

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERÍA

Edad del universo y la constante
cosmológica.

Destino del universo debido a una
variación temporal de la constante
cosmológica.

Antonina Eloisa Calahorrano Di Patre

Carlos Marin, PhD., Director de Tesis

Tesis de grado presentada como requisito
para la obtención del título de Licenciado en Física

Quito, mayo de 2015

Universidad San Francisco de Quito
Colegio de Ciencias e Ingeniería

HOJA DE APROBACIÓN DE TESIS

Edad del universo y la constante cosmológica.
Destino del universo debido a una variación temporal de
la constante cosmológica.

Antonina Calahorrano

Carlos Marín, PhD.
Director de la Tesis

Oihane Fernández, PhD.
Miembro del Comité de Tesis

Carlos Montúfar, PhD.
Miembro del Comité de Tesis

Darío Niebieskikwiat, PhD.
Director Dep. Física

César Zambrano, Ph.D.
Decano de Ciencias
Colegio de Ciencias e Ingeniería

Quito, mayo del 2015

©DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad San Francisco de Quito y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo de investigación quedan sujetos a lo dispuesto en la Política.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo de investigación en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma:

.....

Nombre: Antonina Eloisa Calahorrano Di Patre

C.I.:1715287452

Fecha: Quito, mayo de 2015

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Antonina Eloisa Calahorrano Di Patre, bajo mi supervisión.

Carlos Marín, PhD

DIRECTOR DEL PROYECTO

DEDICATORIA

A mi abuela Maria Antonia y mi abuelo Ezequiel, in memoriam.

A mi abuelita Rosario y mi abuelito Giuseppe, por llenar mi infancia de cariño.

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis Carlos Marín, por su guía firme y segura a lo largo de la carrera y en el desarrollo de este trabajo.

A todos los profesores que he tenido en estos cinco años, y específicamente a Darío, Edgar y Vincent, por haberse esforzado siempre al máximo para transmitir su conocimiento a nosotros sus estudiantes.

A mis padres, por su ayuda permanente y amor incondicional.

A Juan Anzieta, por obligarme con sus preguntas a entender a profundidad la teoría de este trabajo.

Finalmente, a Joaquín Grefa por enseñarme cómo se estudia eficientemente en mi segundo año, y a mis compañeros Wilson, Camilo, Carolina y Santiago cuya amistad y apoyo constante permitieron que el cansancio y las noches sin dormir sean más llevaderas.

Resumen

En este trabajo se analizaron diversas soluciones para las ecuaciones de Friedmann. Se calculó la edad del universo en función del corrimiento hacia el rojo asumiendo una densidad cosmológica de radiación no despreciable, además del parámetro de corrimiento hacia el rojo en la época de transición de un universo dominado por radiación hacia un universo dominado por materia. Adicionalmente, se calculó analíticamente la edad de un universo abierto y cerrado en el caso en el que se desprecia el valor de la constante cosmológica de Einstein.

Se consideraron además las restricciones sobre el rango de variación de la densidad cosmológica de la materia en relación a la densidad cosmológica del vacío. Finalmente, se analizó el efecto sobre el factor de escala del universo para una perturbación temporal en la constante cosmológica.

Abstract

In this work several solutions of the Friedmann equations are analyzed. The age of the universe was calculated as a function of the redshift, assuming a non vanishing cosmological radiation density. Also, the redshift parameter was found in the time of the transition from a radiation dominated universe to a matter dominated universe. Additionally, the analytical age of the universe was calculated for an open and a closed universe in the case where the Einstein cosmological constant is neglected.

The restrictions on the range of variation of the cosmological matter density and the vacuum cosmological density were considered. Finally, the effect on the scale factor of the universe for a time perturbation on the cosmological constant was analyzed.

Índice

Resumen	7
Abstract	8
1. Introducción	10
1.1. Cosmología	10
1.1.1. El inicio del universo	10
1.1.2. Épocas del universo primitivo	11
1.2. Introducción: Principio Cosmológico y Ecuaciones de Friedmann	13
1.2.1. Modelos de universo que no consideran la constante cosmológica	16
1.2.2. Modelo de Sitter	17
1.3. Densidad de Energía crítica del universo	17
1.4. Parámetro de aceleración	19
1.5. Constante cosmológica y densidad de energía del vacío	19
1.6. Modelo de Lemaitre	21
1.7. Modelo Inflacionario	26
2. Ecuaciones de Friedmann, otra notación	29
2.1. Parámetro de corrimiento hacia el rojo	32
2.2. Edad del universo en función de z	34
2.2.1. Edad del universo sin contribución de la densidad de energía de la radiación	34
2.2.2. Edad del universo considerando la contribución de la densidad de energía de la radiación	35
2.3. Cálculo del parámetro de corrimiento hacia el rojo en la época de transición	38
3. Edad del universo para un universo no plano con $\lambda = 0$	40
3.1. Universo Cerrado	40
3.2. Universo abierto	43
4. Dependencia de la densidad de materia-energía con respecto a la del vacío	46
5. Variación temporal de λ en las ecuaciones de Friedmann	59
6. Conclusiones	68
Apéndice 1	72
Apéndice 2	80
Referencias	82

1. Introducción

1.1. Cosmología

1.1.1. El inicio del universo

Una de las principales preguntas que se han formulado los científicos a lo largo de la historia es en qué manera inició el universo. Los científicos que intentan resolver esta pregunta son los cosmólogos, y la rama de la cosmología se remonta a los primeros griegos que observaban las estrellas. Con Copérnico y su reafirmación del modelo del sistema solar que proponía que la tierra giraba alrededor del sol, las bases para que la cosmología despegue definitivamente fueron asentadas [1]. Con Newton, Brahe, Kepler y Galileo se perpetúa el modelo del sistema solar aceptado actualmente, y con la contribución de muchos otros grandes se comienza a entender la vasta extensión del universo [1]. Sin embargo, se puede considerar que el salto determinante de esta rama de la física se dio debido a la Teoría General de la Relatividad, desarrollada por Einstein entre 1908 y 1915[2].

Si la Teoría Especial de la Relatividad tiene como eje central la invarianza de la velocidad de la luz en todos los marcos de referencia inerciales, la Teoría General puede ser vista como una teoría sobre la gravedad[1, 2]. El resultado principal de dicha teoría, la curvatura del espacio-tiempo debido a campos gravitacionales, permitió el desarrollo de nuevas consideraciones para analizar la geometría y la dinámica del universo. Particularmente, en su trabajo “Cosmological Considerations on the General Theory of Relativity”, Einstein llegó a un resultado impresionante: no es posible construir un modelo de universo estático que sea consistente con la teoría general de la relatividad [1]. A pesar de esto, Einstein decidió que tenía que existir un marco de referencia en donde el universo fuese estático, por lo que agregó un término repulsivo a sus ecuaciones que prevenía el colapso del universo debido a la gravedad. El coeficiente que acompaña a dicho término se llamó constante cosmológica, y eventualmente se encontró que pese a que se creó por consideraciones erróneas, describe perfectamente la repulsión relacionada con la energía oscura[1, 2, 3, 4].

El modelo propuesto por Einstein, que considera una densidad homogénea de materia se conoce como universo cerrado. La solución de Einstein es homogénea e isotrópica, pero ya no es aceptada. Esto se debe a que tiene dos problemas fundamentales: no es estable y además se ha probado que el universo efectivamente se expande. Una solución parecida fue propuesta por Willem de Sitter; éste consideró a la densidad de materia despreciable en el universo, aunque también consideró un universo estático [1, 2].

El primero en asumir soluciones no estáticas para el universo fue Alexander Friedmann, el cual desarrolló ecuaciones diferenciales a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. Aunque el método para encontrarlas fue mejorado por Robertson y Walker (se muestra esta derivación en el Apéndice 1), la idea principal de Friedmann se considera todavía válida. Las soluciones consideradas por

Friedmann no incluían el término correspondiente a la constante cosmológica, pues no necesitaba obligar a las soluciones a ser estáticas [2, 5].

La formulación de Friedmann no causó impacto hasta que en 1929 Edwin Hubble anunció que el universo efectivamente se estaba expandiendo. Hubble llegó a esta conclusión al analizar la rapidez a la cual las galaxias se movían y la distancia a la cual estaban. Basado en sus observaciones llegó a la conclusión que la rapidez a la que se mueven las galaxias es directamente proporcional a la distancia a la que se encuentran. A este principio ahora se le llama ley de Hubble, y prueba definitivamente que el universo efectivamente se está expandiendo [1]. Otra implicación importante de la ley de Hubble es que si el universo está inmerso en una expansión, en un tiempo pasado las galaxias estaban más juntas. Al principio entonces el universo se componía de una singularidad de materia-energía muy concentrada en un espacio pequeño, con densidad, temperatura y curvatura de universo infinitas [2]. Cuando el universo comenzó a expandirse y enfriarse, las densidades bajaron. A este comienzo explosivo se le conoce como “Big Bang” [2].

Stephen Hawking consideró en sus trabajos que La Gran Explosión en la que se creó el universo podría haber sido similar a la manera en que una estrella colapsa en un agujero negro, sólo que revertida en el tiempo [2, 6, 7]. Recientemente sin embargo, se han encontrado soluciones a las ecuaciones de Friedmann que consideran contribuciones cuánticas en las cuales el universo parece no tener inicio [8]. Se menciona dicho trabajo en el Apéndice 2.

1.1.2. Épocas del universo primitivo

- **Era de Planck** : Época en donde los efectos cuánticos gravitatorios fueron muy importantes. En esta era las cuatro interacciones fundamentales estaban unificadas en una sola gran interacción, y duró hasta 10^{-43} [s] después de la Gran Explosión. A final de la era de Planck la densidad del universo era de aproximadamente 10^{97} [kg/m³] y la temperatura era de 10^{32} [K] [2].
- **Era de las Grandes Teorías Unificadas**: Era en donde las interacciones electrodébiles y fuertes están unificadas. La estructura del universo en esta época fue en forma de espuma espacio-temporal. Al final de la era GTU, 10^{-36} [s] después del Big Bang, la densidad del universo era de 10^{80} [kg/m³] y la temperatura de 10^{28} [K] [2]. Había cantidades iguales de materia y antimateria en el inicio del universo, pero antes de que se cumplan 10^{-35} [s] después de la Gran Explosión, colisiones entre partículas causaron una asimetría entre materia y antimateria, logrando que el universo en el momento actual esté formado por materia [2].
- **Era Hadrónica y Leptónica** : La era Hadrónica duró desde 10^{-35} [s] hasta 10^{-6} [s] del Big Bang y en ésta los quarks se condensaron para formar hadrones. En la era Leptónica, los antiquarks se aniquilan y los quarks pesados decaen dejando un remanente de quarks ligeros. La era Leptónica

duró hasta 1 [s] después del inicio del universo, la densidad del universo era de $10^8[\text{kg}/\text{m}^3]$ y la temperatura de $10^{10}[\text{K}]$ [2].

- **Era dominada por la radiación** : En esta era se sintetizan núcleos ligeros, y el universo es una sopa de partículas ionizadas. La edad del universo era de $10^2[\text{s}]$ después del inicio. En esta época la materia y la radiación se desacoplaron, es decir que los fotones se desligaron de la materia y comenzaron a viajar libremente por el universo. Al final de esta era, la densidad de energía de la radiación se igualó a la energía de materia, de tal manera que el universo comenzó a ser dominado por ella[2].
- **Era dominada por la Materia** : Era en donde se comienzan a formar galaxias y cúmulos de galaxias. Después de que los átomos se formaron, la presión disminuye nueve órdenes de magnitud de tal manera que se facilita la formación de cúmulos de materia. [2].

1.2. Introducción: Principio Cosmológico y Ecuaciones de Friedmann

Indudablemente la base de la cosmología actual es el principio cosmológico, el cual enuncia que en cualquier instante el universo aparecerá el mismo para cualquier observador sin importar en dónde se encuentre [5]. El principio se basa justamente en la isotropía y la homogeneidad del universo: el universo parece el mismo en cualquier dirección en la que se le mire, y el universo es el mismo para un observador en cualquier otra galaxia [5].

Considérense dos galaxias cualquiera y su distancia entre ellas variante en el tiempo $r(t)$. Si la distancia entre dichas galaxias en el momento actual es sabida, es posible escribir $r(t)$ en función de esta distancia constante y un factor que determinará la evolución temporal de dicha distancia. Este factor estará por tanto íntimamente relacionado con la geometría de nuestro universo, y se le dice factor de escala del universo [2, 5, 9]. Dicha variable temporal es crucial: nos indica cómo cambia la separación entre galaxias (o puntos) de nuestro universo [2, 5, 9]. La distancia entre dos galaxias finalmente está expresada como:

$$r(t) = r(t_0)R(t)$$

Siendo $R(t)$ el factor de escala del universo. Ya que en el momento actual $r(t) = r(t_0)$, obviamente: $R(t_0) = 1$ [9]. Si la curvatura y las velocidades locales son pequeñas es válido usar las ecuaciones de la dinámica Newtoniana:

$$\frac{dr}{dt} = r_0 \frac{dR}{dt}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mr_0^2\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \quad (1)$$

$$E_{PG} = -\frac{GMm}{r} \quad (2)$$

Considerando la energía cinética y potencial sentida por una partícula de masa m causada por una región masiva del espacio dentro de la distancia r , como se muestra en la figura (1).

Ahora considérese la densidad de masa-energía del universo: $\rho = \frac{Mc^2}{(4/3)\pi r^3}$. Se reemplaza esta densidad en la energía potencial de la ecuación (2), y se divide por la masa de la partícula:

$$\frac{E_{PG}}{m} = -\frac{4}{3}\pi\frac{G}{c^2}\rho r_0^2 R^2$$

Asumiendo una fuerza de repulsión cósmica por fluctuaciones del vacío:

$$F_{rc} = \frac{\lambda r m c^2}{3},$$

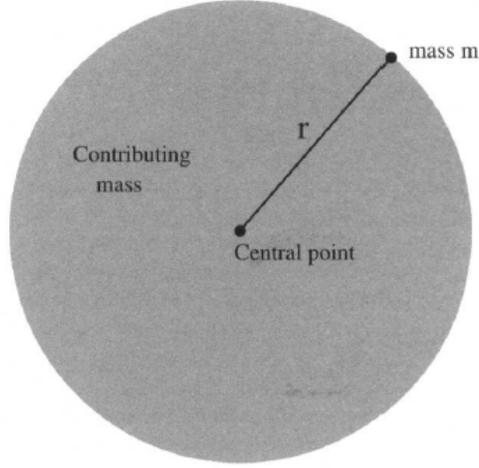


Figura 1: Masa que contribuye a la atracción gravitacional sobre m . Cualquier contribución de la masa fuera de la región sombreada se cancelará con ella misma, según lo estipulado por la ley de gravitación de Newton [5].

que corresponde a una energía:

$$E = -\frac{\lambda r^2 m c^2}{6} \quad (3)$$

puesto que $F_{rc} = -\frac{dE_{rc}}{dr}$ [9]. La energía total por unidad de masa es entonces:

$$\frac{E_T}{m} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{4}{3} \pi \frac{G\rho}{c^2} r_0^2 R(t)^2 - \frac{\lambda r_0^2 R^2 c^2}{6}$$

Pero por conservación de masa esta energía total debe permanecer constante, y la escribimos como: $\frac{E_T}{m} = -\frac{1}{2} r_0^2 K$, donde K es un parámetro independiente del tiempo denominado parámetro de curvatura del universo. Reemplazando y despejando $\frac{dR}{dt}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \frac{8}{3} \pi \frac{G\rho}{c^2} R^2 + \frac{\lambda R^2 c^2}{3} - K \\ \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 &= \frac{8}{3} \pi \frac{G\rho}{c^2} + \frac{\lambda c^2}{3} - \frac{K}{R^2} \end{aligned} \quad (4)$$

A la ecuación (4) se le llama primera ecuación de Friedmann [2, 9].

Considerando el universo como fluido de densidad ρ y presión P :

$$dE = TdS - PdV$$

Pero $dS = 0$, entonces:

$$0 = dE + PdV \quad (5)$$

Si $E = Mc^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ y derivando (5) con respecto del tiempo:

$$0 = \frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \rho + \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \rho + \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{d\rho}{dt} + 4P\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 0 \quad (6)$$

Y dividiendo la ecuación (6) para r^3 y 4π , y multiplicando por 3:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{r}}{r}(\rho + P) = 0$$

Pero $\dot{r} = r_0 \dot{R}$ y $r = r_0 R$:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{R}}{R}(\rho + P) = 0 \quad (7)$$

Y justamente, si consideramos $\rho = \rho_m c^2$, donde ρ_m es la densidad de masa:

$$\dot{\rho}_m + \frac{3\dot{R}}{R}(\rho_m + \frac{P}{c^2}) = 0$$

Volviendo a la primera ecuación de Friedmann (4) y derivándola a su vez con respecto del tiempo:

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8}{3}\pi \frac{G}{c^2}(\rho 2R\dot{R} + R^2\dot{\rho}) + 2R\dot{R}\frac{\lambda c^2}{3} \quad (8)$$

Dividiendo (8) para $2\dot{R}$, reemplazando el valor de $\dot{\rho}$ de (7) se tiene:

$$\ddot{R} = \frac{8}{3}\pi \frac{G}{c^2} \rho R + \frac{4}{3}\pi \frac{G}{c^2} \frac{R^2}{\dot{R}}(-3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P)) + R\frac{\lambda c^2}{3}$$

De manera que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi G \left(\frac{\rho + 3P}{c^2} \right) + \frac{\lambda c^2}{3} \quad (9)$$

Las ecuaciones (4),(7) y (9) determinan totalmente la evolución del universo a través del tiempo [2, 5]. A las mismas ecuaciones se puede llegar usando las ecuaciones de campo de la Teoría General de la Relatividad y la métrica de Robertson-Walker (ver Apéndice 1).

1.2.1. Modelos de universo que no consideran la constante cosmológica

Si se analiza la primera ecuación de Friedmann, se puede ver que si no se considera el término que lleva la constante cosmológica, existen tres soluciones posibles: con curvatura positiva, negativa o nula [2, 5, 10]. Se analizarán entonces brevemente las soluciones posibles con estos valores de K .

Si $K = 0$ (universo plano), entonces resolviendo la ecuación (4) se encuentra que:

$$R(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3c^2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad (10)$$

Evidentemente, este modelo implica un factor de escala que crece conforme el tiempo aumenta [1, 2]. Para universos cerrados ($K > 0$) y abiertos ($K < 0$), se necesita utilizar una parametrización para obtener soluciones fácilmente analizables. Nótese que se dice que con curvatura positiva el universo es cerrado pues el análogo tridimensional es una esfera, y con curvatura negativa abierto como una silla de montar. En el caso en que $K > 0$, las soluciones son:

$$t = \frac{a}{2K^{\frac{3}{2}}}(Y - \sin Y) \quad (11)$$

$$R = \frac{a}{2K}(1 - \cos Y) \quad (12)$$

Donde $a = \frac{8\pi G\rho_0}{3c^2}$ [2]. En este modelo, el universo comienza a colapsar en un tiempo $t_{cc} = \frac{\pi a}{2K^{\frac{3}{2}}}$, lo cual quiere decir que en el doble de ese tiempo el universo experimentará una implosión a la que se denomina Big Crunch[2]. Para un universo abierto por otro lado, no existiría colapso como se puede ver de la ecuación (14). Las soluciones son:

$$t = \frac{a}{2|K|^{\frac{3}{2}}}(\sinh Y - Y) \quad (13)$$

$$R = \frac{a}{2|K|}(\cosh Y - 1) \quad (14)$$

Cuando Y es muy pequeño, las soluciones de este modelo coinciden con las soluciones para un universo plano [1, 2].

En la figura (2), se muestra cómo evoluciona el factor de escala en función del tiempo para los diversos valores de la curvatura del universo. Nótese que en el caso del universo abierto, la rapidez de expansión del mismo se estabilizará eventualmente en un valor casi constante, mientras que en el universo plano dicha rapidez disminuirá paulatinamente pese a la expansión perpetua del universo [1].

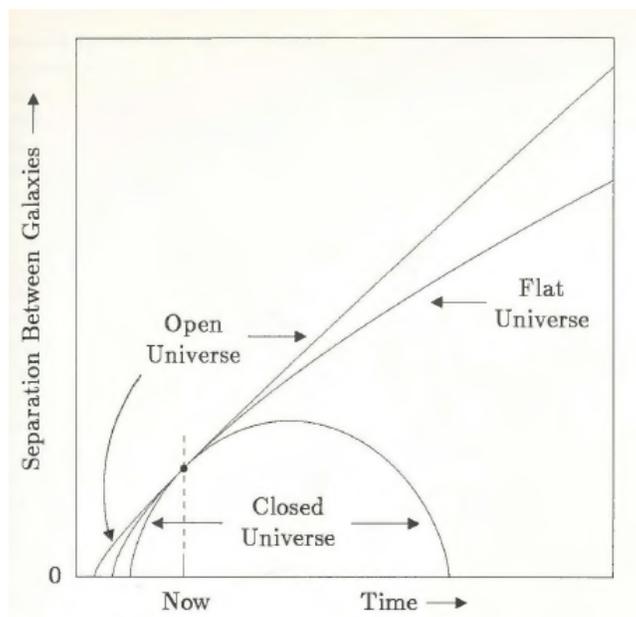


Figura 2: Factor de escala dependiente del tiempo para universos abiertos, cerrados y planos. La figura ha sido tomada de la referencia [1].

1.2.2. Modelo de Sitter

Como se mencionó previamente, Willem de Sitter siguió los pasos de Einstein al considerar un universo estático y plano. Sin embargo a diferencia de Einstein, en este modelo no se toma en cuenta a la densidad de materia: el espacio es vacío. Si se reemplazan estos valores en la ecuación (4), se tiene que:

$$(\dot{R})^2 = \frac{\lambda c^2}{3} R^2 \quad (15)$$

Integrando se encuentra una solución para el factor de escala del universo:

$$R(t) = R_0 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}} ct} \quad (16)$$

En este modelo entonces el factor de escala crece de manera exponencial cuando el tiempo aumenta [1, 2, 5].

1.3. Densidad de Energía crítica del universo

Considérese la energía cinética y potencial escritas en la sección anterior en equilibrio:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = 0 \quad (17)$$

Si el valor de la energía cinética en la ecuación (17) es mayor que el de la energía potencial, el universo se expande. Si por el contrario, éste es menor, el universo se contrae. Despejando M de (17) considerando que $r(t) = r_0 R(t)$, $\dot{r}(t) = r_0 \dot{R}(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{2} &= \frac{GM}{r} \\ r_0^2 (\dot{R})^2 &= \frac{2GM}{r_0 R} \\ M &= \frac{r_0^3 R (\dot{R})^2}{2G}\end{aligned}\tag{18}$$

Pero la densidad de materia-energía es $\rho = \frac{Mc^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{Mc^2}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 R^3}$. Reemplazando el valor de M dado por (18) en esta densidad:

$$\rho_c = \frac{r_0^3 R \dot{R}^2 c^2}{2G \frac{4}{3}\pi r_0^3 R^3} = \frac{3}{8\pi} \frac{\dot{R}^2 c^2}{R^2 G},$$

y ya que $H = \frac{\dot{R}}{R}$, se tiene:

$$\rho_c = \frac{3H^2 c^2}{8\pi G}\tag{19}$$

A la ec. (19) se le llama densidad de materia-energía crítica del universo [2]. Entonces, si $\rho < \rho_c$ el universo se expande para siempre. Si $\rho > \rho_c$ el universo se contrae: hay un colapso [2].

Si en la primera ecuación de Friedmann (4) se modela al universo como plano -es decir, $K = 0$ -, y se desprecia la energía de repulsión del vacío ($\lambda = 0$) [2, 5]:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho}{c^2},\tag{20}$$

despejando ρ , se encuentra que $\rho = \frac{3H^2 c^2}{8\pi G}$. Ya que en el modelo donde el universo tiene curvatura plana la densidad es igual a la crítica, se puede concluir que el universo plano es el límite [2].

En un universo dominado por materia $\rho_m \propto \frac{1}{r^3}$, ésta se puede escribir como:

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{R^3(t)}\tag{21}$$

donde ρ_{m0} representaría la densidad de materia en el momento actual [5].

1.4. Parámetro de aceleración

El parámetro de aceleración q es una tasa que indica cómo el universo se expande: acelerada o desaceleradamente. Si se desarrolla el factor de escala del universo en serie de Taylor [5]:

$$R(t) = R(t_0) + \dot{R}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{R}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots \quad (22)$$

Dividiendo (22) para $R(t_0)$ y considerando que $\frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}$ es el parámetro de Hubble en el momento actual:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] + \frac{1}{2}\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)}[t - t_0]^2 + \dots$$

Pero se quiere tener algún término cuadrático acompañando a la derivada segunda [5]. Se puede escribir entonces:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{1}{2}qH_0^2[t - t_0]^2 + \dots$$

Con lo cual obviamente:

$$qH_0^2 = -\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)}$$

$$q = -\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)}\frac{1}{H_0^2} = -\frac{R(t_0)\ddot{R}(t_0)}{(\dot{R}(t_0))^2}$$

Extendiendo el resultado para cualquier tiempo [2, 5]:

$$q = -\frac{R(t)\frac{d^2R}{dt^2}}{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}. \quad (23)$$

Si $q > 0$ el universo está desacelerando. Por otro lado, si $q < 0$ el universo se está acelerando [2, 5].

1.5. Constante cosmológica y densidad de energía del vacío

Desde este punto se van a usar las siguientes notaciones para las diversas densidades: ρ_m para la densidad de energía de la materia, ρ_r para la densidad de energía de la radiación y ρ_v para la densidad de energía del vacío (densidad asociada con λ). Hay que mencionar que la densidad de materia está dada por la contribución de toda la materia existente en el universo, incluyendo la oscura. Si la densidad de energía del vacío se considera constante en el tiempo, $\dot{\rho}_v = 0$. Incluyendo este resultado en la ecuación (7) encontramos que:

$$\frac{3\dot{R}}{R}(\rho_v + P_v) = 0$$

$$\Rightarrow P_v = -\rho_v \quad (24)$$

Siendo P_v la presión asociada con la energía de repulsión descrita en (3). Esto nos está dando la descripción del llamado modelo inflacionario: el universo comienza con un “falso vacío”. En física de partículas existe un “vacío verdadero” y un “falso vacío”. El vacío verdadero se define como el estado con densidad de energía más baja posible, mientras que el falso vacío es una región en donde uno o más campos tienen valores que causan que la densidad de energía no se minimice, encontrándose en un valle local de la gráfica de ésta [2]. Estando el universo en este estado de falso vacío, actuaría sobre él una fuerza de repulsión cósmica de gran potencia que produciría una violenta expansión. Se puede modelar a la repulsión cósmica como justamente un fluido de presión negativa, en el cual su energía interna aumentaría en vez de disminuir [1, 2, 9]. La fase inflacionaria en el universo habría comenzado alrededor de 10^{-36} [s] luego de la gran explosión, cuando la constante cosmológica λ dominó sobre los efectos gravitatorios ordinarios [1, 2]. Ya que el estado de falso vacío es altamente inestable, la inflación se detiene al desintegrarse el mismo, dando paso a que la fuerza gravitacional sea la dominante [1, 2]. La energía almacenada se liberó en forma de radiación al finalizar este periodo inflacionario, calentando el universo hasta una temperatura adecuada para generar todos los procesos observados de la era GTU (de las grandes teorías unificadas) [2].

Para finalizar la idea del modelo inflacionario de Guth, se puede mencionar que en éste era necesaria una transición de fase similar a la que experimenta el agua cuando pasa de su estado líquido al sólido. Esta transición de fase causaría una ruptura rápida de la simetría entre las fuerzas fuerte, débil y electromagnética [1, 2]. En modelos inflacionarios subsiguientes la ruptura de simetría no es violenta (modelo de Linde, Albrecht y Steinhardt) o no existe en absoluto (modelo de Linde desarrollado en 1983) [2]. Sin embargo, en todos los modelos del tipo inflacionario el universo continúa expandiéndose gracias al impulso dado por la inflación inicial, de acuerdo las teorías convencionales del “Big-Bang” [1, 2].

Considerando ahora la segunda ecuación de Friedmann con la densidad total expresada en función de las diversas densidades: $\rho_t = \rho_m + \rho_r + \rho_v$, y una presión total que toma en cuenta también la contribución de la densidad de energía del vacío:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho_t + 3P_t)R \quad (25)$$

En (25) no se agrega el término que incluye a la constante cosmológica, pues ya se está considerando su aporte a la energía en ρ_t y P_t . Si el fluido es isotrópico

y homogéneo la contribución de todas las presiones distintas a la de la energía el vacío son cero:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4}{3} \frac{\pi G}{c^2} (\rho_{m+r} + \rho_v + 3P_v)R,$$

y usando el resultado de la ecuación (24):

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4}{3} \frac{\pi G}{c^2} (\rho_{m+r} + \rho_v - 3\rho_v)R$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4}{3} \frac{\pi G}{c^2} (\rho_{m+r} - 2\rho_v)R \quad (26)$$

Y si se considera ahora la segunda ecuación de Friedmann original tomando en cuenta el término que contiene a la constante cosmológica, pero eliminando su contribución en la densidad y la presión (por lo tanto, con una presión igual a cero):

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi \frac{G}{c^2} \rho R + \frac{\lambda c^2 R}{3} \quad (27)$$

Siendo $\rho = \rho_{m+r}$. Comparando las ecuaciones (26) y (27) se encuentra que:

$$\frac{\lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G \rho_v}{3c^2}$$

$$\lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_v \quad (28)$$

$$\rho_v = \frac{\lambda c^4}{8\pi G} \quad (29)$$

Entonces, las ecuaciones (28) y (29) ilustran la relación de la constante cosmológica con la densidad de energía del vacío.

1.6. Modelo de Lemaître

Para el siguiente modelo es necesario definir una cantidad conocida como densidad cosmológica, la cual se refiere a la relación entre una densidad (la de materia, la de radiación, la de materia más radiación, o la del vacío) y la densidad crítica del universo [2, 11]:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$$

Por ejemplo:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho_m}{3H^2 c^2} \quad (30)$$

En el momento actual entonces:

$$\Omega_{m0} = \frac{8\pi G \rho_{m0}}{3H_0^2 c^2} \quad (31)$$

Considerando ahora la densidad de energía del vacío:

$$\Omega_v = \frac{\rho_v}{\rho_c}$$

Usando a su vez dicha densidad en función de la constante cosmológica (29):

$$\Omega_v = \frac{8\pi G}{3H^2 c^2} \frac{\lambda c^4}{8\pi G}$$

$$\Omega_v = \frac{\lambda c^2}{3H^2} \quad (32)$$

En el momento actual, la densidad cosmológica relacionada con la energía del vacío si se considera a λ invariante en el tiempo será entonces:

$$\Omega_{v0} = \frac{\lambda c^2}{3H_0^2} \quad (33)$$

Y recordando la primera ecuación de Friedmann, se puede escribir en función de la densidad en el momento actual (si se desprecia la contribución de la densidad de energía de la radiación):

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_{m0}}{c^2 R^3} - \frac{K}{R^2} + \frac{\lambda c^2}{3} \quad (34)$$

Reemplazando los valores de las densidades cosmológicas en (34) y multiplicando por R^2 :

$$(\dot{R})^2 = \frac{H_0^2 \Omega_{m0}}{R} - K + \Omega_{v0} H_0^2 R^2 \quad (35)$$

Considerando ahora el caso en el que el universo es plano ($K = 0$) en 35:

$$(\dot{R})^2 = \frac{\Omega_{m0} H_0^2}{R} + \Omega_{v0} H_0^2 R^2 \quad (36)$$

$$\dot{R} = H_0 \left(\frac{\Omega_{m0}}{R} + \Omega_{v0} R^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{R} = H_0 \left(\frac{\Omega_{m0} + \Omega_{v0} R^3}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para poder integrar con respecto del tiempo, se pueden separar las variables:

$$\frac{R^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} + R^3)^{\frac{1}{2}}} dR = H_0 dt$$

Y usando el cambio de variable: $R(t) = (\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}})^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}}(\theta)$, junto con su diferencial: $dR = \frac{2}{3}(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}})^{\frac{1}{3}} \sinh^{-\frac{1}{3}}(\theta) \cosh(\theta) d\theta$:

$$\frac{2}{3} \frac{d\theta}{\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} = H_0 dt$$

Se integra con límites de 0 a θ , y de 0 hasta un tiempo cualquiera para obtener:

$$\theta = \frac{3}{2} \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}} H_0 t$$

Y reemplazando este valor de θ en el cambio de variable original se encuentra que el factor de escala del universo evoluciona como [2]:

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2} \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}} H_0 t\right) \quad (37)$$

Analizando la solución (37) para tiempos pequeños, se considera la expansión en serie de Taylor de la función \sinh [16]:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Con lo cual, para $x \ll 1$, $\sinh(x) \approx x$. Aplicando esta aproximación en (37) en el caso en que $t \rightarrow 0$:

$$R(t) = (\Omega_{m0})^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (H_0 t)^{\frac{2}{3}}$$

y como $H_0^2 = \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho_{m0}}{c^2}$, entonces $R(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3c^2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$ que es la solución con $\lambda = 0$ y $K = 0$ de las ecuaciones de Friedmann.

Considerando en (36) que $\dot{R}_0 = 1 = R_0 = H_0$, entonces $1 = \Omega_{m0} + \Omega_{v0}$ y por lo tanto también se puede escribir:

$$R(t) = (1 - \Omega_{v0})^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (H_0 t)^{\frac{2}{3}} \quad (38)$$

El otro límite, para el cual $t \rightarrow \infty$ puede ser encontrado al recordar que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2}$ (para $x \rightarrow \infty$). Reemplazando esta aproximación en (37):

$$R(t) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{[(\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}} H_0 t]}}{2^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{2}{3}} e^{(\frac{\lambda}{3})^{\frac{1}{2}} ct} \quad (39)$$

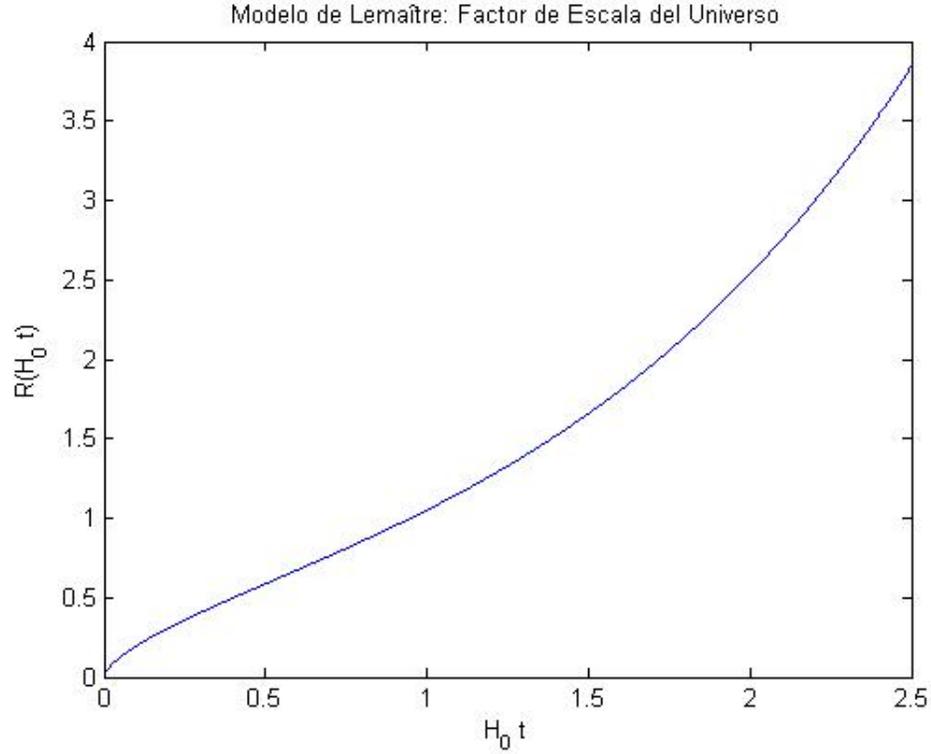


Figura 3: Factor de escala del universo en función del tiempo y del parámetro de Hubble en el momento actual para $\Omega_{v0} = 0,685$ [3, 4]. Nótese que la curva tiene un punto de inflexión para un cierto tiempo t_m .

Nótese que esta es la forma del modelo de Sitter para tiempos pequeños [2, 5, 9]. Para un tiempo muy grande, el universo tiende a expandirse violentamente como en la época inflacionaria.

Se puede encontrar el valor de la edad del universo en el momento actual (para este modelo) al considerar en (37) al factor de escala en el momento actual ($R_0 = R(t_0) = 1$):

$$1 = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}H_0 t_0\right)$$

Y de nuevo expresando al seno hiperbólico en función de exponenciales, llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$e^{2x} - 2e^x \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

Siendo en ésta $x = \frac{3}{2}\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}H_0 t_0$. Se toma solamente la solución positiva de la

ecuación, ya que la función exponencial no tiene valores negativos y se encuentra que:

$$x = \ln \left(\frac{1 + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{3}{2} \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}} H_0 t_0$$

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{(\Omega_{v0})^{-\frac{1}{2}}}{H_0} \ln \left(\frac{1 + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (40)$$

Este valor numérico se calcula tomando los valores experimentales obtenidos por la última misión Planck de 2013: $\Omega_{v0} = 0,685 \pm 0,017$ y $H_0 = 67,3 \pm 1,2$ [Km/(s Mpc)] [3, 4]:

H_0 [Km/ (s Mpc)]	Ω_{v0}	t_0 [s Mpc/Km]	t_0 [Gyr]
68.5	0.702	0.01410	13.7990
67.3	0.685	0.01413	13.8281
66.1	0.668	0.01417	13.8713

Cuadro 1: Edad del universo en el momento actual según el modelo de Lemaitre para diversos valores de Ω_{v0} y H_0 medidos por la misión Planck (2013).

Pero el valor medido de la edad del universo en el momento actual por la misión Planck es de $13,817 \pm 0,048$ [Gyr] [4]. Se puede ver que el modelo de Lemaitre coincide muy bien con los valores experimentales de la edad del universo.

El parámetro de aceleración en este modelo es, usando la definición (23) para cualquier tiempo:

$$q = -\frac{3}{2} \left(\tanh^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} (\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}} H_0 t \right) \cosh^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{2} (\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}} H_0 t \right) - \frac{1}{3} \sinh^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{2} (\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}} H_0 t \right) \right) \quad (41)$$

Y en el momento actual [2]:

$$q_0 = \frac{1}{2} (1 - 3\Omega_{v0}) \quad (42)$$

Para valores de Ω_{v0} mostrados en la tabla (1) se ve claramente que q_0 es negativo, por lo que en este modelo el universo se está acelerando [2, 5, 9].

Se puede observar en la figura (3) que existe un punto de inflexión. El tiempo en el que se origina el punto de inflexión puede ser calculado al igualar la segunda derivada del factor de escala a cero:

$$\ddot{R} = \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} \Omega_{v0} H_0^2 \sinh^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} (\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}} H_0 t \right) \left(1 - \frac{1}{3} \coth^2 \left(\frac{3}{2} (\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}} H_0 t \right) \right) = 0$$

$$\tanh\left(\frac{3}{2}(\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}H_0t\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

El signo negativo da una solución $H_0t_m < 0$, lo cual es absurdo y no será tomado en cuenta.

Si decimos que $\left(\frac{3}{2}(\Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}H_0t\right) = \alpha$, se encuentra fácilmente usando la definición de la tangente hiperbólica que:

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right)$$

Reemplazando el valor de α [2, 5]:

$$H_0t_m = \frac{1}{3\sqrt{\Omega_{v0}}} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right) \quad (43)$$

Si se evalúa el valor encontrado en (43) dentro del factor de escala del universo para este modelo, encontramos que su valor es:

$$R(t_m) = \left(\frac{1 - \Omega_{v0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{1 - \Omega_{v0}}{2\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (44)$$

Valores numéricos del tiempo de inflexión y del factor de escala del universo pueden ser encontrados en la tabla (2), con valores experimentales de Ω_{v0} y H_0 obtenidos en la misión Planck 2013 [3, 4].

H_0 [Km/ (s Mpc)]	Ω_{v0}	t_m [s Mpc/Km]	t_m [Gyr]	$R(t_m)$
68.5	0.702	0.0076487684	7.4851	0.5965
67.3	0.685	0.0078811626	7.7125	0.6126
66.1	0.668	0.008125703	7.9518	0.6287

Cuadro 2: Valores numéricos del tiempo de inflexión y del factor de escala del universo en dicho tiempo, con valores experimentales obtenidos por la expedición Planck 2013 [3, 4].

1.7. Modelo Inflacionario

Hasta ahora se ha hablado de cómo el modelo estándar del Big Bang funciona correctamente y coincide con las mediciones experimentales. Sin embargo, el modelo estándar no puede resolver dos problemas: el problema de por qué el universo es plano (the flatness problem) y el del horizonte (the horizon problem). A estos dos problemas se le puede añadir el del por qué el universo se está expandiendo [12].

El problema del horizonte parte de la homogeneidad de la radiación cósmica de fondo: la radiación térmica observada en el universo, reliquia del Big Bang. La temperatura de esta radiación es isotrópica a pesar de que en el momento es que se emitió, regiones opuestas en el cielo que emitieron dicha radiación estaban fuera de los horizontes de sucesos de cada uno. Esto quiere decir que no hay proceso físico que se haya propagado a la velocidad o a una velocidad menor a la de la luz, que haya llevado a estas regiones a estar en equilibrio térmico [12, 13].

El problema de por qué el universo es plano se origina de la restricción sobre la densidad cosmológica total, la cual debería haber sido igual o muy cercana a 1 (como se explicará en la siguiente sección) un segundo después de la Gran Explosión. El modelo estándar no tiene una explicación para que este punto de equilibrio inestable haya sido cumplido para originar el universo que conocemos.

El problema del horizonte se podría decir que depende muchísimo de cómo el universo se expandió en sus primeros segundos de vida. Si éste se expandió desaceleradamente, el problema del horizonte persiste. Si por el contrario se expandió aceleradamente por un cierto periodo para luego desacelerarse, en épocas tempranas es más fácil que las características físicas se hayan equilibrado en dichas épocas [13]. A este período de expansión acelerada se le llama inflación, y su definición básica es:

$$\ddot{R} > 0 \quad (45)$$

Considerando esta condición en la ecuación (25), se puede observar que para que ocurra la inflación, la presión debe cumplir que:

$$p < -\frac{1}{3}\rho \quad (46)$$

Lo cual quiere decir que se tiene una ecuación de estado con presión negativa [13]. Se puede ver que esto también resuelve el problema de por qué el universo es plano considerando la ecuación (4). En un período de aceleración, el factor de escala debe aumentar más rápidamente que $R(t) \propto t$. Usando la ecuación de estado resultante de la condición especificada arriba, la cantidad ρR^2 crecerá en el período inflacionario de tal manera que el término relacionado con la curvatura se volverá despreciable, si no se toma en cuenta la constante cosmológica (dado que esa época estuvo dominada por la radiación)[13].

La prueba contundente de que el universo se está expandiendo aceleradamente fue dada por el Supernova Cosmology Project en 1998, donde se midió el brillo de supernovas del tipo Ia [2, 14]. Éstas aparecieron más tenues de lo esperado, por lo que la predicción del modelo standard del universo en el que la expansión era desacelerada no se cumplía[2, 14]. Las observaciones del proyecto indicaron que el universo en realidad se está acelerando, como se muestra en la figura (4).

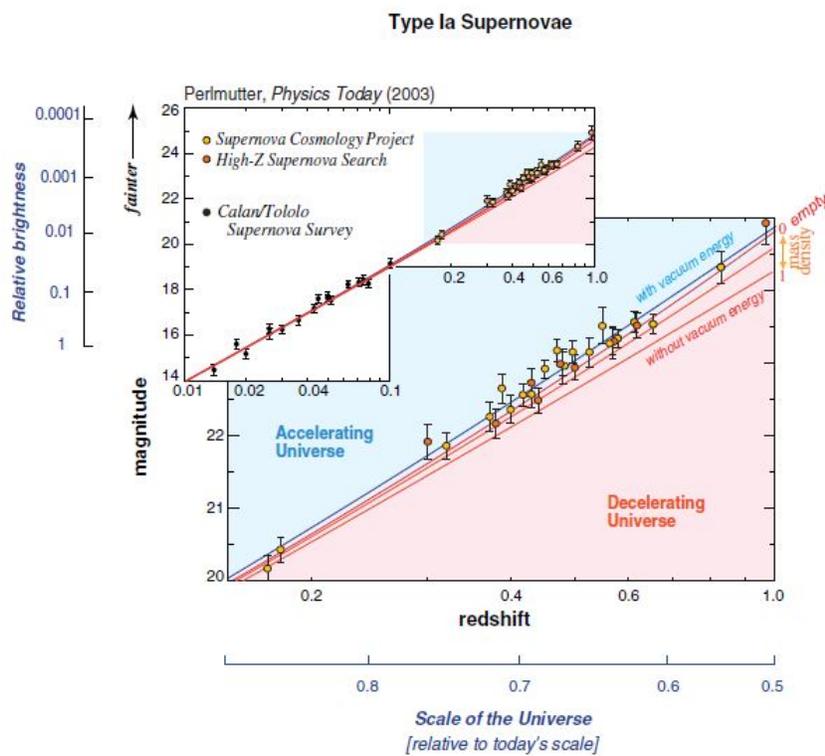


Figura 4: Predicciones para la expansión del universo en función del parámetro de corrimiento hacia el rojo. Dependiendo de los valores de las densidades cosmológicas, las soluciones comienzan a diverger. La curva que se ajusta mejor a las mediciones sugiere un universo que se expande aceleradamente [14].

2. Ecuaciones de Friedmann, otra notación

Se pueden escribir las ecuaciones de Friedmann de una manera más elegante, partiendo de:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi\frac{G}{c^2}(\rho_m + \rho_r) - \frac{K}{R^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$(\dot{R})^2 = \frac{8}{3}\pi\frac{G}{c^2}(\rho_m + \rho_r)R^2 - K + \frac{\lambda c^2}{3}R^2 \quad (47)$$

Usando la expresión de la densidad de energía de materia más la de radiación: $\rho_{rm} = \rho_m + \rho_r$. Habiendo definido también antes el parámetro de densidad cosmológica, se pueden escribir ahora las contribuciones de materia, radiación, y energía del vacío como:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2c^2}; \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_r}{3H^2c^2}; \quad \Omega_v = \frac{\rho_v}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho_v}{3H^2c^2} \quad (48)$$

Donde ρ_m, ρ_r y ρ_v son respectivamente la densidad de energía por materia, por radiación y del vacío [2, 11, 13, 15]. Sin embargo, sabemos que $\lambda = \frac{8\pi G\rho_v}{c^4}$ [5, 11, 17] por lo que $\Omega_v = \frac{\lambda c^2}{3H^2}$ al reemplazar el valor de ρ_v . Usando este resultado en la ecuación (47) junto con los valores definidos en (48), se tiene que:

$$(\dot{R})^2 = H^2\Omega_m R^2 + H^2\Omega_r R^2 - K + \Omega_v H^2 R^2 \quad (49)$$

$$K = H^2 R^2 (\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v - 1) \quad (50)$$

Donde se usó que $(\dot{R})^2 = H^2 R^2$. La ecuación (50) nos da el parámetro de curvatura del universo en función de las contribuciones al parámetro de densidad cosmológica, encontrada en 21.14 de [15]. Observaciones del proyecto WMAP-9 y de Planck (2013) sin embargo indican que el valor de la edad del universo es de 13.800 ± 0.038 Gyr, con un intervalo de confianza del 68% y considerando el efecto BAO (Baryon Acoustic Oscillations)[4]. El modelo que es consistente con esta edad es el que propone $K = 0$, es decir, el universo plano. Reemplazando en (50), se ve claramente que:

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v = \Omega_T \quad (51)$$

Siendo Ω_T la densidad cosmológica total. Es evidente que (51) es válida también en el momento actual. Igualmente (50) en el momento actual se convierte en $K = H_0^2(\Omega_{T0} - 1)$.

Recordando que la ecuación de fluido válida para cualquiera de las densidades de materia-energía. es:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P) = 0 \quad (52)$$

Utilizamos en ella la ecuacion de estado $P = \omega\rho$ [9] con ω una constante:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + \omega\rho) = 0$$

$$d\rho + 3\frac{dR}{R}\rho(1 + \omega) = 0$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int (-3\frac{dR}{R})(1 + \omega)$$

$$\ln \rho = -3 \ln(R)(1 + \omega) + cte.$$

$$\ln \rho = \ln(R)^{-3(1+\omega)} + cte$$

$$\rho = cte.R^{-3(1+\omega)} \quad (53)$$

Entonces para cada uno de los tipos de densidades:

$$\rho_m = \rho_{m0}R^{-3(1+\omega_m)} \quad (54)$$

$$\rho_r = \rho_{r0}R^{-3(1+\omega_r)} \quad (55)$$

$$\rho_v = \rho_{v0}R^{-3(1+\omega)} \quad (56)$$

Se había considerado ya a la densidad de materia en (21) como proporcional a $\frac{1}{R^3}$, de manera que (54) implica que $\omega_m = 0$. Para encontrar la dependencia de la densidad de radiación de R , se considera la energía libre de Helmholtz de un sistema ultrarelativista en donde el aporte de fermiones y bosones está regulado por sus respectivas funciones de partición. La relación entre la energía media del sistema y la energía libre se demuestra que es $U = -3F$ [18], y dado que la densidad de energía de radiación está definida como $\rho_r = \frac{U}{V}$ entonces:

$$\rho_r = \frac{2}{c}\sigma T^4(N_b + \frac{7}{8}N_f) \quad (57)$$

En la etapa temprana del universo, la expansión claramente fue adiabática dado que la simetría prohíbe un flujo de calor neto sobre cualquier superficie [10]. Si además se considera dicha expansión como reversible, el proceso que ocurre es adiabático, y se puede utilizar la relación: $T \propto R^{-3(\gamma-1)}$, con γ el coeficiente adiabático. [10, 19]. Para radiación, $\gamma = \frac{4}{3}$ con lo cual $T \propto \frac{1}{R}$. Uniendo este

resultado al obtenido en (57) se encuentra que $\rho \propto \frac{1}{R^4} = \frac{\rho_{r0}}{R^4}$; por lo tanto, $\omega_r = \frac{1}{3}$. En el caso de la densidad del vacío ω se encuentra experimentalmente y tiene un valor de $\omega = -1,00 \pm 0,06$.

Si se reemplaza la ecuación de estado en la 2da ecuación de Friedmann, se encuentra que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho_m + \rho_r + \rho_v + 3P_r + 3P_v)$$

Nótese que de nuevo se considera que la contribución de la constante cosmológica está totalmente incluida en la densidad y presión del vacío. Reemplazando la presiones por sus relaciones con las diversas densidades:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho_m + \rho_r + \rho_v + 3\left(\frac{\rho_r}{3}\right) + 3\omega\rho_v)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho_m + 2\rho_r) - \frac{4\pi G}{3c^2}(1 + 3\omega)\rho_v \quad (58)$$

Comparando las ecuaciones (58) y (26) se obtiene que:

$$\lambda = -\frac{4\pi G\rho_v(1 + 3\omega)}{c^4} \quad (59)$$

Finalmente, si en ecuación (58) se reemplaza las densidades de energía por sus respectivos Ω , se obtiene que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{\Omega_m H^2}{2} - \Omega_r H^2 - \frac{\Omega_v}{2} H^2 (1 + 3\omega) \quad (60)$$

Consideremos la ecuación (60) en referencia al parámetro de aceleración. Si se toma en cuenta además que $(\dot{R})^2 = H^2 R^2$ es posible encontrar q en cualquier momento en función de las densidades cosmológicas:

$$q = \frac{H^2 R^2 \left(\frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r + \frac{\Omega_v}{2} (1 + 3\omega) \right)}{H^2 R^2}$$

$$q = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r + \frac{\Omega_v}{2} (1 + 3\omega) \quad (61)$$

Siendo la expresión para el momento actual simplemente:

$$q_0 = \frac{\Omega_{m0}}{2} + \Omega_{r0} + \frac{\Omega_{v0}}{2} (1 + 3\omega) \quad (62)$$

Se quiere saber si es posible encontrar una solución para R partiendo de la ecuación (49) con $K = 0$ (universo plano). Se puede considerar la relación entre las densidades cosmológicas y las densidades de energía al realizar los cocientes:

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_{m0}} = \frac{\rho_m}{\rho_{m0}} \frac{H_0^2}{H^2}$$

$$\frac{\Omega_r}{\Omega_{r0}} = \frac{\rho_r}{\rho_{r0}} \frac{H_0^2}{H^2}$$

$$\frac{\Omega_v}{\Omega_{v0}} = \frac{H_0^2}{H^2}$$

Con lo cual (49) se puede reescribir como:

$$(\dot{R})^2 = H_0^2 R^2 \left(\Omega_{m0} \left(\frac{\rho_m}{\rho_{m0}} \right) + \Omega_{r0} \left(\frac{\rho_r}{\rho_{r0}} \right) + \Omega_{v0} \right)$$

Y recordando que $\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{R^3}$ y $\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{R^4}$:

$$(\dot{R})^2 = H_0^2 R^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + \frac{\Omega_{r0}}{R^4} + \Omega_{v0} \right)$$

Sabiendo que la densidad cosmológica de la radiación es muchísimo menor a la densidad cosmológica de la materia (lo cual conocemos de las pruebas experimentales provistas por diferentes misiones como WMAP-9 y Planck [3, 4]), se puede despreciarla, resultando:

$$(\dot{R})^2 = H_0^2 R^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + \Omega_{v0} \right) \quad (63)$$

Si se compara este resultado con la ecuación usada para llegar a la solución en el modelo de Lemaître, se ve claramente que ambas expresiones son idénticas [5, 10, 15].

2.1. Parámetro de corrimiento hacia el rojo

De manera análoga al sonido, existe un corrimiento Doppler para la luz. Éste toma en cuenta las previsiones de la relatividad especial, las cuales ilustran que no se puede distinguir entre el movimiento de la fuente y el movimiento del observador, además de la dilatación del tiempo relativista [20]. Sin embargo, aunque el concepto a grandes distancias se mantiene, es imposible usar inocentemente la fórmula relativística antes mencionada. Considérese entonces la definición del parámetro de corrimiento hacia el rojo:

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \quad (64)$$

Con λ la longitud de onda emitida por la fuente distante, y λ' la longitud de onda observada [2, 10]. Sin embargo, es cierto que: $\lambda \propto R(t)$ y $\lambda' \propto R(t_0)$ con lo cual:

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \quad (65)$$

Esto es equivalente a considerar que los eventos en galaxias cercanas se dilatan temporalmente acorde a cuánto el universo se ha expandido desde que el fotón que se observa fue emitido [10]. Esto es una consecuencia directa de la isotropía de la radiación.

Para poder trabajar con el parámetro del corrimiento hacia el rojo, se calcula primero:

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}\pi G\rho &= \frac{8}{3}\pi G(\rho_m + \rho_r + \rho_v) \\ \frac{8}{3}\pi G\rho &= \frac{8}{3}\pi G\left(\frac{\rho_{m0}}{R^3} + \frac{\rho_{r0}}{R^4} + \frac{\rho_{v0}}{R^{3(1+\omega)}}\right) \end{aligned}$$

En función de las diversas densidades cosmológicas se tiene que:

$$\frac{8}{3}\pi G\rho = \left(\frac{8}{3}\pi G\right) \left(\frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}\right) \left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + \frac{\Omega_{r0}}{R^4} + \frac{\Omega_{v0}}{R^{3(1+\omega)}}\right)$$

Si ahora se recuerda (4) con K diferente de cero (primera ecuación de Friedmann) se obtiene:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + \frac{\Omega_{r0}}{R^4} + \frac{\Omega_{v0}}{R^{3(1+\omega)}}\right) - \frac{K}{R^2}$$

Utilizando la ecuación (50) en el momento actual se obtiene que:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{R^3} + \frac{\Omega_{r0}}{R^4} + \frac{\Omega_{v0}}{R^{3(1+\omega)}}\right) - \frac{H_0^2}{R^2} (\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{v0} - 1)$$

Se va a llamar a $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{v0}$ como Ω_{T0} (densidad cosmológica total en el momento actual). Ahora es el momento de reemplazar el valor (65), pues es una cantidad que se puede medir experimentalmente. Hay que tener en cuenta que derivando (65) con respecto del tiempo se obtiene: $\dot{R} = -\frac{\dot{z}}{(1+z)^2}$, por lo que $H = \frac{\dot{R}}{R} = -\frac{\dot{z}}{(1+z)^2}(1+z) = -\frac{\dot{z}}{1+z}$. Usando estos valores:

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z) \left\{ \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+\omega)} - (\Omega_{T0} - 1)(1+z)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

o:

$$dt =$$

$$\frac{-dz}{H_0(1+z) \left\{ \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+\omega)} - (\Omega_{T0} - 1)(1+z)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (66)$$

Con lo que se puede calcular la edad del universo en cualquier instante en función del parámetro de corrimiento hacia el rojo. Nótese que cuando $R(t)$ tiende a cero, z tiende al infinito, por lo que:

$$t = \int_{\infty}^z \frac{-dz}{H_0(1+z) \left\{ \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}(1+z)^{3(1+\omega)} - (\Omega_{T0} - 1)(1+z)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Utilizando $\omega = -1$ y $K = 0$ (condiciones para universo plano), se tiene finalmente que:

$$t = \int_{\infty}^z \frac{-dz}{H_0(1+z) \left\{ \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0} - (\Omega_{T0} - 1)(1+z)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (67)$$

2.2. Edad del universo en función de z

Usualmente, el cálculo clásico de la edad del universo en función del parámetro de corrimiento hacia el rojo se realiza considerando que Ω_{r0} es despreciable, por ser mucho menor a Ω_{m0} y Ω_{v0} . Se procederá en este trabajo a calcular, tanto despreciando como tomando en cuenta la densidad cosmológica de radiación, la edad del universo en términos de z para así encontrar la magnitud de la corrección a primer orden debido a la influencia radiacional.

2.2.1. Edad del universo sin contribución de la densidad de energía de la radiación

Ya que $\Omega_{r0} = 0$, entonces (51) se escribe: $\Omega_{m0} + \Omega_{v0} = 1 = \Omega_{T0}$. Reemplazando estos valores en (67) se obtiene:

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z \frac{dz}{(1+z) \left\{ \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (68)$$

Tomando por ahora el límite inferior de la integral como un cierto z_0 , se propone el cambio de variable: $(1+z) = \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \theta$. Esto implica que $dz = \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{-\frac{1}{3}} \theta \cosh \theta d\theta$, y que el tiempo se convierte en:

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{-\frac{1}{3}} \theta \cosh \theta d\theta}{\left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}} \theta \left\{ \Omega_{m0} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right) \sinh^2 \theta + \Omega_{v0} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Despejando y usando la identidad trigonométrica hiperbólica $1 + \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta$ [16]:

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{2}{3} \sinh^{-\frac{1}{3}} \theta \cosh \theta d\theta}{\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}} \sinh^{\frac{2}{3}} \theta \cosh \theta}$$

$$t = -\frac{2}{3} \frac{1}{H_0 \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \int_{\theta_0}^{\theta} \sinh^{-1} \theta d\theta$$

Siendo el valor de esta integral [21]:

$$t = -\frac{2}{3} \frac{(\Omega_{v0})^{-\frac{1}{2}}}{H_0} \ln(\tanh \frac{\theta}{2}) \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

Del cambio de variable anterior, $\theta = \text{arc sinh} \left[(1+z) \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{2}{3}}$. Si se quiere calcular la edad del universo en el momento actual t_0 , z va desde ∞ como se mostró antes hasta cero (puesto que en ese caso la longitud de onda emitida y la observada serán las mismas). El límite del $\text{arc sinh}(x)$ cuando x tiende al infinito es igual al infinito positivo. La edad del universo en el momento actual entonces sería:

$$t_0 = -\frac{2}{3} \frac{(\Omega_{v0})^{-\frac{1}{2}}}{H_0} \ln(\tanh \frac{\theta}{2}) \Big|_{\infty}^{\text{arc sinh} \left(\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}$$

Sin embargo $\tanh\left(\frac{\text{arc sinh}(x)}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ [16, 21], por lo que:

$$t_0 = -\frac{2}{3} \frac{(\Omega_{v0})^{-\frac{1}{2}}}{H_0} \ln \left(\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{2}} + 1} \right)$$

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{\Omega_{v0}^{-\frac{1}{2}}}{H_0} \ln \left(\frac{1 + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (69)$$

que es nuevamente la ecuación (40).

2.2.2. Edad del universo considerando la contribución de la densidad de energía de la radiación

En la ecuación (67), se vuelve a considerar que $\Omega_{T0} = 1$, con lo cual:

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z \frac{dz}{(1+z) \{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{v0}\}^{\frac{1}{2}}}$$

Se puede tomar el término $\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0}$ como factor común con lo cual t se convierte en:

$$t = -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z \frac{dz}{(1+z) (\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{\Omega_{r0}(1+z)^4}{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0}} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Sin embargo, como Ω_{r0} sigue siendo mucho menor que las otras dos densidades cosmológicas, se puede utilizar la aproximación a primer orden en serie de Taylor $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ [21]:

$$t \approx -\frac{1}{H_0} \int_{\infty}^z \frac{\left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\Omega_{r0}(1+z)^4}{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0}} \right\} dz}{(1+z) (\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}}$$

Esta expresión puede ser separada en dos integrales, una de las cuales nótese que es idéntica a (68), obtenida para el universo en donde sólo la energía de la materia y el vacío contribuyen. A esta integral se le llamará t_m , dado que no es necesario volver a calcularla y se calculará el término de corrección:

$$t \approx t_m + \frac{1}{2H_0} \int_{\infty}^z \frac{\frac{\Omega_{r0}(1+z)^4}{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0}} dz}{(1+z) (\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{1}{2}}}$$

$$t \approx t_m + \frac{1}{2H_0} \int_{\infty}^z \frac{\Omega_{r0}(1+z)^3 dz}{(\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{v0})^{\frac{3}{2}}}$$

que se puede escribir:

$$t \approx t_m + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0 \Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \int_{\infty}^z \frac{(1+z)^3 dz}{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} (1+z)^3 + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ahora se puede realizar el cambio de variable $v = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} (1+z)$, con su respectivo diferencial $dv = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}} dz$. Se ve claramente que cuando $z \rightarrow \infty$ entonces $v \rightarrow \infty$. Si se quiere la edad del universo en el momento actual, al considerar al parámetro de corrimiento hacia el rojo igual a cero se tiene que $v_0 = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}$:

$$t_0 \approx t_{m_0} + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0 \Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{v^3 dv}{(v^3 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Esta última integral se puede dividir en otras dos integrales resolubles sólo de manera numérica:

$$t_0 \approx t_{m_0} + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \left[\int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{1}{2}}} - \int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Reemplazando el valor de t_{m_0} , se encuentra el valor analítico de la edad del universo en el momento actual considerando la contribución de todas las densidades cosmológicas:

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{(\Omega_{v0} + \Omega_{m0})^{\frac{1}{2}} + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \left[\int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{1}{2}}} - \int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3+1)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (70)$$

Considerando que $\Omega_{m0} + \Omega_{v0} \approx 1$ y tomando el valor principal de $\Omega_{v0} = 0,685$ [3, 4] el valor de las integrales es, calculado con la ayuda de Wolfram Alpha:

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{(\Omega_{v0} + \Omega_{m0})^{\frac{1}{2}} + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} [-2,06993 + 0,264089]$$

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0\Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{(\Omega_{v0} + \Omega_{m0})^{\frac{1}{2}} + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{\Omega_{r0}}{2H_0\Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} [1,805841]$$

En la tabla (3) se muestran valores numéricos de algunas edades del universo variando el parámetro H_0 , y consecuentemente también Ω_{r0} , con $\Omega_{v0} = 0,685$ y $\Omega_{m0} = 0,315$ [22]. Nótese que la corrección es relevante ya en el tercer decimal... ¡La corrección es del orden de los millones de años!

Ω_{r0}	H_0 [Km/ (s Mpc)]	t_0 [Gyr]	Corr.[Gyr]	t_{m_0} [Gyr]
5.792×10^{-5}	65.3	14.24778	0.00389	14.25167
5.619×10^{-5}	66.3	14.03299	0.00372	14.03671
5.453×10^{-5}	67.3	13.82459	0.00355	13.82814
5.294×10^{-5}	68.3	13.62228	0.00340	13.62568
5.143×10^{-5}	69.3	13.42580	0.00325	13.42906

Cuadro 3: Valores de la edad del universo tanto para universo en donde existe contribución de la densidad cosmológica de radiación (t_0) como en el que no (t_{m_0}) para diversos valores de la constante de Hubble. Los valores experimentales han sido tomados de [4].

2.3. Cálculo del parámetro de corrimiento hacia el rojo en la época de transición

Como se mencionó, en un punto de la vida del universo ocurrió una transición en donde la dominación de la materia siguió al dominio de la radiación. Durante la transición, sin embargo, existió un momento en el cual la densidad de energía de materia fue igual a la densidad de energía de radiación, mientras que en comparación la densidad de energía del vacío era completamente despreciable. Al parámetro de corrimiento hacia el rojo evaluado en ese momento se le llamará z_{eq} , y ocurrió 380000 años después de la Gran Explosión [1, 2]. Se usa de nuevo la ecuación (67) con el límite de la integral igual a z_{eq} , y definiendo el parámetro $b = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}}$:

$$t_{eq} = \int_{\infty}^{z_{eq}} \frac{-dz}{H_0(1+z) \{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$t_{eq} = - \int_{\infty}^{z_{eq}} \frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} (1+z)^{\frac{5}{2}} \{1+b(1+z)\}^{\frac{1}{2}}} dz$$

Se usa el cambio de variable $u = 1 + z$, con lo cual $u_{eq} = 1 + z_{eq}$:

$$t_{eq} = - \frac{1}{H_0} \int_{\infty}^{u_{eq}-1} \frac{1}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} (u)^{\frac{5}{2}} \{1+bu\}^{\frac{1}{2}}} du$$

Esta integral tiene solución analítica, la cual es, en términos de z :

$$t_{eq} = - \frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \frac{2\sqrt{(1+z)b+1}(2b(1+z)-1)}{3(1+z)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\infty}^{z_{eq}}$$

Separando las fracciones y evaluando en los límites:

$$t_{eq} = - \frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{2\sqrt{(1+z_{eq})b+1}(2b(1+z_{eq}))}{3(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} - \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\sqrt{(1+z_{eq})b+1}}{3(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Lo que se quiere sin embargo es encontrar z_{eq} en función del tiempo de equilibrio. La última relación se puede escribir:

$$\frac{3}{2} H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} (1+z_{eq})^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{3} - t_{eq} \right] = [2b(1+z_{eq})-1] \left[\sqrt{(1+z_{eq})b+1} \right]$$

o

$$\frac{3}{2} H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \frac{4b^{\frac{3}{2}}}{3} - t_{eq} \right] = [2b(1+z_{eq})-1] \left[\sqrt{\frac{(1+z_{eq})b+1}{(1+z_{eq})^3}} \right]$$

Ω_{m0}	$t_{eq}[\text{yr}]$	$H_0[\text{Km}/(\text{s Mpc})]$	z_{eq}
0.315	380000	65.3	908.77534
0.315	380000	66.3	899.60412
0.315	380000	67.3	890.66059
0.315	380000	68.3	881.93584
0.315	380000	69.3	873.42142

Cuadro 4: Valores numéricos de z_{eq} para diversos H_0 y Ω_{m0} experimentales[3, 4].

Sin embargo, se debe analizar ahora el parámetro b . Ya que $b = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{m0}}$, y $\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{R^4}$, $\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{R^3}$ entonces $b = R \frac{\rho_r}{\rho_m}$. Ahora, recuérdese de (65) que $R = \frac{1}{1+z}$, con lo cual $b = \frac{1}{1+z} \frac{\rho_r}{\rho_m}$. La premisa es que se busca el corrimiento al rojo del momento en el que la densidad de materia y la de radiación son iguales, por lo que $b_{eq} = \frac{1}{1+z_{eq}}$. Reemplazando esto en el cálculo anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \frac{4}{3(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} - t_{eq} \right] &= \left[\sqrt{\frac{2}{(1+z_{eq})^3}} \right] \\
-\frac{3}{2} H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} t_{eq} &= \frac{\sqrt{2}}{(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{(1+z_{eq})^{\frac{3}{2}}} \\
-\frac{3}{2(\sqrt{2}-2)} (H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} t_{eq}) &= (1+z_{eq})^{-\frac{3}{2}} \\
z_{eq} &= \left[2,56066 \left(H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} t_{eq} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} - 1 \tag{71}
\end{aligned}$$

Y así se llega a una expresión analítica para z_{eq} . En la tabla (4) se encuentran valores del parámetro de corrimiento al rojo en el momento en que la densidad de la materia era igual al de la radiación para diversos H_0 .

3. Edad del universo para un universo no plano con $\lambda = 0$

Se habló ya de diversas soluciones a las ecuaciones de Friedmann, considerando a K mayor que cero, menor que cero o igual a cero. Sin embargo, para los modelos en donde la curvatura no es nula, se llegaba a una solución paramétrica para el tiempo y para el factor de escala del universo. Se procederá ahora a encontrar con distintos métodos una solución analítica para el tiempo de vida del universo en función del factor de escala, para el caso en el que se desprecia la constante cosmológica.

3.1. Universo Cerrado

Cuando la curvatura del espacio tiempo es mayor que cero, se está hablando de un universo cerrado, curvado de forma parecida a la superficie de una esfera [2]. Se vuelve a la ecuación de Friedmann en donde no existe contribución del vacío:

$$(\dot{R})^2 = \frac{8}{3}\pi \frac{G\rho_0}{c^2 R} - K \quad (72)$$

Nótese que de nuevo se considera a ρ_0 como la contribución de la densidad de materia en el momento actual [1, 2, 10]. Se llamará $a = \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_0}{c^2}$, y se utilizará el cambio de variable $\dot{R} = P$, con lo cual $dR = P dt$:

$$P^2 = \frac{a}{R} - K$$

$$R = \frac{a}{P^2 + K}$$

Diferenciando:

$$dR = -a(P^2 + K)^{-2} 2P dP$$

Pero reemplazado el valor de dR en función de P :

$$P dt = -a(P^2 + K)^{-2} 2P dP$$

$$dt = -\frac{2adP}{(P^2 + K)^2} \quad (73)$$

Se utilizará el cambio de variable $P = \sqrt{K} \sinh \theta$, con su respectivo diferencial $dP = \sqrt{K} \cosh \theta d\theta$. Esto implica que $\theta = \text{arc sinh} \left(\frac{P}{\sqrt{K}} \right)$ y que el diferencial de tiempo se convierte en:

$$dt = -\frac{2a\sqrt{K} \cosh \theta d\theta}{(K \sinh^2 \theta + K)^2}$$

$$dt = -2aK^{-\frac{3}{2}} \cosh^{-3} \theta d\theta$$

Ahora, para los límites de la integral se toma en cuenta que si $R \rightarrow 0$ entonces $P \rightarrow \infty$. La integral entonces tiene solución analítica y es [21]:

$$t = -2aK^{-\frac{3}{2}} \left[\arctan \left(\tanh \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \tanh \theta \operatorname{sech} \theta \right] \Big|_{\infty}^{\operatorname{arcsinh} \left(\frac{P}{\sqrt{K}} \right)}$$

Para el límite inferior, considérese que $\tanh(\infty) \rightarrow 1$, $\operatorname{sech}(\infty) \rightarrow 0$ y que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ [16]. Para el límite superior, considérese que el término $\tanh \theta \operatorname{sech} \theta$ se puede reescribir como $\frac{\sinh \theta}{\cosh^2 \theta} = \frac{\sinh \theta}{1 + \sinh^2 \theta}$, y ya que $\tanh \left(\frac{\operatorname{arcsinh} \theta}{2} \right) = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + 1} + 1}$ [21], se tiene:

$$t = -2aK^{-\frac{3}{2}} \left[\arctan \left(\frac{\frac{P}{\sqrt{K}}}{\sqrt{\frac{P^2}{K} + 1} + 1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\frac{P}{\sqrt{K}}}{1 + \frac{P^2}{K}} - \frac{\pi}{4} \right]$$

Pero recordando que $P^2 = \frac{a}{R} - K$, se puede regresar al factor de escala con $P = \sqrt{\frac{a}{R} - K}$:

$$t = -2aK^{-\frac{3}{2}} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{RK} - 1}}{\sqrt{\frac{a}{RK} + 1}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{a}{RK} - 1}}{\frac{a}{RK}} - \frac{\pi}{4} \right] \quad (74)$$

Para obtener valores numéricos, se debe recordar que como se están despreciando las contribuciones de la densidad y del vacío entonces $K = H_0^2(\Omega_{m0} - 1)$. En el momento actual además, $R(t_0) = R_0 = 1$, y se puede escribir a a como $a = \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_{m0}}{c^2} = \Omega_{m0} H_0^2$, con lo cual:

$$t_0 = -\frac{2\Omega_{m0} H_0^2}{H_0^3(\Omega_{m0} - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} - 1}}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} + 1}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} - 1} \frac{\Omega_{m0} - 1}{\Omega_{m0}} - \frac{\pi}{4} \right]$$

Entonces, para un rango de H_0 entre 65.3 y 69.3, y tomando por ejemplo $\Omega_{m0} = 2$ (pues consideramos universo dominado por materia y a $K > 1$), se tiene que la edad del universo estará en un rango de: $8,06034 < t_0 < 8,554077$ [Gyr].

Es posible sin embargo encontrar la expresión analítica de la edad del universo de una forma más elegante, volviendo a la ecuación (72) y multiplicándola toda por R :

$$(\dot{R})^2 R = \frac{8}{3}\pi \frac{G\rho_{m0}}{c^2} - KR \quad (75)$$

Se va a llamar de nuevo a $\frac{8}{3}\pi \frac{G\rho_{m0}}{c^2} = a$, y se usará el cambio de variable $\mu = \frac{R}{a}$, con lo cual la ecuación previa se transforma en:

$$\begin{aligned}
\mu(\dot{\mu})^2 a^2 &= 1 - K\mu \\
\dot{\mu} &= \sqrt{\frac{(1 - K\mu)}{\mu} \frac{1}{a}} \\
dt &= a \sqrt{\frac{\mu}{1 - K\mu}} d\mu \\
t &= a \int_0^{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{1 - K\mu}} d\mu \tag{76}
\end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $K\mu = \sin^2 \theta$ la integral indefinida es:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2}{K^{\frac{3}{2}}} \tan \theta \sin \theta \cos \theta d\theta = \int \frac{2}{K^{\frac{3}{2}}} \sin^2 \theta d\theta \\
I &= \frac{2}{K^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]
\end{aligned}$$

Devolviendo la variable entonces:

$$t = \frac{a}{K^{\frac{3}{2}}} \left(\arcsin(\sqrt{K\mu}) - \sqrt{K\mu} \sqrt{1 - K\mu} \right)$$

Y recordando que $\mu = \frac{R}{a} = \frac{3c^2}{8\pi G \rho_m R^2}$ al reemplazar ρ_{m0} en función de ρ_m . Sin embargo, se sabe que $\rho_c = \frac{3H^2 c^2}{8\pi G}$ por lo que $\mu = \frac{1}{\Omega_m R^2 H^2}$. Finalmente, se utiliza que $\Omega_m - 1 = \frac{K}{H^2 R^2}$ para concluir que $\mu = \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m K}$. Reemplazando este valor en el tiempo para encontrar la edad del universo:

$$t_0 = \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho_{m0}}{c^2 K^{\frac{3}{2}}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0} - 1}{\Omega_{m0}}} \right) - \sqrt{\frac{\Omega_{m0} - 1}{\Omega_{m0}}} \sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_{m0} - 1}{\Omega_{m0}} \right)} \right]$$

Se utiliza la definición de ρ_{m0} en función de Ω_{m0} para obtener:

$$t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{H_0 [\Omega_{m0} - 1]^{\frac{3}{2}}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0} - 1}{\Omega_{m0}}} \right) - \frac{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}}{\Omega_{m0}} \right] \tag{77}$$

Utilizando el mismo rango de H_0 que para el método anterior, se obtiene que la edad del universo va como $8,06034 < t_0 < 8,554077$ [Gyr], idénticamente a la otra solución.

3.2. Universo abierto

Cuando la curvatura del universo es menor que cero, se dice que el universo es abierto y tiene forma de silla de montar [2, 9, 10]. Ahora, nótese que tanto en (75) como en (76) no se hizo ninguna asunción con respecto al signo de K . Por lo tanto, se puede partir de(76) utilizando el módulo de K :

$$t = a \int_0^\mu \sqrt{\frac{\mu}{1 - K\mu}} d\mu = a \int_0^\mu \sqrt{\frac{\mu}{1 + |K|\mu}} d\mu$$

Se utilizará el cambio de variable $|K|\mu = \sinh^2 \theta$, con su diferencial $d\mu = \frac{2}{|K|} \sinh \theta \cosh \theta d\theta$. Analizando solamente la integral indefinida (a la cual se llamará I_2):

$$I_2 = \int \sqrt{\frac{\frac{1}{|K|} \sinh^2 \theta}{1 + \sinh^2 \theta}} \frac{2}{|K|} \sinh \theta \cosh \theta d\theta$$

$$I_2 = \frac{2}{|K|^{\frac{3}{2}}} \int \sinh^2 \theta d\theta$$

Siendo esta integral fácilmente realizable usando identidades trigonométricas hiperbólicas. La solución entonces es[21]:

$$I_2 = \frac{2}{|K|^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sinh(2\theta)}{4} - \frac{\theta}{2} \right]$$

Volviendo a la integral definida entonces y devolviendo la variable:

$$t = \frac{a}{|K|^{\frac{3}{2}}} \left[\sqrt{|K|\mu} \sqrt{|K|\mu + 1} - \operatorname{arc} \sinh \left(\sqrt{|K|\mu} \right) \right]$$

Utilizando de nuevo que $\mu = \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m K} = \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m |K|}$, cuyo valor sigue siendo positivo ya que ahora Ω_{m0} debe ser menor que uno para cumplir la condición en la que $K < 0$. Sustituyendo los valores de μ y de a en función de Ω_m , la edad del universo con curvatura negativa es:

$$t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{H_0(1 - \Omega_{m0})^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega_{m0}}}{\Omega_{m0}} - \operatorname{arc} \sinh \left(\sqrt{\frac{1 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}} \right) \right] \quad (78)$$

Tomando por ejemplo $\Omega_{m0} = 0,2$, con H_0 entre 65.3 y 69.3 [Km/(s MPc)], la edad de universo abierto entra en el rango de 11.95349 [Gyr] $< t_0 < 12.68571$ [Gyr].

Si se quiere partir de la ecuación de Friedmann original con el cambio de variable $\dot{R} = P$ como en la ecuación (73), basta considerar de nuevo a la curvatura en función de su módulo:

$$dt = -\frac{2adP}{(P^2 - |K|)^2} \quad (79)$$

Y se realiza el cambio de variable $P = \sqrt{|K|} \sec \theta$ con su diferencial $dP = \sqrt{|K|} \tan \theta \sec \theta d\theta$:

$$dt = -\frac{2a\sqrt{|K|} \tan \theta \sec \theta d\theta}{(|K| \sec^2 \theta - |K|)^2}$$

$$dt = -\frac{2a \sec \theta d\theta}{|K|^{\frac{3}{2}} \tan^3 \theta}$$

Considérese ahora que cuando R tiende a cero, P tiende a infinito y por ende θ tiende a $\frac{\pi}{2}$. La integral entonces será:

$$t = -\frac{2a}{|K|^{\frac{3}{2}}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{arc sec}\left(\frac{P}{\sqrt{|K|}}\right)} \frac{\sec \theta d\theta}{\tan^3 \theta}$$

La integral analítica es[21]:

$$t = -\frac{1}{4}a|K|^{\frac{-3}{2}} \left[\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 4 \ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 4 \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\text{arc sec}\left(\frac{P}{\sqrt{|K|}}\right)}$$

Se utilizan identidades trigonométricas para que la expresión sea amigable[21]:

$$t = -\frac{a}{4|K|^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{2\frac{P}{\sqrt{|K|}}}{\frac{P}{\sqrt{|K|}} + 1} - \frac{2\frac{P}{\sqrt{|K|}}}{\frac{P}{\sqrt{|K|}} - 1} - 4 \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{P}{\sqrt{|K|}} - 1}}{\sqrt{2\frac{P}{\sqrt{|K|}}}}\right) + 4 \ln\left(\frac{\sqrt{-\frac{P}{\sqrt{|K|}} - 1}}{\sqrt{-2\frac{P}{\sqrt{|K|}}}}\right) \right]$$

Pero se debe recordar que $P^2 = \frac{a}{R} + |K|$. Usando esto y la propiedad del logaritmo natural $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$:

$$t = -\frac{a}{2|K|^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{\frac{a}{R|K|} + 1}}{\sqrt{\frac{a}{R|K|} + 1} + 1} - \frac{\sqrt{\frac{a}{R|K|} + 1}}{\sqrt{\frac{a}{R|K|} + 1} - 1} + \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{R|K|} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{a}{R|K|} + 1} - 1}\right) \right] \quad (80)$$

Para saber el valor de la edad del universo en el momento actual, se devuelve el valor de ρ_{m0} en función de Ω_{m0} y se considera que $|K| = H_0^2 (1 - \Omega_{m0})$:

$$t_0 = -\frac{\Omega_{m0}}{2H_0(1 - \Omega_{m0})^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \Omega_{m0}}} - \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \Omega_{m0}}} + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_{m0}}}{1 - \sqrt{1 - \Omega_{m0}}}\right) \right] \quad (81)$$

De nuevo, tomando Ω_{m0} como 0.2 y a H_0 entre 65.3 y 69.3, la edad del universo abierto estará entre 11.95349[Gyr] y 12.68571 [Gyr]. Las ecuaciones (74) y (81) coinciden con las expresiones obtenidas por Kolb y Turner en la referencia [23].

4. Dependencia de la densidad de materia-energía con respecto a la del vacío

Se ha visto ya cómo ha habido épocas en donde diferentes tipos de energía han dominado en el universo, causando diversos efectos. Sin embargo, siempre se ha considerado a la densidad de energía del vacío (la contribución de la constante cosmológica) como constante temporalmente. Aunque pruebas cercanas apuntan a que realmente la constante cosmológica es... constante, es interesante especular sobre cómo una variación temporal en el futuro afectaría a la densidad de materia-energía y a la densidad de energía de la radiación.

Se comenzará por escribir a todas las densidades cosmológicas de la forma $\Omega_i = \Omega_i(t)$, donde i puede ser m , r o v :

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c} = \frac{8\pi G \rho_i(t)}{3H^2(t)c^2} \quad (82)$$

Se puede analizar el cambio temporal al derivar con respecto del mismo esta cantidad:

$$\dot{\Omega}_i = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \left[\dot{\rho}_i - 2\rho_i \left(\frac{\dot{H}}{H} \right) \right] \quad (83)$$

Y recordando la ecuación (52), y la condición $P = \omega\rho$, se tiene que:

$$\dot{\rho}_i + \frac{3\dot{R}}{R} \rho_i (1 + \omega_i) = 0$$

Pero se sabe que $\frac{\dot{R}}{R} = H$ [2, 5, 9], por lo que:

$$\dot{\rho}_i + 3H\rho_i (1 + \omega_i) = 0$$

$$\dot{\rho}_i = -3H\rho_i (1 + \omega_i) \quad (84)$$

Y así se puede utilizar este valor de $\dot{\rho}_i$ en la ecuación (83):

$$\dot{\Omega}_i = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \left[-3H\rho_i(1 + \omega_i) - 2\rho_i \left(\frac{\dot{H}}{H} \right) \right]$$

Por (82), la ecuación diferencial se transforma en:

$$\dot{\Omega}_i = -\Omega_i H \left[3(1 + \omega_i) + 2 \left(\frac{\dot{H}}{H^2} \right) \right] \quad (85)$$

Se quiere obtener una expresión más familiar para \dot{H} . Si se deriva con respecto al tiempo al parámetro de Hubble, se tiene que $\dot{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) = \frac{\ddot{R}R - (\dot{R})^2}{R^2}$. En esta expresión se podría utilizar de nuevo la expresión de H en función de

R y \dot{R} para que $\dot{H} = \frac{\ddot{R}}{R} - H^2$. Finalmente, si a esta expresión se le divide toda para el parámetro de Hubble al cuadrado se obtiene:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\ddot{R}}{RH^2} - 1 = \frac{R\ddot{R}}{(\dot{R})^2} - 1 \quad (86)$$

Pero nótese que justamente el parámetro de aceleración se define como $q = -\frac{R\ddot{R}}{(\dot{R})^2}$ [2, 5, 9, 10, 11]. Reemplazando este valor en (86):

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(q + 1) \quad (87)$$

Combinando las ecuaciones (87) y (85) se llega al resultado:

$$\dot{\Omega}_i = -\Omega_i H [3(1 + \omega_i) - 2(q + 1)]$$

Se había obtenido en secciones anteriores una relación entre el parámetro de aceleración y las densidades cosmológicas. Específicamente, dicha relación se encuentra en la ecuación (61) con un ω para el vacío dentro de un rango encontrado experimentalmente. En este momento interesa el valor principal, el cual es $\omega = -1$. Con este ω , $q = \frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - \Omega_v$ y $\dot{\Omega}_i$ es:

$$\dot{\Omega}_i = -\Omega_i H \left[3 + 3\omega_i - 2 - 2 \left(\frac{\Omega_m}{2} + \Omega_r - \Omega_v \right) \right]$$

$$\dot{\Omega}_i = \Omega_i H [-1 + \Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_v - 3\omega_i] \quad (88)$$

Con lo cual, la única diferencia para cada uno de los tipos de densidades cosmológicas sería ω_i . Para materia, $\omega_m = 0$ como se demostró en la sección previa 2. En esta misma sección se mostró también que $\omega_r = \frac{1}{3}$ y se mencionó el valor experimental de $\omega_v = \omega = -1 \pm 0,06$. Las ecuaciones diferenciales para cada densidad cosmológica serán:

$$\dot{\Omega}_m = \Omega_m H [(\Omega_m - 1) + 2(\Omega_r - \Omega_v)] \quad (89)$$

$$\dot{\Omega}_r = \Omega_r H [\Omega_m + 2(\Omega_r - 1) - 2\Omega_v] \quad (90)$$

$$\dot{\Omega}_v = \Omega_v H [\Omega_m + 2\Omega_r - 2(\Omega_v - 1)] \quad (91)$$

Estas son las ecuaciones que dictan la evolución de parámetros de densidad con respecto del tiempo. Sin embargo, lo que se busca es la dependencia de un parámetro de densidad con respecto al otro, así que se puede dividir a $\dot{\Omega}_m$ para $\dot{\Omega}_v$ para obtener:

$$\frac{d\Omega_m}{d\Omega_v} = \frac{\Omega_m [(\Omega_m - 1) + 2(\Omega_r - \Omega_v)]}{\Omega_v [\Omega_m + 2\Omega_r - 2(\Omega_v - 1)]} \quad (92)$$

Nótese que además se eliminó la constante de Hubble de la ecuación diferencial que muestra la variación del parámetro de densidad de materia-energía versus el de la densidad de energía del vacío. Ya que Ω_r es mucho menor que las otras densidades, puede ser en este caso despreciado y se termina con:

$$\frac{d\Omega_m}{d\Omega_v} = \frac{\Omega_m [(\Omega_m - 1) - 2\Omega_v]}{\Omega_v [\Omega_m - 2(\Omega_v - 1)]} \quad (93)$$

La ecuación (93) no tiene solución analítica, por lo que se utilizaron métodos numéricos para analizarla gráficamente así como a su inversa:

$$\frac{d\Omega_v}{d\Omega_m} = \frac{\Omega_v [\Omega_m - 2(\Omega_v - 1)]}{\Omega_m [(\Omega_m - 1) - 2\Omega_v]} \quad (94)$$

En este punto hay que recordar el método de Euler para resolver una cierta ecuación diferencial $y' = f(y, x)$: una linealización de una solución incógnita $y(x)$ alrededor de una vecindad $x = x_0$ [24]. La gráfica de esta linealización será una recta tangente a la solución $y = y(x)$, en un cierto punto (y_0, x_0) . Se utiliza entonces la linealización en un nuevo punto consecutivo $x_1 = x_0 + h$, y así sucesivamente. La precisión de esta aproximación dependerá mucho del tamaño del paso h , pues este método consiste en utilizar tantas pequeñas tangentes como se pueda para aproximar una curva solución [24]. Se utilizó pues este método para encontrar soluciones para Ω_m variando manualmente Ω_v , y utilizando la ecuación (93). Así también, utilizando la ecuación (94), y variando Ω_m para encontrar valores de Ω_v , se realizaron curvas utilizando el método de Euler.

Las soluciones dependen muchísimo de las condiciones iniciales dadas a la ecuación diferencial, por lo que en el caso de (93) para cada condición inicial de Ω_m se dan 9 condiciones iniciales para Ω_v . Se pueden analizar las diversas curvas encontradas en las figuras (5), (6), (7), (8), (9), (10) donde se utiliza un color para cada solución con diferente condición inicial Ω_v . Hay varias semejanzas entre las diversas familias de soluciones: en primer lugar es interesante observar que aumentar Ω_v (en los gráficos Ω_λ) implica necesariamente que el valor de Ω_m disminuye. Además, nótese que en la figura (5) todas las soluciones mostradas convergen a $\Omega_m = 0$ y $\Omega_v = 1$, mientras que con una condición inicial de la densidad cosmológica de materia mayor a 0.1 (figura (6) hasta (10)) las soluciones superiores alcanzan $\Omega_v = 1$ antes de que Ω_m llegue a cero. De hecho, si se le obliga a Ω_v a tomar un valor superior a uno, las soluciones comienzan a oscilar violentamente. Esto se puede explicar analizando el denominador de la ecuación (93). Se debe notar que la derivada de la densidad cosmológica de materia con respecto a la del vacío diverge cuando $\Omega_m - 2(\Omega_v - 1) = 0$, lo cual implica que siempre que $\Omega_v - \frac{\Omega_m}{2} = 1$, la ecuación (93) tenderá al infinito. Si el valor de Ω_v es menor que uno, dicha condición no se podrá cumplir pues Ω_m tendrá que ser negativo, lo cual no tendría sentido físicamente: no existirá singularidad. Si por el contrario Ω_v supera a uno, sí va a ser posible que Ω_m tome valores tales que exista una singularidad en la derivada. Esto prohibirá un desarrollo estable de la dependencia de Ω_m con respecto de Ω_v , impidiendo físicamente el equilibrio.

Finalmente, la curvatura de las soluciones cambia cuando la condición inicial de Ω_m u Ω_v aumenta. Si la curva es convexa, ésta implica una especie de “aceleración”; cuando una de las variables cambia más allá de un cierto valor, la otra variable tendrá un cambio cuantitativamente mayor. Si por el contrario la curva es cóncava, el cambio será cada vez menos brusco mientras las variables evolucionen la una con respecto a la otra. A partir de la figura (5) la curvatura de las soluciones con un mismo Ω_m inicial cambia de convexa hacia cóncava cuando Ω_v aumenta. Mientras aumenta el valor de la condición inicial de la densidad cosmológica de materia, cada vez hay más soluciones con curvatura cóncava en vez de convexa, hasta que en la figura (10) la curvatura de todas las soluciones es cóncava. Se puede entonces concluir que mientras mayor sea la diferencia entre el valor de la condición inicial de Ω_v y de Ω_m al valor de la condición límite de Ω_v , las variables van a intentar llegar a dicha condición límite cuantitativamente de una manera más abrupta. Si por el contrario, existe una diferencia pequeña entre estos valores, el cambio hacia dicha condición ocurrirá más suavemente.

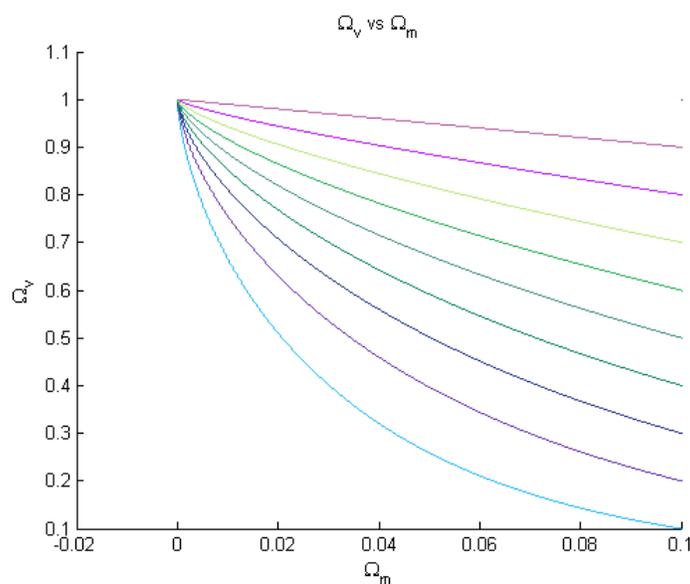


Figura 5: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.1, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.1 (solución inferior en celeste) hasta 0.9 (solución superior en morado).

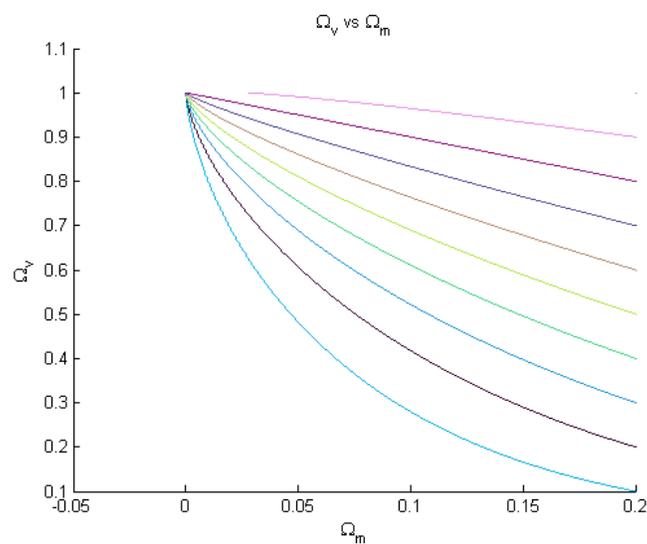


Figura 6: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.2, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.1 (solución inferior en celeste) hasta 0.9 (solución superior en rosado).

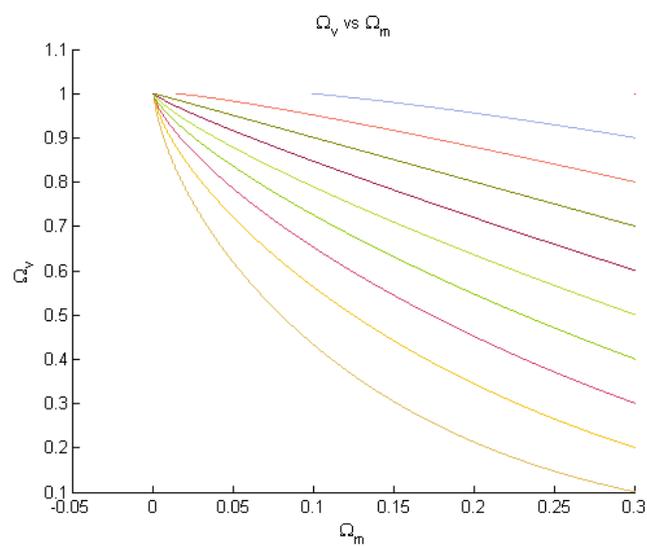


Figura 7: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.3, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.1 (solución inferior en amarillo) hasta 0.9 (solución superior en azul).

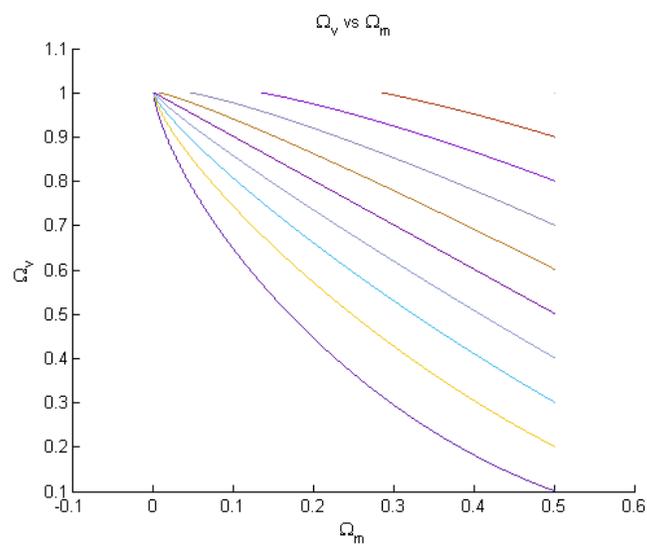


Figura 8: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.5, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.1 (solución inferior en azul) hasta 0.9 (solución superior marrón).

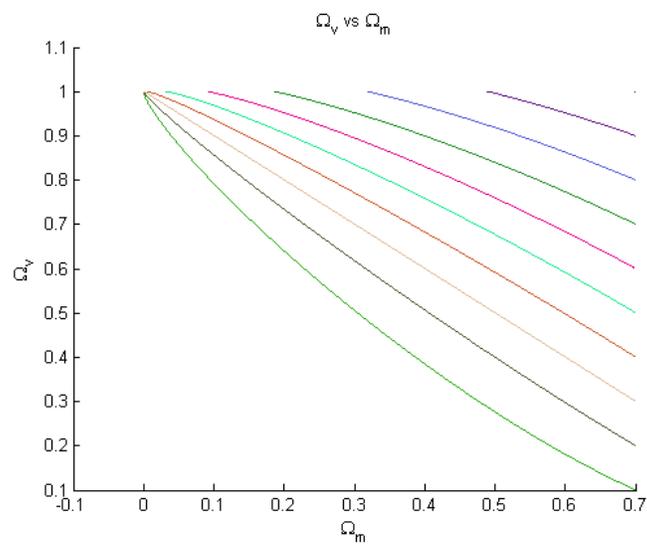


Figura 9: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.7, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.1 (solución inferior en verde) hasta 0.9 (solución superior en negro).

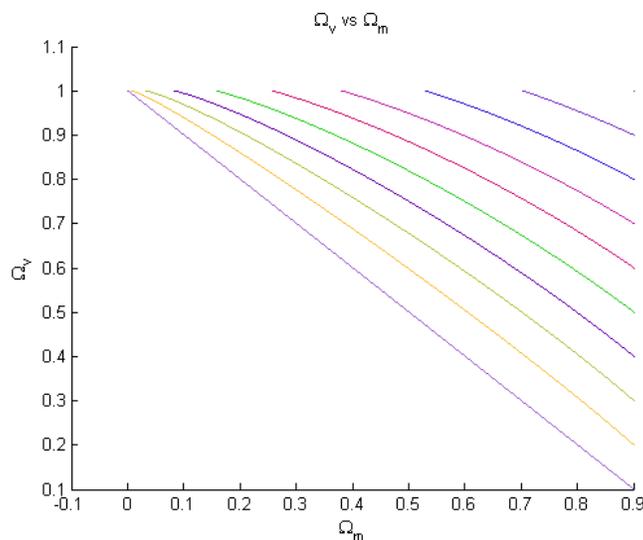


Figura 10: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.9, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.1 (solución inferior en lila) hasta 0.9 (solución superior en morado).

Considérense ahora las soluciones para la ecuación diferencial (94) en donde se encontrarán valores de Ω_v al dar valores numéricos de Ω_m (ver figuras (11), (12), (13), (14)). Se puede ver que una vez más se comprometerá la estabilidad de las soluciones una vez que Ω_m tome valores superiores a uno. Esto se debe a que (94) diverge si $\Omega_m - 1 - 2\Omega_v = 0$, pues implica que siempre que $\Omega_v = \frac{\Omega_m - 1}{2}$, (94) tenderá al infinito. Sin embargo, si Ω_m es menor que uno Ω_v tendría que ser negativo, algo que su definición prohíbe. Si Ω_m es mayor que uno, Ω_v sí podría tomar un valor que causaría que el denominador de (94) fuese cero, por lo que de nuevo la solución oscilaría violentamente.

Una diferencia fundamental entre las soluciones de la primera ecuación diferencial (93) y las de la segunda ec. diferencial (94), es cómo la variable dependiente cambia cuando la independiente tiende a uno. El cambio de las soluciones inferiores de Ω_v vs. Ω_m es mucho más suave que el cambio en las soluciones análogas en Ω_m vs Ω_v . Ya que estas soluciones no son temporales, hay que notar que no importa cómo la variable independiente varíe en el tiempo, de lo que se está hablando es de cambios en valores distintos para un tiempo fijo.

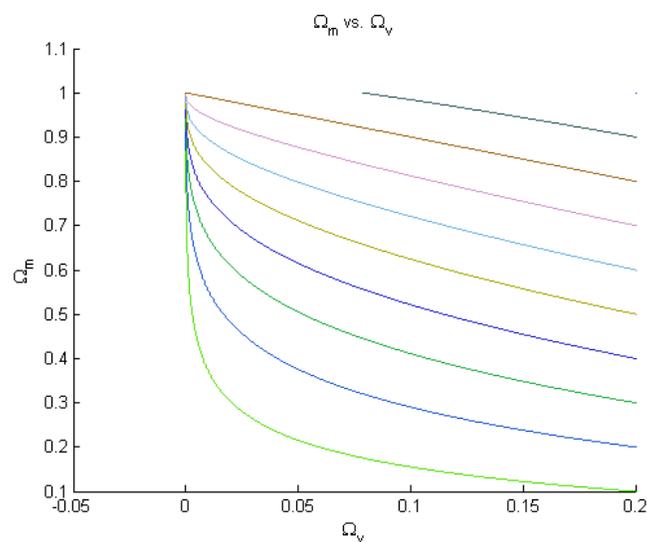


Figura 11: Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m . La condición inicial para Ω_v es 0.2, mientras que las condiciones iniciales para Ω_m van desde 0.1 (solución inferior en verde) hasta 0.9 (solución superior en negro).

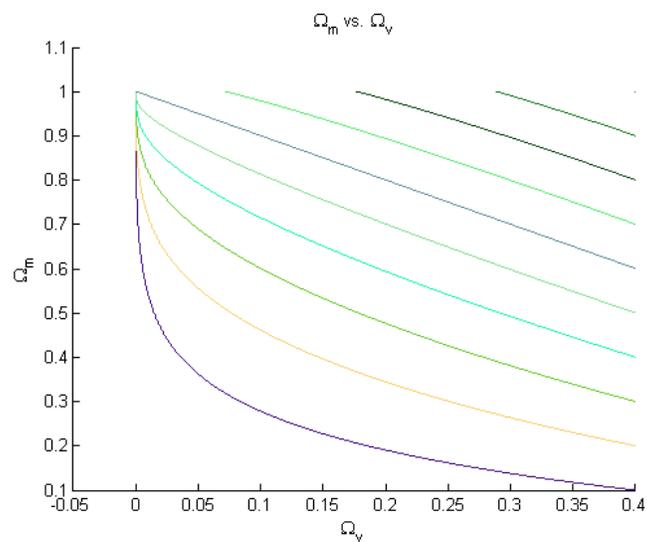


Figura 12: Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m . La condición inicial para Ω_v es 0.4, mientras que las condiciones iniciales para Ω_m van desde 0.1 (solución inferior en morado) hasta 0.9 (solución superior en verde oscuro).

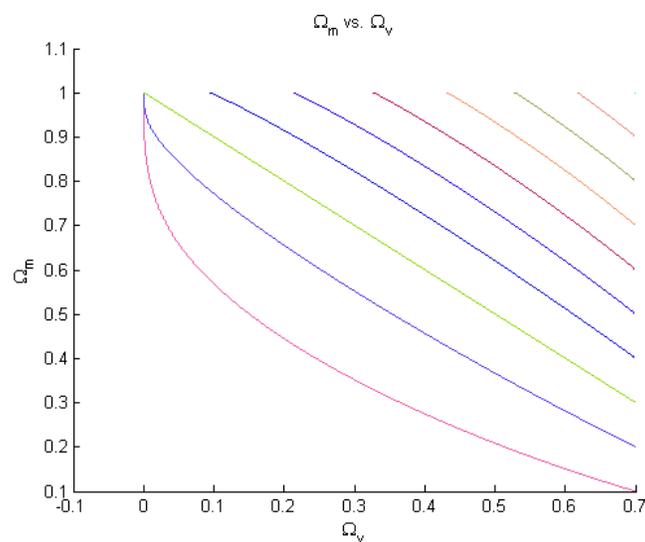


Figura 13: Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m . La condición inicial para Ω_v es 0.7, mientras que las condiciones iniciales para Ω_m van desde 0.1 (solución inferior en rosado) hasta 0.9 (solución superior en tomate).

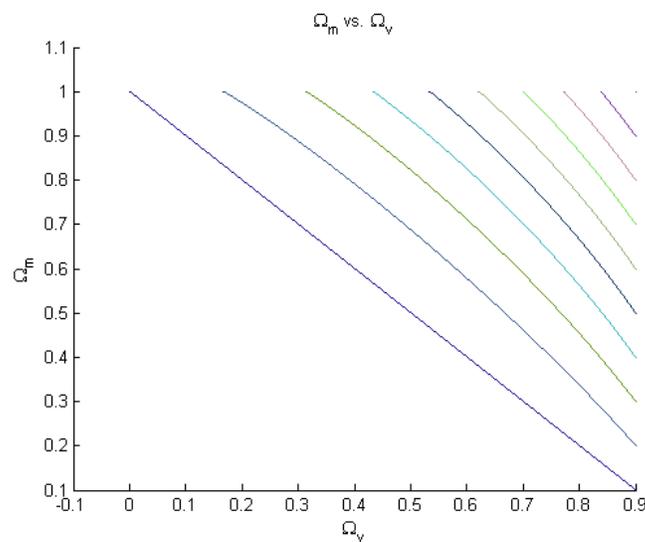


Figura 14: Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m . La condición inicial para Ω_v es 0.9, mientras que las condiciones iniciales para Ω_m van desde 0.1 (solución inferior en azul) hasta 0.9 (solución superior en morado).

En todas las soluciones, tanto si se encuentra Ω_m con la ecuación diferencial (93) como si se halla Ω_v con (94), se tiene que sus valores no podrán superar a uno. Esto es crucial si se recuerda la definición de la densidad de energía crítica del universo, dada en la sección 1.3. Ya que se dijo que $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$, si su valor es menor que uno se tiene que siempre $\rho_i < \rho_c$. Esto quiere decir que aunque las densidades cosmológicas variaran la una con respecto a la otra, el universo siempre se expandiría y no existiría colapso.

Lo que en realidad interesa son las restricciones dentro de un rango de condiciones iniciales probables, es decir tomando a Ω_m entre 0.3 y 0.5 y a Ω_v entre 0.6 y 0.8. Las soluciones con estas condiciones iniciales para la ecuación diferencial (93) se encuentran en las figuras (15), (16), (17), mientras que las soluciones para la ecuación diferencial inversa están ilustradas en las figuras (18), (19), (20).

Para Ω_v entonces, la variación máxima va a ser entre 1 y 0 al tomar las condiciones iniciales menores posibles ($\Omega_v = 0,6$ y $\Omega_m = 0,3$). La variación mínima, encontrada con $\Omega_v = 0,8$ y $\Omega_m = 0,5$, estará entre 0.3674 y 1, tomado de los valores numéricos de la solución con dichas condiciones iniciales en la figura (20).

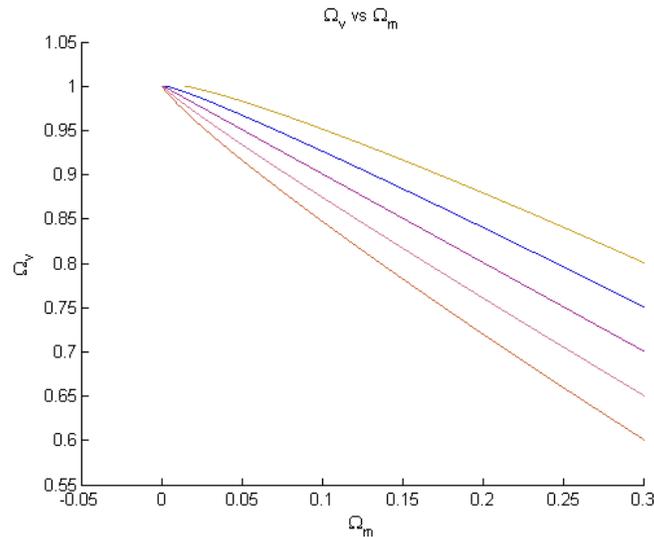


Figura 15: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.3, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.6 (solución inferior en anaranjado) hasta 0.8 (solución superior en amarillo) con separación de 0.05.

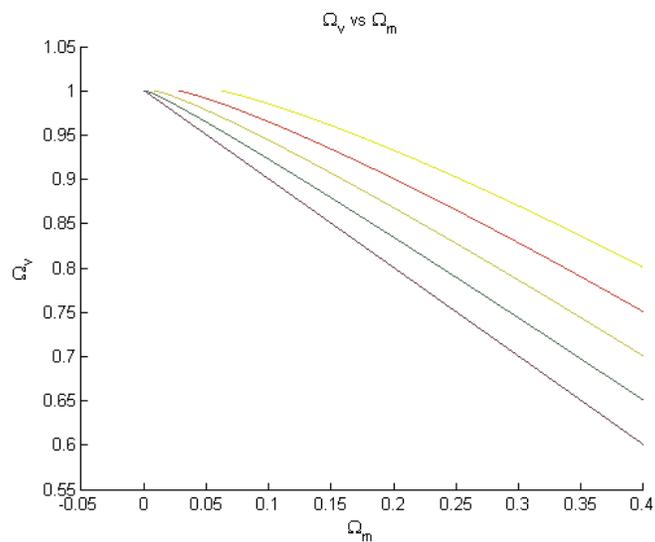


Figura 16: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.4, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.6 (solución inferior en azul) hasta 0.8 (solución superior en verde) con separación de 0.05.

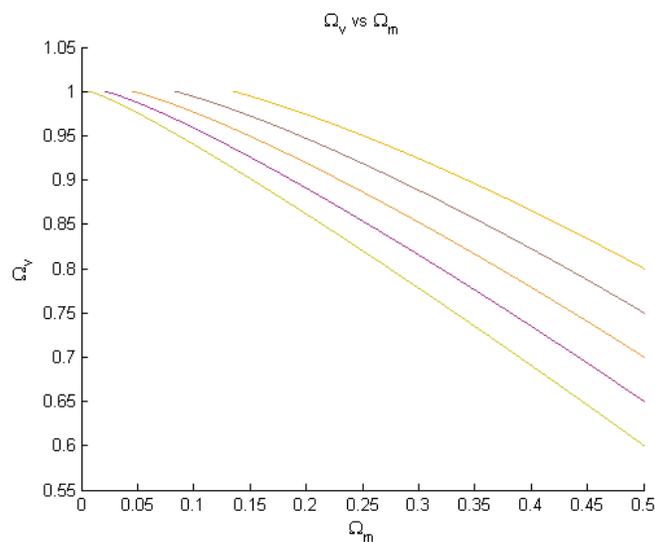


Figura 17: Familia de soluciones para Ω_m controlando a Ω_v . La condición inicial para Ω_m es 0.5, mientras que las condiciones iniciales para Ω_v van desde 0.6 (solución inferior en amarillo) hasta 0.8 (solución superior en anaranjado).

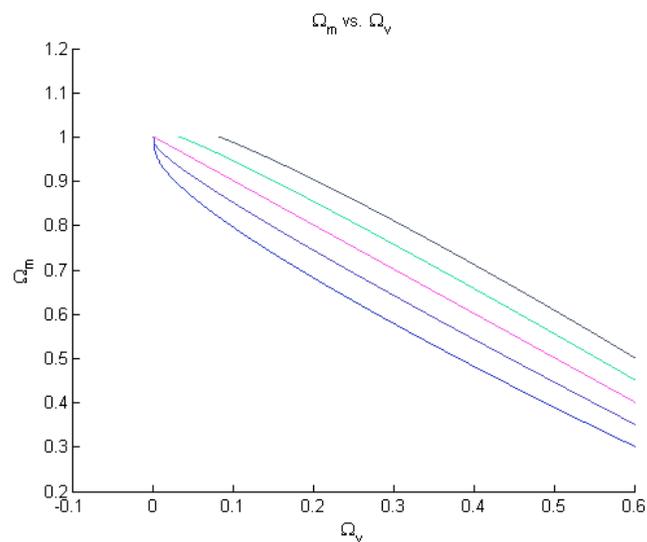


Figura 18: Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m . La condición inicial para Ω_v es 0.6, mientras que las condiciones iniciales para Ω_m van desde 0.3 (solución inferior en azul) hasta 0.5 (solución superior en negro) con separación de 0.05.

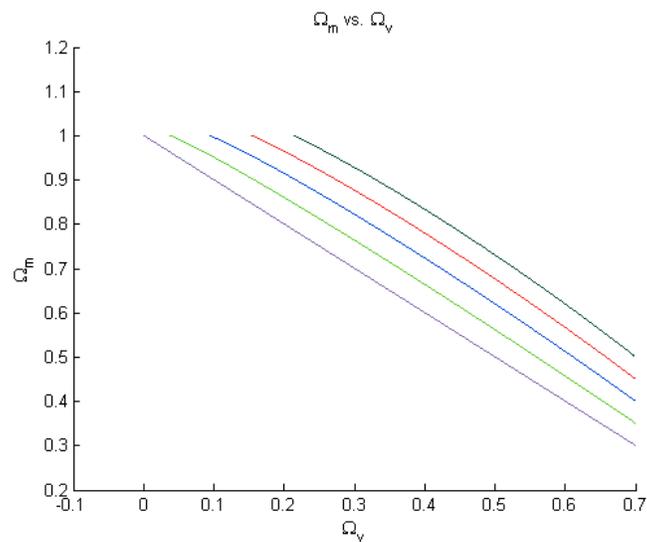


Figura 19: Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m . La condición inicial para Ω_v es 0.7, mientras que las condiciones iniciales para Ω_m van desde 0.3 (solución inferior en morado) hasta 0.5 (solución superior en negro) con separación de 0.05.

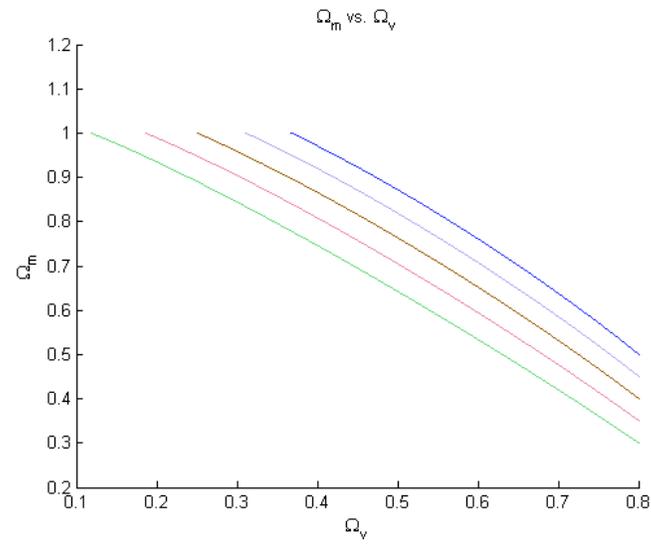


Figura 20: Familia de soluciones para Ω_v controlando a Ω_m . La condición inicial para Ω_v es 0.8, mientras que las condiciones iniciales para Ω_m van desde 0.3 (solución inferior en verde) hasta 0.5 (solución superior en azul).

5. Variación temporal de λ en las ecuaciones de Friedmann

En el momento actual existe amplia evidencia experimental de que λ es constante [2, 3, 4, 9, 10, 15]. Sin embargo, ya que se han postulado las condiciones de variación para Ω_v , se podría especular sobre cómo se modificarían las soluciones de las ecuaciones de Friedmann en el caso de que en un futuro λ sufriese una perturbación temporal. Nótese que para tiempos grandes y usando el modelo de Lemaître, el término que acompaña a la densidad cosmológica de materia tiende a cero, pues R tiende a ser exponencial como en el modelo de Sitter [2, 5, 9]. En ese caso, la primera ecuación de Friedmann se convertiría en:

$$(\dot{R})^2 = \frac{\lambda c^2}{3} R^2$$

Habiendo despreciado al término de la densidad cosmológica de radiación por ser despreciable en comparación con λ . Ahora, se escribirá a la perturbación de la constante cosmológica como $\lambda f(t)$, con $f(t)$ una función temporal pequeña en comparación a λ . Nótese que $f(t)$ debe ser adimensional para mantener la dimensionalidad. La primera ecuación de Friedmann sería:

$$(\dot{R})^2 = \frac{\lambda c^2}{3} R^2 + \frac{\lambda f(t) c^2}{3} R^2 \quad (95)$$

Sacando la raíz a ambos lados y separando variables se encuentra que:

$$\frac{dR}{R} = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} c \sqrt{1 + f(t)} dt$$

Se quiere encontrar la solución para un tiempo en el futuro lejano, pero se quiere que dicho tiempo sea para un momento específico y con un valor conocido. Se utilizará entonces el triple del valor del tiempo en el que sucede el punto de inflexión de la figura (3). Se debe entonces integrar con los límites:

$$\int_{R(3t_m)}^R \frac{dR}{R} = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} c \int_{3t_m}^t \sqrt{1 + f(t)} dt$$

$$\ln \left(\frac{R}{R(3t_m)} \right) = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} c \int_{3t_m}^t \sqrt{1 + f(t)} dt$$

Así aplicando la función exponencial a ambos lados de la igualdad:

$$R = R(3t_m) e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}} c \int_{3t_m}^t \sqrt{1 + f(t)} dt} \quad (96)$$

Siendo t_m el valor temporal calculado en (43), con $3t_m = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{v0}}} \ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)$ y $R(3t_m) = \left(\frac{1-\Omega_{v0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2} \ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)\right)$. Si $f(t) \ll 1$, se puede aproximar la raíz dentro de la integral como:

$$R = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c \int_{3t_m}^t (1+\frac{1}{2}f(t))dt} \quad (97)$$

Se considerarán ahora diferentes funciones temporales que cumplen la condición arriba especificada. Se comenzará con $f_1(t) \propto \frac{1}{t}$ y $f_2(t) \propto -\frac{1}{t}$.

- **Solución perturbada con $f_1(t) = \frac{1}{100H_0t}$:**

$$R = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c(t-3t_m + \frac{1}{200H_0} \ln\left(\frac{t}{3t_m}\right))}$$

$$R_1 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c(t-3t_m)} \left(\frac{t}{3t_m}\right)^{\frac{1}{200H_0} \sqrt{\frac{\lambda}{3}}c} \quad (98)$$

- **Solución perturbada con $f_2(t) = -\frac{1}{100H_0t}$:**

$$R_2 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c(t-3t_m)} \left(\frac{3t_m}{t}\right)^{\frac{1}{200H_0} \sqrt{\frac{\lambda}{3}}c} \quad (99)$$

Utilizando $\Omega_{v0} = 0,685$ y $H_0 = 67,3[\text{Km}/(\text{sMpc})]$, se tiene que $3t_m = 23,1375[\text{Gyr}]$ y $R(3t_m) = 1,7913$. λ en el momento actual puede ser encontrado mediante (29), y su valor es: $\lambda = 1,0859 \times 10^{-52} [\text{m}^{-2}]$. Sin embargo, para poder comparar cómodamente con la solución del modelo de Lemaître, se va a intentar escribir todo en función de H_0t . Para conseguir esto, basta en las exponenciales multiplicar y dividir el argumento por H_0 , y así no se modifica la solución. Se puede ver el resultado de la perturbación f_1 sobre el factor de escala del universo (ec. (98)) en la figura(21), en donde se muestra cómo difiere R_1 con respecto al factor de escala en el modelo de Lemaître original. En la figura (22) se muestra el cambio que resulta de perturbar con f_2 al factor de escala del universo. Nótese que en ninguna de las dos soluciones perturbadas ocurriría un “Big Crunch”, aunque R_2 causaría una expansión ligeramente menos violenta para tiempos grandes que la que se obtiene con R_1 . Así mismo, ambas soluciones perturbadas se expanden más lentamente que el modelo de Lemaître para un tiempo en el futuro lejano.

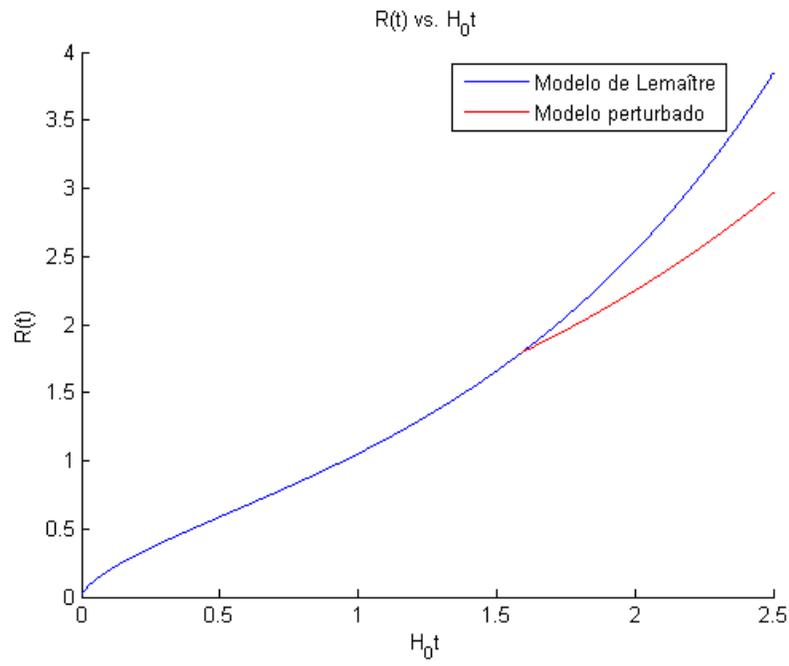


Figura 21: Efecto sobre el factor de escala del universo al aplicar una perturbación de la forma $f_1 = \frac{1}{t}$ en la constante cosmológica. En azul se muestra $R(t)$ obtenido al utilizar el modelo de Lemaître, mientras que en rojo se muestra la solución perturbada.

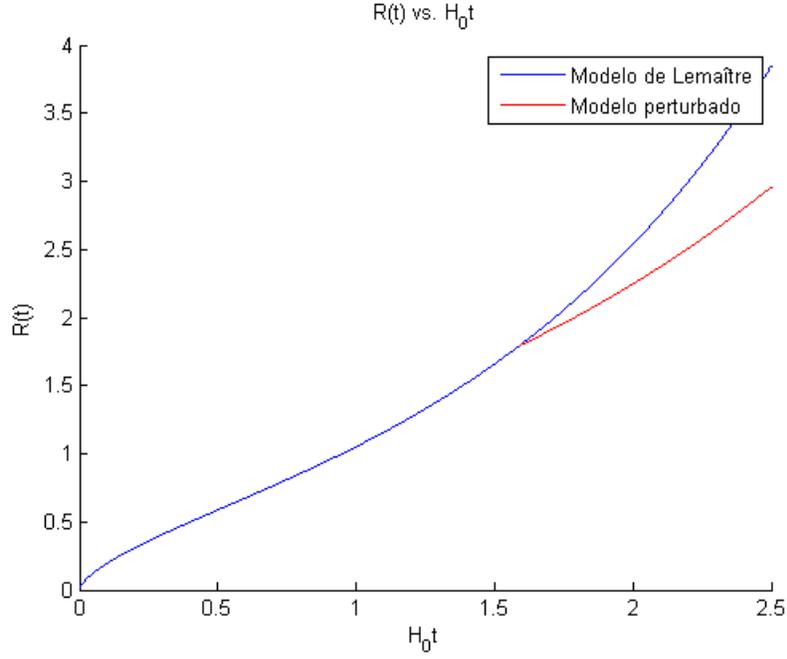


Figura 22: Efecto sobre el factor de escala del universo al aplicar una perturbación de la forma $f_2 = -\frac{1}{t}$ en la constante cosmológica. En azul se muestra $R(t)$ obtenido al utilizar el modelo de Lemaître, mientras que en rojo se muestra la solución perturbada.

- **Solución perturbada con $f_3(t) = \frac{1}{100}e^{-H_0 t}$:**

Reemplazando el valor de f_3 , en la ecuación (97), se obtiene que:

$$R_3 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c \int_{3t_m}^t (1 + \frac{1}{200}e^{-H_0 t}) dt}$$

Integrando se obtiene que:

$$R_3 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c \left[t - 3t_m - \frac{1}{200H_0} (e^{-H_0 t} - e^{-3H_0 t_m}) \right]}$$

Se le puede escribir de manera en que se pueda ver de una manera más intuitiva:

$$R_3 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c [t - 3t_m]} e^{-\frac{1}{200H_0} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c (e^{-H_0 t} - e^{-3H_0 t_m})} \quad (100)$$

- **Solución perturbada con $f_4(t) = -\frac{1}{100}e^{-H_0 t}$:**

De manera análoga al caso anterior, se encuentra que:

$$R_4 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c[t-3t_m]}e^{\frac{1}{200H_0}}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c(e^{-H_0t}-e^{-3H_0t_m}) \quad (101)$$

Las gráficas de las soluciones perturbadas R_3 y R_4 se encuentran en las figuras (23) y (24). Nótese que siguen siendo muy similares a las encontradas con R_1 y R_2 : mientras las perturbaciones sean pequeñas, parece no importar su forma. En la figura (25) se encuentran las soluciones perturbadas desde R_1 hasta R_4 para evidenciar las diferencias entre ellas. Para las diversas perturbaciones probadas, no cambia la forma de la solución mas sí cambia la rapidez de expansión en un futuro lejano.

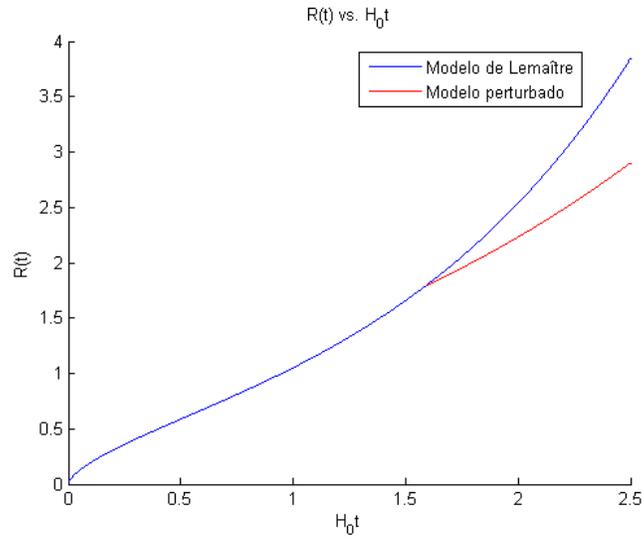


Figura 23: Efecto sobre el factor de escala del universo al aplicar una perturbación de la forma $f_3 = \frac{1}{100}e^{-H_0t}$ en la constante cosmológica. En azul se muestra $R(t)$ obtenido al utilizar el modelo de Lemaître, mientras que en rojo se muestra la solución perturbada.

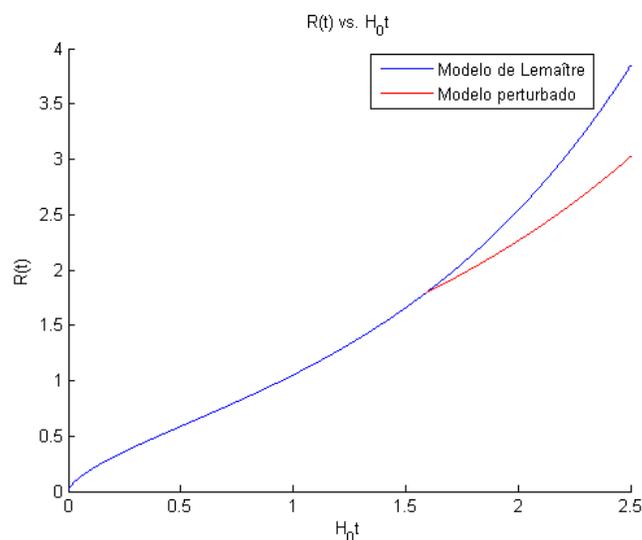


Figura 24: Efecto sobre el factor de escala del universo al aplicar una perturbación de la forma $f_4 = -\frac{1}{100}e^{-H_0 t}$ en la constante cosmológica. En azul se muestra $R(t)$ obtenido al utilizar el modelo de Lemaître, mientras que en rojo se muestra la solución perturbada.

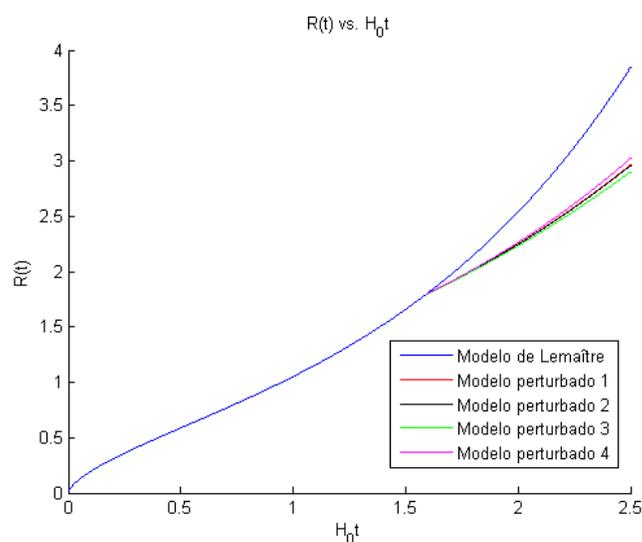


Figura 25: Factor de escala del universo para las pequeñas perturbaciones f_1 a f_4 . Los colores que relacionan a cada solución con su curva respectiva se encuentran especificados en el gráfico.

Se han probado algunas funciones que se sabe serán siempre pequeñas, para poder usar así la aproximación en la raíz de la integral en (96). Sin embargo, para funciones simples se puede resolver dicha integral, por lo que ahora se intentará encontrar soluciones con perturbaciones que no necesariamente serán pequeñas en comparación a λ .

■ **Solución perturbada con $f_5(t) = H_0 t$:**

Considérese esta función en la ecuación 96:

$$R_5 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c \int_{3t_m}^t \sqrt{1+H_0 t} dt} \quad (102)$$

La solución analítica es fácilmente encontrable, pues $\int_{3t_m}^t \sqrt{1+H_0 t} dt = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \left[(1+H_0 t)^{\frac{3}{2}} - (1+H_0 3t_m)^{\frac{3}{2}} \right]$. La solución es, entonces:

$$R_5 = R(3t_m)e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}c \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \left[(1+H_0 t)^{\frac{3}{2}} - (1+H_0 3t_m)^{\frac{3}{2}} \right]} \quad (103)$$

Con su respectiva solución gráfica ilustrada en la figura (26). Nótese que ahora el cambio de rapidez en la expansión es mucho más notable que con las anteriores perturbaciones, aunque siempre se tiende a que se ralentice la expansión del universo en vez de acelerarse.

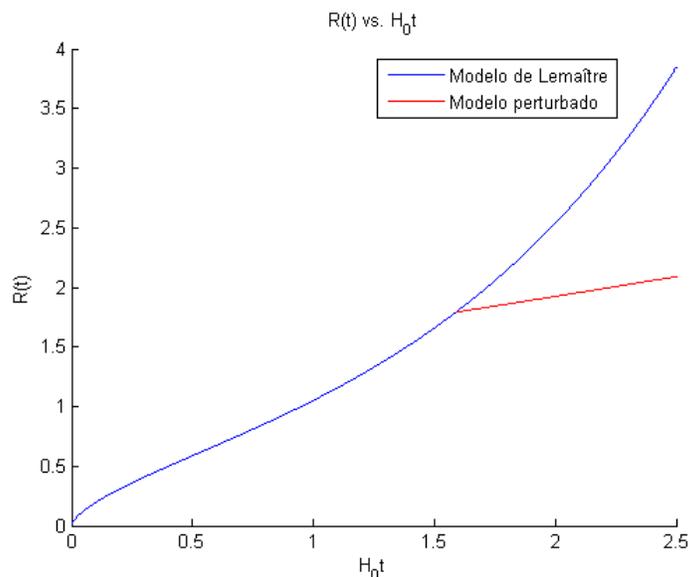


Figura 26: Efecto sobre el factor de escala del universo al aplicar una perturbación de la forma $f_5 = H_0 t$ en la constante cosmológica. En azul se muestra $R(t)$ obtenido al utilizar el modelo de Lemaître, mientras que en rojo se muestra la solución perturbada.

■ **Solución perturbada con $f_6(t) = e^{H_0 t}$:**

Partiendo de nuevo del factor de escala del universo dependiente de un $f(t)$ en la ecuación (96), se tiene que reemplazando el valor de la función temporal:

$$R_6 = R(3t_m) e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c \int_{3t_m}^t \sqrt{1+e^{H_0 t}} dt} \quad (104)$$

Con el valor analítico de la integral siendo:

$$\int_{3t_m}^t \sqrt{1+e^{H_0 t}} dt = \frac{1}{H_0} \left[2(e^{H_0 t} + 1)^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{(e^{H_0 t} + 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(e^{H_0 t} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{H_0} \left[-2(e^{H_0 3t_m} + 1)^{\frac{1}{2}} - \ln \left(\frac{(e^{H_0 3t_m} + 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(e^{H_0 3t_m} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1} \right) \right]$$

[21]. Con esto, el valor de escala sería:

$$R_6 = R(3t_m) \left[e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c \frac{1}{H_0} \left[2(e^{H_0 t} + 1)^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{(e^{H_0 t} + 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(e^{H_0 t} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1} \right) \right]} \right]$$

$$\times \left[e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c \frac{1}{H_0} \left[-2(e^{H_0 3t_m} + 1)^{\frac{1}{2}} - \ln \left(\frac{(e^{H_0 3t_m} + 1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(e^{H_0 3t_m} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1} \right) \right]} \right] \quad (105)$$

Como se puede ver en la figura (27), esta solución causa que el universo se expanda más rápidamente en comparación a la solución encontrada con el modelo de Lemaître: ocurriría un Big Rip en un tiempo lejano.

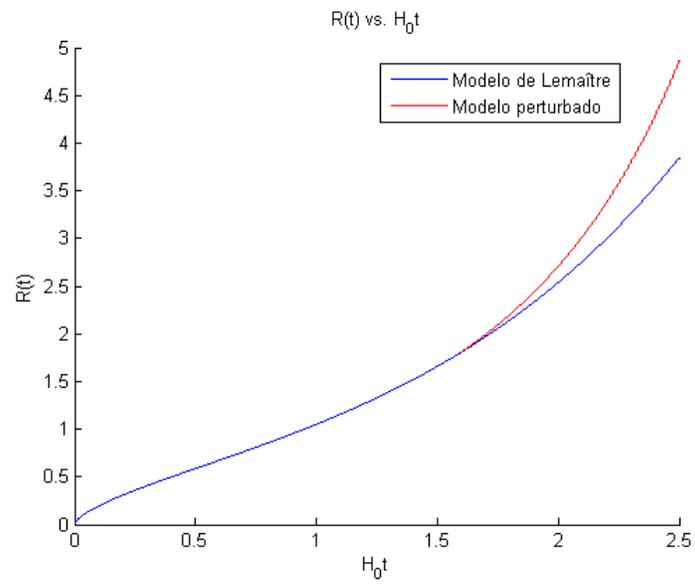


Figura 27: Efecto sobre el factor de escala del universo de aplicar una perturbación de la forma $f_6 = e^{H_0 t}$ en la constante cosmológica. En azul se muestra $R(t)$ obtenido al utilizar el modelo de Lemaître, mientras que en rojo se muestra la solución perturbada.

6. Conclusiones

En este trabajo, se reconsideraron algunas de las aproximaciones y premisas utilizadas en la cosmología moderna. En la subsección 2.2, se calculó la edad del universo en función del corrimiento hacia el rojo asumiendo una densidad cosmológica de radiación no despreciable, además del parámetro de corrimiento hacia el rojo en la época de transición de un universo dominado por radiación hacia un universo dominado por materia. Adicionalmente, se calculó analíticamente la edad de un universo abierto y cerrado en contraste con las soluciones paramétricas presentadas en la introducción. Estas últimas concuerdan con las expresiones dadas en la referencia [23].

Entrando más a fondo en el tema de la variación de la constante cosmológica, se consideró primero el efecto de un cambio en la densidad cosmológica del vacío sobre el resto de densidades cosmológicas; específicamente, cómo la variación del término relacionado con λ afectaría a la densidad de materia del universo. Finalmente en la última sección, se analizó cómo una perturbación temporal sobre la constante cosmológica podría afectar al factor de escala del universo en un tiempo lejano en el futuro.

La densidad cosmológica de radiación es cuatro órdenes de magnitud menor a la de la materia y a la del vacío. No es sorprendente entonces que el término que considera la densidad de energía de radiación, sea despreciado generalmente en favor de las otras dos densidades de energía, cuantitativamente más pesadas en magnitud. Sin embargo, en aras de analizar el modelo de forma más completa, se calculó la corrección a primer orden dada al considerar la densidad cosmológica de radiación como un término muy pequeño. El valor analítico de la edad del universo en el momento actual, utilizando el modelo de Lemaitre y tomando en cuenta la contribución de todas las densidades de energía es:

$$t_0 \approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0 \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}} \ln \left(\frac{(\Omega_{v0} + \Omega_{m0})^{\frac{1}{2}} + \Omega_{v0}^{\frac{1}{2}}}{\Omega_{m0}^{\frac{1}{2}}} \right) +$$

$$+ \frac{\Omega_{r0}}{2H_0 \Omega_{v0}^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}} \right)^{\frac{4}{3}} \left[\int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3 + 1)^{\frac{1}{2}}} - \int_{\infty}^{\left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dv}{(v^3 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Donde Ω_{v0} , Ω_{m0} y Ω_{r0} son las densidades cosmológicas del vacío, la materia y la radiación respectivamente. El primer término de la suma es la contribución directa a la edad del universo del modelo donde se desprecia a la radiación, mientras que el segundo término es justamente la corrección. Nótese que el segundo término es directamente proporcional a Ω_{r0} , el cual es del orden de 10^{-5} . Por lo tanto, la magnitud de la corrección es efectivamente pequeña en relación al término principal. En la tabla (3) se muestran los valores que consideran y

no consideran la densidad de energía para la edad del universo en un rango de H_0 . La corrección está entre los 0.00325 [Gyr] para el valor superior de H_0 , y los 0.00389[Gyr] para el valor inferior de la constante de Hubble. La contribución de la radiación disminuye en tres millones de años la edad de nuestro universo en el momento actual.

Para encontrar el parámetro de corrimiento hacia el rojo cuando la densidad de materia-energía era igual a la densidad de energía de radiación (z_{eq}), se utilizó la ecuación (67) despreciando la densidad cosmológica del vacío. Ya que se sabe cuál era la edad del universo cuando existió este breve equilibrio entre materia y radiación, se puede despejar el parámetro de corrimiento hacia el rojo en ese momento al integrar desde el inicio del universo hasta el t_{eq} . Haciendo un poco de álgebra, y considerando que justamente la hipótesis en este caso es que la relación entre las densidades es uno, se encontró que:

$$z_{eq} = \left[2,56066 \left(H_0 \Omega_{m0}^{\frac{1}{2}} t_{eq} \right) \right]^{-\frac{2}{3}} - 1$$

Con valores numéricos de dicho parámetro para un rango de H_0 ilustrados en la tabla (4). El valor utilizado para t_{eq} fue de 380000 años.

Se encontraron las edades del universo analíticas para los universos con $K \neq 0$ mediante dos maneras diferentes. La primera, partiendo de la ecuación $(\dot{R})^2 = \frac{8}{3}\pi \frac{G\rho_0}{c^2 R} - K$ y realizando el cambio de variable $\dot{R} = P$. La segunda fue partiendo de nuevo de la primera ecuación de Friedmann antes mencionada y multiplicándola toda por R . Las soluciones con ambos métodos dan rangos idénticos, y son para el primer caso y el segundo respectivamente, para el universo cerrado ($K > 0$):

$$t_0 = -\frac{2\Omega_{m0}}{H_0(\Omega_{m0} - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}-1} - 1}}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}-1} + 1}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}-1} - 1} \frac{\Omega_{m0} - 1}{\Omega_{m0}} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{H_0 [\Omega_{m0} - 1]^{\frac{3}{2}}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0} - 1}{\Omega_{m0}}} \right) - \frac{\sqrt{\Omega_{m0} - 1}}{\Omega_{m0}} \right],$$

las cuales son equivalentes. Para el universo abierto ($K < 0$), las soluciones analíticas usando ambos métodos fueron:

$$t_0 = -\frac{\Omega_{m0}}{2H_0(1 - \Omega_{m0})^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \Omega_{m0}}} - \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \Omega_{m0}}} + \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_{m0}}}{1 - \sqrt{1 - \Omega_{m0}}} \right) \right]$$

$$t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{H_0(1 - \Omega_{m0})^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega_{m0}}}{\Omega_{m0}} - \text{arc sinh} \left(\sqrt{\frac{1 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}} \right) \right],$$

que también son equivalentes.

La edad de un universo cerrado está entre $8,06034 < t_0 < 8,554077$ [Gyr], mientras que la del universo abierto tiene un rango de $11.95349[\text{Gyr}] < t_0 < 12.68571$ [Gyr]. En ambos casos, el valor de la edad del universo es mucho menor a la edad medida experimentalmente.

Para analizar la dependencia de las densidades cosmológicas entre ellas, se llegó a las siguientes ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo:

$$\dot{\Omega}_m = \Omega_m H [(\Omega_m - 1) + 2(\Omega_r - \Omega_v)]$$

$$\dot{\Omega}_r = \Omega_r H [\Omega_m + 2(\Omega_r - 1) - 2\Omega_v]$$

$$\dot{\Omega}_v = \Omega_v H [\Omega_m + 2\Omega_r - 2(\Omega_v - 1)]$$

Para eliminar la dependencia del tiempo, y despreciando el valor de la densidad cosmológica de la radiación, se llega a la ecuación diferencial que relaciona la densidad cosmológica de materia con la del vacío:

$$\frac{d\Omega_m}{d\Omega_v} = \frac{\Omega_m [(\Omega_m - 1) - 2\Omega_v]}{\Omega_v [\Omega_m - 2(\Omega_v - 1)]}$$

Así como su inversa:

$$\frac{d\Omega_v}{d\Omega_m} = \frac{\Omega_v [\Omega_m - 2(\Omega_v - 1)]}{\Omega_m [(\Omega_m - 1) - 2\Omega_v]}$$

Se encontraron las soluciones usando el método numérico de Euler. Las restricciones encontradas variaban según la condición inicial, aunque se pueden sacar algunas conclusiones fundamentales. En primer lugar, el aumento en el valor de la variable independiente obliga siempre a la dependiente a disminuir. En las soluciones donde Ω_m era la variable independiente, el cambio era más brusco para Ω_v que cuando al contrario Ω_v era la variable independiente y Ω_m la dependiente. Finalmente, en ambos casos la condición de estabilidad de la solución de la ecuación diferencial ordinaria obligó a que la densidad cosmológica independiente no tomará valores superiores a uno.

Entonces, las restricciones para la variación de Ω_v encontradas fueron entre 1 y 0 al tomar las condiciones iniciales menores posibles ($\Omega_v = 0,6$ y $\Omega_m = 0,3$), y entre 0.3674 y 1 con $\Omega_v = 0,8$ y $\Omega_m = 0,5$, que son las condiciones iniciales máximas probables.

Finalmente, se buscó cómo afectaba al factor de escala del universo pequeñas perturbaciones como: $f_1 = \frac{1}{100H_0t}$, $f_2 = -\frac{1}{100H_0t}$, $f_3 = \frac{1}{100}e^{-H_0t}$, $f_4 = -\frac{1}{100}e^{-H_0t}$. Para todas esas funciones el factor de escala en tiempos grandes disminuyó con respecto del factor de escala del modelo de Lemaitre, aunque no hubo un cambio muy grande ni en las rapidezces ni en la forma de los factores de escala perturbados con estas funciones. Esto implica una expansión menos rápida del universo, aunque no lo suficiente como para generar un big crunch.

Se probó luego con perturbaciones no tan pequeñas como $f_5 = H_0 t$ y $f_6 = e^{H_0 t}$. En la primera, existió un cambio dramático en la rapidez con la que se expande el universo, siendo ésta mucho menor a las rapideces en los modelos perturbados con las anteriores funciones. Para la última función, el factor de escala creció para tiempos grandes. La perturbación entonces causó una expansión del universo más rápida que la observada en la solución del modelo de Lemaître, causando un Big Rip en el futuro lejano. La comparación de estas soluciones perturbadas con el modelo de Lemaître, se encuentra en las figuras (21), (22), (23), (24), (26) y (27). Para ver la diferencia entre los factores de escala perturbados por las funciones 1,2,3 y 4, se las ploteó juntas con diferentes colores en la figura (25).

En conclusión, perturbaciones pequeñas (mucho menores que uno en módulo) tienen como resultado que el universo se expanda más lentamente, aunque no logran ocasionar un colapso. Perturbaciones lineales positivas también ralentizan la expansión del universo, y las exponenciales causan una expansión veloz que a la larga llevará a un Big Rip.

Apéndice 1: Desarrollo de las Ecuaciones de Friedmann a partir de las Ecuaciones de Campo de Einstein

Se puede llegar a las ecuaciones de Friedmann utilizadas en este trabajo directamente a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. Para lograrlo, se debe primero introducir una métrica que describa al universo.

Métrica de Robertson-Walker

En esta métrica se asume que el universo es isotrópico, homogéneo, y con su materia uniformemente distribuida tal que se cumpla la densidad media del universo. Se considerará en este modelo al universo como un gran fluido, con las galaxias partículas dentro del mismo que siguen el movimiento de dicho fluido ideal [6, 9, 23]. El cambio en este universo será el mismo en cualquier punto; es decir, el universo se supondrá como una hipersuperficie llevada por el espacio-tiempo en un tiempo cósmico t . Este tiempo cósmico estará dado por relojes en reposo con el fluido cósmico, sincronizados con el momento en el que densidad y temperatura del fluido llegan a un cierto valor esperado [9].

Considérese ahora la definición de curvatura de una esfera: $K = \frac{k}{R^2(t)}$. Una hiperesfera en el espacio cuatridimensional euclideo se puede expresar como $r^2 + w^2 = R^2(t)$, con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Diferenciando, se puede encontrar que $dw^2 = \frac{r^2 dr^2}{R^2(t) - r^2}$. Si en vez de x^2, y^2, z^2 se considera las variables r, θ y ϕ , la separación de puntos sobre la hipersuperficie será:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dw^2$$

Con $d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$. Reemplazando el valor de dw^2 y utilizando el cambio de variable $\sigma = \frac{r}{R}$ se encuentra que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{d\sigma^2}{1 - \sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2 \right) \quad (106)$$

Habiendo incorporado el tiempo para convertir al dl en una métrica. Nótese que las coordenadas son independientes, lo cual apunta que el supuesto de isotropía es cierto. Además, estos cambios son los mismos para cualquier punto de la hiperesfera, por lo que se mantiene el supuesto de homogeneidad [9, 10, 17, 25].

El tensor asociado con la métrica de Robertson-Walker sería entonces:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R^2(t)}{1-\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2(t)\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2(t)\sigma^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (107)$$

Y el equivalente contravariante se escribe como:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2-1}{R^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R^2(t)\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R^2(t)\sigma^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (108)$$

Ahora considérense los símbolos de Christoffel, los cuales pueden ser obtenidos de igualar la derivada covariante del tensor métrico en su forma covariante como [9, 25]:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (109)$$

Usando la convención de suma de Einstein. Si la métrica es diagonal, como en este caso, se pueden usar ciertas normas para simplificar los cálculos de dichos símbolos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0 \quad \mu \neq \nu \neq \rho \quad (110)$$

$$\Gamma_{\mu\mu}^{\mu} = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\mu}} \right) \quad \mu \text{ fijo} \quad (111)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2g_{\mu\mu}} \left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad \mu \neq \nu \text{ fijos} \quad (112)$$

$$\Gamma_{\nu\nu}^{\mu} = -\frac{1}{2g_{\mu\mu}} \left(\frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) \quad \mu \neq \nu \text{ fijos} \quad (113)$$

Consideremos entonces los símbolos de Christoffel asociados con el elemento de la métrica g_{00} . Usando (113):

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2g_{ii}} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \right)$$

Pero este elemento de la métrica es constante, por lo tanto:

$$\Gamma_{00}^i = 0$$

Para cualquier i posible. Las ecuaciones (110), (111), (112), (113) serán importantes más adelante, así que vale la pena tenerlas en mente.

Se había tomado a $k = 1$ para simplificar cálculos, pero se puede generalizar para cualquier valor de k la ecuación (106):

$$dS^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2 \right), \quad (114)$$

con k igual a 1, 0, -1.

Con esta métrica, la distancia entre alguna galaxia y la nuestra posicionada en el origen sería:

$$d = R(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 - k\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (115)$$

Para $k = 1$, el universo está curvado como la superficie de una esfera y es cerrado, para $k = -1$ el universo es abierto como la superficie de una silla de montar y sin fronteras, y para $k = 0$ el universo es plano. En este caso, $d = R(t)\sigma$ y se regresa al valor clásico en el que $H = \frac{\dot{R}}{R}$ por la definición del parámetro de Hubble en relación con el corrimiento hacia el rojo [9].

Dinámica Cómica

El tensor energía-momento de un fluido perfecto es [10]:

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho_m\right)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (116)$$

Considerando el tensor métrico, los elementos del tensor energía-momento son: $T_{00} = \rho_m c^2$, $T_{11} = \frac{PR^2}{1-k\sigma^2}$, $T_{22} = PR^2\sigma^2$, $T_{33} = PR^2\sigma^2 \sin^2 \theta$. Sin embargo, esta es una densidad de materia, y lo que buscamos es densidad de materia energética. Entonces, de ahora en adelante se trabajará con $\rho_m = \frac{\rho}{c^2}$. Las ecuaciones de campo de Einstein son:

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (117)$$

Pero el tensor de Einstein es $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, con $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$. Sin embargo, se sabe que $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$ y que $R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right] + \left[\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \quad \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \right]_{\alpha\mu}^{\mu\nu}$ [9, 10, 17]. Ya que la métrica es diagonal y el espacio es de máxima simetría, $R_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$:

$$R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = k(n-1)g_{\mu\nu} = 3kg_{\mu\nu} = 0 \quad (118)$$

Por lo tanto, los únicos tensores de Ricci sobrevivientes serían el R_{00} , R_{11} , R_{22} y R_{33} . En el caso de $R_{00} = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3$:

$$R_{000}^0 = \left[\frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{00}^0 \quad \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{00}^0 \right] + \left[\Gamma_{00}^0 \quad \Gamma_{00}^0 \right]_{\beta\alpha}^{\alpha\beta}$$

Por lo que este tensor será cero siempre. Para el siguiente término:

$$R_{010}^1 = \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma_{10}^1 \quad \frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{00}^1 \right] + \left[\Gamma_{\beta 1}^1 \quad \Gamma_{\beta 0}^1 \right]_{\Gamma_{10}^\beta \quad \Gamma_{00}^\beta} = -\frac{\partial \Gamma_{10}^1}{\partial x^0} - \Gamma_{\beta 0}^1 \Gamma_{01}^\beta$$

Puesto que ya vimos que Γ_{00}^β es siempre cero. En este punto se querrán calcular los símbolos de Christoffel asociados con esta métrica usando (110), (111), (112), (113). Se comenzará con todos los índices iguales:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = \frac{(1-k\sigma^2)}{2R^2} \frac{R^2 2k\sigma}{(1-k\sigma^2)^2} = \frac{\sigma k}{1-k\sigma^2}$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_{33}^3 = 0$$

Siendo estos dos últimos símbolos de Christoffel cero pues el elemento de la métrica asociado con ellos es constante con respecto a la variable respecto a la que se deriva. Lo mismo pasa con los símbolos de Christoffel: $\Gamma_{01}^0, \Gamma_{02}^0, \Gamma_{03}^0, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{20}^0, \Gamma_{13}^1, \Gamma_{23}^2, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{11}^3, \Gamma_{22}^3$, los cuales son todos de valor nulo. Los símbolos de Christoffel restantes son:

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} \frac{1-k\sigma^2}{R^2} \frac{2R}{1-k\sigma^2} \frac{\dot{R}}{c} = \frac{\dot{R}}{cR}$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2\sigma^2 R^2} (2R \frac{\dot{R}}{c} \sigma^2) = \frac{\dot{R}}{Rc}$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2g_{33}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2R^2 \sigma^2 \sin^2 \theta} (2R \sigma^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{R}}{c}) = \frac{\dot{R}}{Rc}$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2R^2 \sigma^2} (R^2 2\sigma) = \frac{1}{\sigma}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2g_{33}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2R^2 \sigma^2 \sin^2 \theta} (R^2 2\sigma \sin^2 \theta) = \frac{1}{\sigma}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2g_{33}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2R^2 \sigma^2 \sin^2 \theta} (R^2 \sigma^2 2 \sin \theta \cos \theta) = \cot \theta$$

Habiendo utilizado para calcularlos la ecuación (112). Usando la ecuación (113) ahora:

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2g_{00}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{-2R \frac{\dot{R}}{c}}{1-k\sigma^2} \right) = \frac{R\dot{R}}{c(1-k\sigma^2)}$$

$$\Gamma_{22}^0 = -\frac{1}{2g_{00}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2} \left(-2R \frac{\dot{R}}{c} \sigma^2 \right) = R\sigma^2 \frac{\dot{R}}{c}$$

$$\Gamma_{33}^0 = -\frac{1}{2g_{00}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2} \left(-2R \frac{\dot{R}}{c} \sigma^2 \sin^2 \theta \right) = R\sigma^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{R}}{c}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{1-k\sigma^2}{2R^2} (-R^2 2\sigma) = -(1-k\sigma^2)\sigma$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = \frac{1-k\sigma^2}{2R^2} (-R^2 \sin^2 \theta 2\sigma) = -\sigma(1-k\sigma^2) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2R^2 \sigma^2} (-R^2 \sigma^2 2 \sin \theta \cos \theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{2}$$

Se puede entonces encontrar ahora a R_{010}^1 por su definición:

$$R_{010}^1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{R}}{cR} \right) - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1$$

Pero los símbolos de Christoffel son simétricos en $\rho\sigma$ [17]. Usando los símbolos de Christoffel previamente calculados y derivando:

$$R_{010}^1 = -\frac{\ddot{R}}{c^2 R} \quad (119)$$

Para el segundo elemento:

$$R_{020}^2 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \Gamma_{20}^2 & \Gamma_{00}^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 2}^2 & \Gamma_{\beta 0}^2 \\ \Gamma_{20}^\beta & \Gamma_{00}^\beta \end{array} \right]$$

$$R_{020}^2 = -\frac{\partial}{\partial x^0} \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{\beta 0}^2 \Gamma_{20}^\beta = -\frac{\ddot{R}}{c^2 R} \quad (120)$$

Y para el último tensor:

$$R_{030}^3 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \Gamma_{30}^3 & \Gamma_{00}^3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 3}^3 & \Gamma_{\beta 0}^3 \\ \Gamma_{30}^\beta & \Gamma_{00}^\beta \end{array} \right] = -\frac{\ddot{R}}{c^2 R} \quad (121)$$

Pues tiene los mismos elementos que el tensor anterior. Por lo tanto, $R_{00} = -\frac{3\ddot{R}}{c^2 R}$.

El siguiente tensor de Ricci es: $R_{11} = R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3$. Sus componentes son:

$$R_{101}^0 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \Gamma_{01}^0 & \Gamma_{11}^0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 0}^0 & \Gamma_{\beta 1}^0 \\ \Gamma_{10}^\beta & \Gamma_{11}^\beta \end{array} \right] = \frac{R\ddot{R}}{c^2(1-k\sigma^2)} \quad (122)$$

$$R_{111}^1 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 1}^1 & \Gamma_{\beta 1}^1 \\ \Gamma_{11}^\beta & \Gamma_{11}^\beta \end{array} \right] = 0 \quad (123)$$

$$R_{121}^2 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{11}^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 2}^2 & \Gamma_{\beta 1}^2 \\ \Gamma_{21}^\beta & \Gamma_{11}^\beta \end{array} \right] = \frac{(\dot{R})^2 + kc^2}{c^2(1-\sigma^2k)} \quad (124)$$

$$R_{131}^3 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \Gamma_{31}^3 & \Gamma_{11}^3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 3}^3 & \Gamma_{\beta 1}^3 \\ \Gamma_{31}^\beta & \Gamma_{11}^\beta \end{array} \right] = \frac{(\dot{R})^2 + kc^2}{c^2(1-\sigma^2k)} \quad (125)$$

El símbolo de Ricci entonces es: $R_{11} = \frac{2k+(R\ddot{R})\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2}{1-k\sigma^2}$. Para el siguiente: $R_{22} = R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{232}^3 + R_{222}^2$. Se puede ver de cajón que R_{222}^2 va a ser cero, y así se calculan los otros tensores:

$$R_{202}^0 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \Gamma_{02}^0 & \Gamma_{22}^0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 0}^0 & \Gamma_{\beta 2}^0 \\ \Gamma_{02}^\beta & \Gamma_{22}^\beta \end{array} \right] = \frac{\ddot{R}R\sigma^2}{c^2} \quad (126)$$

$$R_{212}^1 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 1}^1 & \Gamma_{\beta 2}^1 \\ \Gamma_{12}^\beta & \Gamma_{22}^\beta \end{array} \right] = k\sigma^2 + \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 \sigma^2 \quad (127)$$

$$R_{232}^3 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \Gamma_{32}^3 & \Gamma_{22}^3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 3}^3 & \Gamma_{\beta 2}^3 \\ \Gamma_{32}^\beta & \Gamma_{22}^\beta \end{array} \right] = k\sigma^2 + \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 \sigma^2 \quad (128)$$

Con lo cual el tensor de Ricci es $R_{22} = \frac{\sigma^2}{c^2} (2kc^2 + 2(\dot{R})^2 + R\ddot{R})$. Para el último tensor :

$$R_{303}^0 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \Gamma_{03}^0 & \Gamma_{33}^0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 0}^0 & \Gamma_{\beta 3}^0 \\ \Gamma_{03}^\beta & \Gamma_{33}^\beta \end{array} \right] = \sigma^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\ddot{R}R}{c^2} \right) \quad (129)$$

$$R_{131}^1 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \Gamma_{13}^1 & \Gamma_{33}^1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 1}^1 & \Gamma_{\beta 3}^1 \\ \Gamma_{13}^\beta & \Gamma_{33}^\beta \end{array} \right] = \sigma^2 k \sin^2 \theta + \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 \sigma^2 \sin^2 \theta \quad (130)$$

$$R_{323}^2 = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \Gamma_{23}^2 & \Gamma_{33}^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{\beta 2}^2 & \Gamma_{\beta 3}^2 \\ \Gamma_{23}^\beta & \Gamma_{33}^\beta \end{array} \right] = \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 \sigma^2 \sin^2 \theta + k\sigma^2 \sin^2 \theta \quad (131)$$

Con R_{33} igual a la suma de todos ellos: $R_{33} = \sigma^2 \sin^2 \theta \left(2k + \frac{R\ddot{R}}{c^2} + \frac{2\dot{R}^2}{c^2} \right)$. Nótese que la suma sobre los índices β de los símbolos de Christoffel depende únicamente de cuáles resultan ser no nulos.

Calculando el escalar de Ricci mediante los diversos tensores.

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{R}}{c^2 R}$$

$$R_{11} = \frac{2k + (R\ddot{R})\frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2}{(1 - k\sigma^2)}$$

$$R_{22} = 2k\sigma^2 + 2\left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 \sigma^2 + \frac{\ddot{R}R}{c^2} \sigma^2$$

$$R_{33} = \sigma^2 \sin^2 \theta \left(2k + \frac{R\ddot{R}}{c^2} + \frac{2\dot{R}^2}{c^2} \right)$$

De manera que:

$$\Rightarrow R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\frac{6}{R^2} \left(k + \frac{R\ddot{R}}{c^2} + \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2 \right)$$

En el tensor de Einstein, las primeras componentes son:

$$G_{00} = \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{3k}{R^2}$$

$$G_{11} = \frac{-k - \frac{2R\ddot{R}}{c^2} - \left(\frac{\dot{R}}{c}\right)^2}{1 - k\sigma^2}$$

Y así finalmente empatando con las ecuaciones de campo de Einstein, con la componente 00:

$$\frac{3(\dot{R})^2}{R^2} + \frac{3kc^2}{R^2} - c^2\lambda = 8\pi G \frac{\rho}{c^2} \quad (132)$$

Y con la componente 11:

$$-\frac{kc^2}{R^2} - \frac{2\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \lambda c^2 = 8\pi G \frac{P}{c^2} \quad (133)$$

Por lo tanto:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho}{c^2} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\lambda c^2}{3}, \quad (134)$$

donde H es el parámetro de Hubble. Esta ecuación usando (132) se transforma en la segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3} \frac{\pi G(\rho + 3P)}{c^2} + \frac{\lambda c^2}{3} \quad (135)$$

Nótese que la ecuación (134) es la primera ecuación de Friedmann. Ahora, recuérdese que $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha}$. Considérese entonces los términos con $\mu = 0$ para encontrar:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{R\dot{R}}{c(1-k\sigma^2)} T^{11} + \frac{3\dot{R}}{cR} T^{00} + \frac{R\sigma^2\dot{R}}{c} T^{22} + R\sigma^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{R}}{c} T^{33} = 0$$

Habiendo usado el valor de los símbolos de Christoffel. Usando las componentes del tensor de energía momento, se encuentra que:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{R}}{R}(\rho + P) = 0 \quad (136)$$

Se han derivado entonces las ecuaciones de Friedmann partiendo de las ecuaciones de Campo de Einstein [9, 10, 25].

Apéndice 2: Correcciones cuánticas a las Ec. de Friedmann

Se mencionará aquí brevemente cómo los autores del artículo [8] derivaron las ecuaciones de Friedmann con correcciones cuánticas, y el efecto que esto tuvo sobre la edad del universo. Los autores parten de la ecuación de Raychaudhuri [26] corregida cuánticamente al reemplazar las geodésicas normalmente usadas (que salían de las ecuaciones de campo de Einstein), con trayectorias cuánticas Bohmianas [27]. Dicha ecuación es:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{3}\theta^2 - R_{cd}u^c u^d + \frac{\hbar^2}{m^2} h^{ab} \left(\frac{\square \mathcal{R}}{\mathcal{R}} \right)_{;a;b} + \frac{\epsilon_1 \hbar^2}{m^2} h^{ab} R_{;a;b} \quad (137)$$

La cual, para efectos prácticos de este trabajo, no nos vamos a detener a analizar. Basta saber que se está asumiendo una descripción cuántica del fluido que llena nuestro universo, con una función de onda $\psi = \mathcal{R}e^{iS}$ normalizable y de valor único. $\mathcal{R}(x^\alpha), S(x^\alpha)$ son funciones reales, mientras que la función de onda antes mencionada tiene que ver con el cuadvivector velocidad $u_a = (\hbar/m)\partial_a S$ y su expansión $\theta = \text{Tr}(u_{a;b}) = h^{ab}u_{a;b}$, con $h^{ab} = g_{ab} - u_a u_b$. La ecuación (137) es una consecuencia directa de las ecuaciones de Klein-Gordon o de la de Dirac [8].

Se quiere entonces encontrar la variación del factor de escala del universo partiendo de esta ecuación. Los autores del artículo logran esto al reemplazar $\theta = 3\dot{a}/a$ y $R_{cd}u^c u^d = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \lambda c^2/3$. En este caso, el factor de escala se denotará con a para no ser confundido con las otras variables que ya se han llamado R . Utilizando lo antes mencionado en la ecuación (137):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\lambda c^2}{3} + \frac{\hbar^2}{3m^2} h^{ab} \left(\frac{\square \mathcal{R}}{\mathcal{R}} \right)_{;a;b} + \frac{\epsilon_1 \hbar^2}{m^2} h^{ab} R_{;a;b} \quad (138)$$

Y así se obtiene la segunda ecuación de Friedmann con correcciones cuánticas. El primer término de la corrección se encontró por los autores que está asociado con la constante cosmológica, tanto así que si se asume una forma gaussiana en la función de onda, se obtiene que $\Lambda_Q = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} h^{ab} \left(\frac{\square \mathcal{R}}{\mathcal{R}} \right)_{;a;b} = 10^{-52}$ (m^{-2}), el cual es el valor numérico observado en el momento actual de la constante cosmológica [8].

El segundo término de la corrección se analizó en el artículo como función de $H = \dot{a}/a$, y para los fluidos del tipo $p/\rho = w$ como se mencionó antes en este mismo trabajo. Usando la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, se encuentra que:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}(1+w)H^2 - \frac{\epsilon_1 \hbar^2}{m^2} 6H^4(1+w) \left[6(1+w)^2 - \frac{81}{2}(1+w) + 18 \right] \quad (139)$$

Nótese que esta corrección depende de \hbar ; si el valor de éste tiende a cero, se tendrá una singularidad del tipo Big Bang [8]. La edad del universo puede ser encontrada al expresar (139) como $\dot{H} = F(H)$ e integrar:

$$T = \int_0^T dt = \int_{H_0}^{H_p} \frac{dH}{F(H)} \quad (140)$$

Con H_0 el momento actual. Si las correcciones cuánticas cambian el valor de $F(H)$ tal que ni H ni \dot{H} diverge, entonces H_p es el punto fijo más cercano en el pasado tal que $F(H_p) = 0$. Se puede aproximar la función cerca del punto fijo como $F(H) = F^{(n)}(H_p)(H - H_p)^n$ para obtener:

$$T = \frac{1}{F^{(n)}(H_p)} \int_{H_1}^{H_p} \frac{dH}{(H - H_p)^n} \rightarrow \infty \quad (141)$$

Con lo cual el universo no tendría un principio. Este resultado sería consecuente con la premisa de que las trayectorias Bohmianas no convergen hacia un mismo punto a diferencia de las geodésicas Einsteinianas[8].

El artículo mostró en resumen que considerar efectos cuánticos da lugar a dos correcciones en la segunda Ecuación de Friedmann. La segunda corrección parece librarse de la singularidad del Big Bang, asegurando así un universo sin inicio [8]. El artículo es muy reciente, así que todavía falta por ver la opinión de la comunidad científica, así como su incidencia en teorías probadas y aceptadas en la cosmología como el modelo inflacionario del universo.

Referencias

- [1] Guth A. H. *The Inflationary Universe: The Quest for a New Theory of Cosmic Origins*. Perseus Books. 1997.
- [2] Marín, Carlos. *La Expansión del Universo, una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas*. Universidad San Francisco de Quito, 2º Edición, 2011.
- [3] K. A. Olive et al. *Particle Physics Booklet*, Chinese Physics C, July 2014.
- [4] Planck Collaboration: P. A. R Ade et. all. Planck 2013 results. XVI. Cosmological Parameters. *A&A* 571, A16 (2014). DOI: 10.1051/0004-6361/201321591.
- [5] Liddle, A. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, Second Edition. 2003.
- [6] Hawking, Stephen & Reyner Ellis, George Francis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press. 1973.
- [7] Hawking, Stephen. *The Universe in a Nutshell*. Bantam Press. 2001.
- [8] Ahmed F. Ali, Saurya Das. “Cosmology from quantum potential”. *Physics Letters B*. 741. 2015.
- [9] Kenyon, I.R. *General Relativity*. Oxford University Press, 1996.
- [10] John. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press. 2010.
- [11] Komissarov, S.S. “Cosmology”. Notes for the Cosmology Course at Leeds University. School of Mathematics: University of Leeds. 2012. <https://www1.maths.leeds.ac.uk/~serguei/teaching/cosmology.pdf> [06/01/2015].
- [12] Brawer, R. *Inflationary Cosmology and the Horizon and Flatness Problems: The Mutual Constitution of Explanation and Questions*. Massachusetts Institute of Technology.1996.
- [13] Hobson, M.P. , Efstathiou, G., and Lasenby, A.N. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press. 2006.
- [14] Perlmutter, “S. Supernovae, Dark Energy, and the Accelerating Universe”. *Physics Today*.2003.
- [15] Olive, K. Peacock, J. A. “Big-Bang Cosmology”. *Physical Review D*. Vol. 86. No.1. 2012
- [16] Kreyszig, E. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Vol. II*. 3a. ed. México: Limusa Wiley, 2009.

- [17] Hartle, J. B. Gravity: an Introduction to Einstein's General Relativity. Addison Wesley. 2003.
- [18] Hoeneisen, Bruce. Thermal Physics. Mellen Research University Press. 1993.
- [19] S. Blundell. & K. Blundell. Concepts in Thermal Physics. Oxford University Press. 2006.
- [20] D. Giancoli. Física para ciencias e ingeniería. Pearson Educación, México, Cuarta Edición. 2009.
- [21] I. Gradshteyn & I. Ryzhik. Tables of integrals, Series and Products. Academic Press: 5th Edition. 2007.
- [22] O. Lahav & A. R Liddle. «The cosmological parameters». The Review of Particle Physics, 2011.
- [23] E. W. Kolb and M. S. Turner. The Early Universe. Addison Wesley. 1994
- [24] D. G. Zill, M. R. Cullen. Ecuaciones Diferenciales. CENGAGE Learning: 7ma Edición. 2009.
- [25] Weinberg, Steven. Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons, Inc. 1972.
- [26] Ludvigsen, M. «General Relativity: A Geometric Approach» Cambridge University Press.1999.
- [27] D. Bohm, Physical Review 85 (1952) 166.