la energía

$$dE = \frac{2}{3} \frac{Gm_1m_2}{2} \left[ \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \right]^{1/3} \frac{\tau^{-2/3}}{\tau} d\tau$$

Simplificando

$$dE = -\frac{2}{3} E \frac{d\tau}{\tau} \quad (3.79)$$

Reordenando y dividiendo ambos lados para  $dt$  es posible encontrar el decaimiento del período orbital en función de la pérdida de energía del sistema

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \quad (3.80)$$

Introduciendo (3.15) y (3.72) se obtiene despues de simplificar

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{8m_1m_2(m_1 + m_2)G^3}{5c^5(1 - \epsilon^2)^5a^4} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^6 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \right] \quad (3.81)$$

que tiene la misma dependencia angular que la tasa de pérdida de energía. Como en el caso anterior, es necesario promediar esta expresión para conocer efectivamente cuánto decae la órbita del sistema.

A partir de (3.80)

$$\frac{1}{\tau} \left\langle \frac{d\tau}{dt} \right\rangle = -\frac{3}{2} \frac{1}{E} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \quad (3.82)$$

El promedio de  $\frac{dE}{dt}$  ya fue calculado anteriormente en (3.74) por lo que únicamente resta introducirlo junto con (3.15). El resultado es:

$$\frac{1}{\tau} \left\langle \frac{d\tau}{dt} \right\rangle = -\frac{96m_1m_2(m_1 + m_2)G^3}{5c^5a^4} \frac{\left[ 1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4 \right]}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}} \quad (3.83)$$

Nuevamente, si la órbita es circular, es decir,  $\epsilon = 0$ , entonces (3.83) se reduce a

$$\frac{1}{\tau} \left\langle \frac{d\tau}{dt} \right\rangle = -\frac{96m_1m_2(m_1 + m_2)G^3}{5c^5a^4} \quad (3.84)$$

Si  $m_1 = m_2 = m$  entonces se reduce a

$$\frac{1}{\tau} \left\langle \frac{d\tau}{dt} \right\rangle = -\frac{192m^3G^3}{5c^5a^4} \quad (3.85)$$

### 3.2.8. Decrecimiento del semieje mayor

Si despejamos el semieje mayor a partir de la ecuación (3.15) se tiene que el semieje mayor es:

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E} \quad (3.86)$$

derivando con respecto al tiempo

$$\frac{da}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{2} E^{-2} \frac{dE}{dt}$$

y reemplazando la expresión de la energía (3.15), se obtiene el decrecimiento del semieje mayor en función de la tasa de pérdida de energía

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{Gm_1m_2} \frac{dE}{dt} \quad (3.87)$$

Intruduciendo (3.72) se obtiene, después de simplificar

$$\frac{da}{dt} = -\frac{16m_1m_2(m_1+m_2)G^3}{15c^5(1-\epsilon^2)^5a^3} \left[ 12(1+\epsilon\cos\theta)^6 + \epsilon^2\sin^2\theta(1+\epsilon\cos\theta)^4 \right] \quad (3.88)$$

La ecuación (3.88) posee la misma dependencia angular que la tasa de pérdida de energía y también se la debe promediar para conocer el decrecimiento efectivo del semieje mayor por cada órbita. Para ello partiremos de (3.87) para promediar

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2a^2}{Gm_1m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \quad (3.89)$$

Introduciendo el promedio de la tasa de pérdida de energía dada por la ecuación (3.74) se obtiene

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64m_1m_2(m_1+m_2)G^3}{5a^3c^5} \frac{\left[ 1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4 \right]}{(1-\epsilon^2)^{7/2}} \quad (3.90)$$

Realizando la aproximación para órbitas circulares

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64m_1m_2(m_1+m_2)G^3}{5a^3c^5} \quad (3.91)$$

y si  $m_1 = m_2 = m$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{128m^3G^3}{5a^3c^5} \quad (3.92)$$

### 3.2.9. Decrecimiento de la distancia entre ambas estrellas ( $r$ )

Si recordamos la expresión para la distancia radial para el caso de órbitas elípticas (3.17)

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{(1+\epsilon\cos\theta)}$$

y la derivamos con respecto al tiempo considerando que el semieje mayor  $a$  también depende del tiempo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} \frac{da}{dt} + \frac{a\epsilon (1 - \epsilon^2) \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \dot{\theta} \quad (3.93)$$

Reemplazando las expresiones para el decrecimiento del semieje mayor (3.88) y la derivada del ángulo (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} \left( -\frac{16m_1m_2(m_1 + m_2)G^3}{15c^5(1 - \epsilon^2)^5 a^3} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^6 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \right] \right) \\ + \frac{a\epsilon (1 - \epsilon^2) \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \frac{[G(m_1 + m_2)(1 - \epsilon^2)a]^{1/2}}{r^2} \end{aligned}$$

considerando (3.17) y simplificando

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{16m_1m_2(m_1 + m_2)G^3}{15c^5(1 - \epsilon^2)^4 a^3} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^5 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^3 \right] + \epsilon \sin \theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2} \quad (3.94)$$

El primer término de (3.94) tiene la misma dependencia angular que la tasa de pérdida de energía; sin embargo, la magnitud de los factores que lo acompañan es muy pequeña comparada con el factor del segundo término que también es oscilatorio. De nuevo, es necesario promediar esta función para hallar la tasa efectiva a la que decrece la distancia radial  $r$ . Para ello partiremos de (3.93) considerando (3.87) y la expresión para la tasa de pérdida de energía que depende de  $\dot{\theta}$  (3.70). Esto es

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{16m_1m_2G^2\dot{\theta}^2}{15c^5(1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta)} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^2 + \epsilon^2 \sin^2 \theta \right] + \epsilon \sin \theta \left[ \frac{G(m_1 + m_2)}{(1 - \epsilon^2)a} \right]^{1/2}$$

Promediando

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left( \frac{dr}{dt} \right) dt \quad (3.95)$$

si se considera que  $dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$ , que el período orbital  $\tau$  está dado por la ecuación (3.38) y que el valor promedio del segundo término es cero ya que  $\langle \sin \theta \rangle = 0$

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = \frac{[G(m_1 + m_2)]^{1/2}}{2\pi a^{3/2}} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{16m_1 m_2 G^2}{15c^5 (1 - \epsilon^2)} \right) \left[ \frac{12(1 + \epsilon \cos \theta)^2 + \epsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)} \right] \dot{\theta}^2 \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

simplificando y usando la expresión para  $\dot{\theta}$  (3.19) junto con (3.17)

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = -\frac{8m_1 m_2 (m_1 + m_2) G^3}{15\pi c^5 a^3 (1 - \epsilon^2)^{5/2}} \int_0^{2\pi} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^3 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta) \right] d\theta$$

Integrando y simplificando

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = -\frac{64m_1 m_2 (m_1 + m_2) G^3}{5a^3 c^5} \frac{[1 + \frac{37}{24}\epsilon^2]}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \quad (3.96)$$

Esta expresión es similar a la obtenida para el promedio de la tasa de decrecimiento del semieje mayor. La diferencia se centra en el factor que depende de la excentricidad. Ambas expresiones (3.96) y (3.90) deben ser iguales cuando nos aproximamos al caso de órbitas circulares. Si se hace que  $\epsilon = 0$  se obtiene como se esperaba

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64m_1 m_2 (m_1 + m_2) G^3}{5a^3 c^5} \quad (3.97)$$

Y lo mismo ocurre cuando  $m_1 = m_2 = m$

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{128m^3 G^3}{5a^3 c^5} \quad (3.98)$$

### 3.2.10. Pérdida de momentum angular orbital a lo largo del eje z

Debido a que hay un decaimiento del período orbital es de esperarse que el momentum angular orbital no se conserve. De hecho, existe una pérdida del momentum angular a lo largo del eje z (el plano orbital yace sobre el plano  $xy$ ) como resultado de la emisión de radiación gravitacional del sistema binario de estrellas. Esta tasa de pérdida de momentum angular también depende del momento cuadrupolar del sistema, mas específicamente de sus derivadas con respecto al tiempo. La tasa de pérdida del momentum angular en el eje  $i$  es [26]:

$$-\frac{dJ^i}{dt} = \frac{2G}{45c^5} \xi^{ijk} \ddot{Q}_{jm} \ddot{Q}_{mk} \quad (3.99)$$

donde  $\xi^{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita,  $J^i$  es el momentum angular orbital a lo largo del eje  $i$ , y  $\ddot{Q}_{jm}$  y  $\ddot{Q}_{mk}$  son las segundas y terceras derivadas del momento cuadrupolar con respecto al tiempo respectivamente. Los índices  $i, j, k$  y  $m$  pueden tener los valores 1, 2 y 3. Entonces, para el momentum angular a lo largo del eje z

$$\frac{dJ^3}{dt} = \frac{dJ_z}{dt} \quad (3.100)$$

Por lo tanto,

$$-\frac{dJ_z}{dt} = \frac{2G}{45c^5} \xi^{3jk} \ddot{Q}_{jm} \ddot{Q}_{mk}$$

sumando en  $j$

$$-\frac{dJ_z}{dt} = \frac{2G}{45c^5} \left( \xi^{31k} \ddot{Q}_{1m} \ddot{Q}_{mk} + \xi^{32k} \ddot{Q}_{2m} \ddot{Q}_{mk} \right)$$

sumando en  $k$

$$-\frac{dJ_z}{dt} = \frac{2G}{45c^5} \left( \xi^{312} \ddot{Q}_{1m} \ddot{Q}_{m2} + \xi^{321} \ddot{Q}_{2m} \ddot{Q}_{m1} \right)$$

sumando en  $m$

$$\begin{aligned} -\frac{dJ_z}{dt} = \frac{2G}{45c^5} & \left( \xi^{312} \ddot{Q}_{11} \ddot{Q}_{12} + \xi^{312} \ddot{Q}_{12} \ddot{Q}_{22} + \xi^{312} \ddot{Q}_{13} \ddot{Q}_{32} \right. \\ & \left. + \xi^{321} \ddot{Q}_{21} \ddot{Q}_{11} + \xi^{321} \ddot{Q}_{22} \ddot{Q}_{21} + \xi^{321} \ddot{Q}_{23} \ddot{Q}_{31} \right) \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que  $\xi^{312} = 1$ ,  $\xi^{321} = -1$ ,  $\ddot{Q}_{13} \ddot{Q}_{32} = 0$  y que  $\ddot{Q}_{23} \ddot{Q}_{31} = 0$  entonces

$$-\frac{dJ_z}{dt} = \frac{2G}{45c^5} \left( \ddot{Q}_{11} \ddot{Q}_{12} + \ddot{Q}_{12} \ddot{Q}_{22} - \ddot{Q}_{21} \ddot{Q}_{11} - \ddot{Q}_{22} \ddot{Q}_{21} \right) \quad (3.101)$$

A partir de (3.68) y (3.69) los términos que se necesita son

$$\ddot{Q}_{11} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2) a} (-6 \cos 2\theta - 6\epsilon \cos^3 \theta - 2\epsilon \cos \theta - 2\epsilon^2)$$

$$\ddot{Q}_{12} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2) a} \dot{\theta} (-12 \cos 2\theta + 18\epsilon \sin^2 \theta \cos \theta - 12\epsilon \cos \theta)$$

$$\ddot{Q}_{21} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2) a} (-6 \sin 2\theta - 12\epsilon \sin \theta + 6\epsilon \sin^3 \theta)$$

$$\ddot{Q}_{11} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2) a} \dot{\theta} (12 \sin 2\theta + 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta + 2\epsilon \sin \theta)$$

$$\ddot{Q}_{22} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2) a} (6 \cos 2\theta + 6\epsilon \cos^3 \theta + 4\epsilon \cos \theta + 4\epsilon^2)$$

$$\ddot{Q}_{22} = \frac{m_1 m_2 G}{(1 - \epsilon^2) a} \dot{\theta} (-12 \sin 2\theta - 18\epsilon \sin \theta \cos^2 \theta - 4\epsilon \sin \theta)$$

Introduciéndolos en (3.101) y simplificando algebraicamente

$$-\frac{dJ_z}{dt} = \frac{8(m_1 m_2)^2 G^3 \dot{\theta}}{5c^5 (1 - \epsilon^2)^2 a^2} \left[ 3(1 + \epsilon \cos \theta)^3 + (1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta) \right] \quad (3.102)$$

Sustituyendo las expresiones para  $\dot{\theta}$  (3.19) y para  $r$  (3.17) se obtiene después de realizar simplificaciones

$$-\frac{dJ_z}{dt} = \frac{8(m_1 m_2)(m_1 + m_2)^{1/2} G^{7/2}}{5c^5 (1 - \epsilon^2)^{7/2} a^{7/2}} \left[ 3(1 + \epsilon \cos \theta)^5 + (1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta)^3 \right] \quad (3.103)$$

Como en los casos anteriores, debido a que esta función oscila, es necesario obtener el valor promedio de la misma. Se lo hará a partir de la ecuación (3.102). El valor promedio de la pérdida de momentum angular a lo largo del eje  $z$  es

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left( \frac{dJ_z}{dt} \right) dt \quad (3.104)$$

Si se recuerda que el período orbital está representado por la ecuación (3.38) y que  $dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = -\frac{8(m_1 m_2)^2 G^3}{5c^5 (1 - \epsilon^2)^2 a^2} \frac{[G(m_1 + m_2)]^{1/2}}{2\pi a^{3/2}} \int_0^{2\pi} \left[ 3(1 + \epsilon \cos \theta)^3 + (1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta) \right] \dot{\theta} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

integrando y simplificando finalmente se obtiene

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = -\frac{32(m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)^{1/2} G^{7/2}}{5c^5 a^{7/2}} \frac{[1 + \frac{7}{8}\epsilon^2]}{(1 - \epsilon^2)^2} \quad (3.105)$$

En el caso de órbitas circulares, i.e.  $\epsilon = 0$

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = -\frac{32(m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)^{1/2} G^{7/2}}{5c^5 a^{7/2}} \quad (3.106)$$

y si  $m_1 = m_2 = m$  se obtiene

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = -\frac{32\sqrt{2}m^{9/2}G^{7/2}}{5c^5 a^{7/2}} \quad (3.107)$$

### 3.3. PSR1913+16

Se obtuvo evidencia de la existencia de ondas gravitacionales por primera vez a través del pulsar binario PSR1913+16. En la actualidad ya se ha confirmado la emisión de radiación gravitacional mediante observación de otros sistemas similares a PSR1913+16. Resulta que estos sistemas relativistas se han convertido en un laboratorio en el que se pueden poner a prueba las predicciones no sólo de la TGR, sino también de otras teorías alternativas de gravitación.

El pulsar PSR1913+16, también conocido como el pulsar Hulse-Taylor, fue descubierto en julio de 1974 por Joseph Taylor y Russel Hulse. Durante una búsqueda sistemática de pulsares llevada a cabo con el radio-telescopio de Arecibo en Puerto Rico Hulse y Taylor detectaron 50 pulsares de los cuales 40 no eran conocidos previamente. Dentro de este último grupo, se destacó el pulsar PSR1913+16 ubicado a 16300 años luz (5 *kpc*) de la Tierra en la constelación del Águila. Se detectó que tenía un período de pulsación de 59 milisegundos ( $P \simeq 59 \text{ ms}$ ), pero cuando se trató de medir este parámetro con precisión se encontró que sufría de cambios aparentes de hasta 80 microsegundos ( $\sim 80 \mu\text{s}$ ) de un día para otro. De hecho, se registraron cambios de 8 microsegundos en un lapso de 5 minutos. La conclusión a la que llegaron Hulse y Taylor fue que estos cambios aparentes se debían a un efecto dopler como resultado de la presencia de una estrella compañera “invisible”, es decir, estas variaciones aparentes eran el resultado de que el pulsar describiera una órbita elíptica alrededor de un centro de masa. Para septiembre de 1974, se obtuvo una curva de velocidad precisa [25]. Russel Hulse y Joseph Taylor recibieron el premio Nobel de Física en 1993 “por el descubrimiento de un nuevo púlsar, un descubrimiento que ha abierto nuevas posibilidades para el estudio de la gravedad”, y por el análisis del mismo que incluye la demostración de que efectivamente el púlsar está emitiendo ondas gravitacionales.

El período orbital del sistema es de cerca de 7.75 horas ( $\tau \simeq 7,75 \text{ h}$ ) y de excentricidad 0.617 ( $\epsilon \simeq 0,617$ ). A partir del análisis detallado de los tiempos de llegada de los pulsos, se ha obtenido los parámetros físicos y orbitales correspondientes como se detalla en el cuadro 2. Debido a la cercanía de la órbita, la ausencia de eclipsamiento en la señal del púlsar o de algún proceso de transferencia de masa, se ha llegado a la conclusión que el objeto compañero del pulsar es una estrella compacta y se ha sugerido que se trata de un pulsar muerto [4].

Cuadro 2: Parámetros del púlsar binario PSR1913+16. Datos tomados de [4, 27].

Parámetro	Símbolo (Unidades)	Valor
<i>Parámetros Físicos</i>		
Ascensión Vertical	$\alpha$	19 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 27. <sup>s</sup> 99928(9)
Declinación	$\delta$	16°06'27."3871(13)
Período del púlsar	$P_p$ (ms)	59.0299983444181(5)
Derivada del período	$\dot{P}_p$	8.62713(8) × 10 <sup>-18</sup>
<i>Parámetros Keplerianos</i>		
Proyección del semieje mayor	$a_P \sin i$ (s)	2.341782(3)
Excentricidad	$\epsilon$	0.6171334(5)
Período orbital	$\tau$ (d)	0.322997448911(4)
<i>Parámetros Post-keplerianos</i>		
Tasa media del avance del perihelio	$\langle \dot{\omega} \rangle$ (°yr <sup>-1</sup> )	4.226598(5)
Corrimiento al rojo / retardo	$\gamma'$ (ms)	4.2992(8)
Derivada del período orbital	$\dot{\tau}$ (10 <sup>-12</sup> )	-2.423(1)

PSR1913+16 se ha convertido en un laboratorio para la gravitación relativista debido a tres razones:

- La velocidad orbital, del orden de  $v \sim 10^{-3}c$ , sugiere que se deben tener en cuenta efectos relativistas.
- Un período orbital muy corto ( $\tau \simeq 7,75 h$ ) que permite que efectos no newtonianos crezcan o se acumulen más rápidamente.
- PSR1913+16 es un sistema “libre” o “limpio” de otros efectos que podrían perturbar la toma de medidas de sus parámetros, es decir, se trata de estrellas compactas con ausencia de mecanismo de transferencia de masa, y la señal del púlsar no se ve opacada o eclipsada por su compañera.

Los parámetros de PSR1912+16 se han dividido en tres grupos como se muestra en el cuadro 2:

- Parámetros físicos o parámetros no-orbitales.- como son el período del púlsar o su tasa de cambio y la posición del pulsar en el cielo.
- Parámetros Keplerianos.- son los más apropiados cuando se trata de sistemas binarios clásicos o newtonianos, como la excentricidad  $\epsilon$ , el período orbital  $\tau$  o la proyección del semieje mayor.
- Parámetros post-keplerianos.- los que están fuera de las predicciones newtonianas y que son características de la naturaleza relativista del sistema.

Es importante notar un dato del cuadro 2. El avance del perihelio,  $\langle \dot{\omega} \rangle$ , es mayor a 4° por año. En contraste, el avance del perihelio de Mercurio, que es una de las pruebas clásicas de la TGR, es

de 43 segundos de arco por siglo. El avance del perihelio en PSR1913+16 no sólo hace evidente los efectos relativistas en este sistema, sino que, junto con el parámetro de Einstein  $\gamma$  se puede obtener las masas del púlsar  $m_1$  y de la estrella compañera  $m_2$  como lo realizaron por primera vez Hulse y Taylor [28] y ultimamente Weisberg y Taylor [27]. El resultado es:

$$m_1 = 1.4398 \pm 0,0002 M_\odot \quad m_2 = 1.3886 \pm 0,0002 M_\odot \quad (3.108)$$

Al semieje mayor se lo puede expresar mediante la tercera ley de Kepler, es decir, en función de período orbital (3.38)

$$a = [G(m_1 + m_2)]^{1/3} \left( \frac{\tau}{2\pi} \right)^{2/3} \quad (3.109)$$

### 3.3.1. Emisión de radiación gravitacional

Una vez conocidos los parámetros de PSR1913+16 presentados en el cuadro 2 y en la ecuación (3.108) podemos introducirlos en las ecuaciones derivadas en la sección 3.2.

La tasa de pérdida de energía, introduciendo los parámetros para PSR1913+16 en la ecuación (3.72), es

$$\frac{dE}{dt} = -6.0008 \times 10^{23} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^6 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \right] [\text{W}] \quad (3.110)$$

La gráfica de la tasa de pérdida de energía debido a emisión de ondas gravitacionales se la presenta en la figura 3.5.

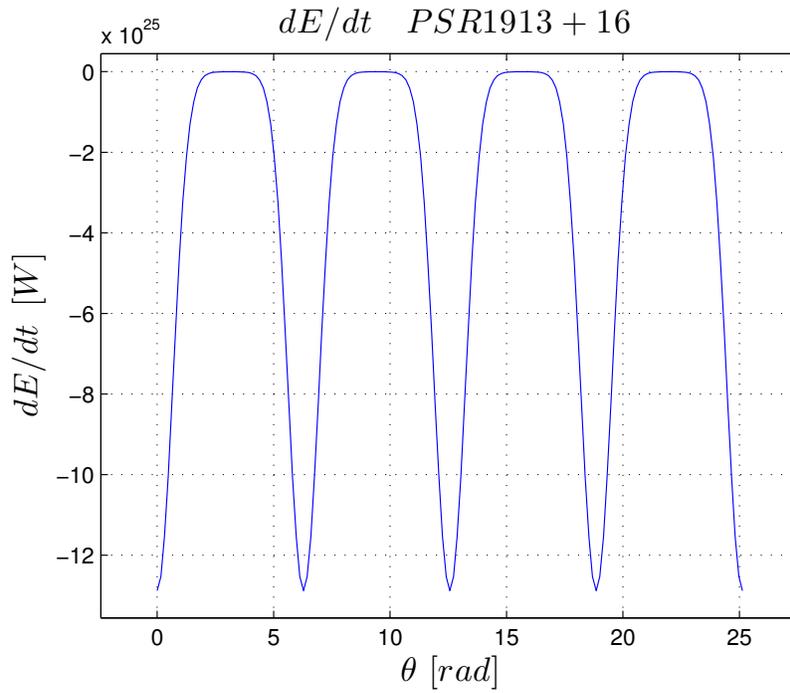


Figura 3.5: Tasa de pérdida de Energía ( $dE/dt$ ) para PSR1913+16

Como se mencionó anteriormente, para conocer efectivamente cuánta energía se pierde en cada órbita fue necesario promediar (3.72) y el resultado fue la ecuación (3.74). Para PSR1913+16 la tasa promedio de energía perdida es

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -7.7683 \times 10^{24} \text{ [W]} \quad (3.111)$$

El decrecimiento del semieje mayor dado por la ecuación (3.88) para PSR1913+16 es:

$$\frac{da}{dt} = -8.6415 \times 10^{-9} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^6 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \right] \text{ [m/s]} \quad (3.112)$$

La gráfica del decrecimiento del semieje mayor para PSR1913+16 se presenta en la figura 3.6

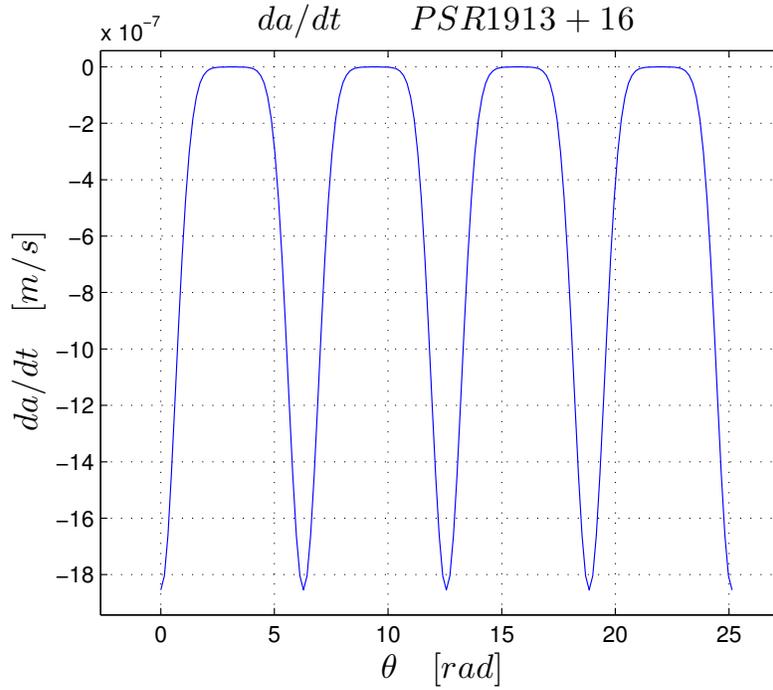


Figura 3.6: Decrecimiento del semieje mayor ( $da/dt$ ) para PSR1913+16

El promedio de esta función, la ecuación (3.90), para PSR1913+16 es

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -1.1187 \times 10^{-7} \text{ [m/s]} \quad (3.113)$$

El decrecimiento de la distancia radial ( $r$ ) entre ambas estrellas se representa en la ecuación (3.94) y para PSR1913+16 es:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = & -5.3504 \times 10^{-9} \left[ 12(1 + \epsilon \cos \theta)^6 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \right] \text{ [m/s]} \\ & + 3.4418 \times 10^5 \sin \theta \text{ [m/s]} \end{aligned} \quad (3.114)$$

En esta ocasión, a pesar de que la dependencia angular del primer término es la misma que en la tasa de pérdida de energía y en el decrecimiento del semieje mayor, el segundo término domina a la función como se puede observar en la figura 3.7.

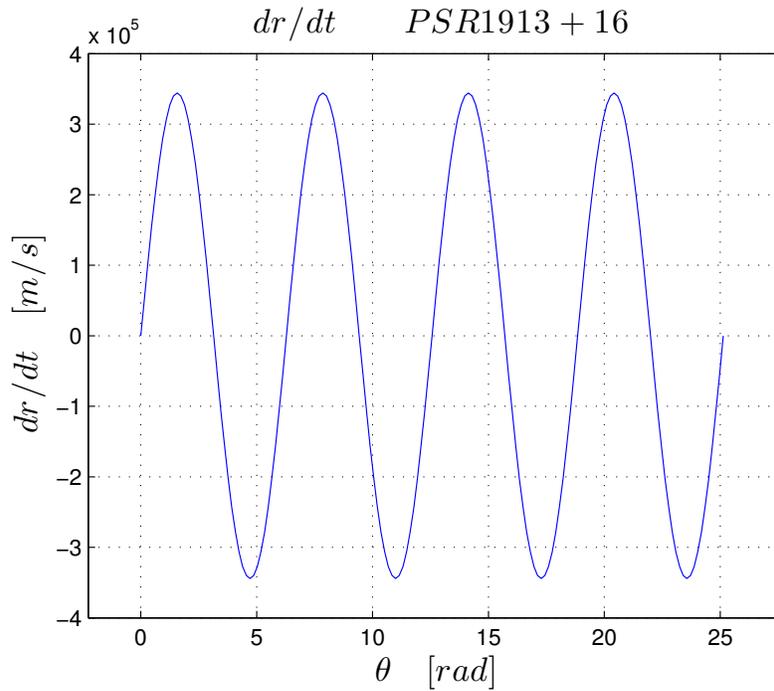


Figura 3.7: Decrecimiento de la distancia radial ( $r$ ) entre las masas para PSR1913+16

Al promediar esta función se obtiene la ecuación (3.96) que para PSR1913+16 es:

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = -4.9645 \times 10^{-8} \text{ [m/s]} \quad (3.115)$$

La pérdida de momentum angular a lo largo del eje  $z$ , ecuación (3.103), para PSR1913+16 es:

$$\frac{dJ_z}{dt} = -3.8954 \times 10^{27} \left[ 3(1 + \epsilon \cos \theta)^5 + (1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta)^3 \right] \text{ [kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2] \quad (3.116)$$

La gráfica de esta función se presenta en la figura 3.8.

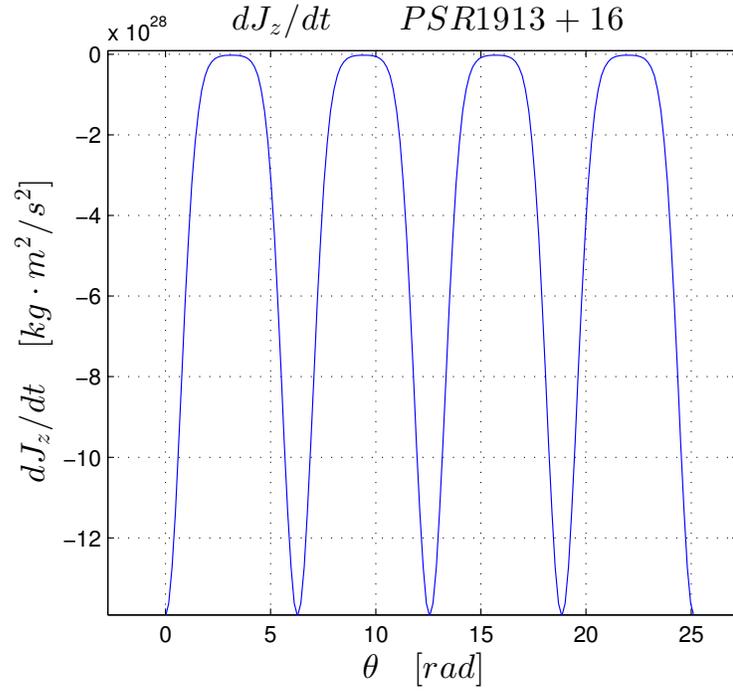


Figura 3.8: Pérdida de momentum angular ( $\frac{dJ_z}{dt}$ ) a lo largo del eje  $z$

El promedio de esta función, la ecuación (3.105), para PSR1913+16 es:

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = -1.0121 \times 10^{28} \text{ [kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2] \quad (3.117)$$

### 3.3.2. Decaimiento del período orbital, observación experimental

La ecuación (3.81) describe la derivada del período orbital. Para PSR1913+16 esta función es:

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = -6.6503 \times 10^{-18} \left[ 12 (1 + \epsilon \cos \theta)^6 + \epsilon^2 \sin^2 \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^4 \right] \quad (3.118)$$

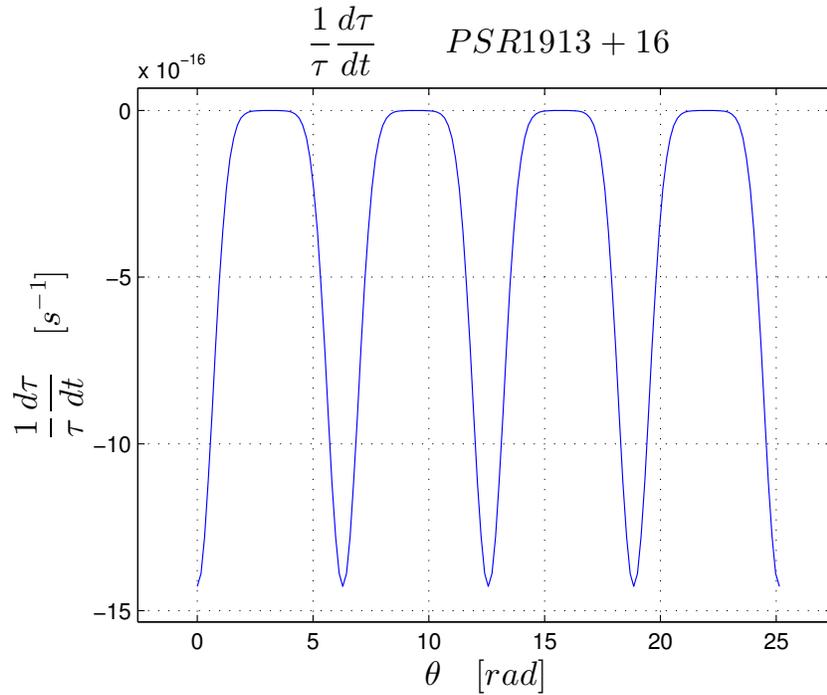


Figura 3.9: Derivada del período orbital ( $\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt}$ )

La gráfica de esta función se presenta en la figura 3.9. El promedio de  $\dot{\tau}$ , la ecuación (3.83), es

$$\frac{1}{\tau} \left\langle \frac{d\tau}{dt} \right\rangle = - \frac{96m_1m_2(m_1+m_2)G^3}{5c^5a^4} \frac{[1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4]}{(1-\epsilon^2)^{7/2}}$$

Sin embargo, el semieje mayor  $a$  también es función del período orbital tal como se muestra en la ecuación (3.109). Por lo tanto, una forma conveniente de la ecuación (3.83) es:

$$\dot{\tau}_{GR} = \left\langle \frac{d\tau}{dt} \right\rangle = - \frac{192\pi m_1m_2G^{5/3}}{5c^5(m_1+m_2)^{1/3}} \left( \frac{\tau}{2\pi} \right)^{-5/3} \frac{[1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4]}{(1-\epsilon^2)^{7/2}} \quad (3.119)$$

Por lo tanto, con los datos del cuadro 2 y las masas (3.108), el valor predicho por la TGR es:

$$\dot{\tau}_{GR} = -2.402542 \times 10^{-12} \quad (3.120)$$

La ecuación anterior aplica cuando el marco de referencia del sistema no se encuentra acelerando con respecto al sistema solar. Para comparar el valor predicho por la teoría,  $\dot{\tau}_{GR}$ , con el valor medido experimentalmente,  $\dot{\tau} = -2.423(1) \times 10^{-12}$ , es necesario realizar una pequeña corrección,  $\Delta\dot{\tau}$ , debido a la aceleración relativa entre el sistema solar y el sistema binario [29]. Progresos recientes en la determinación de los parámetros galácticos, como la distancia al centro galáctico y la distancia aproximada al púlsar, han dado como resultado una actualización en esta contribución  $\Delta\dot{\tau}$  que es [27]:

$$\Delta\dot{\tau} = -0.027(2) \times 10^{-12} \quad (3.121)$$

De tal forma que el valor experimental corregido  $\dot{\tau}_{corregido} = \dot{\tau} - \Delta\dot{\tau}$  es:

$$\dot{\tau}_{corregido} = -2.395(9) \times 10^{-12} \quad (3.122)$$

Entonces el cuociente entre el valor medido experimentalmente y el valor predicho por la teoría es:

$$\frac{\dot{\tau}_{corregido}}{\dot{\tau}_{GR}} = 0.997 \quad (3.123)$$

Ambos valores concuerdan extraordinariamente. Una de las formas de comprobar esta concordanca es precisamente medir el período orbital a partir de un tiempo  $t_0$  y observar algún cambio, en este caso una disminución, comparado con un período orbital inicial  $\tau_0$  medido en  $t_0$ . En particular, Hulse, Taylor y sus colegas han registrado a los largo de más de 30 años el cambio de fase acumulada que ha sufrido PSR1913+16 ya que debido al decaimiento del período orbital, el sistema llega antes al paso del periastro (punto en una órbita elíptica en el cual la distancia entre los dos cuerpos es mínima) comparado con un sistema en el que no existe variación del período orbital, es decir, un sistema en el que el tiempo entre un periastro y el siguiente es siempre un período orbital.

Si se modela la evolución del período orbital del púlsar mediante expansión de Taylor alrededor del tiempo de referencia  $t_0 = 0$ , sea  $\nu(t)$  la frecuencia orbital  $\tau^{-1}$ . Expresando  $\nu(t)$  en serie de Taylor

$$\nu(t) = \nu_0 + \dot{\nu}_0 t + \frac{\ddot{\nu}_0}{2!} t^2 + \dots \quad (3.124)$$

donde  $\nu_0 = \nu(t_0 = 0)$ . La fase orbital acumulada está dada por

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(T) = \int_0^{T_n} \nu(t) dt \quad (3.125)$$

donde  $T_n$  es el tiempo de paso del  $n$ -ésimo periaastro. Introduciendo la expresión de la frecuencia orbital en serie de Taylor e integrando se obtiene

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(T_n) = \nu_0 T_n + \frac{\dot{\nu}_0}{2} T_n^2 + \frac{\ddot{\nu}_0}{3 \cdot 2!} T_n^3 + \dots$$

Para PSR1913+16 y otros sistemas binarios, los términos  $\ddot{\nu}_0$  y derivadas superiores son despreciables ( $\ddot{\nu}_0 \sim 0$ ), por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \Phi(T_n) = \nu_0 T_n + \frac{\dot{\nu}_0}{2} T_n^2 \quad (3.126)$$

y ya que el tiempo de paso del  $n$ -ésimo periastro,  $T_n$ , toma lugar cuando  $\Phi(T_n) = 2\pi n$  la expresión anterior es

$$n = \nu_0 T_n + \frac{\dot{\nu}_0}{2} T_n^2 \quad (3.127)$$

$$\nu_0 T_n - n = -\frac{\dot{\nu}_0}{2} T_n^2 \quad (3.128)$$

Considerando que  $\nu_0 = \tau_0^{-1}$  se obtiene

$$T_n - n\tau_0 = \frac{\dot{\tau}}{2\tau_0} T_n^2 \quad (3.129)$$

Esta es una ecuación parabólica. Los términos de la izquierda simplemente representan el cambio del tiempo de paso del periastro acumulado. Si no hubiera un decaimiento del período orbital,  $T_n = n\tau_0$ . El término de la derecha es una parábola con curvatura negativa,  $\frac{\dot{\tau}}{2\tau_0} < 0$ . Se puede comparar los datos experimentales del cambio acumulativo del tiempo de paso del periastro con la teoría en la figura 3.10.

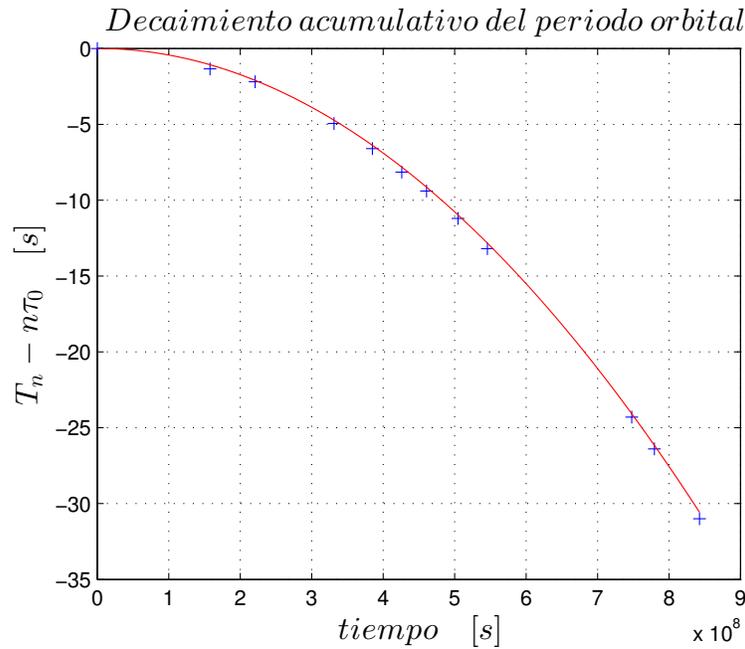


Figura 3.10: Decaimiento orbital de PSR1913+16. Gráfica del decaimiento acumulativo del período orbital desde 1975 hasta el 2005. La curva es la predicción teórica de la TGR y las cruces (+) son los datos experimentales. [29].

### 3.3.3. Comentarios adicionales acerca del púlsar binario y otras teorías de gravitación

Como se comentó anteriormente, la TGR predice que el multipolo más bajo causante de radiación gravitacional es el cuadrupolo. La TGR predice que no existe radiación gravitacional de caracte dipolar. De hecho, para sistemas de bajas velocidades (comparadas con la velocidad de la luz  $c$ ) o en campos gravitatorios débiles o no muy fuertes como es el caso de sistemas binarios, la radiación proveniente del cuadrupolo es dominante en comparación con los otros multipolos de orden superior. La evidencia experimental aportada por PSR1913+16 concuerda extraordinariamente con la fórmula del cuadrupolo derivada a partir de la teoría Einsteiniana de la gravedad, la TGR.

A diferencia de la TGR, la mayoría de teorías alternativas de gravitación predicen la existencia de radiación gravitacionales de todos los multipolos, es decir, monopolos, dipolos, cuadrupolos y los demás multipolos de orden superior. Muchas de estas teorías contienen factores ad-hoc correspondientes a la contribución de dipolos o a la “energía de enlace auto-gravitacional entre las estrellas”. Si estas teorías fueran ciertas, el decaimiento orbital de PSR1913+16 sería mayor debido a las contribuciones de radiación provenientes de dipolos y otros multipolos.

En su publicación de 1982, Weisberg y Taylor [30], consideraron las predicciones de algunas de las teorías alternativas de gravedad más importantes, como la de Brans-Dicke, Rosen, Ni, y la de Lightman-Lee. Las predicciones de cada teoría acerca del decaimiento orbital del púlsar binario fueron resumidas en la tabla 5 de dicho artículo. Weisberg y Taylor llegaron a la siguiente conclusión: “*Con la excepción de la Teoría General de la Relatividad y la teoría de Brans-Dicke, ninguna de las teorías predice siquiera el signo correcto del cambio en el período orbital debido a la emisión de radiación gravitacional, por no mencionar la magnitud correcta*”. Además, incluso la teoría de Brans-Dicke predice una magnitud mucho mayor que la observada en el púlsar binario a menos que una de sus constantes, la constante de acoplamiento de Brans-Dicke  $\omega$ , se aproxime al infinito, en cuyo caso esta teoría se reduce a la TGR.

A pesar de que ya antes se había sometido a la TGR a las pruebas más rigurosas dentro del sistema solar con éxito, aún no se podía descartar por completo las teorías alternativas de gravitación. Estas teorías contienen parámetros y constantes ad-hoc que pueden ser modificadas para calzar con los resultados como fue el caso de la constante de acoplamiento de Brans-Dicke [4, 13]. No obstante, los datos obtenidos mediante la observación del púlsar binario y su decaimiento orbital parecen descartar varias teorías de gravitación que una vez fueron consideradas viables. De nuevo, la Teoría General de la Relatividad ha pasado otra prueba. Además, la pequeña incertidumbre que aún poseen los datos experimentales se deben al desconocimiento exacto de los parámetros galácticos y otros factores, y no a las medidas tomadas y su respectivo análisis. En la siguiente sección, se analizará brevemente otros sistemas binarios para contrastar las observaciones con la predicción de la TGR.

### 3.4. Otros Sistemas Binarios y la TGR

De acuerdo con Will [4], se conocen nueve sistemas binarios de estrellas de neutrones relativistas cuyos períodos orbitales son menores que un día. Uno de los casos más atractivos es el descubierto pulsar doble que ha generado resultados iguales o superiores a la hora de poner a prueba la TGR. En el presente trabajo se presenta brevemente algunos de estos sistemas.

#### 3.4.1. PSR J0737-3039A/B

Este es un sistema binario en el cual ambas estrellas de neutrones fueron detectadas como pulsares. PSR J0737-3039A/B tiene una velocidad orbital media mayor a la de PSR1913+16. Poco después del descubrimiento de A [31], con período de pulso de 22 *ms*, se observó que el perihelio de la órbita avanzaba a una razón de 17° ( $\dot{\omega} \approx 17^\circ$ ) por año, casi cuatro veces el avance del perihelio de PSR1913+16. El segundo pulsar, B, tiene un período de pulsación de 2.7 *s*. El sistema tiene un período orbital,  $\tau$ , de 2.4 horas y ha confirmado de nuevo las predicciones de la TGR. En el cuadro 3 se encuentran los parámetros de este sistema.

Cuadro 3: Parámetros de PSR J0737-3039 A/B. Datos tomados de [32]

Parámetro	Valor
Ascensión Vertical $\alpha$	07 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 51 <sup>s</sup> .24927(3)
Declinación $\delta$	-30°39'40".7195(5)
Excentricidad $\epsilon$	0.0877775(9)
Proyección del semieje mayor ( $a/c$ ) sin $i$ (s)	1.415032(1)
Avance del Perihelio $\dot{\omega}$ (deg/yr)	16.89947(68)
Corrimiento al rojo Gravitacional $\gamma$ (ms)	0.3856(26)
Período Orbital $\tau$ (d)	0.10225156248(5)
Derivada del período orbital	-1.252(17) $\times 10^{-12}$
masa de A $m_A$ ( $M_\odot$ )	1.3381(7)
masa de B $m_b$ ( $M_\odot$ )	1.2489(7)

Como se puede apreciar en el cuadro 3, la derivada del período orbital observada es

$$\dot{\tau}_{ex} = 1.252 \times 10^{-12} \quad (3.130)$$

Mientras tanto, la predicción teórica de la TGR dada por la ecuación (3.83) es:

$$\dot{\tau}_{GR} = 1.24787 \times 10^{-12} \quad (3.131)$$

El cociente entre el valor experimental y el esperado por la teoría es:

$$\frac{\dot{\tau}_{ex}}{\dot{\tau}_{GR}} = 1.003 \quad (3.132)$$

y se evidencia de nuevo la sorprendente concordancia entre los valores medidos experimentalmente y la TGR. El pulsar doble PSR J0737-3039, se ha convertido, junto con PSR 1913+16 en uno de los mejores laboratorios para la gravedad relativista. Al igual que lo ocurrido con PSR1913+16, la TGR predice asombrosamente el valor para el decaimiento orbital del sistema, cosa que no ocurre con las demás teorías alternativas de gravitación.

### 3.4.2. PSR B1534+12

Después de PSR1913+16, el descubrimiento de PSR B1534+12 en 1991 representó la oportunidad perfecta para confirmar las observaciones, las pruebas y las técnicas utilizadas en el pulsar Hulse-Taylor. El sistema consta de dos estrellas de neutrones, una de las cuales es un pulsar. Se ha demostrado de igual manera que su período orbital está decayendo debido a la emisión de radiación gravitacional como se esperaba. Las observaciones de PSR B1534+12 fueron realizadas con el radio-telescopio de Arecibo en Puerto Rico [33]. Los parámetros de PSR B1534+12 se muestran en el cuadro 4

Cuadro 4: Parámetros de PSR B1534+12. Datos tomados de [33]

Parámetro	Valor
Ascensión Vertical $\alpha$	$15^h 37^m 09^s .960312(10)$
Declinación $\delta$	$11^\circ 55' 55'' .5543(2)$
Excentricidad $\epsilon$	$0.27367740(14)$
Proyección del semieje mayor $(a/c) \sin i$ (s)	$3.7294641(4)$
Avance del Perihelio $\dot{\omega}$ (deg/yr)	$1.755789(9)$
Corrimiento al rojo Gravitacional $\gamma$ (ms)	$2.070(2)$
Período Orbital $\tau$ (d)	$0.420737299123(10)$
Derivada del período orbital	$-0.137(3) \times 10^{-12}$
masa del pulsar $m_p$ ( $M_\odot$ )	$1.3332 \pm 0.0010$
masa de la estrella compañera $m_c$ ( $M_\odot$ )	$1.3452 \pm 0.0010$

La precisión con la que se ha medido el decaimiento orbital de este sistema está muy limitada por desconocimiento de la distancia al pulsar que introduce una incertidumbre significativa al realizar la sustracción de la aceleración galáctica. Sin embargo, los demás parámetros post-keplerianos calzan muy bien con la predicción de la TGR. Después de realizar la correcciones necesarias, correcciones similares a las efectuadas a  $\dot{\tau}$  en el caso de PSR1913+16, Stairs y sus colegas encontraron que la tasa de decaimiento orbital intrínseca es [33]:

$$\dot{\tau}_{\text{corregida}} = -0.174 \times 10^{-12} \quad (3.133)$$

mientras que la tasa de decaimiento orbital predicha por la TGR dada por la ecuación (3.83) es:

$$\dot{\tau}_{GR} = -0.1924 \times 10^{-12} \quad (3.134)$$

El cociente entre el valor experimental y el valor teórico es:

$$\frac{\dot{\tau}_{\text{corregido}}}{\dot{\tau}_{GR}} = 0.904 \quad (3.135)$$

De nuevo, es necesario enfatizar que la aparente discrepancia no se debe a las observaciones realizadas a PSR B1534+12, sino al desconocimiento de los parámetros galácticos, entre los que se cuenta la distancia al pulsar.

### 3.4.3. PSR B2127+11C

PSR B2127+11C es uno de los ocho pulsares del cúmulo globular M15 (NGC 7078) con período de pulsación de 30.5 ms y que forma parte de un sistema binario cuyo período orbital es de 8 horas. Este es otro de los sistemas cuyas observaciones se llevaron a cabo con el radio-telescopio de Arecibo [34]. Los parámetros de PSR B2127+11C se muestran en el cuadro 5.

Cuadro 5: Parámetros de PSR B2127+11C. Datos tomados de [34]

Parámetro	Valor
Ascensión Vertical $\alpha$	$21^h 30^m 01^s .2042(1)$
Declinación $\delta$	$+12^\circ 10' 38'' .209(4)$
Excentricidad $\epsilon$	0.681395(2)
Proyección del semieje mayor $(a/c) \sin i$ (s)	2.51845(6)
Avance del Perihelio $\dot{\omega}$ (deg/yr)	4.4644(1)
Corrimiento al rojo Gravitacional $\gamma$ (s)	0.00478(4)
Período Orbital $\tau$ (d)	0.33528204828(5)
Derivada del período orbital	$-3.96(5) \times 10^{-12}$
masa del pulsar $m_p$ ( $M_\odot$ )	1.358(10)
masa de la estrella compañera $m_c$ ( $M_\odot$ )	1.354(10)

El valor para el decaimiento orbital,  $\dot{\tau}$ , presentado en el cuadro 5 debe ser corregido como en los casos anteriores. Una vez realizada dicha corrección, la derivada del período orbital experimental es:

$$\dot{\tau}_{\text{corregido}} = -3.95 \times 10^{-12} \quad (3.136)$$

Mientras que el valor predicho por la TGR es:

$$\dot{\tau}_{GR} = -3.938 \times 10^{-12} \quad (3.137)$$

La relación entre el valor experimental y el teórico es:

$$\frac{\dot{\tau}_{\text{corregido}}}{\dot{\tau}_{GR}} = 1.003 \quad (3.138)$$

### 3.4.4. PSR J1756-2251

PSR J1756-2251 fue descubierto en el 2004 por Faulkner y sus colegas. Este pulsar se encuentra en un sistema binario cuya posible compañera es una estrella de neutrones. El período orbital del sistema es de 7.67 horas con una excentricidad de 0.18 y sus perihelio avanza a una razón de 2.585 grados por año [35].

Cuadro 6: Parámetros de PSR J1756-2251. Datos tomados de [35]

Parámetro	Valor
Ascención Vertical $\alpha$	$17^h56^m46^s.6332(2)$
Declinación $\delta$	$+22^\circ51'59''.4(2)$
Excentricidad $\epsilon$	$0.180567(2)$
Proyección del semieje mayor $(a/c) \sin i$ (s)	$2.7564(2)$
Avance del Perihelio $\dot{\omega}$ (deg/yr)	$2.585(2)$
Corrimiento al rojo Gravitacional $\gamma$ (s)	$1.3(3)$
Período Orbital $\tau$ (d)	$0.319633898(2)$
Derivada del período orbital	-----
masa del púlsar $m_p$ ( $M_\odot$ )	1.40
masa de la estrella compañera $m_c$ ( $M_\odot$ )	1.18

Para la publicación de [35], el valor esperado para el decaimiento orbital estaba por debajo del límite de detección. Sin embargo, la TGR precide que el decaimiento orbital es:

$$\dot{\tau}_{GR} = -2.1694 \times 10^{-13} \quad (3.139)$$

### 3.4.5. PSR J1906+0746

Descubierto en el 2005, PSR J1906+0746 es un pulsar joven de 144 ms. Junto con su compañera, una posible estrella de neutrones o una enana blanca, el sistema tiene un período orbital de tan sólo 3.98 horas con una excentricidad de 0.085 y su perihelio avanza a una razón de 7.57 grados por año [36].

Cuadro 7: Parámetros de PSR J1906+0746. Datos tomados de [36]

Parámetro	Valor
Ascención Vertical $\alpha$	$19^h06^m48^s.673(6)$
Declinación $\delta$	$+07^\circ46'28''.6(3)$
Excentricidad $\epsilon$	$0.085303(2)$
Proyección del semieje mayor $(a/c) \sin i$ (s)	$1.420198(2)$
Avance del Perihelio $\dot{\omega}$ (deg/yr)	$7.57(3)$
Corrimiento al rojo Gravitacional $\gamma$ (s)	-----
Período Orbital $\tau$ (d)	$0.165993045(8)$
Derivada del período orbital $\dot{\tau}$	-----
masa total del sistema $M$ ( $M_\odot$ )	1.18

Al tiempo de la publicación de Lorimer y su grupo de investigación [36], aún no era posible medir el decaimiento orbital del sistema.

### 3.4.6. PSR J1141-6545

Este sistema en particular representa una gran oportunidad para poner a prueba no sólo la TGR sino también otras teorías alternativas de gravitación debido a la asimetría en las masas del sistema. Los sistemas anteriores poseen masas muy similares y están conformados por estrellas de neutrones. La estrella compañera de PSR J1141-6545 probablemente sea una enana blanca. Las masas del sistema son  $m_p = 1.27 \pm 0.01 M_\odot$  para el pulsar y  $m_c = 1.02 \pm 0.01 M_\odot$  para la estrella compañera. Cuando las masas de las estrellas son diferentes, ciertas teorías, como la de Jordan-Brans-Dicke, apelan a un acoplamiento entre la masa del sistema y un campo escalar subyacente. PSR J1141-6545 ha impuesto un límite para las constantes de acoplamiento si la mencionada teoría fuera cierta [37]. Los parámetros de PSR J1141-6545 se encuentran en el cuadro 8.

Cuadro 8: Parámetros de PSR J1141-6545. Datos tomados de [37]

Parámetro	Valor
Ascensión Vertical $\alpha$	$11^h 41^m 07^s .0140(2)$
Declinación $\delta$	$-65^\circ 45' 19'' .1131(15)$
Excentricidad $\epsilon$	$0.171884(2)$
Proyección del semieje mayor $(a/c) \sin i$ (s)	$1.858922(6)$
Avance del Perihelio $\dot{\omega}$ (deg/yr)	$5.3096(4)$
Corrimiento al rojo Gravitacional $\gamma$ (s)	$0.000773(11)$
Período Orbital $\tau$ (d)	$0.1976509593(1)$
Derivada del período orbital $\dot{\tau}$	$-0.403(25) \times 10^{-12}$
masa del pulsar $m_p$ ( $M_\odot$ )	$1.02 \pm 0.01 M_\odot$
masa de la estrella compañera $m_c$ ( $M_\odot$ )	$1.27 \pm 0.01 M_\odot$

Después de realizar las correcciones necesarias, la derivada del período orbital experimental es:

$$\dot{\tau}_{\text{corregida}} = -4.01 \times 10^{-13} \quad (3.140)$$

La TGR predice un valor de :

$$\dot{\tau}_{GR} = -3.867 \times 10^{-13} \quad (3.141)$$

La razón entre el valor experimental y el teórico es:

$$\frac{\dot{\tau}_{\text{corregido}}}{\dot{\tau}_{GR}} = 1.037 \quad (3.142)$$

### 3.4.7. Resumen

A continuación se presenta un resumen de los sistemas binarios presentados anteriormente con sus respectivos decaimientos orbitales ya corregidos y la predicción teórica con el respectivo cociente entre ambas en el cuadro 9.

Cuadro 9: Decaimiento orbital de otros pulsares binarios, contraste entre valores experimentales,  $\dot{\tau}_{ex}$  con las correcciones pertinentes ya incluidas, y teóricos,  $\dot{\tau}_{GR}$ .

Pulsar	$\dot{\tau}_{ex}$	$\dot{\tau}_{GR}$	cociente
J0737-3039A,B	$-1.252 \times 10^{-12}$	$-1.2478 \times 10^{-12}$	1.003
B1534+12	$-0.174 \times 10^{-12}$	$-0.1924 \times 10^{-12}$	0.904
B2127+11C	$-3.95 \times 10^{-12}$	$-3.938 \times 10^{-12}$	1.003
J1756-2251	—————	$-2.1694 \times 10^{-13}$	—————
J1141-6545	$-4.01 \times 10^{-12}$	$-3.867 \times 10^{-13}$	1.037

Otros parámetros calculados en el presente trabajo, como la pérdida de energía, decrecimiento del semieje mayor y distancia radial, son presentados también en el cuadro 10.

Cuadro 10: Otros parámetros calculados para otros pulsares.

pulsar	$\langle dE/dt \rangle$ [W]	$\langle da/dt \rangle$ [m/s]	$\langle dr/dt \rangle$ [m/s]	$\langle dJ_z/dt \rangle$ [Kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
J0737-3039A,B	$-2.3626 \times 10^{25}$	$-8.2749 \times 10^{-8}$	$-8.1182 \times 10^{-8}$	$-3.230 \times 10^{28}$
B1534+12	$-3.6582 \times 10^{23}$	$-8.0567 \times 10^{-9}$	$-6.7593 \times 10^{-9}$	$-1.6314 \times 10^{27}$
B2127+11C	$-1.1160 \times 10^{25}$	$-1.7859 \times 10^{-7}$	$-6.5783 \times 10^{-8}$	$-1.1369 \times 10^{28}$
J1756-2251	$-6.0814 \times 10^{23}$	$-9.8305 \times 10^{-9}$	$-9.0835 \times 10^{-9}$	$-2.3789 \times 10^{27}$
J1141-6545	$-1.9708 \times 10^{24}$	$-1.9768 \times 10^{-8}$	$-1.8398 \times 10^{-8}$	$-4.8185 \times 10^{27}$

### 3.5. Conclusiones

La teoría electromagnética predice la existencia de ondas electromagnéticas cuando cargas eléctricas se aceleran. De forma análoga, la TGR también predice la emisión de ondas gravitacionales proveniente de masas en aceleración. Sin embargo, a diferencia de la teoría electromagnética, la TGR predice radiación gravitacional nula proveniente de dipolos. La contribución dominante a la pérdida de energía en un sistema de masas en aceleración por emisión de ondas gravitacionales depende del cuadrupolo, siendo más específicos, de la tercera derivada del momento cuadrupolar como se muestra en la fórmula de cuadrupolo (3.54) que se obtiene a partir de la TGR, la teoría de gravitación de Einstein.

La pérdida de energía en forma de radiación gravitacional en un sistema binario de estrellas se traduce en un decaimiento de la órbita del sistema, el decrecimiento del semieje mayor y distancia radial entre los cuerpos, y una pérdida de momentum angular orbital. En función de los parámetros del sistema, como la excentricidad  $\epsilon$ , las masas  $m_1$  y  $m_2$ , y el período orbital  $\tau$  y semieje mayor  $a$ , la tasa de pérdida de energía promedio es:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32 (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) G^4}{5 a^5 c^5} \frac{[1 + \frac{73}{24} \epsilon^2 + \frac{37}{96} \epsilon^4]}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}$$

El decrecimiento del semieje mayor  $a$  es:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64 m_1 m_2 (m_1 + m_2) G^3}{5 a^3 c^5} \frac{[1 + \frac{73}{24} \epsilon^2 + \frac{37}{96} \epsilon^4]}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}$$

El decrecimiento de la distancia radial  $r$  entre las masas es:

$$\left\langle \frac{dr}{dt} \right\rangle = -\frac{64 m_1 m_2 (m_1 + m_2) G^3}{5 a^3 c^5} \frac{[1 + \frac{37}{24} \epsilon^2]}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}}$$

La pérdida de momentum angular a lo largo del eje  $z$  es:

$$\left\langle \frac{dJ_z}{dt} \right\rangle = -\frac{32 (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2)^{1/2} G^{7/2}}{5 c^5 a^{7/2}} \frac{[1 + \frac{7}{8} \epsilon^2]}{(1 - \epsilon^2)^2}$$

Y finalmente el decaimiento del período orbital del sistema debido a emisión de ondas gravitacionales es:

$$\left\langle \frac{d\tau}{dt} \right\rangle = -\frac{192 \pi m_1 m_2 G^{5/3}}{5 c^5 (m_1 + m_2)^{1/3}} \left( \frac{\tau}{2\pi} \right)^{-5/3} \frac{[1 + \frac{73}{24} \epsilon^2 + \frac{37}{96} \epsilon^4]}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}$$

El descubrimiento y posterior observación y análisis de las señales provenientes de pulsares binarios ha representado la mejor oportunidad para poner a prueba las predicciones de la TGR y otras teorías alternativas de gravitación. Hasta antes del descubrimiento del pulsar binario PSR1913+16 realizado por Russel Hulse y Joseph Taylor en el año 1974, la TGR ya había

pasado las pruebas más rigurosas teniendo como laboratorio nuestro sistema solar; sin embargo, las teorías alternativas de gravitación aún no podían descartarse porque se podían acomodar a los resultados modificando ciertas variables internas de cada teoría. La prueba decisiva vino de la mano del análisis de PSR1913+16 cuando se demostró efectivamente que su período orbital decaía a la misma tasa predicha por la TGR como se muestra en la gráfica 3.10. Las teorías alternativas de gravitación predicen una tasa de decaimiento orbital que difiere de la TGR porque consideran aportes de dipolos y/o monopolos a la emisión de radiación gravitacional. No obstante, ninguna de estas teorías concuerda con la tasa de decaimiento orbital de PSR1913+16, que demuestra la validéz de la fórmula del cuadrupolo obtenida a partir de la TGR.

Eventualmente, no sólo ha sido PSR 1913+16 el único en demostrar la validez de la TGR, sino también otros sistemas descubiertos posteriormente, de entre los que se destaca el pulsar doble PSR J0737-3039A/B . Estos sistemas binarios pueden ser la prueba última en teorías de gravitación debido a que confirman extraordinariamente las predicciones de la TGR, y, aunque no fueron analizadas a detalle en este presente trabajo, al mismo tiempo no concuerdan con las predicciones de otras teorías alternativas de gravitación, hecho que puede llevar a descartarlas definitivamente.

## Referencias

- [1] Hawking, Stephen. The Universe in a Nutshell. Bantam Press. 2001.
- [2] Goldstein, H., Poole, C.J., & Jonh Safko. Classical Mechanics. Reverté, 3ª Edición, 2002.
- [3] Hawking, Stephen & Reyner Ellis, George Francis. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambrigde University Press. 1973.
- [4] Will, Clifford M. "The Confrontation between General Relativity and Experiment." Living Rev. Relativity, 9, (2006), 3 [Online Article]: citado [25/06/2013], <http://www.livingreviews.org/Irr-2006-3>
- [5] Marín, Carlos. La Expansión del Universo, una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas. Universidad San Francisco de Quito, 2ª Edición, 2011.
- [6] Weinberg, Steven. Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons, Inc. 1972.
- [7] Mohr, P.J.; Taylor, B.N. & Newell, D.B. (2011), "The 2010 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants" (Web Version 6.0). Base de datos desarrollada por J. Baker, M. Douma, and S. Kotochigova. <http://physics.nist.gov/constants> [25/06/2013]. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899.
- [8] Straumann, Norbert. General Relativity and Relativistic Astrophysics. Springer-Verlag, 1984.
- [9] Carta de K. Schwarzschild to A. Einstein fechada al 22 de Diciembre 1915, en "The Collected Papers of Albert Einstein", vol.8a, doc 169. <http://www.gsjournal.net/old/eeuro/vankov.pdf> [25/06/2013].
- [10] Kenyon, I.R. General Relativity. Oxford University Press, 1996.
- [11] Will, Clifford M. Was Einstein Right?: Putting General Relativity to the Test. Basic Books, New York, U.S.A. 2ª Edición, 1993.
- [12] Shapiro, Irwin. "A Century of Relativity." Reviews of Modern Physics, Vol. 71, No. 2, 1999.
- [13] Will, Clifford M. Theory and Experiment in Gravitational Physics. Cambrigde University Press, Revised Edition, 1993.
- [14] Marín, Carlos. "Agujeros de gusano: solución exponencial". Avances en Ciencias e Ingenierías. 2(2): A36 - A54.
- [15] Marín, Carlos. "Agujeros de gusano y potenciales efectivos". Avances en Ciencias e Ingenierías. 3(1): A13 - A23.

- [16] Marín, Carlos. “Agujeros de Gusano en un Background Cosmológico”. *Avances en Ciencias e Ingenierías*. 4(2): A1 - A12.
- [17] Shapiro, Irwin. “Fourth Test of General Relativity.” *Physical Review Letters*, Vol 13, No. 26, 1964.
- [18] Shapiro, Irwin et al. “Fourth Test of General Relativity: Preliminary Results.” *Physical Review Letters*, Vol 20, No. 22, 1968.
- [19] Shapiro, Irwin et al. “Fourth Test of General Relativity: New Radar Results.” *Physical Review Letters*, Vol 26, No. 18, 1971.
- [20] Reasenberg, R. D. et al. “Viking Relativity Experiment: Verification of Signal Retardation by Solar Gravity.” *The Astrophysical Journal*, 234, 1979.
- [21] Krisher, Timothy. et al. “Voyager 2 Test of Radar Time-Delay Effect.” *The Astrophysical Journal*, 373,1991.
- [22] Bertotti, B., Less, L., & P. Tortora. “A Test of General Relativity Using Radio Links with the Cassini Spacecraft.” *Nature*, Vol 425, 2003.
- [23] Weber, J. “Detection and Generation of Gravitational Waves.” *Physical Review Letters*, Vol. 117, 1960.
- [24] LISA, Probing the Universe with Gravitational Waves. LISA Mission Science Office, LISA-LIST-RP-436, Version 1.0, Enero 19, 2007
- [25] Hulse, R.A. & J.H. Taylor. “Discovery of a Pulsar in a Binary System.” *The Astrophysical Journal*, 195, 1975.
- [26] Misner, Charles W. Thorne, Kip S. & J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.
- [27] Weisberg, J.M., Nice, D.J. & J.H. Taylor. “Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR1913+16.” *The Astrophysical Journal*, 722, 2010.
- [28] Taylor, J.H., Hulse, R.A. et al. “Further Observations of the Binary Pulsar PSR1913+16.” *The Astrophysical Journal*, 206, 1976.
- [29] Weisberg, J.M., Taylor, J.H. “Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis.” 2004, [Online Article]: citado [13/08/2013], <http://arXiv.org/abs/astro-ph/0407149>.
- [30] Taylor, J.H. & J.M. Weisberg. “A New Test of General Relativity: Gravitational Radiation and the Binary Pulsar PSR1913+16.” *The Astrophysical Journal*, 253, 1982.

- [31] M. Burgay, et al. “An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system.” *Nature*, 426, 531, 2003.
- [32] Kramer, M., et al. “Tests of General Relativity from timing the double pulsar.” 2006, [Online Article]: citado [17/08/2013], <http://arXiv.org/abs/astro-ph/0609417>.
- [33] Stairs, I.H., et al. “Studies of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1534+12. I. Timing Analysis.” *The Astrophysical Journal*, 581, 2002.
- [34] Jacoby, B.A., et al. “Measurement of Orbital Decay in the Double Neutron Star Binary PSR B2127+11C.” *The Astrophysical Journal*, 644, 2006.
- [35] Faulkner, A. J., et al. “PSR J1756-2251: A New Relativistic Double Neutron Star System.” *The Astrophysical Journal*, 618, 2005.
- [36] Lorimer, D.R., et al. “Arecibo Pulsar Survey Using Alfa. II. The Young, Highly Relativistic Binary Pulsar J1906+0746.” *The Astrophysical Journal*, 640, 2006.
- [37] Ramesh, N. D., et al. “Gravitational-radiation losses from the pulsar-white dwarf binary PSR J1141-6545.” *Physical Review D*, 77, 124017, 2008.