

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

Distribución espacial de pozos  
en un yacimiento de petróleo

José Alfredo Castro Carrasco

Tesis de grado presentada como requisito para la obtención del  
título de Maestría en Matemáticas Aplicadas

Quito

Mayo de 2005

Universidad San Francisco de Quito  
Colegio de Graduados

HOJA DE APROBACION DE TESIS

Distribución espacial de pozos  
en un yacimiento de petróleo  
José Alfredo Castro Carrasco

Gonzalo Mendieta, Ph. D. Director de Tesis	..... (firma)
Richard Resl, M. Sc. Miembro del Comité	..... (firma)
Melio Sáenz, Ph. D. Miembro del Comité	..... (firma)
Carlos Jiménez, Ph. D. Director de la Maestría	..... (firma)
Víctor Viteri, Ph. D. Director del Colegio de Graduados	..... (firma)

Quito, Mayo de 2005

© Derechos de Autor  
José Alfredo Castro Carrasco  
2005

# Dedicatoria

A mi madre.

# Agradecimiento

A todas las personas que colaboraron con el desarrollo de este trabajo, de manera especial a Melio Sáenz, director de la unidad de Investigación y Desarrollo de PETROECUADOR, por su invaluable e incondicional ayuda.

José Castro Carrasco

Quito, Mayo de 2005

# Resumen

El presente trabajo es una aplicación de GEOESTADISTICA, donde se intenta modelar el comportamiento de variables regionalizadas y su estimación mediante kriging. El objetivo del trabajo consiste en caracterizar la región que sujeta a cierta característica de interés nos permita obtener la mayor cantidad de petróleo en un yacimiento dado. En el capítulo inicial se describe los aspectos más importantes de la geología del petróleo. El siguiente capítulo presenta la formulación matemática del problema. El tercer capítulo contiene los conceptos fundamentales de geoestadística. El cuarto capítulo contiene el desarrollo de la aplicación en base a las observaciones medidas en el campo *frontera* (Ecuador). La parte final de este trabajo incluye las conclusiones y recomendaciones del estudio realizado.

# Abstract

The present work is an application of GEO-STATISTIC, in which I try to model the behavior of regionalized variables and their estimate by kriging. The objective of this work consists on characterization the region that subject to certain characteristic of interest that allows us to obtain the biggest quantity in petroleum in any location. The initial chapter describes the most important aspects of the geology of the petroleum. The following one chapter presents the mathematical formulation of the problem. The third chapter contains the fundamental concepts of geo-statistics. The fourth chapter contains the development of the application based on the observations measured in the field *frontera* (Ecuador). The final part of this work includes those summations and recommendations of the study.

# Índice general

Dedicatoria	IV
Agradecimiento	V
Resumen	VI
Abstract	VII
Introducción	1
<b>1. Geología del petróleo</b>	<b>3</b>
1.1. Formación de una trampa petrolífera . . . . .	3
<b>2. Planteamiento de problema</b>	<b>5</b>
2.1. Formulación matemática del problema . . . . .	5
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
3.1. Conceptos de estadística. . . . .	7
3.1.1. Espacio de Hilbert de Variables Aleatorias. . . . .	7
3.1.2. Procesos estocásticos. . . . .	8
3.2. Geoestadística. . . . .	9
3.2.1. Variograma . . . . .	10
3.2.2. Kriging . . . . .	13
3.2.3. Validación cruzada . . . . .	17
<b>4. Desarrollo de la aplicación y presentación de resultados</b>	<b>19</b>
4.1. Determinación el semivariograma . . . . .	19
4.2. Modelamiento y estimación del semivariograma . . . . .	22
4.3. Estimación de porosidad (Kriging) . . . . .	23



	IX
4.4. Validación del modelo (validación cruzada) . . . . .	27
<b>Conclusiones</b>	<b>30</b>
<b>Recomendaciones</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>32</b>

# Introducción

En *geoestadística* se combinan disciplinas como la geología, matemática y estadística lo que da origen a un conjunto de técnicas numéricas cuyo objetivo es la caracterización de atributos espaciales dentro de un dominio que es definido según sea el problema. En áreas como geología, ecología, y ciencias ambientales, los modelos estadísticos comunes resultan poco apropiados, por lo que existe la necesidad de otros modelos como los denominados modelos espaciales. Estos modelos espaciales son utilizados en aplicaciones como valoración de recursos minerales, monitoreos medio-ambientales, imágenes médicas, y otras aplicaciones que por naturaleza son espaciales. En estas situaciones se necesita mayor flexibilidad, porque el pasado, presente y futuro en la mayoría de casos no presentan un comportamiento similar en el espacio.

Datos que se encuentran cercanos en el espacio (y tiempo) pueden ser considerados homogéneos bajo algunas suposiciones, es decir presentan características similares, y conforme se alejan dichas características cambian. En geoestadística las variables que presentan un comportamiento similar en un espacio y que varían conforme se alejan de dicho espacio se entienden como "variables regionalizadas", es decir variables donde su comportamiento se rige a las características de la región donde se encuentran, la estimación de estas variables se la desarrolla a través de la técnica denominada *kriging*.

Una aplicación aún no desarrollada en Ecuador se presenta en los yacimientos de petróleo. Actualmente, la ubicación de pozos en un yacimiento obedece al criterio de la empresa encargada de la perforación que busca obtener la mayor cantidad de petróleo en el tiempo convenido, sin considerar la cantidad de crudo que no se extrae y el perjuicio que este representa. Los criterios empleados para la ubicación de los pozos, son la intuición del experto y la ubicación de explosivos en lugares estratégicos del yacimiento, para luego de su explosión a través de un dispositivo medir varias características como presión, permeabilidad, indicando así el lugar apropiado del pozo,

este segundo criterio exige mayores recursos.

Los principales objetivos de este trabajo son modelar las características espaciales de un pozo en un yacimiento (*variograma*) y mediante *kriging* determinar la ubicación de pozos en un yacimiento, donde los recursos empleados sean menores a los utilizados en yacimientos anteriores, y los resultados sean superiores.

# Capítulo 1

## Geología del petróleo

### 1.1. Formación de una trampa petrolífera

El petróleo es un líquido de origen orgánico, menos denso que el agua en la que sobrenada, de coloración generalmente oscuro y olor acre. El petróleo no aparece ligado a una gran cantidad de arena o arcilla, sino a una determinada relación entre ambas, cuya relación óptima varía según las diversas regiones y áreas fuente.

La existencia de petróleo en una determinada serie estratigráfica es causa de que esta serie se denomine *serie petrolífera*. Una serie petrolífera debe comprender estratos donde se hayan podido generar hidrocarburos a los que se denominan *rocas madres*, estratos donde se haya podido almacenar el petróleo denominados *rocas almacén* y capas impermeables superpuestas al conjunto, que impidan el desplazamiento del petróleo a la superficie llamadas *rocas cobertura*. Para que exista un yacimiento petrolífero es necesario que en la serie estratificada existan estos tres términos.

Las *rocas almacén* son aquellas que presentan las características adecuadas para la acumulación de petróleo siendo las más importantes *porosidad* y *permeabilidad*. La porosidad es el porcentaje de la roca que está ocupada por huecos, y así se dice que una roca es muy porosa cuando este porcentaje es elevado. La permeabilidad es la capacidad de que un fluido pueda circular libremente entre los poros de una roca, el ejemplo más común de roca porosa y permeable y que además forma la mayoría de almacenes de petróleo en el mundo son las *areniscas* de diversos tipos.

Si durante el proceso de migración del petróleo a través de rocas porosas éste se encuentra con algún obstáculo que dificulte la permeabilidad de éste, tiende a acumularse y constituir un *yacimiento de petróleo*. La zona donde se ha producido esta pérdida de permeabilidad constituye la llamada *trampa de petróleo*. En la figura 1 tenemos una trampa de petróleo donde podemos apreciar las rocas cobertura y almacén, además se puede observar la formación del yacimiento junto con sus otros componentes como agua, gas y en la parte superior se encuentran las "torres".

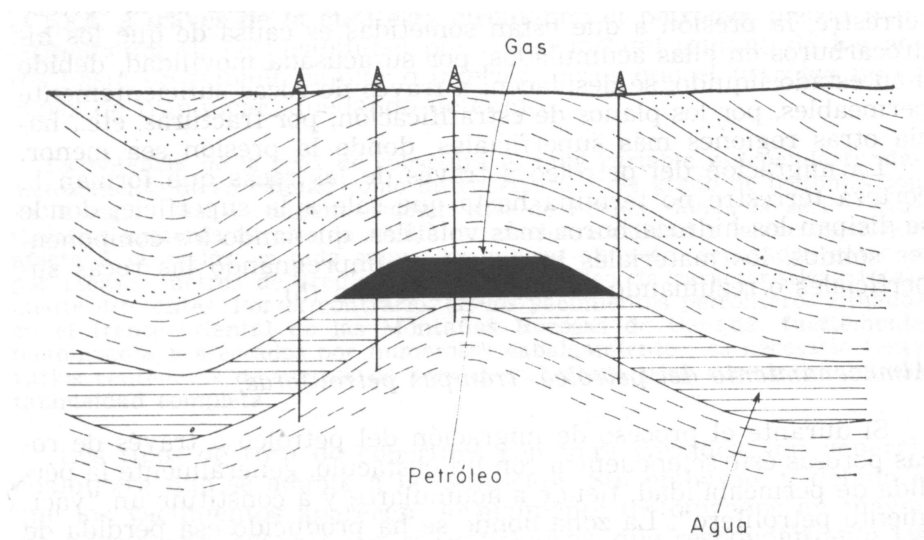


Figura 1. Formación de una trampa de petróleo

La investigación de los yacimientos de petróleo comprende tres etapas sucesivas: *geológica, geofísica, y de sondeo*. En la primera se hace un estudio estratigráfico y petrográfico del terreno. En la etapa geofísica se miden constantes físicas como densidad, características magnéticas, rigidez, entre otras, siendo los principales métodos utilizados, el gravímetro, el magnético y el sísmico. La etapa final, es la más costosa, pero es la decisiva porque es el momento donde se decide el lugar a colocar las torres.

La extracción de petróleo del subsuelo no suele ofrecer graves dificultades. Generalmente, surge al exterior en forma de un surtidor, a gran presión, entonces es suficiente *entubar* el pozo, colocar la válvula de cierre que impida la salida espontánea de petróleo y canalizarlo adecuadamente. Cuando la presión no es suficiente, se pueden emplear bombas de extracción, o inyectar agua a presión en sitios adecuados, lo que aumenta la presión natural del petróleo, obligándole a salir por los pozos ya previstos.

# Capítulo 2

## Planteamiento de problema

### 2.1. Formulación matemática del problema

Consideremos un dominio cerrado y convexo  $\Omega$  que representa el yacimiento de petróleo. El dominio está formado por el medio poroso (roca) y los fluidos (agua, petróleo, gas). El objetivo de nuestro trabajo consiste en estimar la región donde sujeta a cierta característica de interés o relevante, nos permita obtener la mayor cantidad de petróleo.

Sea  $p_j$  el pozo exploratorio ubicado en la coordenada  $X_j = (x_j, y_j, z_j)$ . El problema consiste en determinar el conjunto  $P = \{p_j\}$  tal que las variables medidas en la coordenada  $j$  presenten una relación de equivalencia que nos permita afirmar que  $P \subset \Omega$ . En el presente trabajo vamos a considerar como variable relevante la *porosidad efectiva* de la roca.

Sea  $R$  la relación de equivalencia, y sea  $\omega$  la variable relevante del sistema. Para  $\omega_i$  y  $\omega_j \in \Omega$ , diremos que  $\omega_i R \omega_j$  si cumple las siguientes condiciones:

1.  $\omega_i R \omega_i$  es verdadera.
2.  $\omega_i R \omega_j \Rightarrow \omega_j R \omega_i$ .
3.  $\omega_i R \omega_j \wedge \omega_j R \omega_k \Rightarrow \omega_i R \omega_k$ .

Las discontinuidades estructurales que presentan las rocas forman los poros, que son los espacios que pueden ser ocupados por los fluidos. Si los poros están conectados, pueden formar un sistema de conductos a lo largo de los cuales se moverá el fluido.

Si llamamos  $V_\phi$  al volumen total de vacíos o volumen de poros,  $\Phi$  el volumen total del medio poroso, entonces el índice de porosidad total, o simplemente porosidad total es igual a:

$$\phi = \frac{V_\phi}{\Phi}$$

Si consideramos únicamente los poros accesibles donde  $V_\phi^e$  es el volumen total de vacíos accesibles o volumen de poros accesibles,  $\Phi$  el volumen total del medio poroso, entonces el índice de porosidad efectiva, o simplemente porosidad efectiva es igual a:

$$\phi^e = \frac{V_\phi^e}{\Phi}$$

# Capítulo 3

## Marco Teórico

### 3.1. Conceptos de estadística.

#### 3.1.1. Espacio de Hilbert de Variables Aleatorias.

**Definición 1** *Un espacio de probabilidad es un espacio de medida  $(\Omega, F, P)$  con  $P(\Omega) = 1$ .  $\Omega$  es el espacio muestral,  $F$  es el conjunto formado por los eventos de  $\Omega$  y  $P$  es la medida de probabilidad Loeve, Michel (1962).*

Sea  $X$  una variable aleatoria definida en  $(\Omega, F, P)$  diremos que  $X$  tiene media de orden  $p$ ,  $1 \leq p < +\infty$  si  $E(|X|^p) < +\infty$ .

**Definición 2** *Se define  $L^p(\Omega, F, P) = \{X \in (\Omega, F, P) : E(|X|^p) < +\infty\}$  Loeve, Michel (1962).*

$L^p$  es un espacio lineal. Si consideramos que  $X, Y \in L^2$  y bajo el supuesto que  $X = Y$ , si  $X = Y$ , *c.t.p.*  $- P$ , entonces  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$  es un producto interno en  $L^2$ .

$L^2$  es un espacio de Hilbert con el siguiente producto interno:

$$\langle X, Y \rangle = E(XY)$$

donde notemos que  $\|X\|^2 = E(X^2)$ .

Una propiedad importante en un espacio de Hilbert  $H$  es que podemos definir una proyección ortogonal de  $X \in H$  dentro de un subespacio lineal cerrado  $M \subset H$  como el único punto  $\hat{X} \in M$  más cercano a  $X$ . Lo anteriormente expuesto se conoce como el



teorema de proyección, el mismo que representa el fundamento matemático de la teoría de estimación lineal y lo enunciamos a continuación.

**Teorema 1 (Proyección)** *Sea  $H$  un subespacio lineal cerrado en un espacio de Hilbert. Para cada variable aleatoria  $X \in H$  existe una descomposición ortogonal única*

$$X = X' + X'', X' \perp H, X'' \in H$$

*Loeve, Michel (1962).*

### 3.1.2. Procesos estocásticos.

**Definición 3** *Un proceso estocástico real  $Z$  parametrizado sobre  $D \subset R^d$ , es una familia de variables aleatorias reales  $\{Z(s) : s \in D\}$  definidas en un espacio de probabilidad común  $(\Omega, F, P)$ .*

$$\begin{aligned} Z : D \times \Omega &\longrightarrow R \\ (s, \omega) &\longrightarrow Z(s, \omega) \end{aligned}$$

El rango  $S \subset R$  de las variables se denomina espacio de estados del proceso. Por el teorema de *Kolmogorov, Fomin (1978)*, aseguramos que existe un proceso estocástico asociado a una familia de distribuciones en dimensión finita cuando se cumplen ciertas condiciones.

**Definición 4** *La función media  $\mu(s)$ , la función varianza  $\sigma^2(s)$  y la función covarianza  $\text{Cov}(s_1, s_2)$  de un proceso estocástico  $Z(s)$  se definen:*

$$\mu(s) = E[Z(s)]$$

$$\text{Cov}(s_1, s_2) = \text{Cov}[Z(s_1), Z(s_2)]$$

$$\sigma^2(s) = \text{Cov}(s, s) = \text{Var}[Z(s)]$$

#### Procesos estacionarios.

**Definición 5** *Un proceso estocástico  $\{Z(s) : s \in R^d\}$  se denomina estacionario si sus distribuciones en dimensión finita son invariantes por traslación *Ross, Sheldon (1983)*.*

**Definición 6** *Un proceso estocástico  $\{Z(s) : s \in R^d\}$  se denomina estacionario de segundo orden si sus dos primeros momentos son invariantes por traslación, es decir:*

$$\mu(s+h) = \mu(s) \forall s, h \in R^d$$

$$E[Z(s_1+h)Z(s_2+h)] = E[Z(s_1)Z(s_2)], \forall s_1, s_2, h \in R^d$$

Por las definiciones anteriores,  $\text{Cov}[Z(s), Z(s+h)] = C(h)$  es una función que depende sólo de  $h$ , a esta función se denomina covariograma. Cuando  $C$  depende sólo de  $\|h\|$ ,  $C$  se dice isotrópico.

**Definición 7** *Dados dos puntos,  $(s, s+h) \in R^d$  y un proceso estocástico  $Z(s) : s \in D \subset R^d$ , el variograma  $2\gamma(h)$  está dado por:*

$$2\gamma(h) = \text{Var}[Z(s+h) - Z(s)] = \| Z(s+h) - Z(s) \|^2$$

*Chilés, Jean and Delfiner, Pierre (1998).*

**Definición 8** *Un proceso estocástico  $\{Z(s) : s \in R^d\}$  se dice estacionario intrínseco si cumple que:*

$$\mu(s+h) = \mu(s), \forall s, h \in R^d$$

$$\text{Var}(Z(s+h) - Z(s)) = 2\gamma(h), \forall s, h \in R^d$$

*Ross, Sheldon (1983).*

Nota: Más adelante se presentará un tratamiento formal al variograma.

**Definición 9** *Un proceso estocástico  $\{Z(s) : s \in R^d\}$  se denomina gaussiano si todas sus distribuciones en dimensión finita son distribuciones multidimensionales gaussianas* *Ross, Sheldon (1983).*

## 3.2. Geoestadística.

En la mayor parte de los tratamientos estadísticos—matemáticos es conveniente trabajar bajo el supuesto de independencia entre las variables, sin embargo, modelos que involucran la dependencia son mucho más reales y tienen un mayor alcance para datos espaciales, donde la dependencia está presente en todas las direcciones y se vuelve cada vez más débil conforme se dispersan. En este trabajo se hará modelamiento estadístico para datos espaciales, donde los componentes básicos son localizaciones espaciales  $s_1, \dots, s_n$  y datos  $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$  observados en dichas localizaciones. Los datos pueden ser continuos o discretos, y las localizaciones espaciales pueden ser regulares o irregulares.

### 3.2.1. Variograma

La función  $2\gamma(\cdot)$  es un parámetro importante en geoestadística que mide la relación espacial entre las observaciones. Esta función nos permite medir la variabilidad espacial de un proceso estocástico  $\{Z(s) : s \in R^d\}$  donde para cada dos observaciones se obtiene una distancia de separación en una determinada dirección  $h$  y luego se calcula el valor correspondiente a la función varianza de  $Z(s+h) - Z(s)$ .

El estimador clásico del variograma, dado por *Matheron (1962)* es:

$$2\gamma\{h\} \equiv \frac{1}{|N(h)|} \sum_{N(h)} (Z(s_i) - Z(s_j))^2$$

donde la suma es sobre  $N(h) \equiv \{(i, j) : s_i - s_j = h\}$  y  $|N(h)|$  es el número de distintos elementos de  $N(h)$ . Este estimador es insesgado, sin embargo no es muy robusto, ya que la parte cuadrática se ve afectada por observaciones atípicas.

A  $\gamma(h)$  se conoce como semivariograma, el cual es independiente de la localización y depende sólo de la distancia del par de variables que son consideradas, ya que evalúa la disminución media en la similitud entre dos variables aleatorias cuando la distancia entre las variables aumenta. La velocidad de incremento de  $\gamma(h)$  respecto a  $h$  indica la velocidad a la cual la influencia de una variable decrece conforme aumenta la distancia definiendo la zona de influencia de la misma, es decir, evalúa la disminución media en la similitud entre dos variables aleatorias cuando la distancia entre las variables aumenta. Cuando  $\gamma(h)$  se vuelve constante nos encontramos en límite de la zona de influencia.

La estimación del semivariograma implica una suposición *ergódica*, es decir, que una realización es suficiente para determinar las propiedades del conjunto de todas las posibles realizaciones.

Que el proceso presente estacionalidad intrínseca significa que la media es constante. Una variación pequeña y sistemática en la media, como el aumento en la temperatura con la profundidad, se denomina *tendencia*.

Para la estimación del semivariograma no se necesita conocimiento de la media de la función aleatoria, además el semivariograma es insensible a la suma de una constante a la función aleatoria, y no obedece al hecho de que la tendencia sea constante, todo

esto hace preferible trabajar con el semivariograma que con la covarianza. Ambos, el semivariograma y la covarianza se refieren a la proporción de variación espacial de un proceso, pero mientras el semivariograma aumenta la covarianza decrece, es decir, la covarianza mide similaridad y el semivariograma mide disimilaridad.

El variograma presenta dos propiedades importantes: Continuidad y diferenciabilidad en  $L^2$ .

**Definición 10** Sea un proceso estocástico  $Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^d$ , se dice que  $Z$  es  $L^2$  continuo en  $s$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} E[Z(s+h) - Z(s)]^2 = 0$$

*Chilés, Jean and Delfiner, Pierre, (1998).*

**Definición 11** Sea un proceso estocástico  $Z(s) : s \in D \subset \mathbb{R}^d$ , se dice que  $Z$  es  $L^2$  diferenciable con respecto a  $h$  en  $s$  si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E\left[\frac{Z(s+\delta h) - Z(s)}{\delta}\right]^2, \delta \in \mathbb{R}$$

*Chilés, Jean and Delfiner, Pierre, (1998).*

Puede darse el caso en el cual el variograma no sea continuo en el origen, a lo que se denomina *efecto pepita (nugget effect)*, no obstante en este trabajo se va a considerar variogramas continuos incluso en el origen ya que si no lo es a este variograma lo puedo expresar como la suma de dos variogramas: uno con efecto pepita y otro totalmente continuo. Luego el comportamiento del variograma empieza en cero y luego se incrementa con  $|h|$ , este puede crecer indefinidamente o se estabiliza en cierto punto.

Como lo indicamos anteriormente, las variables regionalizadas, presentan características distintas conforme estas variables se alejan, no obstante nosotros esperamos que esa variabilidad se estabilice. El valor para el cual  $2\gamma(h)$  se estabiliza se denomina *rango* y el valor del variograma más allá del rango se denomina *meseta (sill)*. Podemos entender por rango a la zona de influencia explicada anteriormente. Las variables separadas por una distancia mayor al rango se denominan estocásticamente independientes.

**Teorema 2** Sea  $Z$  un proceso estocástico estacionario de segundo orden. Si  $\text{Cov}(h) = 0, \forall h > a$ , entonces

$\gamma(h) = \text{Cov}(h), \forall h > a$  donde  $a$  es el rango y la  $\text{Cov}(0)$  es la meseta.

Corolario: Sea  $Z$  un proceso estacionario de segundo orden donde la meseta es  $C$ , entonces

$$\text{Cov}(h) = C - \gamma(h)$$

Corolario: De lo anterior:

$$\text{Cov}(h) = \text{Cov}(0) - \gamma(h)$$

Olea, Ricardo (2003).

**Definición 12** Una función  $\theta(h) \in R^d$  tal que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \theta(s_i - s_j) \leq 0$  donde  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  se la llama condicionalmente definida negativa Chilés, Jean and Delfiner, Pierre, (1998).

Por la definición anterior, toda función  $\theta(h)$  definida negativa que cumpla la condición  $\theta(0) = 0$  representa el variograma de algún proceso estocástico.

Como lo indicamos anteriormente, el variograma puede presentar discontinuidad en el origen (efecto pepita), pero además cerca del origen puede presentar una forma de parábola o una forma lineal, en ambos casos son diferenciables, pero en el primer caso lo podemos apreciar de mejor manera.

Cuando un variograma varía con la dirección de  $h$  lo denominamos anisotrópico. Se pueden presentar dos casos: La meseta es constante pero el rango varía conforme a la dirección; la meseta es pequeña pero en una dirección específica. Cuando el variograma presenta variaciones importantes respecto a la dirección, decimos que los datos presentan una tendencia.

Como lo indicamos anteriormente, puede existir un número infinito de funciones que representen un variograma, pero en algunas aplicaciones se utilizan modelos estándares de variogramas, como el modelo esférico, exponencial, gaussiano, cúbico entre otros, incluso podemos hablar de modelos anidados que representa la combinación de más de uno de los modelos nombrados, no obstante la elección final del modelo la da el investigador fundamentado en su experiencia o en el tipo de elementos que se desee modelar.

### 3.2.2. Kriging

El principal problema en la geoestadística consiste en la reconstrucción de un fenómeno sobre un dominio con un número limitado de puntos observados, matemáticamente este problema puede ser resuelto como un problema de interpolación. A esta técnica G. Matheron en 1963 le dio el nombre de *kriging* por los trabajos realizados por D. G. Krige. Las aplicaciones en la naturaleza fueron los principales trabajos *Chilés, Jean and Delfiner, Pierre, (1998)*. Existe cierta similitud con los pronósticos en series de tiempo, donde dados valores del pasado, se busca predecir un valor para un tiempo en el futuro; *kriging* sigue la misma idea pero aquí no existe un concepto de pasado y futuro.

El *kriging* representa la estimación de un atributo espacial en un sitio no observado. Podemos definir al *kriging* como un estimador lineal insesgado de mínima varianza que depende usualmente de las propiedades de segundo orden del proceso. Primero debemos encontrar un modelo en el cual se estime las características de de variabilidad y correlación espacial para el caso en estudio, dicho modelo es el variograma, para luego, mediante *kriging* determinar el mejor valor posible para cada localización, siendo la varianza en dicha localización una medida de error en la estimación.

Dado que el kriging busca un estimador que es una combinación lineal, es importante presentar el siguiente teorema.

**Teorema 3** Sea  $\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(s_i)$  una combinación lineal de variables aleatorias, entonces

$$\begin{aligned} E[\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(s_i)] &= \sum_{i=1}^N \lambda_i E[Z(s_i)] \\ \text{Var}[\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(s_i)] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z(s_i), Z(s_j)) \end{aligned}$$

Los principales tipos de *kriging* son:

1. Simple
2. Ordinario
3. Universal

#### Kriging simple

Matheron denominó a este pronóstico espacial *kriging simple* porque cuenta con el hecho de que la media es conocida. Como lo indicamos anteriormente, el método consiste en una combinación lineal, podemos tratar este problema como un problema de optimización, es decir debemos determinar los coeficientes  $(\lambda_i)$  óptimos.

Sea  $\widehat{Z}(s_0)$  el estimador insesgado, entonces la estimación del error cuadrático medio  $\sigma^2(s_0)$  está dado por:

$$\sigma^2(s_0) = \text{Var}[\widehat{Z}(s_0) - Z(s_0)]$$

$$\sigma^2(s_0) = \text{Cov}(s_0, s_0) - 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{Cov}(s_i, s_0) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(s_i, s_j)$$

El mínimo error cuadrático es dado por los coeficientes que resulten al derivar  $\sigma^2(s_0)$  e igualar a cero.

$$\frac{\partial \sigma^2(s_0)}{\partial \lambda_i} = -2 \text{Cov}(s_i, s_0) + 2 \sum_{j=1}^k \lambda_j \text{Cov}(s_i, s_j), \text{ para } i = 1, 2, \dots, k$$

Esto da origen al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{Cov}(s_i, s_1) &= \text{Cov}(s_0, s_1) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{Cov}(s_i, s_2) &= \text{Cov}(s_0, s_2) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{Cov}(s_i, s_k) &= \text{Cov}(s_0, s_k) \end{aligned}$$

Al observar el sistema, podemos darnos cuenta que no podemos aplicar esta técnica si el muestreo se lo realiza en dos o más sitios iguales, ya que se repiten las ecuaciones y se formaría una matriz singular.

Las suposiciones necesarias para desarrollar el *kriging simple* son:

*Suposición 1.* La muestra  $z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_k)$  es la realización parcial de un proceso estocástico  $Z(x)$  donde  $x$  denota la localización espacial.

*Suposición 2.* El proceso estocástico es estacionario de segundo orden.

*Suposición 3.* La media es conocida.

**Definición 13** Sea  $Z$  un proceso estocástico estacionario de segundo orden con media  $m$ . El estimador de  $Z(s_0)$  está dado por la combinación lineal de variables en los sitios  $s_i$  considerados en la muestra Olea, Ricardo (2003).

$$\hat{Z}(s_0) = m + \sum_{i=1}^k \lambda_i (Z(s_i) - m)$$

Otras características que presenta esta técnica son:

1. Es independiente en traslaciones en el sistema cartesiano, ya que la covarianza es independiente de la localización, depende sólo de las distancias las mismas que no varían por traslaciones.
2. La estimación de la varianza depende de la configuración de los datos.
3. Si suma de los pesos es uno, el estimador es independiente del valor de la media.

### Kriging ordinario

Una diferencia importante entre el *kriging simple* y el *kriging ordinario*, consiste en que el segundo elimina la media del estimador. La estimación del error cuadrático medio  $\sigma^2(s_0)$  está dado por:

$$\sigma^2(s_0) = \text{Var}[\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)]$$

$$\sigma^2(s_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(s_i - s_0) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \gamma(s_j, s_0) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma(s_i, s_j)$$

**Definición 14** Sea  $\sigma^2(s_0)$  como se lo indicó anteriormente, sean los  $\lambda_i$  los pesos, y sea  $\mu$  el multiplicador de Lagrange, el Lagrangiano del kriging ordinario es:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k; \mu) = \sigma^2(s_0) + 2\mu(\sum_{i=1}^k \lambda_i - 1)$$

Para determinar los pesos óptimos, debemos derivar la función  $L$  respecto a los  $\lambda_i$  y respecto a  $\mu$  e igualarlos a cero. Esto nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(s_i, s_1) - \mu &= \gamma(s_0, s_1) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(s_i, s_2) - \mu &= \gamma(s_0, s_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma(s_i, s_k) - \mu &= \gamma(s_0, s_k) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i &= 1 \end{aligned}$$



Las suposiciones necesarios para desarrollar el kriging ordinario son:

*Suposición 1.* La muestra  $z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_k)$  es la realización parcial de un proceso estocástico  $Z(x)$  donde  $x$  denota la localización espacial.

*Suposición 2.* El proceso estocástico es estacionario de segundo orden.

**Definición 15** Sea  $Z$  un proceso estocástico estacionario de segundo orden. El valor del estimador  $Z(s_0)$  está dado por la combinación lineal de variables en los sitios  $s_i$  considerados en la muestra Olea, Ricardo, (2003)

$$\widehat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(s_i)$$

### Kriging universal

La diferencia entre el *kriging ordinario* y el *kriging universal*, consiste en que para el segundo la media del proceso no necesariamente va a ser constante. Sea  $m(s)$  la tendencia de  $Z$ , entonces  $m(s)$  esta dado por:

$$m(s) = \sum_{l=0}^n a_l f_l(x) \text{ donde } f_0(s) = 1$$

La estimación del error cuadrático medio  $\sigma^2(s_0)$  está dado por:

$$\sigma^2(s_0) = \text{Var}[\widehat{Z}(s_0) - Z(s_0)]$$

$$\sigma^2(s_0) = 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma_Y(s_0, s_i) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \lambda_j \gamma_Y(s_i, s_j)$$

**Definición 16** Sea  $\sigma^2(s_0)$  como se lo indicó anteriormente, sean los  $\lambda_i$  los pesos, y sea  $\mu_l$  el multiplicador de Lagrange, entonces el Lagrangiano del kriging universal es:

$$L(\lambda_i, \mu_l) = \sigma^2(s_0) + 2\mu_0(\sum_{i=1}^k \lambda_i - 1) + 2 \sum_{l=1}^n \mu_l(\sum_{i=1}^k \lambda_i f_l(s_i) - f_l(s_0))$$

Para determinar los pesos óptimos, debemos derivar la función  $L$  respecto a los  $\lambda_i$ , respecto a  $\mu_0$  y respecto a los  $\mu_l$  e igualarlos a cero. Esto nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma_Y(s_i, s_1) - \mu_0 - \sum_{l=1}^n \mu_l f_l(s_1) &= \gamma_Y(s_0, s_1) \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma_Y(s_i, s_2) - \mu_0 - \sum_{l=1}^n \mu_l f_l(s_2) &= \gamma_Y(s_0, s_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \\
& \sum_{i=1}^k \lambda_i \gamma_Y(s_i, s_k) - \mu_0 - \sum_{l=1}^n \mu_l f_l(s_k) = \gamma_Y(s_0, s_k) \\
& \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \\
& \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i f_1(s_i) = f_1(s_0) \\
& \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i f_2(s_i) = f_2(s_0) \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot \\
& \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i f_n(s_i) = f_n(s_0)
\end{aligned}$$

Las suposiciones necesarios para desarrollar el *kriging universal* son:

*Suposición 1.* La muestra  $z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_k)$  es la realización parcial de un proceso estocástico  $Z(x)$  donde  $x$  denota la localización espacial.

*Suposición 2.* El proceso estocástico es estacionario de segundo orden.

**Definición 17** *Sea  $Z$  un proceso estocástico estacionario de segundo orden. El estimador de  $Z(s_0)$  está dado por la combinación lineal de variables en los sitios  $s_i$  considerados en la muestra Olea, Ricardo (2003)*

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(s_i)$$

### 3.2.3. Validación cruzada

Una vez desarrollada la estimación de un atributo espacial, o en general de cualquier parámetro es importante, determinar la calidad de tal estimador. En términos generales esta técnica lo que nos indica es dada una muestra de tamaño  $n$ , elijo una subconjunto  $n_1$  y realizo la estimación, luego para las observaciones restantes utilizo el estimador encontrado previamente y en base a los resultados obtenidos puedo concluir sobre mi estimador.

Sea  $\hat{\theta}$  el estimador de un parámetro  $\theta$ , y sea  $z(s_i)$  una muestra aleatoria del proceso estocástico  $\{Z(s) : s \in R^d\}$ . El algoritmo para la validación cruzada, lo podemos resumir en los siguientes pasos:

1. Seleccione  $\hat{\theta}$  y  $z(s_i)$ .

2. Calcule los parámetros necesarios, en nuestro caso el variograma  $\gamma(h)$ .
3. Calcule el  $\hat{\theta}$  deseado en el dominio restante  $z(s_i)^c$ .
4. Reemplazar el  $z(s_i)$  seleccionado.
5. Ir a un sitio  $z(s_j), j \neq i$  aún no visitado.

# Capítulo 4

## Desarrollo de la aplicación y presentación de resultados

En el presente trabajo se van utilizar los datos de un pozo petrolífero en el yacimiento denominado *frontera*, donde se presentan las coordenadas UTM para los ejes  $x$ ,  $y$ , la coordenada  $z$  representa la profundidad, y el porcentaje de porosidad efectiva para cada ubicación espacial. El software que se ha utilizado es GSLIB, dicho paquete ha sido desarrollado bajo Fortran y fue utilizado para el desarrollo de este trabajo.

Los pasos a seguir para el desarrollo de la aplicación son los siguientes:

1. Determinación el semivariograma experimental.
2. Estimar el semivariograma (justificar su resultado).
3. Estimación de porosidad (kriging).
4. Validación del modelo (validación cruzada).

### 4.1. Determinación el semivariograma

El cálculo del semivariograma experimental es la herramienta geoestadística más importante en la determinación de las características de variabilidad y correlación espacial del fenómeno en estudio, es decir, conocer el cambio que experimenta la variable cuando la misma cambia de una localización a otra. Además de lo anteriormente

indicado, con el semivariograma se observa la presencia de valores aberrantes y la presencia de zonas homogéneas.

Como lo indicamos anteriormente, el semivariograma mide la disimilaridad para una variable aleatoria regionalizada, se espera que esta medida aumente conforme la distancia se incrementa. Por intuición podemos concluir que puntos que se encuentran cercanos comparten propiedades porque se encuentran bajo las mismas condiciones, y conforme se van distanciando los puntos las propiedades que comparten entre sí disminuyen, dicha distancia en la cual las propiedades se pierden es cuantificada mediante el semivariograma.

Una conclusión importante a la que se llegó es que el fenómeno es isotrópico, esto quiere decir que el semivariograma tiene el mismo comportamiento en cuatro direcciones (0, 45, 90 y 135 grados) con una tolerancia angular de 22.5 grados lo cual indica que el variograma no cambia en ninguna dirección.

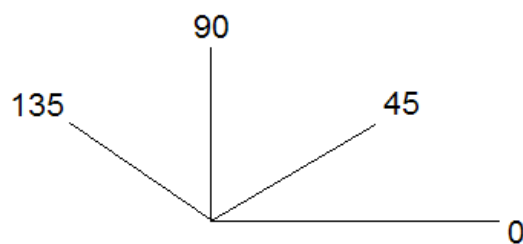


Figura 2. Direcciones para el cálculo del semivariograma

El semivariograma experimental fue calculado para un número de 25 lags, la distancia de separación para los lags es de 1 unidad, la tolerancia con la que se ha trabajado es de 0.5 por lag y la tolerancia angular considerada es de 22.5 grados. En el gráfico que presenta la figura número 3, explica mejor la terminología utilizada en este párrafo.

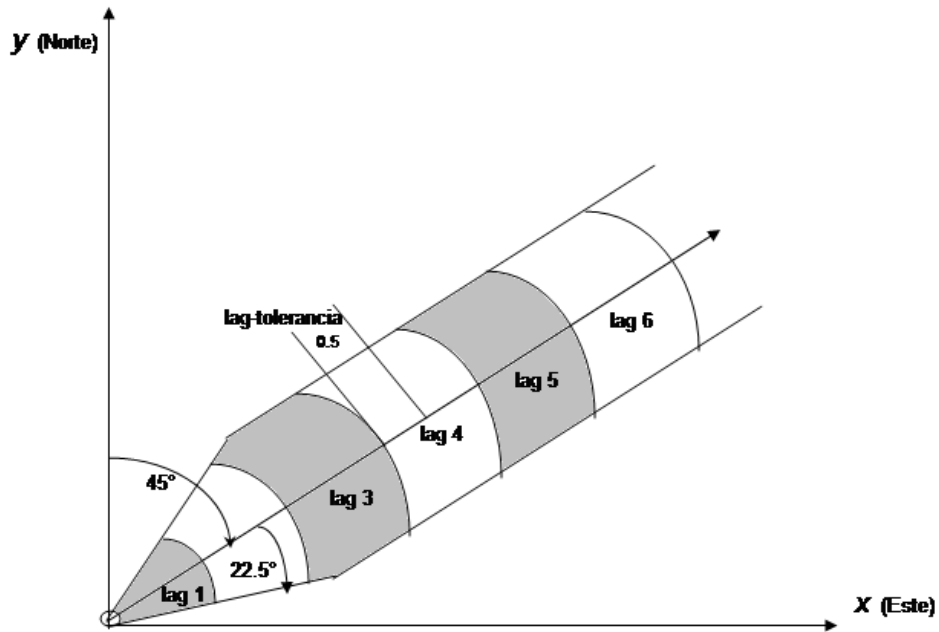


Figura 3. Valores considerados para el cálculo del semivariograma

En la figura 4, podemos observar que el semivariograma carece de efecto pepita, es decir presenta continuidad desde el origen, el rango o valor donde se estabiliza el semivariograma es 24, y alcanza un valor de meseta en 350. (*Esta terminología fue tratada en la sección 4.2.1*)

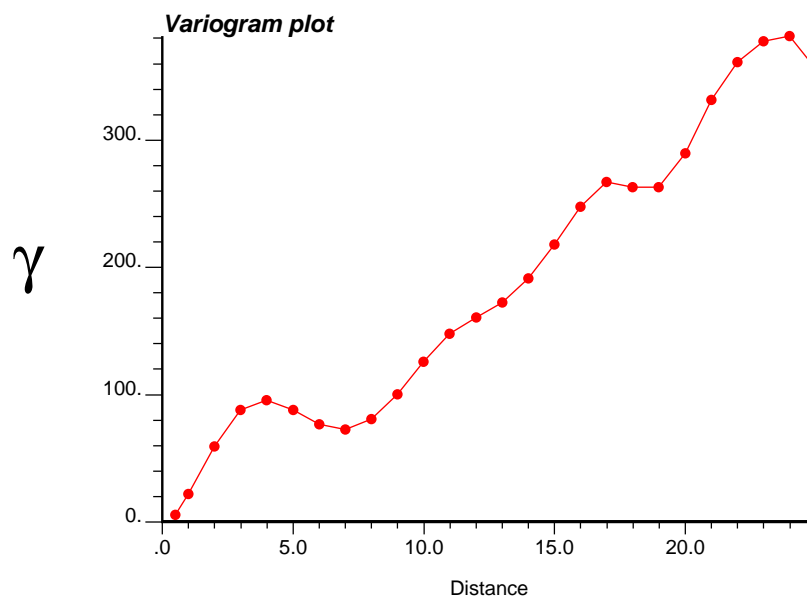


Figura 4. Semivariograma experimental

## 4.2. Modelamiento y estimación del semivariograma

Una vez determinado el semivariograma experimental, se debe estimarlo y así poder utilizarlo para todo el dominio (yacimientos) en estudio. El ajuste a modelos teóricos para la determinación de los parámetros del semivariograma se realiza de forma visual. En ocasiones se efectúan ajustes polinomiales por el método de los mínimos cuadrados u otras variantes, y aunque en la mayoría de los casos se encuentra el mejor ajuste, no siempre se verifica la condición de que el variograma obtenido sea positivo, siendo insatisfactorio porque no tiene sentido hablar de varianzas negativas, por tal motivo es recomendable trabajar con los modelos ya establecidos. Finalmente debe obtenerse uno o varios modelos de semivariogramas con los correspondientes valores de meseta y alcance. El modelo de semivariograma seleccionado debe ser lo más cercano posible al semivariograma experimental porque será usado posteriormente en el proceso de estimación.

En el capítulo 2.3 ya se explicó los tipos de semivariograma que podemos contruir, en base a ello y observando la figura número 1 podemos estimar el variograma a través de un modelo anidado, uno esférico y uno de efecto hoyo o efecto seno, esto dado el comportamiento del proceso. El modelo correspondiente al semivariograma esférico es:

$$\gamma(h) = 300\left(\frac{3}{2}\frac{h}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{24}\right)^3\right), 0 < h < 24$$

donde  $h$  es el lag, 300 representa la meseta y 24 es el rango.

El modelo correspondiente al semivariograma de efecto hoyo es:

$$\gamma(h) = 300\left(1 - \frac{\sin\left(\pi\frac{h}{24}\right)}{\pi\frac{h}{24}}\right)$$

donde  $h$  es el lag, 300 representa la meseta y 24 es el rango.

Como se lo indicó anteriormente, el modelo anidado que estima el variograma toma la forma de un esférico porque cerca del origen su comportamiento se parece al de una recta y presenta una meseta y un rango finito. Además de este modelo, se puede apreciar que existe un comportamiento no monótono donde que presenta una oscilación alrededor de la meseta para cierto periodo. En la figura número 5 se presenta el semivariograma experimental (color negro) y su estimación (color rojo).

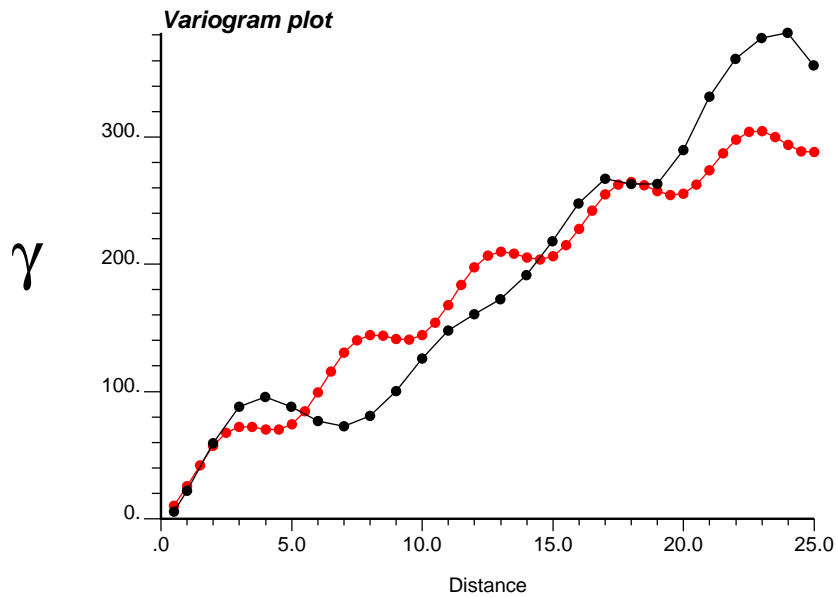


Figura 5. Estimación del semivariograma experimental

### 4.3. Estimación de porosidad (Kriging)

La estimación por kriging dio lugar a una nueva era en las tareas de pronóstico en las ciencias geológicas. El éxito de este método radica en que la varianza de estimación sólo depende de la posición geométrica de los datos dada por el semivariograma; esta varianza no está relacionada con los valores particulares en los puntos. Existen otros métodos de estimación, como el de triangulación e inverso de la distancia, pero estas dos técnicas de estimación utilizan directamente los valores muestreados en el proceso de estimación y refieren pesos de acuerdo a las distancias entre los datos, sin tener en cuenta la continuidad espacial de la información disponible.

El kriging parte del conocimiento de los valores del parámetro  $W$  para un conjunto de  $n$  puntos  $p_i$ . Previamente, se conoce la variabilidad del comportamiento de  $W$  en el dominio  $D$  donde se trabaja y esta variabilidad es calculada por el variograma que es la función de distancias definidas para el dominio  $D$ . Trabajando con el mismo variograma para todo el dominio  $D$ , tenemos que para un conjunto de  $k$  puntos la varianza de estimación solo depende de la posición geométrica de los puntos  $p_i$  ya que son las distancias entre cada punto lo que determinan los valores de cada término del variograma y de cada peso  $\lambda_i$  definido previamente.



Cuadro 4.1: Estimación de porosidad efectiva

Coordenada x	Coordenada y	Profundidad	Porosidad efectiva
994803.10	10026730	9025.0	61.9
994803.10	10026730	9026.5	48.3
994803.10	10026730	9031.0	<b>44.2</b>
994803.10	10026730	9038.5	20.1
994803.10	10026730	9026.5	48.3
994803.10	10026730	9043.0	<b>20.9</b>
994803.10	10026730	9045.5	22.8
994803.10	10026730	9050.0	22.5

Esta técnica consiste en efectuar una ponderación, es decir, atribuir un peso a cada valor observado, los pesos son calculados de manera que minimice la varianza de estimación resultante, considerando características geométricas del problema (*Matheron, 1970*), al minimizar la varianza hacemos un uso óptimo de la información disponible.

Como lo definimos en la sección 4.2.2, el kriging es un interpolador lineal insesgado de mínima varianza. Los resultados obtenidos a través del GSLIB para estimar el porcentaje de porosidad se presenta en el cuadro 1.

El cuadro 1 representa los resultados de la estimación por kriging. Tenemos un conjunto de 8 coordenadas espaciales ( $x, y, profundidad$ ), en la tercera columna se presenta el porcentaje de porosidad efectiva. En las coordenadas espaciales 3 y 6 no se ha incluido los valores reales de porosidad efectiva, y en base a los otros 6 valores de porosidad efectiva se realizó la estimación. Los valores estimados en la coordenada 3 y 6 son 44.2 y 20.9 respectivamente, y los valores reales de porosidad efectiva en las mismas coordenadas son 43.9 y 21.0 respectivamente. El error de estimación es muy cercano a cero, 0.3 para la coordenada espacial 3 y 0.02 para la coordenada espacial 6.

En la siguiente sección se presenta la validación cruzada, donde se estimó la porosidad efectiva de otros puntos y la validación de los resultados.

La figura número 6 presenta el porcentaje real de porosidad efectiva (color negro) y el

valor estimado del porcentaje de porosidad efectiva (color rojo). El error de estimación es muy cercano a cero, y la varianza de estimación es 7.69, estos valores ratifican el resultado teórico anteriormente conocido, es decir, que el kriging es un interpolador insesgado de mínima varianza.

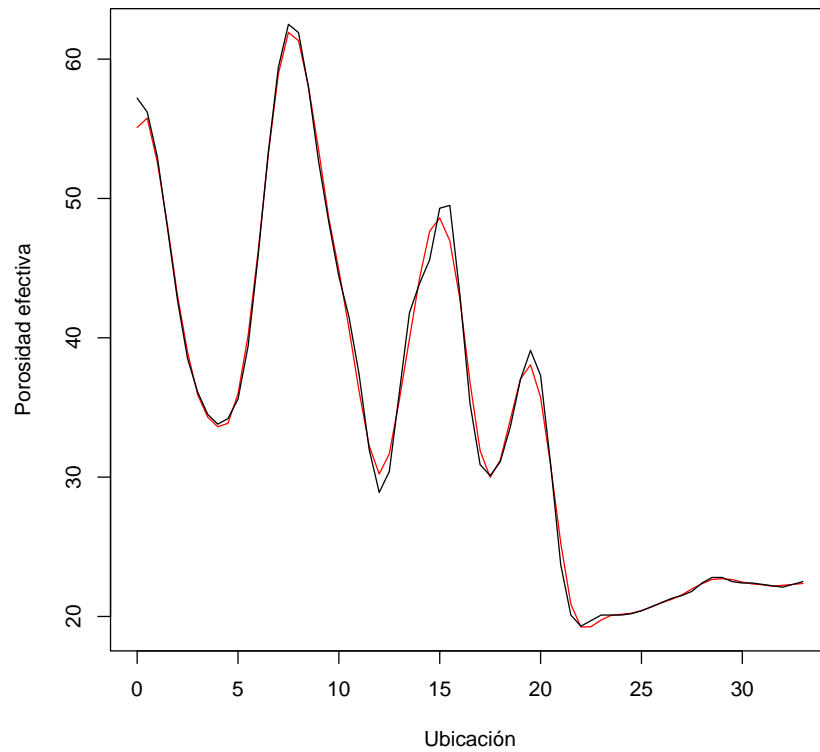


Figura 6. Porcentaje real y estimado de porosidad

Podemos observar que el error en muchos casos es despreciable. El 82,08 % de los errores de estimación presentan un error de una unidad. El 13,43 % de los errores de estimación se encuentran a dos unidades. El 4,49 % de los errores de estimación se encuentran entre 2 y tres unidades. De la figura número 7, además de los resultados anteriormente presentados, podemos observar que a partir del punto cuya ubicación espacial corresponde a una profundidad mayor a 9040, el error de estimación tiende a estabilizarse.

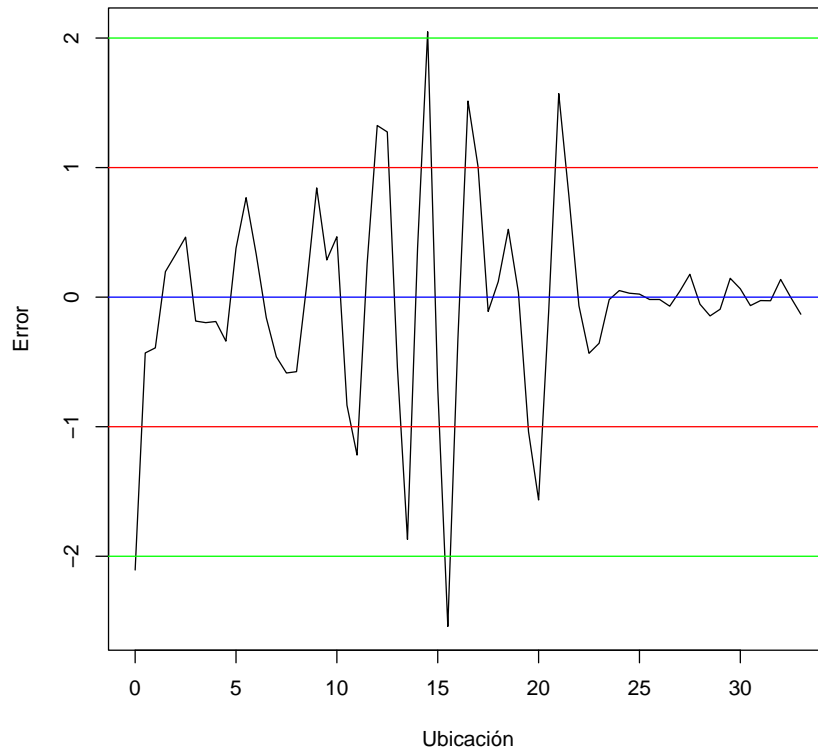
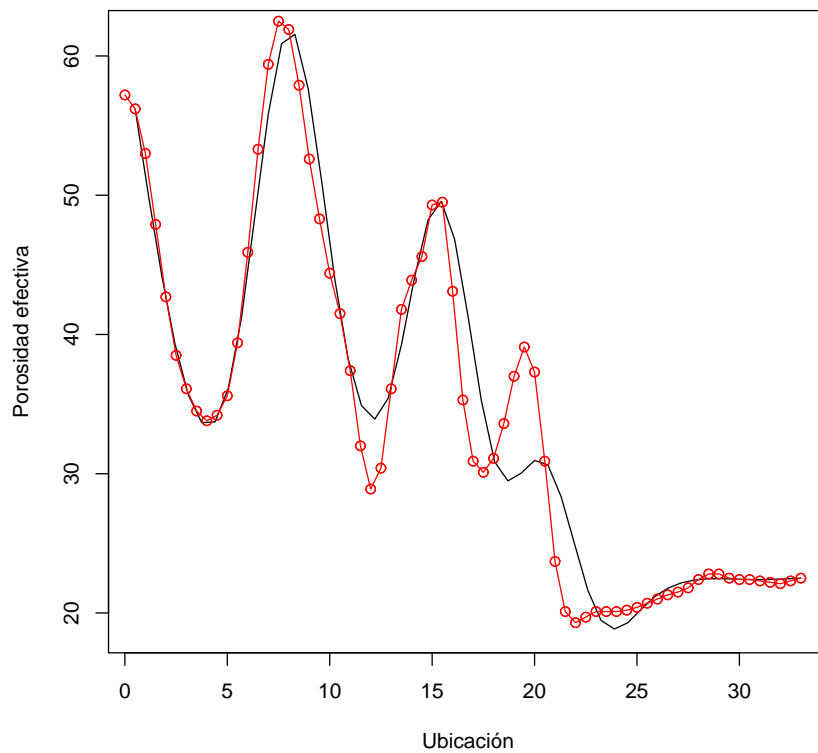


Figura 7. Errores de estimación

Para verificar la eficiencia del método kriging, se utilizó otro método de interpolación, splines. Los resultados de la porosidad efectiva (color negro) con la porosidad efectiva estimada (color rojo) se presentan en la figura número 8.



Cuadro 4.2: Errores de estimación: Kriging - Splines

Ubicación	Error kriging	Error splines
14	0.158	3.004
15	0.460	3.589
19	0.843	4.592
34	1.513	8.329
35	1.005	8.053
44	0.784	4.354

Figura 8. Porosidad efectiva estimada (splines)

En el cuadro 2 se presenta el error de estimación obtenida mediante kriging y mediante splines en seis puntos o ubicaciones, donde podemos apreciar que el primer método de estimación presenta menor error.

#### 4.4. Validación del modelo (validación cruzada)

El método de validación cruzada es una técnica para determinar el error de predicción. Recordemos que la estimación del semivariograma experimental se realiza de forma visual, es decir, variando los valores de los coeficientes de efecto pepita, meseta, alcance, hasta encontrar los valores que den un resultado similar al semivariograma experimental. Por lo anteriormente indicado es conveniente validar el modelo del semivariograma seleccionado.

Sea  $Z(X)$  el proceso estocástico con semivariograma  $\gamma(h)$ , sea la  $Cov(h)$  como se lo definió en el capítulo 3, y sea  $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$  los valores de  $Z(X)$  en  $n$  puntos medidos, el algoritmo de validación cruzada como se lo explicó consiste en suprimir el  $i$ -ésimo valor medido  $Z(x_i)$  y estimarlo a partir del resto de los datos. Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro 3 y 4.

Cuadro 4.3: Resultados de la validación cruzada

Valor real	Valor estimado	Error
57.20	55.093960	-2.1060370
56.20	55.769320	-.43068310
53.00	52.608460	-.39154050
47.90	48.096770	.19676590
42.70	43.027920	.32792280
38.50	38.963280	.46328350
36.10	35.915370	-.18462370
34.50	34.303260	-.19673540
33.80	33.612030	-.18796920
34.20	33.860080	-.33991620
35.60	35.977250	.37725070
39.40	40.167850	.76784520
45.90	46.232380	.33237460
53.30	53.141950	-.15804670
59.40	58.939300	-.46070480
62.50	61.914570	-.58542630
61.90	61.324820	-.57518390
57.90	57.987650	.87650E-01
52.60	53.443360	.84335710
48.30	48.586990	.28699110
44.40	44.866280	.46627430
41.50	40.665860	-.83413700
37.40	36.181050	-1.2189480
32.00	32.257590	.25758740
28.90	30.224920	1.3249240
30.40	31.675080	1.2750780
36.10	35.560070	-.53992460
41.80	39.930480	-1.8695220
43.90	44.276810	.37681200
45.60	47.648540	2.0485460
49.30	48.601660	-.69833760

Cuadro 4.4: Resultados de la validación cruzada (continuación)

Valor real	Valor estimado	Error
49.50	46.958400	-2.5416030
43.10	42.775440	-.32455440
35.30	36.813570	1.5135690
30.90	31.905060	1.0050640
30.10	29.989570	-.11042590
31.10	31.219990	.11999320
33.60	34.123710	.52371220
37.00	37.035710	.35709E-01
39.10	38.062030	-1.0379710
37.30	35.734550	-1.5654490
30.90	30.789680	-.11031720
23.70	25.271050	1.5710450
20.10	20.884590	.78458980
19.30	19.233210	-.66793E-01
19.70	19.266550	-.43345260
20.10	19.744200	-.35580250
20.10	20.080940	-.19062E-01
20.10	20.150810	.5080E-01
20.20	20.230260	.30263E-01
20.40	20.423370	.2336E-01
20.70	20.681910	-.1808E-01
21.00	20.981920	-.1807E-01
21.30	21.230280	-.6971E-01
21.50	21.545710	.4570E-01
21.80	21.976610	.17660900
22.40	22.345540	-.5446E-01
22.80	22.655120	-.14488030
22.80	22.706730	-.93271E-01
22.50	22.645520	.14551930
22.40	22.464610	.64613E-01
22.40	22.334550	-.65446E-01
22.30	22.273380	-.26617E-01
22.20	22.172250	-.2774E-01
22.10	22.236700	.13669780
22.30	22.298250	-.17471E-02
22.50	22.368320	-.13167950

# Conclusiones

1. Para el pozo de petróleo en estudio, correspondiente al yacimiento frontera, el fenómeno es isotrópico, esto quiere decir que el proceso tiene comportamiento similar en las cuatro direcciones angulares (0, 45, 90, y 135 grados).
2. El kriging es una herramienta geoestadística que permite estimar el resultado de cierta variable sin la necesidad de realizar procesos costosos, un ejemplo representa los resultados obtenidos en el presente trabajo.
3. Utilizando la técnica kriging, se estimó la porosidad efectiva en el pozo, los resultados fueron excelentes; el 82 % de las observaciones presenta un error de estimación inferior a 1.
4. La varianza de estimación es pequeña, el proceso presenta una varianza  $\sigma^2 = 7,69$ .

# Recomendaciones

1. Dada las oportunidades que ofrece el Ecuador en minería, agricultura, reservas naturales y otras, es importante difundir las aplicaciones geoestadísticas, así como su fundamento teórico para desarrollar proyectos de investigación.
2. Este trabajo representa sólo el comienzo de otros proyectos que se pueden realizar en el área petrolera, tales como: cokriging, diseños de experimentos espaciales, block kriging, entre otros.
3. Desarrollar un *Sistema de Información Geográfico*, donde se pueda apreciar mediante un mapa digitalizado los resultados obtenidos utilizando las herramientas geoestadísticas.



# Bibliografía

1. Melendez, Bermudo y Fuster, José. " *Geología*". 9na ed. España: Thomson, 1978.
2. Loeve, Michel. " *Teoría de la probabilidad*". 3rd ed. España: Tecnos, 1962.
3. Chilés, Jean and Delfiner, Pierre. " *GEOSTATISTICS: Modeling Spatial Uncertainty*". 1st ed. USA: Wiley, 1998.
4. Ross, Sheldon. " *A First Course in Probability*". 6th ed. USA: Prentice Hall, 2002.
5. Cressie, Noel. " *Statistics for Spatial Data*". 1st ed. USA: Wiley, 1993.
6. Isaaks, Edward and Srivastava, Mohan. " *Applied Geostatistics*". 1st ed. USA: Oxford, 1989.
7. Ripley, Brian. " *Spatial Statistics*". 1st ed. Usa: Wiley. 1981.
8. Olea, Ricardo. " *Geostatistics for engineers and earth scientists*". 1st ed. USA: Kluwer Academic Publishers, 1999.
9. Deutsch, Clayton and Journel, Andre, " *GSLIG: Geostatistical Software Library*". 1st ed. USA: Oxford. 1998.
10. The R Foundation for Statistical Computing. " *R Version 1.9.0*. Copyright 2004. ISBN 3-900051-00-3.