UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

Colegio de Ciencias e Ingeniería

La Melodía de las Matemáticas

Cecilia Belén Valdez Moncayo

David F. Hervas, Ph.D., Director de Tesis

Tesis de grado presentada como requisito
para la obtención del título de Licenciada en Matemáticas

Quito, mayo de 2014

Universidad San Francisco de Quito

Colegio de Ciencias e Ingeniería

HOJA DE APROBACIÓN DE TESIS

La Melodía de las Matemáticas

Cecilia Belén Valdez Moncayo

David Hervas,Ph.D.
Director de Tesis ____

Eduardo Alba, Dr.
Director del Programa ____

César Zambrano, Ph.D.
Decano de la Escuela de Ciencias
Colegio de Ciencias e Ingeniería____

Quito, mayo de 2014

Firma: ______________________________________

Nombre: Cecilia Belén Valdez Moncayo____________

C. I.: 1724077407___________________________

Fecha: Quito, mayo de 2014________________

DEDICATORIA

Dedico este proyecto de titulación en primer lugar a mis padres y hermanos, que desde siempre me han apoyado y ayudado a cumplir mis metas y llegar a ser la persona que soy. Les agradezco por todas las oportunidades que me han dado, por todo el esfuerzo que han dedicado para que yo pueda cumplir mis sueños, entre los cuales están todos mis objetivos académicos. Por último dedico esto a mis amigos, profesores y compañeros de clase, en quienes me apoyé durante toda mi carrera para que juntos podamos cumplir nuestras metas universitarias con excelentes resultados.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera especial a mis profesores David Hervas y Eduardo Alba por acompañarme durante toda mi carrera, y por hacer que esta jornada sea enriquecedora e inolvidable. Agradezco a David por haberme guiado en este proyecto y por haber apoyado mi pasión por la Música y las Matemáticas. Agradezco a todos quienes me han ayudado a crecer y lograr construir un futuro prometedor que estoy ansiosa por explorar.

RESUMEN

La Música y las Matemáticas han sido consideradas como áreas complementarias desde los tiempos de Pitágoras. Sus aportes en relación a estas dos áreas son explicados en este trabajo con el objetivo de mostrar al lector las bases de los paralelismos existentes. Varios compositores, entre actuales y antiguos, han hecho uso de estructuras matemáticas consciente o inconscientemente. Algunos fueron incluso criticados por su estricta inclinación hacia el uso de esta ciencia para sus composiciones; sin embargo, no podemos asegurar que este tipo de casos sean comunes. Este trabajo pretende mostrar que, a pesar de que sea poco perceptible, la relación entre estas dos áreas es más profunda de lo que parece.

ABSTRACT

Music and Mathematics have been considered like complementary areas of studies since the times of Pythagoras. His contributions regarding these two areas are explained in this project with the objective of being able to show the reader the basis of the existing parallelisms. Many composers, between actual and old composers, have used mathematical structures either conscious or unconsciously. Some were even criticized for their strict inclination with the use of this science for their compositions; however, we cannot assure these practices are common. This project pretends to show that, even though it is not very perceptible, the relationship existing between these two areas is deeper than it seems.

TABLA DE CONTENIDO

FIGURAS

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

"La música es un ejercicio matemático inconsciente en el que la mente no sabe que está calculando" – Gottfried Leibniz

Durante varios siglos se ha hecho uso de las matemáticas en la música. El descubrimiento de la Escala de Pitágoras; el uso de la Teoría de la Música por grandes compositores como Beethoven, Bach y Mozart; y la aplicación de funciones y teoría de grupos en composiciones, han hecho que la música pueda ser vista con diferentes ojos, con ojos matemáticos.

A pesar de que la atracción a la música por matemáticoses más fuerte que la atracción que provocan las matemáticas a los músicos, se espera que este proyecto llegue a ambos grupos para que tengan la oportunidad de disfrutar y apreciar las relaciones encontradas entre estas dos áreas de estudio.

Este proyecto de titulación pretende explicar de manera didáctica las relaciones simples y complejas encontradas entre las matemáticas y la música para que el contenido esté al alcance de aquellas personas con inclinaciones a alguno de estos dos ramos, sin la necesidad de que hayan dedicado varios años de estudio a ninguna de estas áreas. Como dijo el músico Harvey Reid en su artículo "OnMathematics and Music": "El grado de entendimiento de esta relación es proporcional al entendimiento del observador de ambas áreas, las matemáticas y la música".

Los lectores que podrán tomar más provecho de este proyecto serán aquellos con conocimientos básicos sobre las matemáticas y la música, debido a que se asume la comprensión y noción de varios términos de uso común en estas áreas. Sin embargo, se plantean varias definiciones que ayudarán a un mayor entendimiento de la relación a revelar.

CAPÍLTULO 2

PITÁGORAS EN LA MÚSICA

Pitágoras (569 a.C.-475 a.C.)fue un matemático y filósofo griego. A él se le atribuyen avances matemáticos en varias áreas como la geometría y la aritmética. En el ámbito musical, se destaca también por el descubrimiento de elementos matemático musicales los cuales fueron parte fundamental para los inicios de la ciencia armónica. Un ejemplo de sus aportes en la música es el descubrimiento de las proporciones musicales y la importancia de la aritmética en la música que se aprecia detrás de la afinación pitagórica. (Goldaraz, 2004).

En la antigua Grecia se dieron cuenta de que no todos los sonidos suenan bien cuando se los combina, y es por esta razón que se empieza a investigar la consonancia[1] y la disonancia[2]. Los griegos descubrieron que la perfecta combinación de sonidos trataba de aquellos cuyas frecuencias eran múltiplos enteros de la primera nota, el ejemplo más claro es cuando se tocan las notas con frecuencias 440Hz, 660Hz, 880Hz y 1100Hz junto con la nota base que en este caso tendría una frecuencia de 220Hz. (Beer, 1998).

Dadas las características de la consonancia, se forma el sistema de las proporciones, el cual determina los intervalos[3] que sonarán armoniosamente cuando se los toca. Si se toma una misma cuerda manteniendo una tensión constante y se hace sonar toda la cuerda y luego su mitad, obtenemos la *octava* cuya razón es 2:1; si se hace sonar toda la cuerda y 2/3 de la misma, entonces se obtiene una *quinta* cuya razón es 3:2; por último, si hacemos

[1]**Consonancia:** Cualidad de aquellos sonidos que, oídos simultáneamente, producen efecto agradable.(REAL ACADEMIA ESPAÑOLA)
[2]**Disonancia:** Acorde no consonante. (REAL ACADEMIA ESPAÑOLA)
[3]**Intervalo:**Diferencia de tono entre los sonidos de dos notas musicales. (REAL ACADEMIA ESPAÑOLA).
Tono: Cualidad de los sonidos, dependiente de su frecuencia, que permite ordenarlos de graves a agudos. (REAL ACADEMIA ESPAÑOLA)

sonar toda la cuerda y los 3/4 de la misma, entonces se obtiene la *cuarta* cuya razón es 4:3. (Goldaraz, 2004) Cabe recalcar que si se tiene dos notas que mantengan una relación 2:1, estas notasreciben el mismo nombre pero sus frecuencias son diferentes ya que la nota más alta (aguda) tendrá el doble de frecuencia que la nota que se encuentra una octava más abajo (la más grave).

El trabajo de Pitágoras correspondiente al descubrimiento y definición de estas razones da lugar a la Serie Armónica**.** Esta serie matemática puede ser explicada desde un punto de vista musical como un fenómeno físico. Cuando se hace vibrar una cuerda en el piano, esta oscila de arriba hacia abajo sobre la longitud de la cuerda. En términos físicos, se dice que la longitud de onda de esta cuerda es dos veces su longitud. Sin embargo, la cuerda también vibra a divisiones enteras de la cuerda, lo que crea tonos más altos, pero con menor energía, que se basan en estas razones. El siguiente gráfico muestra de manera visual este fenómeno:

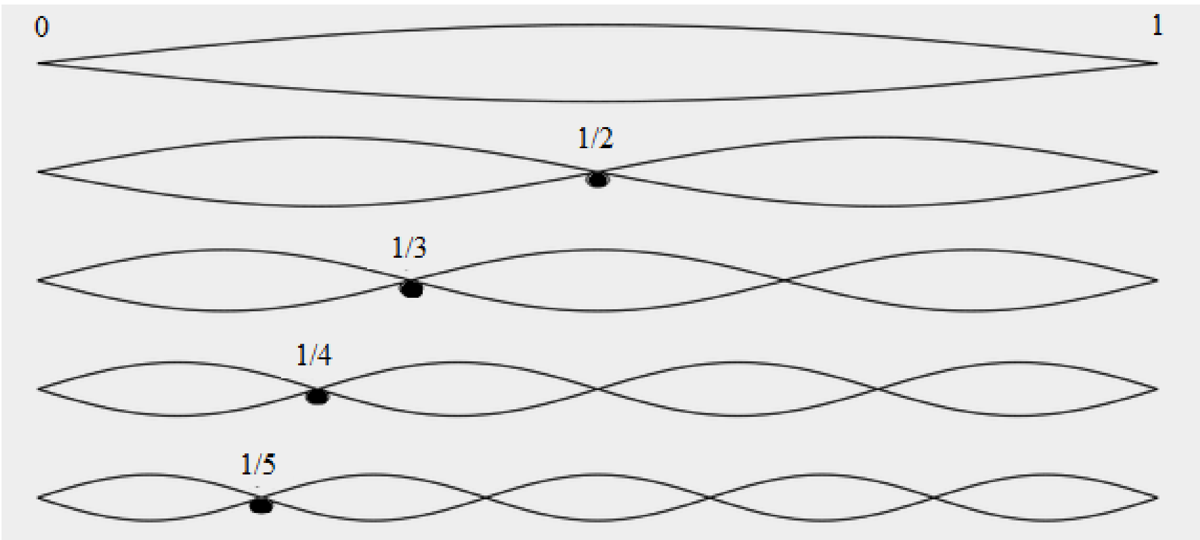


Figura 1: Vibración de una cuerda

Este fenómeno resulta en el descubrimiento de que cuando se toca una nota cuya longitud de cuerda defina cierta frecuencia, ésta genera un sonido que contiene componentes de aquellas frecuencias que sean múltiplos de la primera, es decir, el sonido de estos múltiplos aparecen con una menor intensidad cuando la nota base es tocada. (Beer, 1998). *Ejemplo:* si se hace vibrar la cuerda correspondiente a la nota A (la) que tiene 440Hz, también se escucharán las frecuencias 880Hz, 1320Hz, etc. pero con menor intensidad. Este fenómeno es el que explicaría los diferentes sonidos que emiten los instrumentos, debido a que la cantidad de armónicos[4] de cada instrumento es diferente.

La serie armónica correspondiente a la nota C=65.41Hz, utilizando un temperamento igual[5], se ve de la siguiente manera:

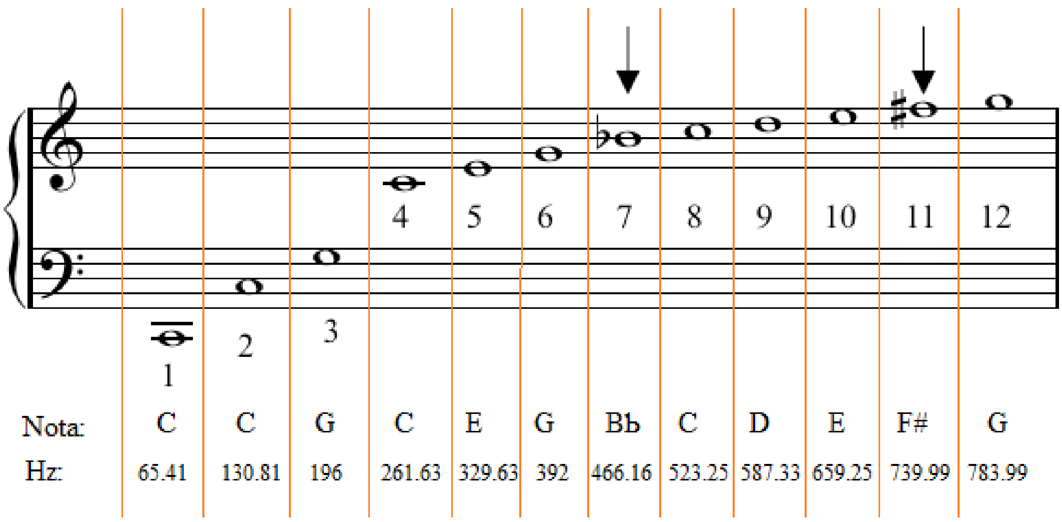


Figura 2: Serie armónica de C=65.41Hz

[4]**Armónico:**En una onda periódica, cualquiera de sus componentes sinusoidales, cuya frecuencia sea un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. (RAE). *Ejemplo:* En la figura 2, el primer armónico es C, el segundo armónico es el segundo C, el tercer armónico es G, etc.

[5]**Temperamento igual:** Nombre común del sistema temperado de doce notas (as doce notas del piano), el cual es el sistema de afinación más utilizado actualmente en la música occidental.

Las flechas muestran que las notas B♭ y F# no corresponden a los tonos provenientes del temperamento igual; sin embargo, si se las pone como parte de esta serie, estas notas son muy convenientes al momento de enfocarnos en blues y jazz.

Como se ha podido ver, esta serie contiene las razones que fueron descubiertas en los tiempos de Pitágoras; por esta razón, a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ se le conoce como serie armónica en honor a Pitágoras.

El sistema pitagórico de proporciones es de gran importancia incluso en la actualidad; sin embargo, se encontraron ciertos problemas con el uso de este sistema, lo que llevó a que se introduzcan nuevas ideas de notación y temperamento. El siguiente capítulo detallará dichos problemas y las soluciones que se propusieron.

PROBLEMAS CON EL SISTEMA PITAGÓRICO DE PROPORCIONES

El sistema pitagórico empezó a tener varios inconvenientes cuando se requería sumar y restar intervalos para encontrar nuevos intervalos utilizando los básicos como VIII y V, ya que había que multiplicar o dividir las razones que los representan.*Ejemplo:* Si se desea sumar la V más la IV, se debe multiplicar las razones que les corresponden (3:2)*(4:3), y si se necesita restar la IV de la V, se debería dividir $\frac{\mathbf{3:2}}{\mathbf{4:3}}$. Pero, ¿por qué se deben multiplicar o dividir las razones cuando se habla de sumas y restas de intervalos? Esto se debe a que, a pesar de que se puede percibir la distancia entre intervalos como algo lineal (relacionado con sumas y restas), físicamente un intervalo se relaciona con la proporción entre las frecuencias de los dos sonidos (relacionada con productos y divisiones).

En los tiempos de Pitágoras, se define a un tono entero como la diferencia entre una quinta y una cuarta, es decir, $\frac{\mathbf{3:2}}{\mathbf{4:3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} = \mathbf{9:8}$.El problema se da al notar que cuando se tiene una nota con frecuencia *f* y se le suman tonos enteros, nunca se obtienen notas con frecuencias 2*f*, 3*f*, 4*f*, etc.; sin embargo, cuando se suman 6 tonos enteros a una nota de frecuencia *f* se obtiene $\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}\right)^{\mathbf{6}} \boldsymbol{f} \approx \mathbf{2.0273}\boldsymbol{f} > 2\boldsymbol{f}$.El valor que sobrepasan 6 tonos a una octava se llama *coma Pitagórica* y su valor es: $\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^{6}}{2}\approx 1.0136$.

Dificultades como las mencionadas anteriormente permiten que se desarrollen nuevos sistemas de afinación que sean más amigables y es por esto que Johann Sebastian Bach introduce un sistema en el que la octava se divide en 12 partes iguales, y ahora un tono es definido como dos semitonos, donde cada semitono es expresado como $\sqrt[12]{\mathbf{2}}$, y por lo tanto un tono tiene ahora un valor de$\sqrt[12]{\mathbf{2}} * \sqrt[12]{\mathbf{2}} = \sqrt[6]{\mathbf{2}} \approx \mathbf{1.1225}$en lugar de$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1.125}$.El uso del factor $\sqrt[12]{\mathbf{2}}$se lo puede ver en el siguiente ejemplo: se sabe que de A=440Hz a A=880Hz existe una octava; si a esta octava se la divide en 12 notas distanciadas por semitonos definidos como $\sqrt[12]{\mathbf{2}}$, y se comienza por la nota A=440Hz, se obtendrán las siguientes notas A#=(440*$\sqrt[12]{\mathbf{2}}$)Hz, B=(440* $(\sqrt[12]{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}$)Hz, …, A=(440* $(\sqrt[12]{\mathbf{2}})^{\mathbf{12}}$)H**z=(**440*2)Hz=880Hz.La controversia con este nuevo sistema de afinación se da cuando aparecen pequeñas disonancias a las que el oído humano no está acostumbrado a escuchar, pero que son necesarias al momento de crear música más compleja. (Beer, 1998)

Otro problema encontrado con el sistema pitagórico se da cuando se requiere dividir un intervalo *m* en *n* partes, donde *m* es la razón que representa al intervalo y *n* el número de notas que se requiere en el intervalo.Para lograr esto se debe hallar $\sqrt[n]{\boldsymbol{m}}$**.**El problema se da al hallar que el semitono ya definido como $\frac{\mathbf{256}}{\mathbf{243}}$es diferente de$\sqrt{\mathbf{9:8}}$, por lo que en un mismo sistema tendríamos dos definiciones diferentes de semitonos.Esto puede ser imposible en muchos casos ya que la división geométrica debe ser realizada en partes iguales en una cuerda. Poder diferenciar entre intervalos cuando estos son muy pequeños fue otro de los problemas encontrados con este sistema. Lo que se necesitaba en ese entonces era convertir a estas razones en cantidades lineales, lo cual se logra apenas en el siglo XVII con el uso de logaritmos. (Goldaraz, 2004)

En la actualidad, la unidad logarítmica más utilizada en la música es el cent o centésimo, unidad propuesta por A. J. Ellis en el siglo XIX, donde $\mathbf{1}\ \boldsymbol{cent} = \sqrt[1200]{\mathbf{2}}$.

(Goldaraz, 2004).Un semitono temperado[6] tiene 100 cents y, por lo tanto, la octava tiene 1200 cents. Al convertir un intervalo expresado como una proporción en uno expresado en forma lineal mediante el uso de logaritmos, se debe utilizar $\mathbf{log_2}$ ya que la razón de la octava es 2:1. (Goldaraz, 2004). Esto hace que se transforme del sistema temperado al puro.Para transformar una razón $\frac{p}{q}$ a otras unidades se debe realizar la siguiente operación:

- $\log_2\left(\frac{p}{q}\right) * N$

Donde N es el número de partes a dividir la octava, es decir, en caso de que se quiera hallar el número de cents de una razón $\frac{p}{q}$, N=1200 (Goldaraz, 2004).

Ejemplos:

- *Octava (caso trivial):*$\log_2\left(\frac{2}{1}\right) * 1200 = 1200$
- *Quinta:*$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) * 1200 = (0.58496)(1200) = 701{,}955 \approx 702$

Dado que el logaritmo más conocido y usado actualmente es el $\mathbf{log_{10}}$,se puede hacer los mismos cálculos utilizando una fórmula equivalente que maneje el $\mathbf{log_{10}}$.Se sabe que $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)}{\log_a(b)}$, entonces

$$cent = \log_2\left(\frac{p}{q}\right) * 1200$$

[6]**Semitono temperado:**es el semitono correspondiente al temperamento igual que fue diseñado de tal manera que todas las tonalidades tengan una cantidad exactamente igual de afinación. **Tonalidad:** Sistema musical definido por el orden de los intervalos dentro de la escala de los sonidos.

$$\boldsymbol{cent} = \mathbf{1200} * \frac{\mathbf{log_{10}}\left(\frac{p}{q}\right)}{\mathbf{log_{10}(2)}}$$

Ejemplos:

- *Quinta:* $\mathbf{1200} * \frac{\mathbf{log_{10}}\left(\frac{3}{2}\right)}{\mathbf{log_{10}(2)}} = \mathbf{701,955} \approx \mathbf{702}$
- *Cuarta:* $\mathbf{1200} * \frac{\mathbf{log_{10}}\left(\frac{4}{3}\right)}{\mathbf{log_{10}(2)}} \approx \mathbf{498}$

Ahora, para sumar la V y la IVse usará 702+498 en lugar de 3:2*4:3, y para dividir una IIIM justa en dos partes iguales, se usará 400=200+200 en vez de $\sqrt[2]{\mathbf{5:4}}$(Goldaraz, 2004). Para el último caso, se usa el sistema de cents para temperamento igual, el cual redondea los cents de la afinación justa y es la afinación a la cual nuestro oído está acostumbrado en la actualidad (Goldaraz, 2004).

Hoy en día ninguno de los sistemas de afinación y temperamentos mencionados anteriormente son utilizados. Para temperar un instrumento se entrena al oído y se deja un poco de lado las matemáticas que en su tiempo fueron usadas plenamente. Sin embargo, ciertos músicos siguen utilizando algunos de estos sistemas de afinación dependiendo del lugar en donde se formaron y el instrumento que tocan.

Hasta el momento se ha podido mostrar un poco de la historia de la afinación y el temperamento, así como como los pos y contras de ciertos sistemas propuestos en la antigüedad. El siguiente capítulo analizará la aparición de la secuencia de Fibonacci y el número áureo en la naturaleza, el arte, y la música en general.

CAPÍTULO 3

SECUENCIA DE FIBONACCI EN LA MÚSICA

Para este capítulo se utilizará la siguiente nomenclatura matemática para las notas musicales:

C = 1
C# = Dь = 2
D = 3
D# = Eь = 4
E = 5
F = 6
F# = Gь = 7
G = 8
G# = Aь = 9
A = 10
A# = Bь = 11
B = 12
C = 13

La aparición de la secuencia de Fibonacci en la composición musical es otro de los aspectos interesantes de las matemáticas en la música. La secuencia de Fibonacci es: 1, 1, 2, 3, 5, 18, 13, 21, 34, 55,…. Como se puede observar, esta secuencia empieza con dos números 1 y cada nuevo elemento es la suma de los dos anteriores. Si $\mathbf{F}_{\boldsymbol{n}}$ es el enésimo número de Fibonacci, las proporciones obtenidas al dividir $\frac{\mathbf{F}_{\boldsymbol{n}+1}}{\mathbf{F}_{\boldsymbol{n}}}$ convergen a un límite constante llamado el número áureo o divina proporción y denotado como φ. A continuación se puede ver la convergencia de estas proporciones:

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1.5, \frac{5}{3} = 1.666 \dots, \frac{8}{5} = 1.6, \frac{13}{8} = 1.625, \frac{21}{13} \approx 1.6153$$

de donde se obtiene que$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{lim}_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Esta proporción puede ser encontrada en formas geométricas, por ejemplo en la relación entre la longitud de una diagonal y la longitud de un lado del pentágono, en obras arquitectónicas como en la torre Eiffel; en la naturaleza se la puede aplicaren ciertas proporciones del cuerpo humano, en la concha de un nautilo, la relación entre la longitud del tronco de un Abeto Rojo (árbol) y su diámetro, etc. (Beer, 1998)

¿Qué pasaría si se expresa el acorde de Do Mayor con la nomenclatura numérica? Se recuerda al lector que éste acorde está compuesto por C, E, G, C. Como se puede observar, en la siguiente figura se dibujan las notas del piano distanciadas entre ellas por semitonos:

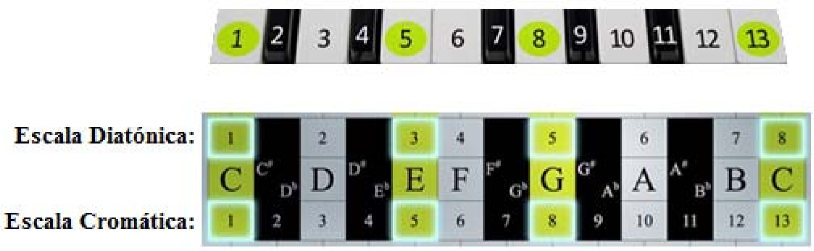


Figura 3: Notas del piano distanciadas por semitonos

Para este ejemplo se toma tanto la escala cromática (12 notas) como la escala diatónica (7 notas: C, D, E, F, G, A, B) ¿A qué secuencia responde este acorde perfecto? La secuencia es 1, 3, 5, 8, 13, los cuales son números de Fibonacci! Este acorde, cuyas notas tienen consonancia, tiene íntima relación con el número φ.

Existen ejemplos de composiciones musicales que fueron divididas en dos partes, que tienen simetría o una estrecha relación con la divina proporción. Una de estas composiciones es "Hallelujah" del Mesías de Handel, el cual consiste de 94 compases. En los compases 57-58 (aproximadamente a los$\frac{8}{13}$ de la obra) empieza uno de los eventos musicales más importantes de esta obra musical, la entrada del solo de las trompetas. Una vez dividida la pieza en estas dos partes, se puede encontrar más eventos de importancia en los $\frac{8}{13}$ de los primeros 57 compases, es decir, en el compás 34 donde existe la entrada "The kingdom of glory…" que marca un punto esencial en esta obra musical, y finalmente en los $\frac{8}{13}$ de la segunda parte de la división, eso es en el compás 79, donde aparece nuevamente un solo de trompetas en "And he shallreign". (Beer, 1998)

El coro Hallelujah es la parte más aclamada y famosa del Mesías de Handel, es costumbre que el público se ponga de pie cuando empieza a sonar este coro debido a las emociones que provoca. La primera vez que alguien se puso de pie ante esta parte de la pieza musical fue en los tiempos del Rey George I, quien al sentirse movido ante la emoción que emana este coro, y las palabras encontradas en el mismo, se vio en la necesidad de ponerse de pie, y a él se le unió el resto del público; desde entonces, es común que la audiencia se ponga de pie cuando suena este coro.

Varias composiciones musicales de gran importancia tienen alguna relación con la divina proporción, aparte del ejemplo mencionado anteriormente, existen también composiciones como la "Sonata No. 1" de Mozart, quien era un genio de la música a quien le encantaba jugar con los números. Compositores comoBartokusaban la serie de Fibonacci en piezas como"MusicforString, Percussion and Celesta". A pesar de que los trabajos de Bartok fueron intencionalmente y conscientemente matemáticos, no se puede asegurar que los demás músicos hayan hecho sus composiciones con el uso intencionado del número áureo o de la serie de Fibonacci. Este proyecto pretende mostrar al lector que incluso la belleza de la música puede ser expresada de formas matemáticas sin asumir que sus compositores hayan tenido conocimiento del uso de las matemáticas. (Beer, 1998)

Este capítulo ha analizado la aparición de la secuencia de Fibonacci y el número áureo en piezas musicales de gran fama; sin embargo, existen también funciones matemáticas que juegan un papel importante en la composición de la música. El siguiente capítulo define algunas de las funciones encontradas con mayor facilidad en este arte y muestra ejemplos del uso de las mismas en piezas de compositores famosos que demuestran la importancia de estructuras matemáticas en la música.

CAPÍTULO 4

MÓDULO 12: TRANSPOSICIONES E INVERSIONES

Anteriormente se pudo ver que las notas musicales pueden ser escritas mediante una nomenclatura numérica con el fin de usarlas matemáticamente. Para introducir el tema de la aritmética modular,se usará la siguiente nomenclatura de ahora en adelante, con la cual se podrá entender el módulo 12 que es parte importante de este capítulo y de la música en general:

C = 0
C# = D♭ = 1
D = 2
D# = E♭ = 3
E = 4
F = 5
F# = G♭ = 6
G = 7
G# = A♭ = 8
A = 9
A# = B♭ = 10
B = 11

En este capítulo se usarán conceptos matemáticos que pueden sonar complejos pero que se los usa día a día sin notar que en realidad se está utilizando matemáticas avanzadas y aplicables a otras áreas como la música. Los conceptos que se usarán se detallan a continuación:

Definición 1: Un *conjunto* es la colección de objetos. Esta colección de objetos es escrita entre llaves $\{\}$. Los objetos de un conjunto son llamados *elementos.* Se dice que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, sin importar su orden. (Fiore, 2009)

Definición 2: Una *función f* de un conjunto *S* a un conjunto *S´* es una regla que asigna a cada elemento de *S* un único elemento de *S´*. Esto se denota como $f: S \rightarrow S'$. Esto se lee como "*f* va desde *S* hasta *S´*". En este caso, el conjunto *S* es llamado el *dominio* de la función *f* y *S´* es llamado el *rango* de la función *f.* Las *entradas* son los elementos del dominio. Las *salidas* son los elementos del rango. (Fiore, 2009)

Definición 3: sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces *a divide b*, denotado $a \mid b$ si existe un $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Si $a \mid b$, se dice que *a* es un divisor o factor de *b.* La notación $a \nmid b$ significa que *a* no divide a *b.*(Strayer, 2001)

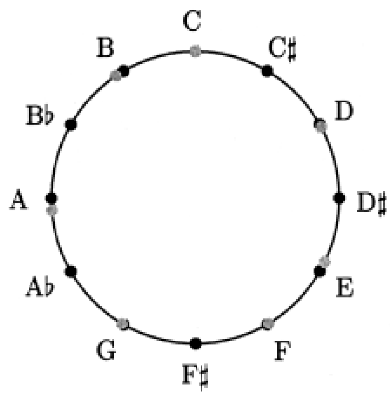
Definición 4: Sea $a, b, m \in \mathbb{Z}$ con *m>0.* Entonces se dice que *a* es congruente a *b módulo m,* denotado $a \equiv b \bmod m$, si $m \mid a - b$. Si $a \equiv b \bmod m$, entonces se dice que *m* es el *módulo* de la congruencia. La notación $a \not\equiv b \bmod m$ significa que *a* no es congruente a *b* módulo *m;* se dice que *a* en *incongruente a b módulo m.* (Strayer, 2001)

Con el fin de estudiar la aplicación de las transposiciones e inversiones en la música, este capítulo se concentrará en la congruencia módulo 12 ya que cada octava cuenta con un total de 12 notas. Se estudiarán funciones $\mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ donde $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Para entender en qué parte de la vida cotidiana se utiliza este módulo, se presenta el ejemplo de la hora. El día tiene 24 horas, sin embargo, se divide al día en dos partes de 12 horas cada una (AM y PM). Cuando son las 13 horas, el reloj marca la 1, cuando son las 16 horas, el reloj marca las 4, y así sucesivamente. En notación matemática, esto se escribe de la siguiente manera:

$$13 \equiv 1 \bmod 12$$
$$16 \equiv 4 \bmod 12$$

Cabe recalcar que $12 \equiv 0 \bmod 12$ y $24 \equiv 0 \bmod 12$. (Fiore, 2009)

Si se utiliza la nomenclatura numérica de las notas y se las pone en un círculo simulando a un reloj (y tomando en cuenta que $12 \equiv 0 \bmod 12$), se obtiene:



(Hall&Josic, 2001)

Figura 4: Nomenclatura mod12 de las notas musicales

El oído del ser humano escucha, naturalmente,tonos que se encuentran a una distancia de una octava, *i.e.* tonos con 12 saltos o intervalos entre ellas en el piano. Estos tonos suenan muy parecidos para nuestro oído, por lo que se dice que de alguna manera el oído humano está programado para utilizar la congruencia módulo 12. Musicalmente también se usa el mod 7 debido a que existen 7 tonos en la escala diatónica. (Fiore, 2009)

Definición 5: Sea *n* un entero mod 12. Entonces la función $T_n\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ definida por la fórmula $T_n(x) = (x + n) \bmod 12$ es llamada *transposición por n.*

Ejemplos:

$$T_4(8) = 8 + 4 \equiv 0 \bmod 12$$

$$T_4(6) = 6 + 4 \equiv 10 \bmod 12$$

$$T_4(10) = 10 + 4 \equiv 2 \bmod 12$$

Definición 6: Sea *n* un entero mod 12. Entonces la función $I_n\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ definida por la fórmula $I_n(x) = (-x + n) \bmod 12$ es llamada *inversión sobre n.*

Ejemplos:

$$I_4(8) = -8 + 4 \equiv 8 \bmod 12$$

$$I_4(6) = -6 + 4 \equiv 10 \bmod 12$$

$$I_4(10) = -10 + 4 \equiv 6 \bmod 12$$

El ejemplo más simple y claro del uso de una transposición es al momento de cantar. ¿Les ha pasado alguna vez que una canción está demasiado alta o baja para sus voces? Este es un problema con el que se encuentran las bandas musicales ya que el rango de voz de cada persona es único. Para poder cantar cualquier canción sin tener problemas con la entonación de la misma, lo que se hace es aplicar una transposición a toda la canción, cambiando la tonalidad de la misma para que se ajuste al rango de la persona que la vaya a cantar. ¡Esta función es sin duda la mejor amiga de muchos cantantes!

Un ejemplo del uso de estas funciones siglos atrás se encuentra en la Fuga 6 en *d* menor de la “Well-TemperedClavier Book I” de Bach. La obra se basa en las notas

<D, E, F, G, E, F, D, C#, D, B♭, G, A>, o <2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9>[7]

Para fines de este análisis se llamará a este conjunto de notas ordenadas *S*.Las notas de *S* suenan hasta el segundo compás, y el tercero empieza con las notas

<A, B, C, D, B, C, A, G#, A, F, D, E>=<9, 11, 0, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4>

---

[7]Los músicos utilizan <> en lugar de {} para aclarar que las notas ocurren en este orden, es decir, {10,3,5}={3,10,5} pero <10,3,5>≠<3,10,5>.

¿Cuál es la relación existente entre estas notas y las de *S*? ¡Exactamente! las últimas son una traslación por 7 de *S.* Posteriormente se repite *S* en el sexto y séptimo compás en una octava más baja, y en el compás 8 se obtienen las notas

<E, F, G, A, F, B♭, G, F#, G, E♭, C#, D> = <4, 5, 7, 9, 5, 10, 7, 6, 7, 3, 1, 2>

¿Qué pasó con las notas de estos compases? Al parecer, las primeras 5 notas casi son T_2 de *S,* mientras que las 5 siguientes y la última son T_5 de *S,* y la onceava no sigue ninguna función. A pesar de que Bach no haya seguido estrictamente los resultados matemáticos, es evidente el paralelismo encontrado entre la música y las matemáticas; sin embargo, es el compositor quien decide qué notas usar y a cuáles cambiar o eliminar para que la emoción y mensaje de su composición sea transmitido como él lo desee. Por último, algunos de los siguientes compases continúan con las siguientes notas:

Compás 13: <A, B, C#, D, B, C#, A, G#, A, F, D, E> = <9, 11, 1, 2, 11, 1, 9, 8, 9, 5, 2, 4>

Compás 17: <A, B, C, D, B, C#, A, G#, A, F, D, E> = <9, 11, 0, 2, 11, 1, 9, 8, 9, 5, 2, 4>

Compás 18: <A, B, C#, D, B, C, A, G#, A, F, D, E> = <9, 11, 1, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4>

Compás 21: <A, B, C#, D, B, C#, A, G#, A, F, D, E> = <9, 11, 1, 2, 11, 1, 9, 8, 9, 5, 2, 4>

Todas estas notas T_7, a excepción de los 1s.

Esta obra no solo hace uso de traslaciones, sino también de inversiones. Los compases 14 y 22 son:

<E, D, C#, B, D, C#, E, F, E, A, C, B♭> = <4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 9, 0, 10>

<E, D, C#, B, D, C#, E, F, E, G, B♭, A> = <4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 7, 10, 9>

Al igual que en los anteriores compases, estos no siguen una función matemática al pie de la letra, y aquellas notas subrayadas son las que se desvían de la inversión I_6. Los músicos escogen qué notas cambiar o aumentar para que el sonido de sus obras se ajuste más a su gusto musical. (Fiore, 2009)

Ahora es cada vez más fácil comprender la música, muchos podrían incluso pensar que en realidad no es tan difícil componer una canción dado que basta con pensar en un compás base y manipularlo matemáticamente, jugar con funciones y convertir un compás o dos en obras completas.Pero no, no es tan sencillo como parece. Para componer una canción o una obra musical, es necesario tener varios conocimientos armónicos, ya que como se pudo ver antes, no todas las notas suenan bien cuando se las toca al mismo tiempo o cuando se las pone una después de la otra. Esto puede complicar el plan de encontrar un compás que sea agradable para el oído humano y que transmita el tipo de sentimiento o emoción que se desee. Sin embargo, el uso de estas funciones definitivamente ayuda no sólo a los compositores, sino también a los músicos que interpretan este tipo de obras musicales. Al tener la posibilidad de seguir patrones y encontrar relaciones entre los compases, es más fácil para los intérpretes lograr "memorizar" estas piezas musicales y tocarlas completas sin tener la necesidad de tener las partituras frente a ellos. (Wells, 2008)

Cabe recalcar el deseo de Bach de que la Música sea considerada como ciencia. Su compromiso con este proyecto de vida lo llevó a intentar determinar las leyes de este "universo sónico", perfilar los principios usados para esta exploración y categorizar las estructuras que se están creando.

Ahora que se ha explicado y analizado el uso de las transposiciones e inversiones en la música, el siguiente capítulo introduce una nueva función que combina las dos anteriores, obteniendo resultados bastante interesantes y de importancia tanto para músicos como para matemáticos. Funciones como las ya analizadas y la que se estudiará en el siguiente capítulo, son parte fundamental de la armonía y pueden llegar a ser utilizadas repetidamente en una misma pieza musical.

CAPÍTULO 5

INVERSIONES CONTEXTUALES Y SU USO

En este capítulo se introduce una nueva forma de utilizar las matemáticas en la composición de la música: *inversiones contextuales.*

Ahora se considera el ejemplo de una de las piezas musicales famosas de Hindemith: la Fuga en G de “LudusTonalis”. Esta obra empieza con

$$<G, G, G, G, G, G, G, C, D, G, C, F> = <7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 0, 2, 7, 0, 5>$$

En este caso el análisis no se basará en comparar el primer compás con los siguientes, sino que se basará en las notas que sobresalen en esta pieza:

$$<G, C, D> = <7, 0, 2>$$

Ahora se considerará el conjunto de todas sus transposiciones e inversiones, al que se llamará*TI*para propósitos de este análisis. Entonces se tiene que *TI* contiene los siguientes elementos:

$$T_0 < 7,0,2 > = < 7,0,2 > I_0 < 7,0,2 > = < 5,0,10 >$$

$$T_1 < 7,0,2 > = < 8,1,3 > I_1 < 7,0,2 > = < 6,1,11 >$$

$$T_2 < 7,0,2 > = < 9,2,4 > I_2 < 7,0,2 > = < 7,2,0 >$$

$$T_3 < 7,0,2 > = < 10,3,5 > I_3 < 7,0,2 > = < 8,3,1 >$$

$$T_4 < 7,0,2 > = < 11,4,6 > I_4 < 7,0,2 > = < 9,4,2 >$$

$$T_5 < 7,0,2 > = < 0,5,7 > I_5 < 7,0,2 > = < 10,5,3 >$$

$$T_6 < 7,0,2 > = < 1,6,8 > I_6 < 7,0,2 > = < 11,6,4 >$$

$$T_7 < 7,0,2 > = < 2,7,9 > I_7 < 7,0,2 > = < 0,7,5 >$$

$T_8 < 7, 0, 2 > = < 3, 8, 10 >$ $I_8 < 7, 0, 2 > = < 1, 8, 6 >$

$T_9 < 7, 0, 2 > = < 4, 9, 11 >$ $I_9 < 7, 0, 2 > = < 2, 9, 7 >$

$T_{10} < 7, 0, 2 > = < 5, 10, 0 >$ $I_{10} < 7, 0, 2 > = < 3, 10, 8 >$

$T_{11} < 7, 0, 2 > = < 6, 11, 1 >$ $I_{11} < 7, 0, 2 > = < 4, 11, 9 >$

Se recuerda al lector que cuando se ubica a las notas dentro de “<>”, se obtienen conjuntos ordenados, es decir, < 4, 9, 11 > y < 4, 11, 9 > son dos elementos diferentes de *TI.* Las trasposiciones de *TI* son llamadas *formas primas* y las inversiones que pertenecen a *TI* son llamadas *formas invertidas;* por lo tanto, y continuando con el ejemplo anterior, se tiene que < 4, 9, 11 > es una forma prima de *TI* y < 4, 11, 9 > es una forma invertida de *TI.*(Fiore, 2009)

Hasta el momento se ha visto dos funciones cuyo dominio y rango es $\mathbb{Z}_{12}$. Estas funciones son: $T_n\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ y $I_n\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$. Ahora se utilizará una nueva función $C\colon TI \to TI$ que se define de la siguiente manera: *C(x)* es aquella “forma opuesta” de *x* cuyos dos primeros números (o notas) son los mismos pero se encuentran en diferente orden. *Ejemplo: C* < 3, 8, 10 > = < 8, 3, 1 >. La función *C* se llama *inversión contextual* porque invierte dependiendo del “contexto” de las primeras dos ´clases´ de notas en el conjunto ordenado.(Fiore, 2009)

A pesar de que *C* parezca ser una función matemática sin mucha aplicación en la música, ¡*C* es en realidad una función con connotación bastante musical!En esta Fuga de Hindemithse encuentran los grupos de notas $< G, C, D > = < 7, 0, 2 >$ y$< C, G, F > = < 0, 7, 5 >$, los cuales están relacionados con una función de inversión contextual. Sin embargo, la pieza musical no sigue a estas notas en el orden mencionado anteriormente, sino que las notas se encuentran en el siguiente orden: $< G, C, D >$ y $< G, C, F >$. Muchos músicos teóricos se encuentran con estos casos; sin embargo, y a pesar de que no se rige estrictamentea la función, se puede ver que con el uso de las mismas notas en un diferente orden se pueden componer partes de piezas musicales de gran fama utilizando un poco de matemáticas.(Fiore, 2009)

¿Qué pasa si se juega un poco con el siguiente diagrama?:

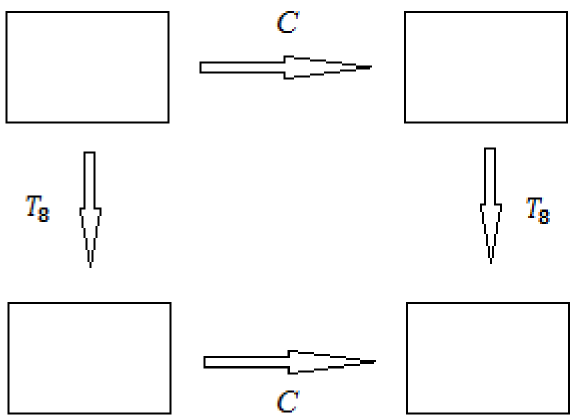


Figura 5: Diagrama musical 1

Ahora se llena el primer cuadrado con cualquier conjunto de notas ordenadas. En este caso se lo llenará con < 7, 0, 2 > para utilizar los elementos de *TI* mencionados anteriormente.

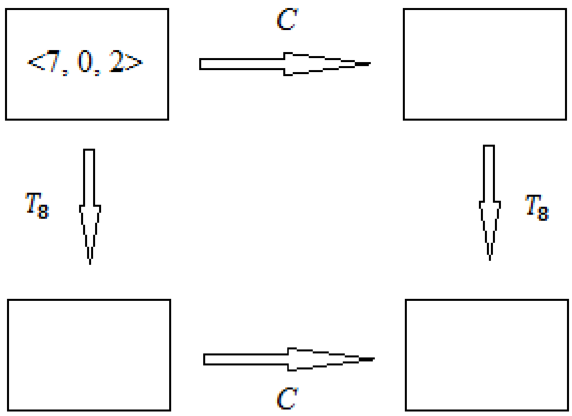


Figura 6: Diagrama musical 2

Si se siguen las instrucciones de gráfico obtenemos los siguientes conjuntos de notas:

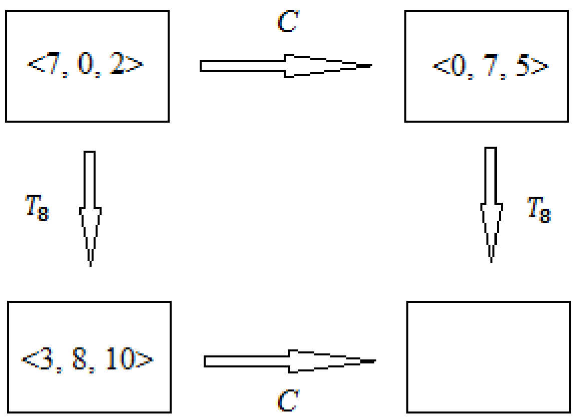


Figura 7: Diagrama musical 3

Por último, si se llena el último cuadrado con el conjunto correspondiente de notas, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} \boxed{<7, 0, 2>} \arrow[r, "C"] \arrow[d, "T_8"'] & \boxed{<0, 7, 5>} \arrow[d, "T_8"] \\ \boxed{<3, 8, 10>} \arrow[r, "C"'] & \boxed{<8, 3, 1>} \end{tikzcd}$$

Figura 8: Diagrama musical 4

¿Qué se puede observar en el gráfico? A pesar de que se apliquen las funciones T_8 y C en diferente orden, se sigue obteniendo el mismo resultado, i.e. $< 8, 3, 1 >$; se podría llenar el primer cuadrado con cualquier conjunto de tres notas ordenadas, y sin importar el camino que tomemos, ¡se sigue obteniendo un mismo resultado! Por lo tanto, se puede decir que este diagrama *conmuta.*(Fiore, 2009)

Debido a que por el momento se está intentando encontrar qué relación se encuentra entre esta Fuga de Hindemith y las matemáticas, con este diagrama se ha encontrado una nueva aplicación de funciones y propiedades matemáticas en esta pieza. ¿Por qué? Diagramas como este ocurren en al menos cuatro veces en esta pieza musical. ¡Wow!. El diagrama con los conjuntos de notas que en realidad utiliza en esta pieza es:

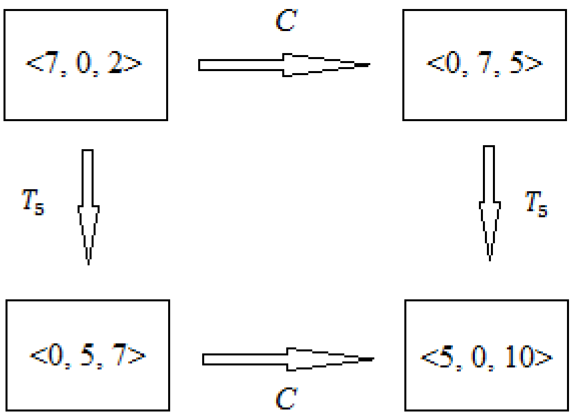


Figura 9: Diagrama musical 5

Y lo utiliza en los compases 2 y 4, 9 y 16, 37 y 39, 55 y 57. Parecería que Hindemith hace también uso de la simetría en esta pieza debido a que la mayoría de estos compases van “saltando uno”, a excepción de uno de ellos.(Fiore, 2009)

En este capítulo se ha logrado utilizar conceptos matemáticos como la trasposición, inversión, inversión contextual y diagramas conmutativos para escuchar a la Fuga de Hindemith en G. Todos estos conceptos y sus usos hacen que se pueda apreciar más a la música y a la estructura matemática en ella. Se ha logrado aprender a escuchar la música de tal manera que ahora tiene otro significado, la forma en la que los sonidos combinan y suenan bien juntos tiene ahora más sentido. Se ha visto que las matemáticas son de gran ayuda al momento de componer piezas, aunque no es necesario seguirlas al pie de la letra pues se puede jugar con ellas para lograr encontrar sonidos que causen emociones.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

Se ha puesto un esfuerzo intelectual para lograr explicar de manera sencilla la relación existente entre las matemáticas y la música, entre las cuales se ha encontrado y explicado el uso de las matemáticas por Pitágoras para definir los intervalos, el uso de logaritmos para lograr superar los problemas encontrados con el sistema Pitagórico, y finalmente el uso de funciones y conceptos matemáticos como la aritmética modular, trasposiciones, inversiones, etc. que son parte fundamental de este proyecto. Se explicó el uso de estas estructuras en algunas piezas bastante famosas de compositores como Bach, Mozart y Hindemith.

Este proyecto ha logrado demostrar que las relaciones existentes entre las matemáticas y la música son más profundas de lo que se puede pensar. De hecho, existen relaciones más complejas que se encuentran fuera del alcance de este proyecto pero que son de bastante interés para los matemáticos alrededor del mundo, quienes dedican sus investigaciones a encontrar más paralelismos entre estas dos áreas. Por ejemplo, el trabajo de Rachel Walls, de Saint Joseph'sUniversity – Philadelphia, quien dedica su investigación a la aplicación de las matemáticas en la teoría de la música; es decir, el uso de las matemáticas para describir y analizar las estructuras musicales como ritmos, escalas, acordes y melodías. (Wells, 2010)

Este trabajo me ha permitido apreciar y entender de mejor manera los factores que hacen que la música y las matemáticas puedan trabajar de la mano. Es cierto que la música no siempre se basa estrictamente en estructuras matemáticas; sin embargo, se ha logrado demostrar que las matemáticas juegan un papel sumamente importante en este arte. Desde los fundamentos físicos que hacen que la música sea posible, hasta el uso de funciones y demás conceptos matemáticos para la composición de piezas musicales, se ha logrado mostrar que los paralelismos existentes entre la música y las matemáticas pueden llegar a ser bastante profundos.

Es importante destacar que a pesar de que se pueden construir piezas musicales con una base matemática estricta, no sería acertado decir que toda la música es puramente matemática. La música es un arte en la que el factor humano siempre será importante. A pesar de que las matemáticas logren que una pieza tenga completa consonancia, es bastante difícil que se logre transmitir una emoción si no es una persona quien, a su propio criterio, juegue con las composiciones hasta conseguir el mensaje que desea transmitir. Dicho esto, me atrevería a decir que es importante que los músicos se enfoquen más en las matemáticas, las cuales pueden ser de gran utilidad al momento de componer piezas.

Con este proyecto se ha logrado demostrar que los patrones y estructuras matemáticas encontrados en la música son bastante útiles, no sólo para la etapa de composición, sino también para la memorización de quienes las interpretan.Se espera que el lector haya podido disfrutar de este trabajo y que la información que éste contiene pueda llevar a futuros estudios relacionados a este tema.

REFERENCIAS

Beer, M. (1998).*How do Mathematics and Music relate to each other?.*Brisbane, Australia: East Coast College of English.

Fiore, T. (2009).*Music and Mathematics.*Chicago, US: The University of Chicago.

Goldaraz, J. (2004). *Afinación y Temperamentos Históricos.* España: Alianza Editorial.

Hall, R.&Josic, K. (2001).*The Mathematics of Musical Instruments.*

Real Academia Española. (2001).*Diccionario de la lengua española*(22.aed.). Consultado enhttp://www.rae.es/rae.html

Strayer, J. (2001).*Elementary Number Theory. Boston:* PWS Publishing Company.

Wells, R. (2008). *The Sound of Numbers: A Tour of Mathematical Music Theory.* Philadelphia,US: Saint Joseph's University.

Wells, R. (2010). *Research.*Consultado en http://people.sju.edu/~rhall/research.htm