

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

Colegio de Ciencias e Ingeniería

Pandeo lateral torsional en vigas curvas de sección transversal rectangular

María Emilia Pontón Caamaño

Telmo Sánchez, Ph.D., Director de Tesis

Tesis de grado presentada como requisito
para la obtención del título de Ingeniero Civil

Quito, abril de 2015

Universidad San Francisco de Quito

Colegio de Ciencias e Ingeniería

HOJA DE APROBACIÓN DE TESIS

Pandeo lateral torsional en vigas curvas de sección transversal rectangular

María Emilia Pontón Caamaño

Telmo Sánchez, Ph.D.
Director de Tesis

Fabricio Yépez, Ph.D.
Miembro del Comité de Tesis

Fernando Romo, MSc.
Director de Ingeniería Civil

Ximena Córdova, Ph.D.
Decana de la Escuela de Ingeniería

Quito, abril de 2015

© DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad San Francisco de Quito y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo de investigación quedan sujetos a lo dispuesto en la Política.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo de investigación en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma: _____

Nombre: María Emilia Pontón Caamaño

C. I.: 171817592-8

Lugar y fecha: Quito, abril de 2015

Resumen

Las vigas curvas, esbeltas, simplemente apoyadas son susceptibles al fenómeno de pandeo lateral torsional global. Debido a que no se cuenta con guías o especificaciones para determinar la carga crítica que ocasiona dicho fenómeno de inestabilidad en este tipo de elementos estructurales, el presente trabajo desarrolla un programa que resuelve las ecuaciones diferenciales de pandeo lateral torsional global y determina la deformación lateral y torsional de cualquier viga curva de sección transversal rectangular. A partir de esta información, se determina el nivel de carga a partir del cual las deformaciones laterales y torsionales presentan un comportamiento no lineal. Este nivel de carga depende de la longitud de la viga curva analizada y se toma como porcentaje del momento crítico de una viga recta equivalente.

Considerando los porcentajes de momento crítico que ocasionan un comportamiento no lineal de las deformaciones en vigas curvas, determinados en este estudio, y utilizando correctamente el programa para verificar las deflexiones laterales y torsionales de vigas curvas, se previene un posible fenómeno de inestabilidad global que puede comprometer a toda la estructura compuesta por los mencionados elementos.

Abstract

Curved simply supported beams are susceptible to global lateral torsional buckling. Since there are no guidelines or specifications to predict the critical load causing this phenomenon in such beams, in this paper, a program which solves the differential equations of global lateral torsional buckling of any curved beam with rectangular cross section is developed. With the information provided by this program, the load level at which the lateral and torsional deflections develop a non-linear behavior is determined. This load level depends on the length of the curved beam analyzed and is a fraction of the critical moment corresponding to an equivalent straight beam.

Taking into account the fractions of critical moment that cause a non-linear behavior of the deflection of curved beams, determined in this paper, and using of the program to verify the lateral and torsional deflections properly, possible global instability phenomena that could compromise the whole structure composed by the mentioned elements is prevented.

TABLA DE CONTENIDO

Resumen	5
Abstract	6
1. INTRODUCCIÓN.....	10
1.1 Pandeo Lateral Torsional Global	10
1.1.1 Antecedentes de pandeo lateral torsional global en puentes esbeltos curvos.....	10
1.2 Pandeo Lateral Torsional en Vigas Curvas Simplemente Apoyadas y sin Apoyo Lateral Intermedio.....	11
1.3 Modelación de Vigas en Elementos Finitos	12
1.3.1 Características de las vigas modeladas.....	12
1.3.2 Características de los modelos desarrollados en Abaqus.	13
1.3.3 Resultados para validar los modelos de elementos finitos.	15
2 ECUACIONES DE PANDEO LATERAL TORSIONAL GLOBAL EN VIGAS CURVAS	18
2.1 Forma de la Viga.....	18
2.2 Derivación de las Ecuaciones Diferenciales de Pandeo Lateral Torsional en Vigas Curvas sometidas a Momento Uniforme	19
2.3 Solución del Sistema de Ecuaciones Diferenciales de Pandeo Lateral en Vigas Curvas.....	21
2.3.1 Programa de Matlab para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales de PLTG.....	22
3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS: ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS VS. RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN MATLAB.....	24
3.1 Modelo de Viga Curva de Sección Rectangular Sometida a Momento Uniforme en Abaqus	24
3.1.1 Representación de momento uniforme en el modelo de elementos finitos.	25
3.1.2 Ejemplo: Viga recta sometida a momento uniforme.....	28
3.2 Curvas Solución para una Viga Curva sometida al 40% del Momento Crítico de una Viga Recta Equivalente	29
3.2.1 Análisis de resultados.	30

3.3	Validación del Modelo Realizado en Matlab	32
4	RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE PANDEO LATERAL TORSIONAL GLOBAL	34
4.1	Relación no Lineal Carga-Deformación	34
4.2	Influencia de la Longitud, el Ancho de la Viga y la Relación Peralte/Ancho	35
4.2.1	Análisis de resultados.	38
5	CONCLUSIONES	39
5.1	Pandeo Lateral Torsional Global en Vigas Curvas de Sección Transversal Rectangular.....	39
5.2	Limitaciones del Estudio	39
5.3	Recomendaciones	40
6	REFERENCIAS	41
7	ANEXO A: CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EN MATLAB PARA DETERMINAR DEFLEXIONES LATERALES Y TORSIONALES EN VIGAS CURVAS	42

TABLAS

Tabla 1: Validación de modelos de elementos finitos para desplazamientos. Línea roja representa los resultados teóricos y línea azul representa resultados de modelos de elementos finitos.....	16
Tabla 2: Validación de modelos de elementos finitos para esfuerzos. Línea roja representa los resultados teóricos y línea azul representa resultados de modelos de elementos finitos.....	17
Tabla 3: Resultados de %Mcr con L, b y h/b variable	38

FIGURAS

Figura 1: Nomenclatura para viga curva analizada.....	18
Figura 2: Viga curva simplemente apoyada y sistema de coordenadas Abaqus.....	25
Figura 3: Distribución de esfuerzos en la sección transversal de la viga curva.....	27
Figura 4: Deflexión vertical de una viga recta sometida a momento uniforme.....	28
Figura 5: Esfuerzo uniforme a lo largo de una viga recta.....	29
Figura 6: Deformación Torsional obtenida en Matlab y Abaqus.....	29
Figura 7: Deformación Lateral obtenida en Matlab y Abaqus.....	30
Figura 8: Curvas de Carga vs. Deflexión en Abaqus.....	31
Figura 9: Curvas de Carga vs. Deflexión en Matlab.....	31
Figura 10: Deflexión lateral y porcentaje de momento crítico para distintos radios.....	32
Figura 11: Deflexión Torsional y porcentaje de momento crítico para distintos radios.....	33
Figura 12: Porcentaje de momento crítico vs. deformación lateral. Comportamiento lineal (rojo) y no lineal (azul).....	35
Figura 13: Porcentaje de momento crítico a partir del cual se presentan deformaciones no lineales para vigas de ancho 0.05 m.....	36
Figura 14: Porcentaje de momento crítico a partir del cual se presentan deformaciones no lineales para vigas de ancho 0.10 m.....	37
Figura 15: Porcentaje de momento crítico a partir del cual se presentan deformaciones no lineales para vigas de ancho 0.20 m.....	37

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Pandeo Lateral Torsional Global

El pandeo lateral torsional global (PLTG) es un fenómeno que puede llegar a ocurrir en las vigas de puentes cuya relación longitud-ancho es grande. En particular, estructuras con dos vigas gemelas, como pasos peatonales, puentes de un solo carril, ampliaciones de puentes existentes o estructuras con vigas curvas son susceptibles a este mecanismo de falla.

La susceptibilidad de puentes esbeltos a presentar condiciones de inestabilidad global obliga a tomar en cuenta la amplificación lateral-torsional de segundo orden de desplazamientos y esfuerzos, la cual podría hacer que el límite de resistencia estructural de las vigas que componen al puente, sea alcanzado antes del nivel de carga de pandeo elástico teórico.

1.1.1 Antecedentes de pandeo lateral torsional global en puentes esbeltos curvos.

Los puentes curvos son cada vez más utilizados por razones de estética y factibilidad de construcción. Este tipo de puentes requiere un análisis diferente al que se desarrolla para puentes rectos. El método de la carga V permite realizar un análisis aproximado de puentes horizontales curvos con vigas tipo I. Este método asume que la mayor parte de la carga interna de torsión en el puente, debida a la curvatura, es resistida por los diafragmas (Grubb, 1984).

A continuación, se presenta un caso de estudio en el cual el pandeo lateral torsional global compromete seriamente la estabilidad de la estructura.

Un puente de acero curvo de 17 vigas tipo I construido en tres fases presentó problemas durante su construcción (Sánchez & White, 2011). En la primera fase se

construyeron las primeras seis vigas y se colocó la losa de hormigón. En la segunda fase se construyeron las siguientes ocho vigas y se fundió la segunda parte del tablero. La tercera fase de construcción consistía en el levantamiento de tres vigas y la colocación del tablero de hormigón sobre las mismas en una sola fundición. Durante la fundición del hormigón en la tercera fase se observó que la deflexión vertical en la parte externa de la curva y la rotación de la sección transversal del puente eran considerablemente mayores a las esperadas. Al momento en que aproximadamente dos tercios del tablero de hormigón habían sido colocados, el nivel de la losa de la tercera fase era significativamente más bajo que el nivel correspondiente a la segunda fase. En este punto se decidió detener el fundido de la losa, debido a que el puente se encontraba potencialmente en un estado de inestabilidad incipiente.

El puente mencionado ejemplifica la susceptibilidad de puentes esbeltos a problemas de inestabilidad global en lugar de problemas localizados, como comúnmente sucede en este tipo de estructuras.

1.2 Pandeo Lateral Torsional en Vigas Curvas Simplemente Apoyadas y sin Apoyo Lateral Intermedio

La dificultad para predecir los niveles de carga para los cuales la deflexión lateral y torsional de una viga curva presentan un comportamiento no lineal, hace que estructuras con este tipo de elementos puedan encontrarse en un estado de potencial inestabilidad global. Por esta razón, en el presente trabajo de investigación, se resuelven las ecuaciones diferenciales de estabilidad de un viga curva simplemente apoyada, con apoyos laterales en sus extremos, sometida a momento uniforme y se determina los niveles de carga en los que las deflexiones tienen un comportamiento no lineal.

1.3 Modelación de Vigas en Elementos Finitos

Para realizar el estudio de PLTG en vigas curvas de sección rectangular se realizan modelos de elementos finitos en Abaqus. La validez de estos modelos depende de la exactitud de los mismos para representar el comportamiento de un sistema real. Los valores teóricos de desplazamientos y esfuerzos en una viga simplemente apoyada se calculan a partir de las propiedades geométricas del elemento estructural y su condición de carga.

Los modelos realizados en el presente trabajo corresponden a cuatro variantes de vigas rectas de acero simplemente apoyadas: de sección transversal rectangular y tipo I, sometidas a cargas uniformemente repartidas y cargas concentradas en el centro de la viga.

1.3.1 Características de las vigas modeladas.

Geometría de las vigas de sección rectangular:

Longitud: 6 m

Peralte: 0.40 m

Ancho: 0.012 m

Las propiedades geométricas de vigas con sección tipo I son tomadas del ejemplo de diseño desarrollado por Yura et al (2008):

Longitud: 45.72 m

Sección transversal: doblemente simétrica

Peralte (h): 1.83 m

Espesor del alma (t_w): 0.012 m

Ancho de los patines (b): 0.30 m

Espesor de los patines (t_f): 0.025 m

1.3.2 Características de los modelos desarrollados en Abaqus.

Las vigas de sección rectangular se modelan con elementos tipo cascarón, cuya notación en Abaqus es S4R. Estos elementos tienen 4 nodos y se usan en estructuras en las que una dimensión (el espesor) es significativamente más pequeña que las otras dimensiones, tal como sucede en el alma de una viga de acero. Las vigas de sección tipo I se modelan con elementos S4R para el alma y elementos tipo viga (B31) para los patines superior e inferior. Los elementos B31 tienen 2 nodos y son elementos línea, unidimensionales en el espacio tridimensional o en el plano x-y que tiene una rigidez asociada a la deformación del eje del elemento.

El número de elementos S4R que constituyen el alma de la viga varía en función al número de filas de elementos en las que se divide el peralte del elemento estructural. Es recomendable mantener la relación entre la altura y el ancho de cada elemento en un valor entre 1 y 3.

Para validar los modelos de elementos finitos en Abaqus y así analizar el comportamiento de vigas de sección rectangular, se determinan los esfuerzos y deformaciones máximas de los modelos realizados y se los compara con las soluciones teóricas. La forma en que los resultados obtenidos con análisis por elementos finitos se aproximan a los resultados teóricos varía en función al número de elementos finitos que componen la viga de acero

modelada. Se inicia con una fila de elementos a lo largo del alma la viga y se reproduce el análisis para 3, 6 y 12 filas de elementos.

Sánchez & White (2011) indican que en estudios anteriores se ha demostrado que 12 filas de elementos a lo largo del peralte de la viga son suficientes para obtener una convergencia adecuada de las respuestas elásticas.


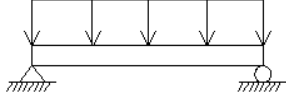

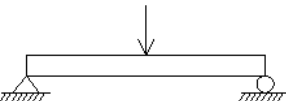
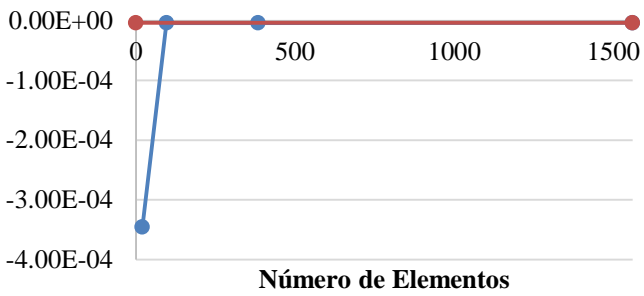
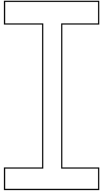
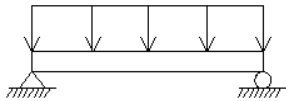
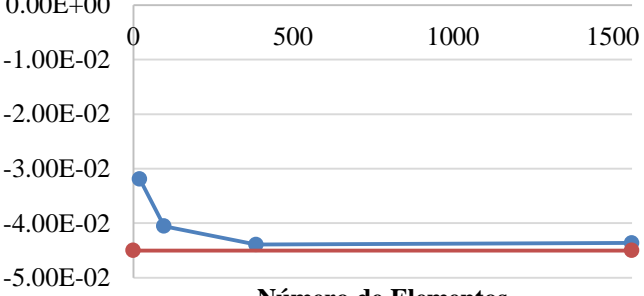
Un aspecto importante relacionado con el tipo y cantidad de elementos seleccionados para el modelo de elementos finitos es el efecto Hour-glass. Este efecto se presenta en el modelo de la viga con sección tipo I cuando la malla no es lo suficientemente refinada. Al tener una sola fila de elementos, el efecto Hour-glass se hace muy evidente, ya que los elementos tipo cascarón se deforman individualmente a manera de zig-zag. Al refinar la malla, este efecto desaparece y no representa un problema para los resultados de esfuerzos y desplazamientos obtenidos.

Con respecto a las condiciones de carga, para el caso de las vigas con carga puntual en el medio, se aplica una carga de 10 kN, la misma que se reparte equitativamente en cada uno de los nodos de los elementos centrales de la malla a lo largo del peralte de la viga.

Para las vigas con carga uniformemente repartida se define el peso propio de la viga a partir de su geometría y las propiedades del material en la programación de los modelos de elementos finitos. De esta manera, al hacer correr el programa, es posible obtener el valor de las reacciones en los apoyos. A partir de estas reacciones se calcula el peso propio de la viga, que será la carga uniformemente repartida a la que está sometida.

1.3.3 Resultados para validar los modelos de elementos finitos.

Los resultados de esfuerzos y deformaciones máximos obtenidos con los modelos de elementos finitos y los resultados teóricos se muestran en las Tablas 1 y 2.

Sección	Carga (N)	Desplazamiento vertical (m)										
		 <table border="1"> <caption>Data for Graph 1: Rectangular section, distributed load</caption> <thead> <tr> <th>Número de Elementos</th> <th>Desplazamiento vertical (m)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0.00E+00</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-4.20E-02</td> </tr> <tr> <td>500</td> <td>-4.50E-02</td> </tr> <tr> <td>1500</td> <td>-4.50E-02</td> </tr> </tbody> </table>	Número de Elementos	Desplazamiento vertical (m)	0	0.00E+00	1	-4.20E-02	500	-4.50E-02	1500	-4.50E-02
	Número de Elementos	Desplazamiento vertical (m)										
0	0.00E+00											
1	-4.20E-02											
500	-4.50E-02											
1500	-4.50E-02											
	 <table border="1"> <caption>Data for Graph 2: Rectangular section, point load</caption> <thead> <tr> <th>Número de Elementos</th> <th>Desplazamiento vertical (m)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0.00E+00</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-3.50E-04</td> </tr> <tr> <td>500</td> <td>-3.50E-04</td> </tr> <tr> <td>1500</td> <td>-3.50E-04</td> </tr> </tbody> </table>	Número de Elementos	Desplazamiento vertical (m)	0	0.00E+00	1	-3.50E-04	500	-3.50E-04	1500	-3.50E-04	
Número de Elementos	Desplazamiento vertical (m)											
0	0.00E+00											
1	-3.50E-04											
500	-3.50E-04											
1500	-3.50E-04											
		 <table border="1"> <caption>Data for Graph 3: I-beam section, distributed load</caption> <thead> <tr> <th>Número de Elementos</th> <th>Desplazamiento vertical (m)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0.00E+00</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-3.50E-02</td> </tr> <tr> <td>500</td> <td>-4.00E-02</td> </tr> <tr> <td>1500</td> <td>-4.50E-02</td> </tr> </tbody> </table>	Número de Elementos	Desplazamiento vertical (m)	0	0.00E+00	1	-3.50E-02	500	-4.00E-02	1500	-4.50E-02
Número de Elementos	Desplazamiento vertical (m)											
0	0.00E+00											
1	-3.50E-02											
500	-4.00E-02											
1500	-4.50E-02											

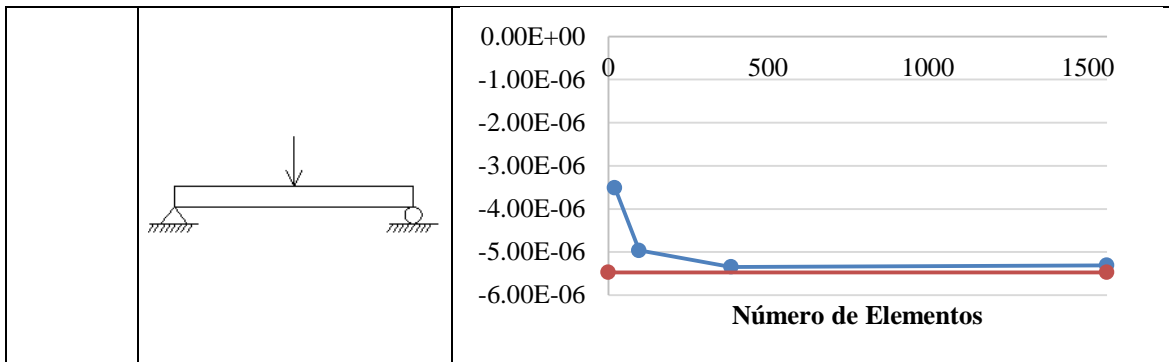
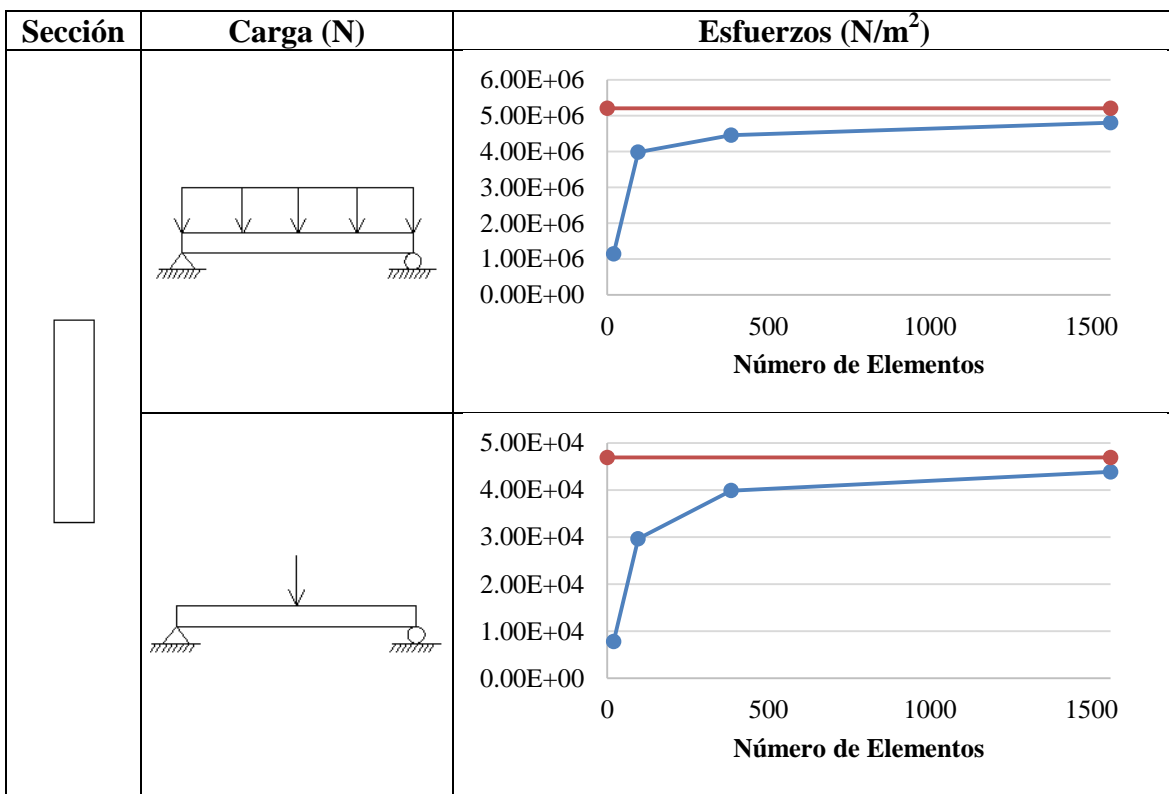


Tabla 1: Validación de modelos de elementos finitos para desplazamientos. Línea roja representa los resultados teóricos y línea azul representa resultados de modelos de elementos finitos.



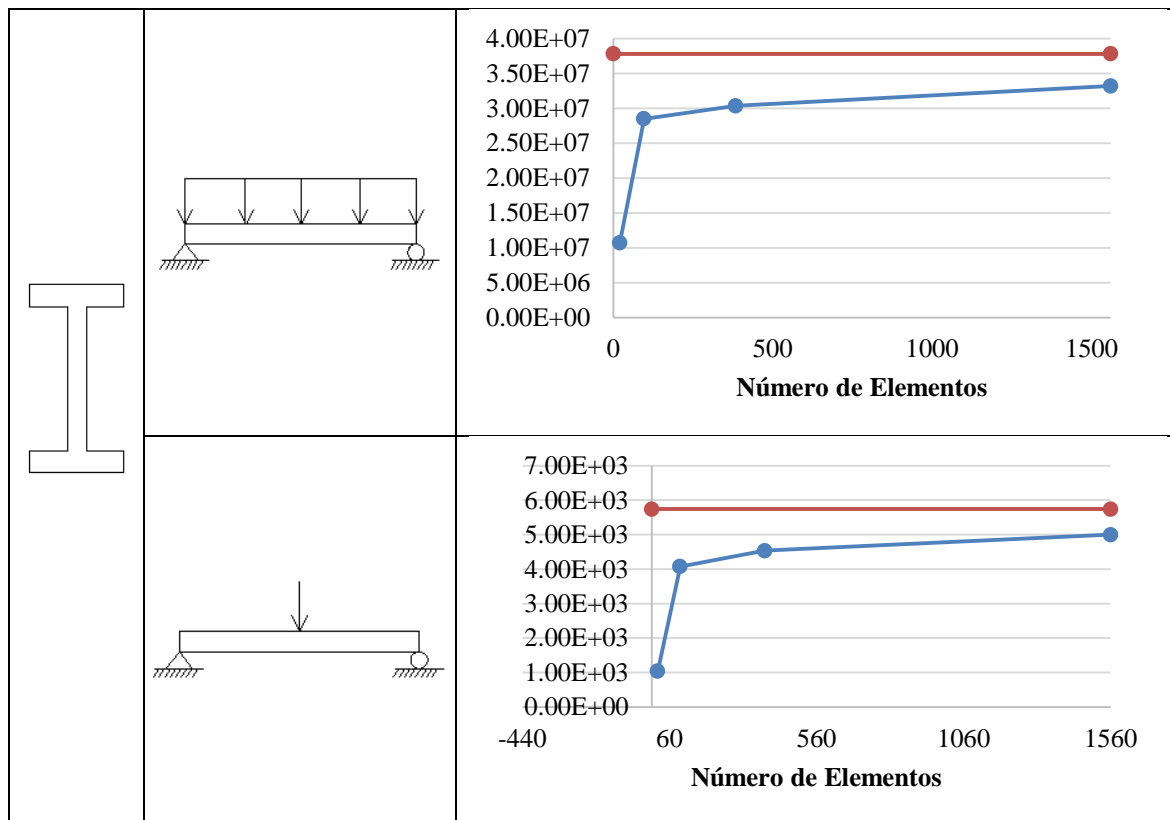


Tabla 2: Validación de modelos de elementos finitos para esfuerzos. Línea roja representa los resultados teóricos y línea azul representa resultados de modelos de elementos finitos.

La forma de las gráficas expuestas en las Tablas 1 y 2 indica que las soluciones obtenidas con los modelos de elementos finitos se acercan lo suficiente a las soluciones teóricas a medida que se refina el mallado. El error porcentual entre los resultados teóricos y experimentales en desplazamientos varía entre 2% y 3% mientras que en esfuerzos varía entre 7% y 13%. Dado que los porcentajes de error son bajos, se puede decir que los modelos de elementos finitos realizados en Abaqus son válidos para capturar los desplazamientos y esfuerzos de los tipos de vigas mencionadas.

2 ECUACIONES DE PANDEO LATERAL TORSIONAL GLOBAL EN VIGAS

CURVAS

2.1 Forma de la Viga

A continuación se considera una viga curva simplemente apoyada de sección rectangular, cuya forma obedece a la siguiente ecuación de un arco de círculo:

$$u_0 = \sqrt{R^2 - (z - c)^2} - d \quad \text{Ec. 1}$$

Donde R es el radio de curvatura, u_0 es la variable dependiente, z es la variable independiente y, d y c son los desplazamientos vertical y horizontal del centro del círculo, respectivamente. La curva descrita por la Ecuación 1 se muestra en la Figura 1.

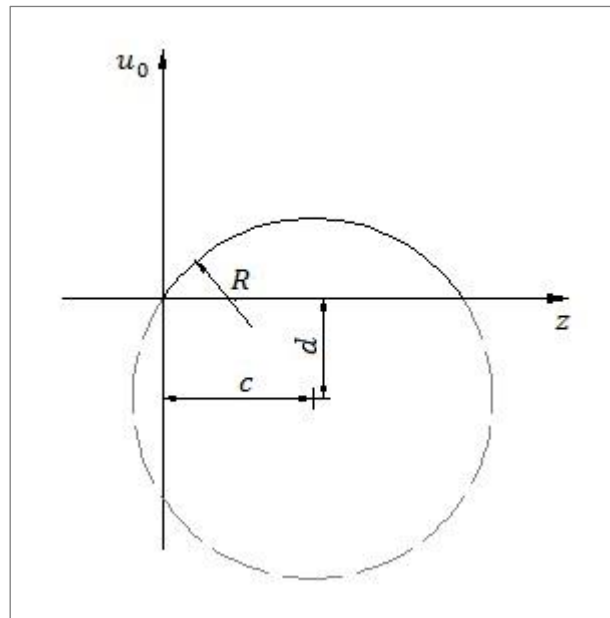


Figura 1: Nomenclatura para viga curva analizada.

2.2 Derivación de las Ecuaciones Diferenciales de Pandeo Lateral Torsional en Vigas Curvas sometidas a Momento Uniforme

A partir del análisis de vigas rectas con deformación inicial desarrollado por Chen & Lui (1987), se determina que la viga de sección rectangular sometida a un momento uniforme M_0 tiene un desplazamiento lateral inicial u_0 que, para este caso, es la ecuación de la forma de la viga curva. Para este trabajo de investigación, se asume que no existe un giro inicial y se determina que M_0 es una fracción del momento crítico de pandeo (M_{cr}) de una viga recta equivalente a la viga curva. El cálculo de M_{cr} se realiza con la Ecuación 2 obtenida de las especificaciones de diseño AASHTO (2012):

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi}{L_b} \sqrt{EI_y GJ + \left(\frac{\pi E}{L_b}\right)^2 I_y C_w} \quad \text{Ec. 2}$$

Cabe señalar que la viga recta equivalente es una viga recta con la misma longitud y sección transversal que la viga curva analizada.

Las ecuaciones de flexión y torsión para la viga curva son:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} + \gamma M_0 = 0 \quad \text{Ec. 3}$$

$$GJ \frac{d\gamma}{dz} - \left(\frac{du}{dz} + \frac{du_0}{dz}\right) M_0 = 0 \quad \text{Ec. 4}$$

Donde E y G son el módulo de elasticidad y de cortante del material, respectivamente, I_y es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje débil, J es la constante de torsión de la sección transversal, u es la deformación lateral de la viga y γ es la deformación torsional.

Diferenciando la Ecuación 4 con respecto a z una vez y reemplazando el resultado en la Ecuación 3 se tiene:

$$EI_y GJ \frac{d^2 \gamma}{dz^2} + \gamma M_0^2 = EI_y M_0 \frac{d^2 u_0}{dz^2} \quad \text{Ec. 5}$$

A continuación, se deriva la Ecuación 1 dos veces con respecto a z y se reemplaza el resultado en la Ecuación 5.

$$EI_y GJ \frac{d^2 \gamma}{dz^2} + \gamma M_0^2 = -EI_y M_0 \left(\frac{R^2}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad \text{Ec. 6}$$

Donde $c = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) R$ y $\theta = \frac{L}{R}$.

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{d^2 \gamma}{dz^2} + \frac{M_0^2}{EI_y GJ} \gamma = -\frac{M_0}{GJ} \left(\frac{R^2}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Y, al definir $k^2 = \frac{M_0^2}{EI_y GJ}$, finalmente se escribe la Ecuación 6 de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 \gamma}{dz^2} + k^2 \gamma = -\frac{M_0}{GJ} \left(\frac{R^2}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad \text{Ec. 7}$$

El sistema de ecuaciones de pandeo lateral en vigas curvas es, entonces:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \gamma \frac{M_0}{EI_y} = 0 \quad \text{Ec. 8}$$

$$\frac{d^2 \gamma}{dz^2} + k^2 \gamma = -\frac{M_0}{GJ} \left(\frac{R^2}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad \text{Ec. 9}$$

2.3 Solución del Sistema de Ecuaciones Diferenciales de Pandeo Lateral en Vigas Curvas

La Ecuación 7 es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes que cuenta con una solución general de la ecuación homogénea y una solución particular que se obtiene con el método de variación de parámetros. Las condiciones iniciales establecidas para esta ecuación son $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(L) = 0$ ya que se había definido que la viga no tiene un giro inicial.

La solución general de la homogénea, según Zill & Cullen (2009), es:

$$\gamma_H = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) \quad \text{Ec. 10}$$

Donde C_1 y C_2 son las constantes de integración.

El método de variación de parámetros desarrollado da como resultado la siguiente solución particular de la ecuación diferencial:

$$\gamma_P = \frac{R^2 M_0}{GJk} \left[\int \frac{\sin(kz)}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \cos(kz) - \int \frac{\cos(kz)}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \sin(kz) \right] \quad \text{Ec. 11}$$

De esta forma, la solución general de la ecuación diferencial es la suma de las Ecuaciones 10 y 11.

$$\gamma = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + \frac{R^2 M_0}{GJk} \left[\int \frac{\sin(kz)}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \cos(kz) - \int \frac{\cos(kz)}{(R^2 - c^2 + 2cz - z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \sin(kz) \right] \quad \text{Ec. 12}$$

Debido a que las integrales presentes en la Ecuación 12 no tienen una solución analítica, es necesario resolverlas de forma numérica. Para esto, se escribe un código de programación en Matlab.

2.3.1 Programa de Matlab para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales de PLTG.

Para obtener la solución numérica de la Ecuación 12, en primer lugar, se provee al código de programación las características del material y de la geometría de la viga curva. Esto es, el módulo de elasticidad y el módulo de Poisson del material, la longitud, radio de curvatura, peralte y ancho de la viga. Con esta información se escriben las fórmulas correspondientes para que el programa calcule el módulo de cortante del material, el momento de inercia y el módulo de torsión de la sección transversal.

A continuación, define el índice de torsión cuya ecuación y valores aceptados se encuentran en White et al (2012). Según este autor, el índice de torsión indica la magnitud de la torsión dentro de la luz libre de un puente. Este parámetro se utiliza para caracterizar los efectos de la curvatura horizontal sobre el comportamiento del puente y la precisión de los análisis. El índice de torsión establece valores mínimos prácticos para el radio de curvatura de la luz libre de un puente para un ancho de tablero determinado.

La viga curva estudiada en este trabajo puede formar parte de la estructura de un puente esbelto curvo, de manera que, se establece un ancho del tablero de 4 metros y se determina la longitud de curva. A partir de estas propiedades geométricas y con la información provista por White et al (2012), se establece un radio de curvatura que satisfaga las condiciones del índice de torsión. La ecuación para condicionar los valores que toma el índice de torsión en el código de programación es la siguiente:

$$I_T = \frac{1}{w} \left[\frac{2R \tan\left(\frac{L}{2R}\right)}{3L} \left(3R + \frac{w^2}{4R} \right) - R + \frac{w}{2} \right] \quad \text{Ec. 13}$$

Donde w es el ancho del tablero, L es la longitud de la curva y R es el radio de curvatura. El rango de valores válidos para el índice de torsión en la viga curva está entre 0.58 y 0.71 (White et al, 2012).

Una vez que el radio de curvatura cumple con las condiciones impuestas en el código de programación, se determina el momento uniforme aplicado en la viga, que debe ser una fracción del momento crítico de una viga recta equivalente a la viga curva.

Con la información provista al programa hasta el momento, se calcula el valor de la constante k cuya fórmula se encuentra en la Ecuación 6 y se resuelven numéricamente las integrales presentes en la Ecuación 12 utilizando el método de sumas de Riemann. Finalmente, se aplican las condiciones iniciales de la ecuación y se determina el valor de las constantes C_1 y C_2 .

De esta forma, la Ecuación 12 tiene una solución numérica, es decir, se ha obtenido una serie de valores de la deformación torsional (γ) en función de z .

Para obtener el resultado de la Ecuación 8, y determinar la deformación lateral de la viga (u), el proceso es más simple ya que se despeja la variable independiente y se integra numéricamente dos veces el resultado. Al igual que en el caso de la deformación torsional, se ha obtenido una serie de valores de la deformación lateral en función de z .

El programa desarrollado permite determinar la deformación torsional y lateral de cualquier viga con sección rectangular. El material y las dimensiones pueden ser definidos por el usuario.

Para visualizar los resultados de la deformación torsional y lateral de la viga el programa realizan las gráficas correspondientes.

3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS: ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS VS. RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN MATLAB

3.1 Modelo de Viga Curva de Sección Rectangular Sometida a Momento Uniforme en Abaqus

Para comparar los resultados de deflexiones obtenidos con el código de programación en Matlab con los resultados de un modelo de elementos finitos, se realiza el modelo en Abaqus de una viga curva sometida a momento uniforme. Las características de la viga son las siguientes:

Material: Acero

Módulo de elasticidad del material (E): 2×10^{11} MPa

Peralte de la viga: 0.40 m

Ancho de la viga: 0.10 m

Radio de curvatura: 50 m

Longitud de curva: 20 m

Momento uniforme aplicado: 4.77×10^5 Nm (40% de M_{cr} de una viga recta equivalente)

Debido a la curvatura de la viga, es necesario cambiar el sistema de coordenadas rectangulares que Abaqus usa por defecto, por coordenadas cilíndricas.

Se utilizan los elementos tipo cascarón (S4R) analizados anteriormente y se definen apoyos simples para los dos nodos medios ubicados en los extremos de la viga. Además, se proporciona apoyo lateral a los nodos superiores e inferiores de los extremos del modelo. El modelo de la viga curva no deformada se muestra en la Figura 2.

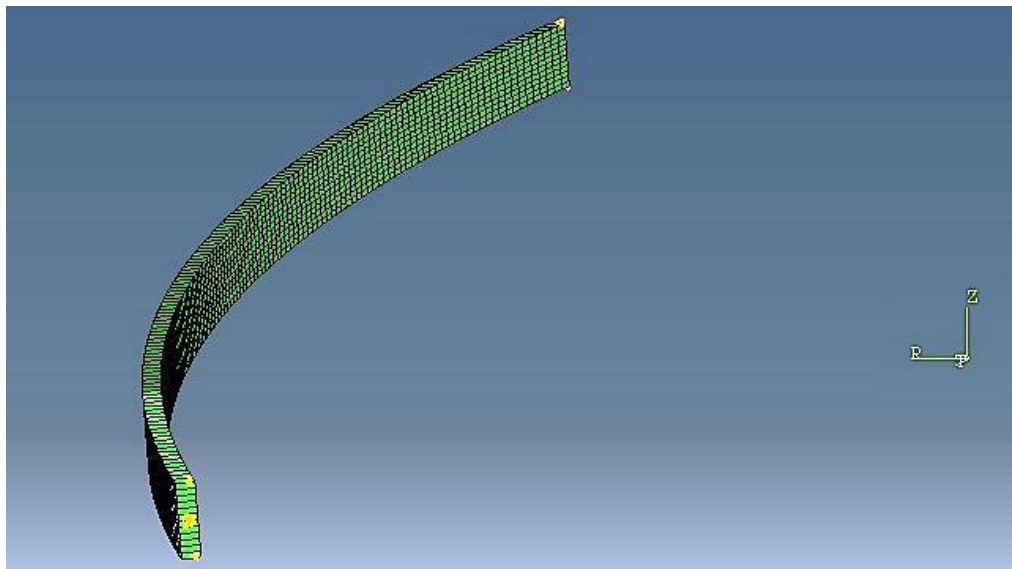


Figura 2: Viga curva simplemente apoyada y sistema de coordenadas Abaqus.

3.1.1 Representación de momento uniforme en el modelo de elementos finitos.

Los elementos S4R de Abaqus tienen grados de libertad rotacionales, por lo que sería posible aplicar el momento uniforme directamente en los nodos donde se encuentran los apoyos simples. Sin embargo, debido a la curvatura de la viga, los grados de libertad rotacionales no siguen la trayectoria circular de la misma y el modelo no funciona correctamente.

Entonces, para lograr que la viga curva esté sometida a momento uniforme es necesario aplicar cargas puntuales (que sí pueden seguir una trayectoria circular) de compresión y de tensión en todos los nodos extremos de la viga. La magnitud de estas fuerzas se determina de la siguiente manera:

Se determinan los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la sección transversal de la viga curva con la fórmula $\sigma = \pm \frac{M_0 c}{I_x}$. Donde I_x es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje fuerte, M_0 es el momento uniforme que se quiere aplicar y c es la distancia desde la fibra extrema en tensión o en compresión hasta el eje neutro. Debido a que la sección transversal de la viga es rectangular, el eje neutro se encuentra en el medio de su peralte $\left(\frac{h}{2}\right)$ y el esfuerzo máximo de tensión es igual al esfuerzo máximo de compresión.

Se asume una distribución lineal de esfuerzos con lo que es posible determinar el esfuerzo para toda la sección transversal de la viga como se muestra en la Figura 3.

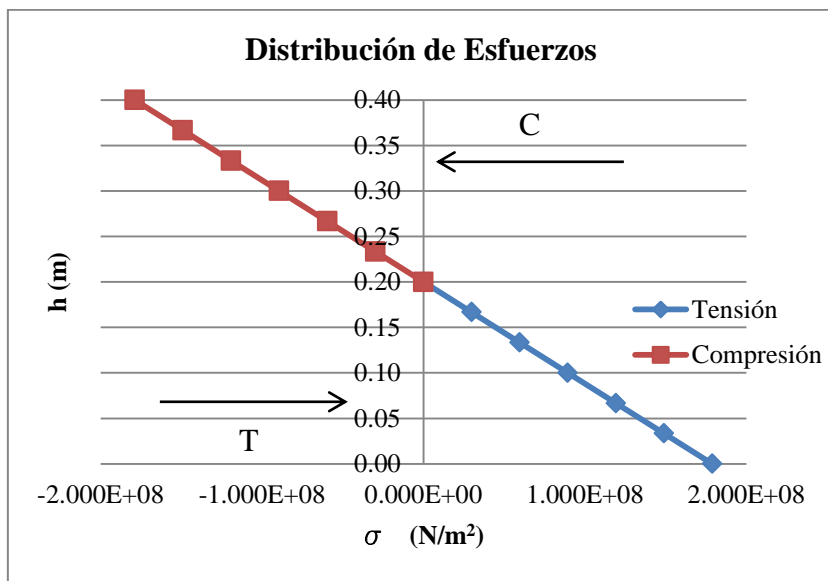


Figura 3: Distribución de esfuerzos en la sección transversal de la viga curva.

Las fuerzas de tensión y compresión resultantes para la distribución de esfuerzos son iguales al volumen del prisma de esfuerzos en tensión y en compresión respectivamente. El prisma de esfuerzos en la sección transversal de la viga es: $V_{\sigma} = A_{\sigma} \times b$, donde A_{σ} es el área de esfuerzos y b es el ancho de la viga.

Ya que las fuerzas puntuales de tensión y compresión deben estar aplicadas en todos los nodos extremos, se calcula el área de esfuerzo comprendida entre dos nodos consecutivos y el volumen del prisma de esfuerzos correspondiente. De esta forma se obtienen las fuerzas puntuales que actúan en el medio de cada para de nodos. Al dividir estos valores entre dos, se consiguen finalmente las fuerzas nodales que generan el momento uniforme en el extremo derecho de la viga. Las mismas fuerzas con el signo contrario deben ser aplicadas en el otro extremo.

3.1.2 Ejemplo: Viga recta sometida a momento uniforme.

Para verificar que el cálculo de las fuerzas nodales es correcto, se modela una viga recta simplemente apoyada de 20 metros de longitud, $h = 0.40$ m, $b = 0.10$ m y $M_0 = 5.60 \times 10^5$ Nm y se calcula la deflexión vertical teórica con la ecuación $y'' = \frac{M_0}{EI}$. (Fitzgerald, 1990).

Los resultados se muestran en la Figura 4.

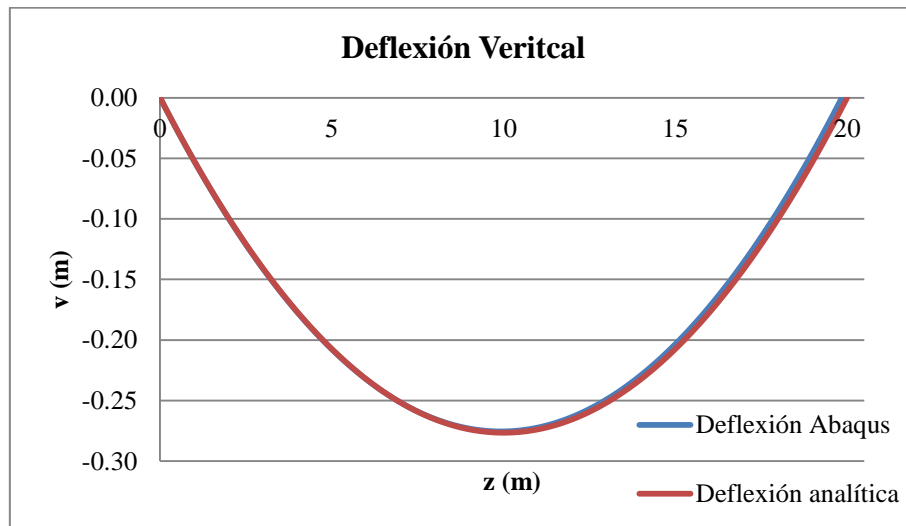


Figura 4: Deflexión vertical de una viga recta sometida a momento uniforme.

La deflexión vertical teórica es 0.37% mayor que la obtenida con el modelo de elementos finitos, por lo que se concluye que la aplicación del momento uniforme en el modelo es correcta.

Otra forma de comprobar que la viga del modelo de elementos finitos está sometida a momento uniforme es observando la distribución uniforme de esfuerzos a lo largo de la misma.

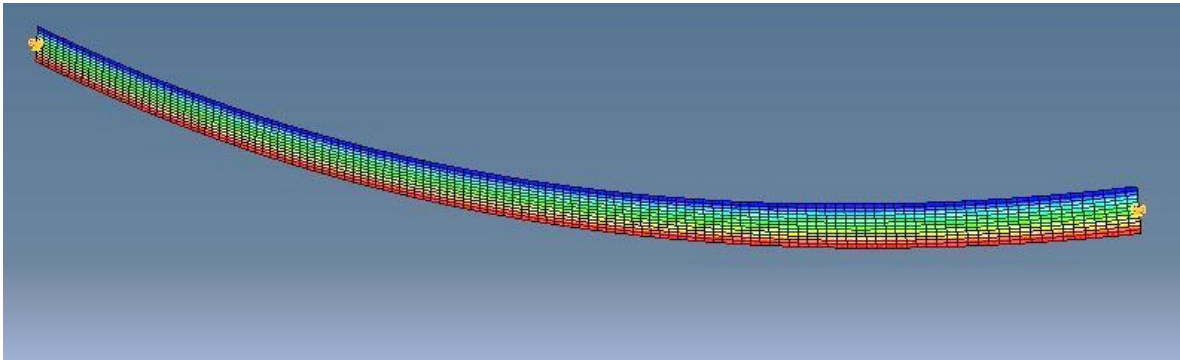


Figura 5: Esfuerzo uniforme a lo largo de una viga curva.

3.2 Curvas Solución para una Viga Curva sometida al 40% del Momento Crítico de una Viga Recta Equivalente

Los resultados de la deflexión lateral y torsional para la viga modelada en Abaqus y los resultados de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales de pandeo lateral torsional global se muestran en las figuras 6 y 7, respectivamente.

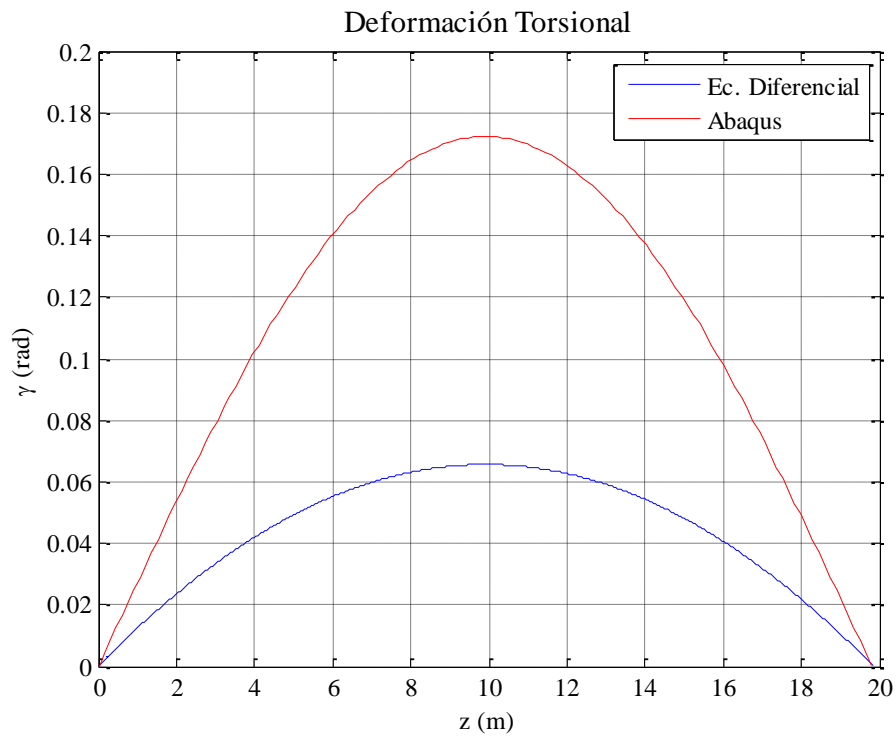


Figura 6: Deformación Torsional obtenida en Matlab y Abaqus

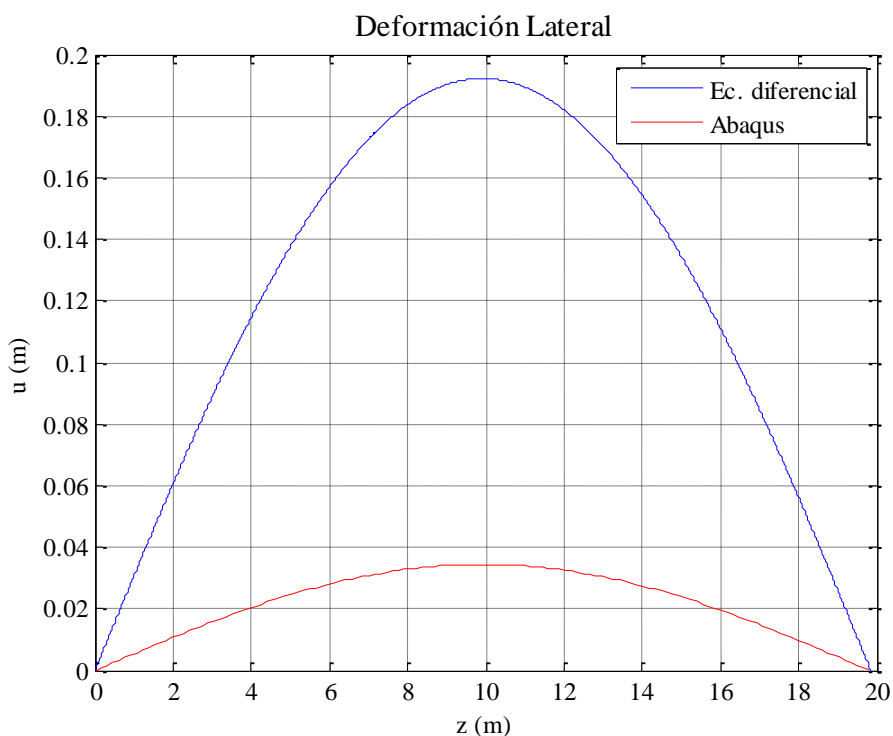


Figura 7: Deformación Lateral obtenida en Matlab y Abaqus

3.2.1 Análisis de resultados.

Las curvas de las Figuras 6 y 7 muestran que los resultados de la solución numérica del sistema de ecuaciones de PLTG en Matlab no son consistentes con los resultados del modelo de una viga curva sometida a momento uniforme en Abaqus. Por esta razón, el modelo de elementos finitos no valida el análisis de PLTG realizado en Matlab.

Es importante distinguir con cuál de los programas se obtienen resultados erróneos. Para esto, se incrementa la magnitud del momento uniforme aplicado a la viga en Abaqus y Matlab como se muestra en las Figuras 8 y 9.

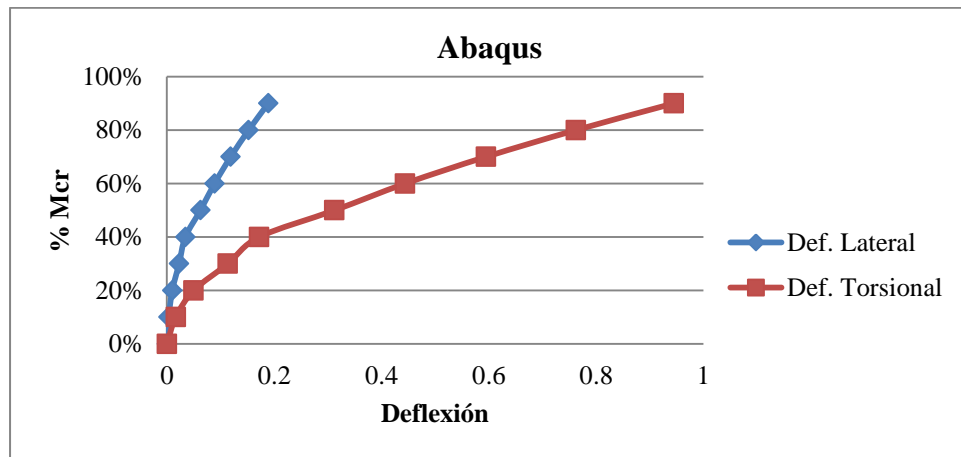


Figura 8: Curvas de Carga vs. Deflexión en Abaqus.

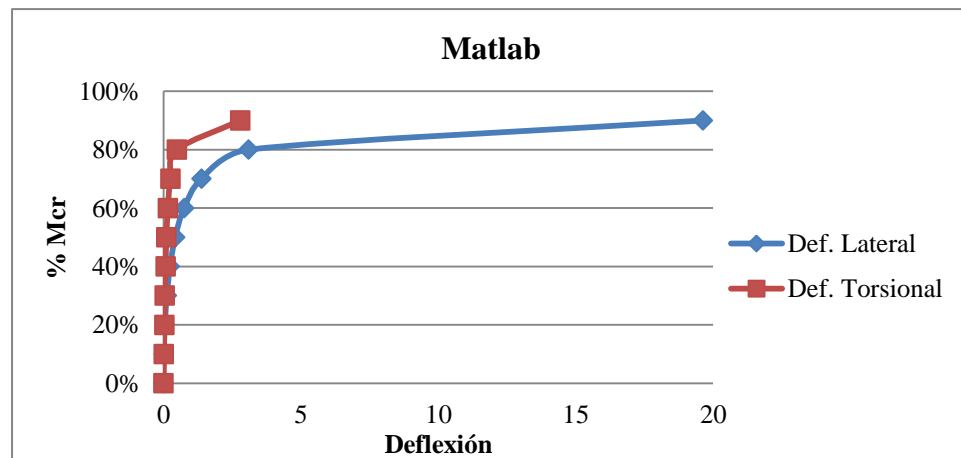


Figura 9: Curvas de Carga vs. Deflexión en Matlab.

Al realizar esta prueba se observa que las deflexiones obtenidas en los modelos de elementos finitos tienen un comportamiento prácticamente lineal para cualquier nivel de carga y, a pesar de aplicar cargas superiores al momento crítico de la viga recta equivalente, las deformaciones siguen aumentando sin que el elemento estructural colapse. Por otra parte, cuando se analiza el programa de Matlab de la misma manera, las deflexiones tienen un comportamiento lineal hasta cierto punto, a partir del cual las deformaciones aumentan hasta que finalmente el nivel de carga crítica se convierte en una asíntota horizontal.

Se concluye, entonces, que el modelo de elementos finitos realizado en Abaqus no logra capturar las deflexiones laterales y torsionales en una viga curva sometida a momento uniforme. Se puede decir que los elementos tipo cascarón (S4R), utilizados para modelar la viga mencionada son propensos a rigidizarse debido a la flexión en dos direcciones que se presenta en vigas curvas. Por esta razón, las deflexiones son más pequeñas de lo esperado. La determinación de las causas del comportamiento de los elementos S4R requiere un estudio más profundo que está fuera del alcance del presente trabajo de investigación.

3.3 Validación del Modelo Realizado en Matlab

Para verificar la validez del programa de Matlab que determina las deflexiones laterales y torsionales en vigas curvas, se observan las Figuras 10 y 11.

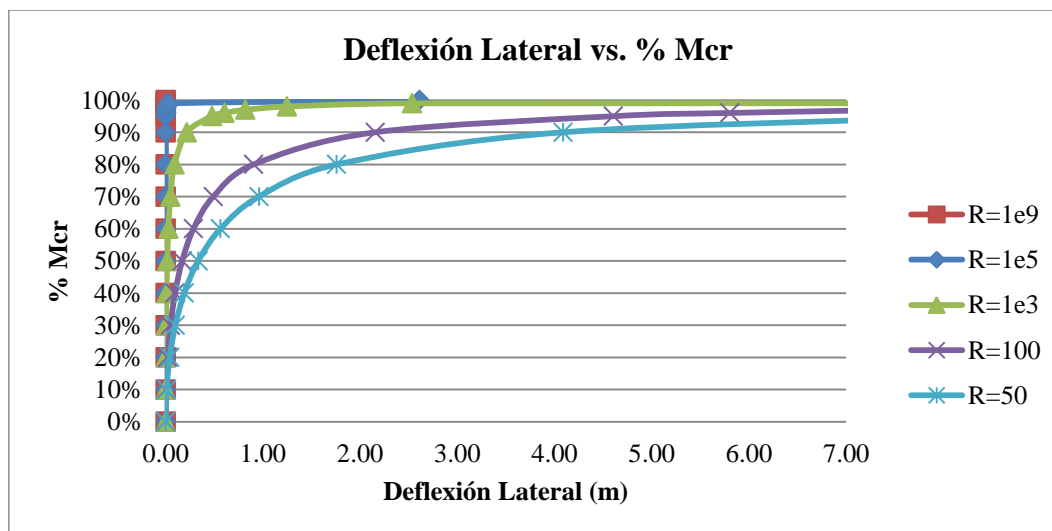


Figura 10: Deflexión lateral y porcentaje de momento crítico para distintos radios.

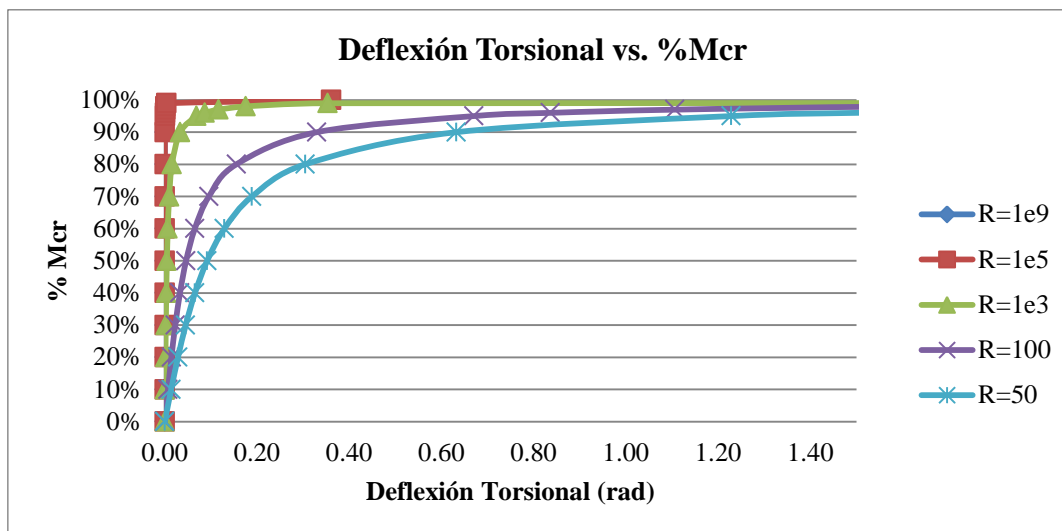


Figura 11: Deflexión Torsional y porcentaje de momento crítico para distintos radios.

Al aumentar el radio de curvatura de la viga a un valor que podría considerarse infinito en relación al orden de magnitud de los demás elementos geométricos, se obtiene una viga recta. Como se puede ver, las deformaciones laterales y torsionales de una viga recta sometida a momento uniforme son nulas hasta que se alcanza el nivel de carga crítica, una vez que se llega a este valor de momento, la viga sufre pandeo lateral torsional y las deformaciones se vuelven infinitas.

Conforme se disminuye el radio de curvatura, las deformaciones laterales y torsionales aumentan con la aplicación de cualquier carga por debajo de su momento crítico y cuando se alcanza este valor, una vez más, la viga sufre pandeo lateral torsional.

Se puede observar que mientras la curvatura de la viga es mayor (radio más pequeño en relación a la longitud de la viga), las deformaciones no lineales comienzan a niveles de carga menores.

Debido a que el comportamiento que presenta la viga recta analizada con el programa de Matlab coincide con lo esperado en la realidad, se concluye que el comportamiento de las

vigas curvas analizadas es correcto y el programa de Matlab funciona como modelo para investigar el comportamiento real de las mismas.

4 RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE PANDEO LATERAL TORSIONAL GLOBAL

4.1 Relación no Lineal Carga-Deformación

En vigas curvas, la relación lineal entre la carga aplicada y la deformación lateral y torsional se conserva hasta un punto determinado, a partir del cual las deformaciones aumentan considerablemente a pesar de que el aumento de la carga aplicada se mantiene constante. Para determinar cuál es el porcentaje del momento crítico de una viga recta equivalente en el cual las deformaciones laterales y torsionales empiezan a presentar un comportamiento no lineal, se toma en cuenta la pendiente inicial de la curva mostrada en la Figura 12.

Para este trabajo de investigación, se determina que el punto de no linealidad se alcanza cuando la deflexión lateral de la curva 1 es igual a tres veces la deformación lateral de la curva 2.

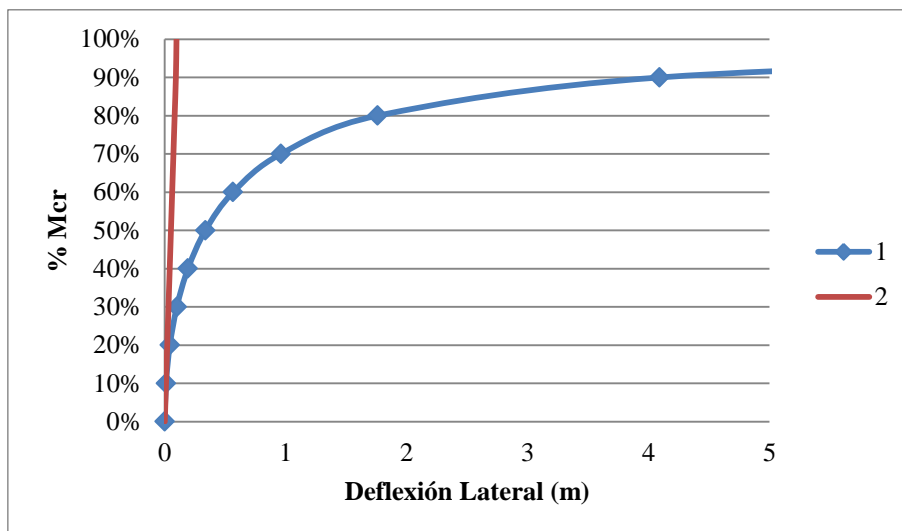


Figura 12: Porcentaje de momento crítico vs. deformación lateral. Comportamiento lineal (rojo) y no lineal (azul).

4.2 Influencia de la Longitud, el Ancho de la Viga y la Relación Peralte/Ancho

Para determinar la influencia de la longitud y la sección transversal de una viga en el porcentaje de momento crítico que ocasiona el comportamiento no lineal de la deflexión lateral de la misma, se definen las siguientes variantes:

Radio de curvatura (R): 50 m

Ancho de la viga (b): 0.05 m, 0.10 m y 0.20 m

Relación peralte/ancho (h/b): 1, 2, 3 y 4

Longitud de la viga (L): 10b, 20b, 100b y 200b

Se determina el punto de no linealidad y el porcentaje de momento crítico en el que se presenta en cada una de las combinaciones de L, b y h/b. A partir de esta información se desarrollan las gráficas de las Figuras 13, 14 y 15.

Es importante mencionar que el momento crítico con el que se trabaja es el correspondiente a cada una de las vigas rectas equivalentes a las vigas curvas analizadas. Es decir, el análisis se realiza con un momento crítico diferente para cada combinación de L , b y h/b .

Sin embargo, debido a que se toma como referencia el porcentaje de momento crítico, no existen inconsistencias en los valores tomados en las figuras mencionadas.

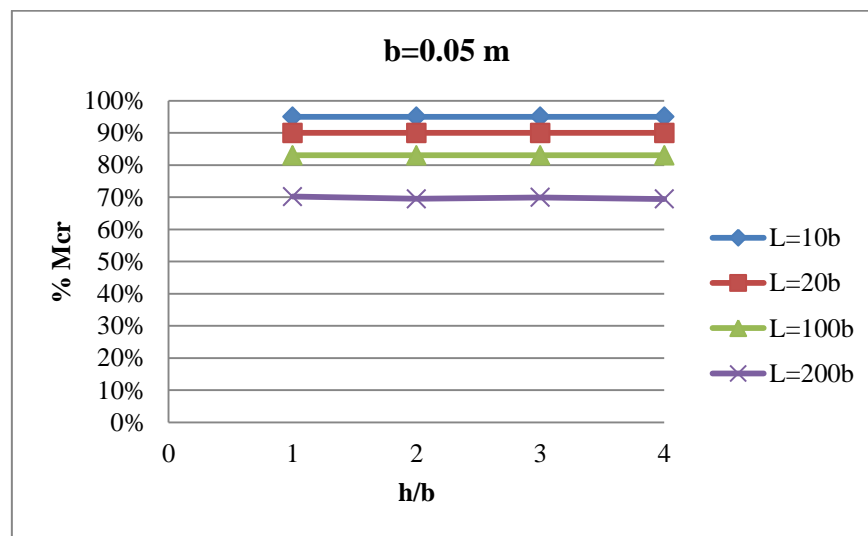


Figura 13: Porcentaje de momento crítico a partir del cual se presentan deformaciones no lineales para vigas de ancho 0.05 m.

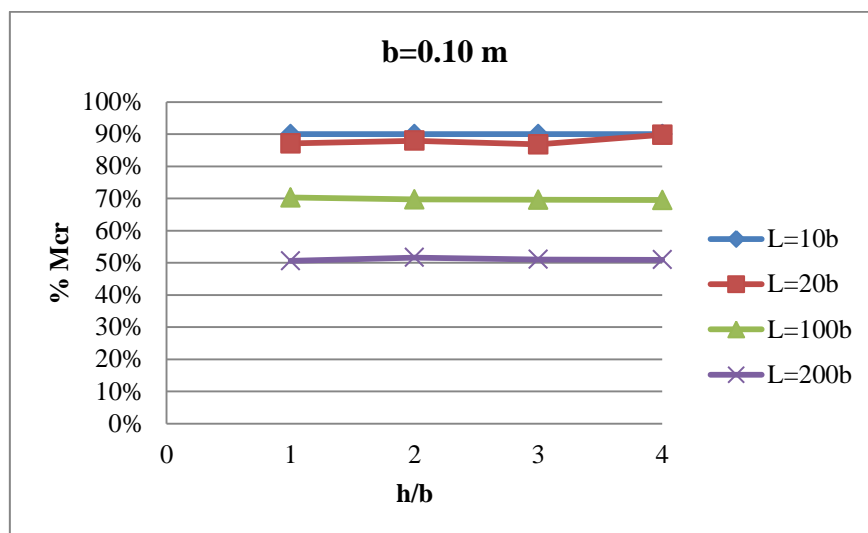


Figura 14: Porcentaje de momento crítico a partir del cual se presentan deformaciones no lineales para vigas de ancho 0.10 m.

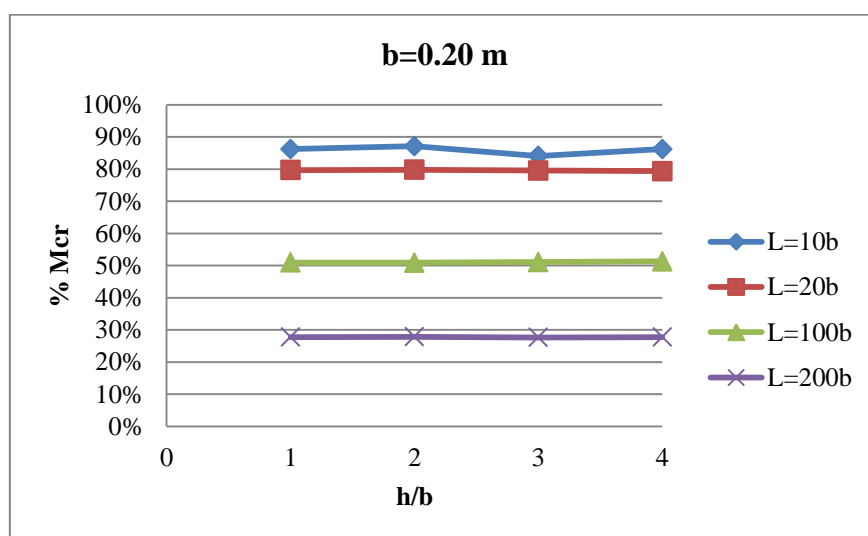


Figura 15: Porcentaje de momento crítico a partir del cual se presentan deformaciones no lineales para vigas de ancho 0.20 m.

Los resultados del análisis realizado se resumen en la siguiente tabla:

b (m)	h (m)	h/b	% Mcr			
			L=10b	L=20b	L=100b	L=200b
0.05	0.05	1	95.00%	90.00%	80.00%	70.17%
	0.10	2	95.00%	90.00%	80.00%	69.49%
	0.15	3	95.00%	90.00%	80.00%	69.92%
	0.20	4	95.00%	90.00%	80.00%	69.46%

0.1	0.10	1	90.00%	87.11%	70.28%	50.59%
	0.20	2	90.00%	87.93%	69.68%	51.64%
	0.30	3	90.00%	86.81%	69.58%	51.05%
	0.40	4	90.00%	89.81%	69.51%	50.94%
0.2	0.20	1	86.23%	79.67%	50.93%	27.72%
	0.40	2	87.12%	79.79%	50.90%	27.85%
	0.60	3	84.07%	79.56%	51.07%	27.66%
	0.80	4	86.23%	79.35%	51.30%	27.73%

Tabla 3: Resultados de %M_{cr} con L, b y h/b variable

4.2.1 Análisis de resultados.

La primera característica que se observa en las curvas de las Figuras 13,14 y 15 es la similitud de los valores de % M_{cr} para los distintos valores de h/b. Esto implica que el incrementar el peralte de la viga no tiene un efecto significativo cuando se determina el porcentaje de momento crítico para el cual las deformaciones tienen un comportamiento no lineal.

Por otra parte, el incremento de la longitud de la viga provoca que el valor de %M_{cr} se reduzca considerablemente, como se detalla a continuación.

Para vigas muy cortas, con longitudes de 0.5, 1 y 2 metros, los porcentajes de momento crítico en los que se alcanza el punto de no linealidad son muy altos, todos alrededor de 90% ya que las vigas presentan deformaciones laterales y torsionales muy cercanas a cero antes de llegar al nivel de carga crítico.

En el caso de vigas de 4 y 5 metros de longitud, se observa que el comportamiento no lineal de las deformaciones se alcanza en el 80% del momento crítico de vigas rectas equivalentes. Para vigas con longitud de 10 metros, el nivel de carga correspondiente es 70% del momento crítico.

Cuando las vigas tienen una longitud de 20 metros, al aplicar el 50% del momento crítico, las deformaciones se comportan en forma no lineal. Y, finalmente, para vigas de 40 metros de longitud, el punto de no linealidad se alcanza cuando el nivel de carga es el 28% del momento crítico de una viga recta equivalente.

Con los resultados resumidos, se puede decir que la longitud de las vigas curvas es el componente que determina el nivel de carga para el cual las deformaciones laterales y torsionales tienen un comportamiento no lineal y, por lo tanto, el componente que determina la susceptibilidad a pandeo lateral torsional global.

5 CONCLUSIONES

5.1 Pandeo Lateral Torsional Global en Vigas Curvas de Sección Transversal Rectangular

Las vigas curvas simplemente apoyadas, de sección transversal rectangular, sometidas a momento uniforme, experimentan pandeo lateral torsional global antes de alcanzar el nivel de carga crítico para este estado límite. En particular, vigas esbeltas, sin apoyo lateral intermedio, presentan deformaciones de comportamiento no lineal al someterse a apenas el 28% del momento crítico de una viga recta equivalente, lo que predice que el momento de PLTG se alcanzará en un nivel de carga por debajo del esperado.

5.2 Limitaciones del Estudio

El análisis de PLTG realizado con la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales de estabilidad de vigas curvas no puede ser verificado con un modelo de elementos finitos en

Abaqus debido a que el funcionamiento detallado de los elementos finitos utilizados y su aplicación en casos especiales salen del alcance del estudio.

5.3 Recomendaciones

Para evitar el fenómeno de pandeo lateral torsional global en vigas curvas esbeltas de sección transversal rectangular, se recomienda verificar las deformaciones laterales y torsionales cuando el nivel de carga aplicado se acerca al 28% de la carga crítica de una viga recta equivalente. De esta forma es posible evitar el comportamiento no lineal de las deformaciones lateral y torsional que pueden provocar el referido fenómeno.

6 REFERENCIAS

- AASHTO LRFD Bridge Design Specifications (2012). *American Association of State Highway and Transportation Officials*, Washington, DC.
- Chen, W. F. & Lui, E. M. (1987). *Structural Stability: Theory and Implementation. Beams*. Prentice Hall. Upper Saddle River, NJ, 307-375.
- Fitzgerald, R. W. (1990). *Mecánica de Materiales. Deflexión en Vigas*. Ediciones Alfaomega. México, D. F. 182-234.
- Grubb, M. A. (1984). Horizontally Curved I-Girder Bridge Analysis: V-Load Method. *Transportation Research Record*. (982), 26-36
- Sánchez, T. & White, D. (2011). Stability of Curved Steel I-Girder Bridges During Construction. *Journal of the Transportation Research Board*. 2268(1), 122-129.
- White, D. et al. (2012). Guidelines for Analysis Methods and Construction Engineering of curved and Skewed Steel Girder Bridges. *National Cooperative Highway Research Program*. (725), 10-14.
- Yura, J., Helwig, T., Herman, R. & Zhou, C. (2008). Global Lateral Buckling of I-Shaped Girder Systems. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Reston, VA, 134 (9), 1487-1494.
- Zill, D. G. & Cullen, M. R. (2009). Ecuaciones Diferenciales con Problemas con Valores y la Frontera. *Ecuaciones Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes*. Cengage Learning. México, D. F., 135-140.

7 ANEXO A: CÓDIGO DE PROGRAMACIÓN EN MATLAB PARA DETERMINAR DEFLEXIONES LATERALES Y TORSIONALES EN VIGAS CURVAS

```
%SOLUCIÓN NUMÉRICA ECUACIÓN DIFERENCIAL SECCIÓN RECTANGULAR
```

```
close all
clear all
clc
```

```
%CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL
```

```
E=2e11;
mu=0.3;
G=E./(2.*(1+mu));
```

```
%GEOMETRÍA DE LA VIGA
```

```
L=20;
R=50;
h=0.40;
b=0.10;
Iy=(h.*b.^3)./12;
Ix=(h.^3).*b)./12;
J=(h/2)*((b/2)^3)*(16/3-3.36*((b/2)/(h/2))*(1-(((b/2)^4)/(12*(h/2)^4))));
theta=L./R;
c=R.*sin(theta./2);
d=R.*cos(theta./2);
it=(1./4)*(((2.*R.*tan(L./(2.*R)))./(3.*L)).*(3.*R+(4./R))-R+2);
```

```
if (it>=0.58) %CONDICIONES
```

```
%DEL
```

```
if (it<=0.71) %ÍNDICE DE TORSIÓN
```

```
i=1;
j=1;
m=1;
n=1;
q=1;
s=1;
g1=[];
g2=[];
```

```
z=0:0.01:2*c;
```

```
M0=4.77e5;
```

```
k=M0./(E.*Iy.*G.*J)^0.5;
```

```
u1p=sin(k.*z)./((R.^2-(c.^2)+2.*c.*z-z.^2).^1.5);
```

```
u2p=cos(k.*z)./((R.^2-(c.^2)+2.*c.*z-z.^2).^1.5);
```

```
%%SUMAS DE RIEMANN
```

```
while m<length(z)+1
```

```

I1(m)=0.01.*u1p(m);

m=m+1;
end
I1=cumsum(I1);

while n<length(z)+1
I2(n)=0.01.*u2p(n);

n=n+1;
end
I2=cumsum(I2);

%CÁLCULO DE CONSTANTES DE INTEGRACIÓN
C1=0;
C2=(R.^2).*(M0./(G.*J.*k)).*(I1(length(z)).*cos(k.*2.*c)-
I2(length(z)).*sin(k.*2.*c))./(sin(k.*2.*c));

t=0:.01:2*c;

%CÁLCULO DEFORMACIÓN TORSIONAL Y GRÁFICO
Gamma=C1.*cos(k.*t)+C2.*sin(k.*t)-
((R.^2).*(M0./(G.*J.*k))).*(I1.*cos(k.*t)-I2.*sin(k.*t));
Gamma=-Gamma;
figure(1);
plot(t,Gamma,'-')
hold on
grid on
axis([0 20 0 0.2])
xlabel('z (m)', 'FontSize',10, 'FontName', 'Times New Roman')
ylabel('\gamma (rad)', 'FontSize',10, 'FontName', 'Times New Roman')
set(gca, 'FontSize',10, 'FontName', 'Times New Roman')
title('Deformación Torsional', 'FontSize',12, 'FontName', 'Times New Roman')

%SUMAS DE RIEMANN
while i<length(z)+1
G1(i)=0.01.*Gamma(i);

i=i+1;
end
G1=cumsum(G1);

while j<length(z)+1
G2(j)=0.01.*G1(j);

j=j+1;
end

G2=cumsum(G2);

%CÁLCULO DE CONSTANTES DE INTEGRACIÓN
D1=(M0./(E.*Iy.*2))*G1(length(t));
D2=0;

```

```
%CÁLCULO DEFORMACIÓN LATERAL Y GRÁFICO
u=-(M0./(E.*Iy)).*G2+D1.*t+D2;
figure(2);
plot(t,u,'-')
hold on
grid on
axis([0 20 0 0.2])
xlabel('z (m)', 'FontSize',10, 'FontName', 'Times New Roman')
ylabel('u (m)', 'FontSize',10, 'FontName', 'Times New Roman')
set(gca, 'FontSize',10, 'FontName', 'Times New Roman')
title('Deformación Lateral', 'FontSize',12, 'FontName', 'Times New
Roman')

else
disp('El radio debe ser mayor.')      %MENSAJES EN CASO DE NO CUMPLIR
end                                     %CON VALORES ACEPTADOS

else
disp('El radio debe ser menor.')      %DE ÍNDICE DE TORSIÓN
end
```