

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
Colegio de posgrados

**Estimación bayesiana y no paramétrica de modelos
ETAS aplicado a la recurrencia sísmica Ecuador 2016**

Fausto Fabian Crespo Fernández

Carlos Jiménez Mosquera, Ph.D.

Director de Trabajo de Titulación

Trabajo de titulación de posgrado presentado como requisito para la
obtención del título de Magister Matemáticas Aplicadas

Quito, noviembre 2016

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de posgrados

**HOJA DE APROBACIÓN DE TRABAJO DE
TITULACIÓN**

**Estimación bayesiana y no paramétrica de modelos
ETAS aplicado a la recurrencia sísmica Ecuador 2016**

Fausto Fabian Crespo Fernández

Carlos Jiménez Mosquera, Ph.D., _____
Director del Trabajo de Titulación

Julio Ibarra, Ph.D.(C), _____
Miembro del comité de aprobación de tesis

Carlos Jiménez Mosquera, Ph.D., _____
Director del Programa
de Maestría Matemáticas Aplicadas

César Zambrano, Ph.D., _____
Decano del Colegio de Ciencias e Ingeniería

Hugo Burgos, Ph.D., _____
Decano del Colegio Posgrados

Quito, noviembre 2016

© **Derechos de autor**

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante:	_____
Nombre:	<u>Fausto Fabian Crespo Fernández</u>
Código del estudiante:	<u>00123688</u>
CI:	<u>1753250339</u>
Lugar y fecha:	<u>Quito, noviembre 2016</u>

Dedicatoria

En primer lugar agradezco a mi Padre Celestial, pues la sabiduría viene de Él. Agradezco a mis padres que siempre me han apoyado, a mi esposa por tener la paciencia de sobrellevarme y de permitirme lograr esta meta. A mi hija por todo el tiempo que me ha prestado para realizar este trabajo, te será recompensado con creces. A mis hermanos y amigos.

Agradecimientos

Agradezco a Dios primeramente, a mi esposa, a mis padres y al Dr. Carlos Jiménez por acceder a ser el tutor de este trabajo.

Resumen

En este trabajo nuestro objetivo es analizar desde el punto de vista bayesiano la tasa de ocurrencia de los terremotos en Ecuador desde marzo 2016 al 16 de julio 2016. Se implementa en el lenguaje Rstan los modelos ETAS temporal, temporal con magnitud, espacio-temporal isótropo y anisótropo e hipocentral y se realizan simulaciones a partir de las distribuciones a posteriori de los parámetros de los modelos con lo que se logra obtener estimaciones del número acumulado de sismos mayor que una magnitud umbral y del comportamiento de los tiempos entre los eventos. Las estimaciones se validan con lo observado desde el 16 de julio 2016 hasta septiembre del 2016.

Palabras clave: Análisis Bayesiano, Rstan, ETAS, Ecuador.

Abstract

In this thesis our goal is to analyze from the Bayesian point of view the occurrence rate of earthquakes in Ecuador since March 2016 to July 16, 2016. We implement in Rstan language the ETAS models, beginning with the purely temporal model, temporal taking into account the magnitudes, space temporal models isotropic and anisotropic, and hypo-central model. Then simulations are conducted extracting values from the a posteriori distributions of the models parameters, to obtain estimations of the accumulated number of earthquakes with magnitude greater than a threshold and the behaviour of inter-time events. The estimations are validated with the observed from July 16 2016 to September 2016.

Keywords: Bayesian analysis, Rstan, ETAS, earthquake, Ecuador.

Índice general

1. Introducción	15
2. Revisión bibliográfica, metodología y diseño de la investigación	18
2.1. Ley Omori	18
2.2. Ley Gutenberg-Richter	20
2.3. Modelos ETAS	20
2.3.1. ETAS temporal	22
2.3.2. ETAS temporal con magnitudes	23
2.3.3. ETAS espacio temporal	27
2.3.4. ETAS hipocéntrico	30
2.4. Desagregación estocástica	31
2.5. Verosimilitud predictiva hacia adelante	32
2.6. Cadenas Markov Hamiltonianas	33
2.7. Estimaciones de los parámetros	36
2.8. Preprocesamiento	41

2.9. Análisis residual y bondad de ajuste	45
2.10. Tiempos entre eventos	46
3. Análisis de datos y resultados	48
4. Conclusiones	90
5. Referencias	91
Referencias	92
Anexos	98

Índice de cuadros

3.1. Distribución sismos Ecuador 18/03/2016-16/07/2016	49
3.2. Magnitud promedio mensual sismos en Manabí y Esmeraldas .	50
3.3. Resultados Rstan modelo temporal sin magnitudes y sismicidad fondo constante (100 iteraciones, 4 cadenas)	66
3.4. Resultados Rstan modelo temporal sin magnitudes y sismicidad fondo variable(100 iteraciones, 4 cadenas)	66
3.5. Resultados Rstan modelo temporal con magnitudes y sismicidad fondo constante(100 iteraciones, 4 cadenas)	67
3.6. Resultados Rstan modelo temporal con magnitudes y sismicidad fondo variable(100 iteraciones, 4 cadenas)	67
3.7. Resultados Rstan modelo espacio temporal con conglomerados isótropos con sismicidad constante(100 iteraciones, 4 cadenas)	68
3.8. Resultados Rstan modelo espacio temporal con conglomerados anisótropos con sismicidad constante(100 iteraciones, 4 cadenas)	68

3.9. Resultados Rstan modelo espacio temporal con conglomerados anisótropos con sismicidad variable(100 iteraciones, 4 cadenas)	69
3.10. Resultados Rstan modelo hipocentral con conglomerados anisótropos con sismicidad constante(100 iteraciones, 4 cadenas)	70
3.11. Resultados Rstan modelo hipocentral con conglomerados anisótropos con sismicidad variable(100 iteraciones, 4 cadenas)	70
3.12. Comparación de modelos Etas	71
3.13. Sismos con más de 3 réplicas directas	79
3.14. Sismos con mayor probabilidad de ser provocados por el sismo de magnitud 7.4 del 16 abril(enfoque frecuentista)	80
3.15. Sismos con probabilidad mayor de 95% de ser provocados por sismos 7.4 del 16 abril (enfoque bayesiano)	81

Índice de figuras

3.1. Distribución de sismos por profundidad	51
3.2. Distribución de sismos por magnitud y antigüedad	52
3.3. Distribución de sismos por magnitud	53
3.4. Distribución de sismos(foto Google Maps)	53
3.5. Número acumulado de sismos y magnitud de eventos en el tiempo	54
3.6. Tasa media diaria de sismos en el tiempo	54
3.7. Número de eventos de magnitud mayor o igual que una magnitud dada en función de las magnitudes	56
3.8. Logaritmo decimal número de eventos de magnitud mayor o igual que una magnitud dada en función de las magnitudes . .	56
3.9. Resultado desagregación estocástica en el paquete etas	58
3.10. Resultado desagregación estocástica en el paquete etas	58
3.11. Distribución magnitud, latitud, longitud sismos en tiempo . .	59
3.12. Intensidad de la sismicidad de fondo	60
3.13. Intensidad de la sismicidad inducida	60

3.14. Intensidad de la sismicidad total con eventos observados . . .	61
3.15. Intensidad de la sismicidad total	61
3.16. Diferencias estandarizadas entre teórico y observado etasFlp 1	62
3.17. Diferencias estandarizadas entre teórico y observado etasFlp 2	62
3.18. Conglomerado asociado al sismo 7.4 del 16 abril 2016 (1) . . .	64
3.19. Conglomerado asociado al sismo 7.4 del 16 abril 2016 (2) . . .	64
3.20. Densidad bivariada estimada por kernel	64
3.21. Evolución cadenas Etas anisótropo sismicidad cte	72
3.22. Distribuciones a posteriori Etas anisótropo sismicidad cte . . .	72
3.23. Correlación valores cadenas parámetros Etas anisótropo sismicidad cte	72
3.24. Correlación valores cadenas parámetros Etas anisótropo sismicidad cte	72
3.25. Probabilidad ser sismo espontáneo/inducido	77
3.26. Probabilidad ser sismo de fondo	77
3.27. Tasa sismicidad inducida	78
3.28. Índices sismos antecesores más probables	78
3.29. Número acumulado eventos Etas temporal sismicidad fondo constante	83
3.30. Residuos Etas temporal sismicidad fondo constante	83
3.31. Número acumulado eventos Etas temporal sismicidad fondo variable	84
3.32. Residuos Etas temporal sismicidad fondo variable	84

3.33. Número acumulado eventos Etas temporal sismicidad fondo constante vs variable	85
3.34. Residuos Etas temporal sismicidad fondo constante vs variable	85
3.35. Número acumulado eventos Etas temporal con magnitudes y sismicidad fondo constante	86
3.36. Residuos Etas temporal con magnitudes y sismicidad fondo constante	86
3.37. Número acumulado eventos Etas espacio temporal anisótropo sismicidad fondo variable	87
3.38. Residuos Etas espacio temporal anisótropo sismicidad fondo variable	87
3.39. Modelación tiempos entre sismos por la formula de Saichev- Sornette	89
3.40. Modelación tiempos entre sismos por la formula de Saichev- Sornette	89

Índice anexos

Modelos Rstan

1-Rstan para modelo Etas temporal

2-Rstan para modelo Etas temporal con magnitudes

3-Rstan para modelo Etas espacio temporal anisótropo

4-Rstan para modelo Etas hipocentral anisótropo

5-Rstan para modelo Etas espacio temporal anisótropo con sismicidad fondo variable

Capítulo 1

Introducción

Ecuador está en el llamado Anillo de Fuego y presenta una amplia actividad sísmica y volcánica. La subducción en la placa de Nazca en la frontera marítima de Ecuador y Colombia ha producido 4 mega terremotos en el pasado siglo: 1906(magnitud 8.8), 1942(magnitud 7.8), 1958(magnitud 7.7) y 1979(magnitud 8.2) (Collot y cols., 2004). Las fallas Paleogene-Neogene de Jama-Quininde y Esmeraldas definen una zona de aproximadamente 200 km que coincide con la zona de ruptura del terremoto de 1942.(Collot y cols., 2004) y que es altamente sísmica.

El pasado terremoto del 16 de abril 2016 de magnitud 7.8 (Lotto y Stein, 2016) (según los datos publicados por el Instituto de Geofísica de la Escuela Politécnica Nacional EPN la magnitud fue de 7.4) provocó billones de dólares en pérdidas materiales y más de 650 muertes. Por esto la importancia de estudiar el patrón de réplicas del terremoto del 16 abril del 2016 para hacer

predicciones.

La predicción de terremotos ha sido un problema difícil para los investigadores durante décadas. Las réplicas de un terremoto de gran magnitud suelen producirse en enjambres donde a veces se puede distinguir el sismo principal y otras veces, no. A su vez las réplicas pueden provocar otras réplicas de menor magnitud. Además los sismos tienden a estar correlacionados tanto espacialmente como temporalmente. También está el problema de los sismos precursores que son sismos de menor magnitud que preceden al sismo principal de mayor magnitud. Estos sismos precursores son sismos que no forman parte de conglomerados de sismos en curso y que son seguidos en corto tiempo por un sismo mayor. Las secuencias de réplicas contienen muchos eventos pequeños que están seguidos de eventos mayores, por tanto es difícil distinguir las réplicas de los sismos precursores. Por eso usualmente se trata de eliminar las réplicas de los datos lo que se conoce como declustering o desagregación.

Una de las formas más sencillas de modelar la tasa de ocurrencia de réplicas es mediante procesos de Poisson no estacionarios en tiempo o en espacio. Otros modelos empleados en análisis de datos sísmicos han sido Procesos Puntuales Marcados(Cressie, 1993)(las marcas son en este caso las magnitudes de los sismos), Procesos de Renovación de Markov homogéneo(Epifany, 2014) con una distribución de Weibull para los tiempos entre los sismos, mo-

delo ETAS o Epidemic-Type Aftershock Sequences (Utsu, Ogata, y Matsu'ura, 1995) (Ogata, 1998) , Procesos Poisson doblemente estocásticos (Varini y Ogata, 2014). BPT o Brownian Passage Times (WorkingGroup, 2003) que es un proceso de renovación dependiente del tiempo que describe los tiempos de ruptura en la falla, y Redes Bayesianas probabilísticas (Bayraktarli, Baker, y Faber, 2011).

En este artículo se analiza el modelo ETAS, tanto su versión puramente temporal sin tener en cuentas las magnitudes, luego teniendo en cuenta las magnitudes, la versión espacio- temporal y la versión hipocentral para predecir la tasa de ocurrencia de sismos con magnitud superior a un umbral determinado M_0 y como realizar una estimación de sus parámetros usando estadística bayesiana mediante HMC (Hamiltonian Markov Chains) presente en la librería Rstan que está implementada en C++ y que se utiliza mediante R.

Capítulo 2

Revisión bibliográfica, metodología y diseño de la
investigación

2.1. Ley Omori

La ley empírica de Omori(Omori, 1894) y la ley de Omori-Utsu o Modificada de Omori (Utsu y cols., 1995) describen la disminución de la frecuencia de las réplicas con el tiempo luego de un terremoto:

$$n(t) = \frac{K}{(t+c)}$$

$$n(t) = \frac{K}{(t+c)^p}$$

donde $n(t)$ es la tasa de ocurrencia de eventos, t es el tiempo desde el te-

remoto y K, c, p son constantes.

La constante c permite que podamos usar el tiempo $t = 0$ en la fórmula y redondea de manera apropiada aspectos complejos inmediatamente después del sismo principal y es normalmente menor a 0.1 días (Government of Japan, 1998). Además la tasa de ocurrencia de eventos disminuye con el inverso de la potencia p de $t + c$.

La ley de Omori usualmente se usa para modelar la dependencia de los sismos a corto plazo y los valores de p que más han aparecido en la práctica son de alrededor de 1. Si se toma en cuenta la propiedad de ramificación de la ocurrencia de los sismos, entonces el valor de p se incrementa de 1 a aproximadamente 1,5 (Y. Kagan y Knopoff, 1981).

El número acumulado de sismos en un intervalo de tiempo $[0, t]$ es

$$\delta(t) = \int_0^t n(s) ds = K[\ln(t+c) - \ln(c)] \text{ si } p = 1$$

$$\text{y } K[(t+c)^{1-p} - c^{1-p}]/(1-p) \text{ si } p \neq 1$$

(Ogata, 1983)

2.2. Ley Gutenberg-Richter

Otra ley empírica comúnmente usada es la ley de Gutenberg-Richter, que relaciona la magnitud con la frecuencia de ocurrencia de sismos con magnitudes mayores a M :

$$\log_{10}N(\geq M) = a - bM$$

O sea el número de eventos de magnitud mayor que una magnitud umbral decrece exponencialmente con el aumento de esa magnitud umbral mediante una ley de potencia.

2.3. Modelos ETAS

En general se modela la sismicidad con dos componentes: la sismicidad de fondo y la sismicidad desencadenada por eventos sísmicos anteriores en el tiempo. Estos modelos se formulan en función de la intensidad condicional en la historia pasada H_t (Daley y Vere-Jones, 2002): $\lambda(t, x, y, M | H_t)$ o sea el número esperado de sismos en la unidad de tiempo, espacio y magnitud.

Los Procesos Puntuales Marcados son modelos estocásticos usados para representar un número finito de eventos localizados en el tiempo y el espacio (Holden, Natvig, Sannan, y Bungum, 2000). Este enfoque donde las marcas

son las magnitudes de los sismos se discute en (Vere-Jones, 1995), (Ogata, 1998) y (Ogata, 1988).

Un terremoto T esta representado por una tupla $(x_i, y_i, z_i, t_i, M_i)$ donde x_i, y_i, z_i son la longitud, latitud y profundidad respectivamente (coordenadas del hipocentro), t_i es el tiempo de ocurrencia del terremoto y M_i es la magnitud del sismo i en la escala de Richter.

El modelo ETAS (Ogata, 1998) modela las magnitudes y los tiempos de los sismos y fue extendido al caso espacio temporal por Ogata en 1998 (Ogata, 1998). El modelo ETAS es un tipo especial de modelo de proceso puntual de tipo Hawkes, que son a veces llamados modelos de ramificación o modelos auto-excitativos. Estos modelos fueron llamados epidémicos por Ogata en 1988 puesto que cada sismo provoca réplicas y estas a su vez producen sus propias réplicas.

Los procesos puntuales tipo Hawkes (Hawkes y Adamopoulos, 1973) son modelos donde la intensidad es:

$$\lambda(t) = a + \sum_{i:t_i < t} g(t - t_i)$$

donde $a > 0$ es el término de fondo y $g(x) > 0$ es la contribución a la intensidad condicional después de un tiempo x y satisface $\int_0^\infty g(u) du < 1$ (Vere-Jones,

1995)

2.3.1. ETAS temporal

El modelo ETAS más sencillo es el modelo temporal con sismicidad de fondo constante:

$$\lambda(t|H_t) = \mu + \sum_{j:t_j < t} \frac{K(p-1)c^{p-1}}{(t-t_j+c)^p} \quad (\text{I})$$

donde μ es la intensidad de fondo que se asume primeramente constante (se mide en eventos/día) y $g(t) = \frac{(p-1)c^{p-1}}{(t+c)^p}$ es la función de densidad de probabilidad de los tiempos de ocurrencias de los eventos desencadenados por sismos precedentes en el tiempo.

Si se asume que la intensidad de fondo no es constante, sino que depende de la longitud y la latitud x, y (pero no del tiempo) tenemos :

$$\lambda(t|H_t) = \mu(x, y) + \sum_{j:t_j < t} \frac{K(p-1)c^{p-1}}{(t-t_j+c)^p} \quad (\text{I})$$

donde $\mu(x, y)$ ahora se mide en eventos/día por unidad de longitud y por unidad de latitud. Generalmente se asume que $\mu(x, y) = \mu u(x, y)$.

2.3.2. ETAS temporal con magnitudes

Teniendo en cuenta la magnitud de los sismos tenemos el modelo

$$\lambda(t|H_t) = \mu + \sum_{j:t_j < t} \frac{K(p-1)c^{p-1}Ae^{\alpha(M_j - M_0)}}{(t-t_j+c)^p} \quad (\text{II})$$

donde M_0 es la magnitud umbral que se escoge arbitrariamente como la mínima magnitud que proporciona la completitud del catálogo de sismos (Sornette y Werner, 2005a) y (Sornette y Werner, 2005b). En (Sornette y Werner, 2005b) se demostró que esta magnitud umbral no está relacionada con la magnitud mínima para desencadenar otros eventos que es lo que realmente representa M_0 en el modelo ETAS (Touati, 2011). Y también se demostró que un M_0 mayor causa que el parámetro α y la razón de ramificación (o número de sismos hijos por sismo padre) se reduzca o sea más sismos parecen ser independientes. (Touati, 2011).

Además $\kappa(M) = Ae^{\alpha(M - M_0)}$ es el número esperado de eventos desencadenados por un evento de magnitud M .

Analógamente si se asume que la intensidad de fondo no es constante, sino que depende de la longitud y la latitud x, y tenemos :

$$\lambda(t|H_t) = \mu(x, y) + \sum_{j:t_j < t} \frac{K(p-1)c^{p-1}Ae^{\alpha(M_j - M_0)}}{(t-t_j+c)^p} \quad (\text{II})$$

La tasa de eventos en los modelos ETAS puede explotar. La estabilidad depende de la razón de ramificación n (número esperado de hijos de un evento padre). Se tiene

$$n = \int_0^\infty dt \int_{M_0}^{M_{max}} s(m) \lambda(t) dm$$

con $s(m)$ la distribución de las magnitudes por la ley De Gutenberg-Richter y $\lambda(t)$ el término de ramificación en la ecuación (II)

Para el modelo ETAS temporal con magnitudes y $p > 1$

$$n = \frac{Kc^{1-p}\beta}{(p-1)(\beta-\alpha)} \frac{1-e^{-(\beta-\alpha)(M_{max}-M_0)}}{1-e^{-\beta(M_{max}-M_0)}}$$

donde β es el parámetro de la distribución de las magnitudes $s(m) = \beta e^{-\beta m}$ y $\beta = b \ln 10$ (b de Gutenberg-Richter)

Si se asume $M_{max} = \infty$ se reduce a

$$n = \frac{Kc^{1-p}\beta}{(p-1)(\beta-\alpha)} \text{ (Sornette y Werner, 2005a) y (Touati, 2011)}$$

y n es infinito si $p < 1$ o si $\alpha > \beta$

Si cada evento induce otro evento $n = 1$ y el proceso se propaga indefinidamente.

Esto justifica normalizar las funciones que aparecen en la sumatoria correspondiente a los eventos precedentes. Por ejemplo

$$\int_0^{\infty} \frac{K}{(t+c)^p} dt = 1$$

implica agregar la constante $(p-1)c^{p-1}$ a K y

$$\int_{M_0}^{M_{max}} \beta e^{-\beta(m)} dm = 1$$

requiere agregar $1/(\exp(-\beta M_0) - \exp(-\beta M_{max}))$ a la constante β .

La tasa de eventos esperada en función del tiempo se puede calcular como

$$\bar{n}(t) = \int_{M_0}^{\infty} n(t) s(m) dm$$

donde $s(m) = \beta e^{-\beta(m-M_0)}$ o sea

$$\begin{aligned} \bar{n}(t) &= \int_{M_0}^{\infty} e^{\alpha(m-M_0)} \frac{K}{(t+c)^p} \beta e^{-\beta(m-M_0)} dm = \frac{K}{(c+t)^p} \int_{M_0}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(m-M_0)} dm \\ &= \frac{\beta}{\beta-\alpha} \frac{K}{(c+t)^p} \end{aligned}$$

(Touati, 2011)

Si se integra por el tiempo da el número de réplicas en una secuencia promedio o sea la razón de ramificación n y si se quiere el tiempo T tal que la integración de 0 a T de una fracción determinada k de n se obtiene

$$kn = \frac{\beta}{\beta-\alpha} K \frac{c^{1-p} - (c+T)^{1-p}}{p-1}$$

(Touati, 2011)

El número de eventos hijos de un evento de magnitud m es una variable de Poisson con media $\kappa(m) = Ae^{\alpha(m-M_0)}$ con $m \geq M_0$. La probabilidad de que un evento de magnitud m no tenga eventos hijos de magnitud mayor de m' es

$$\begin{aligned} \zeta(m, m') &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(\text{cada hijo tiene magnitud } \leq m' \text{ y no tiene descendientes } \geq m' \mid \text{evento magnitud } m \text{ tiene } n \text{ hijos directos}) \Pr(\text{evento magnitud } m \text{ tiene } n \text{ hijos directos}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{M_0}^{m'} s(u) \zeta(u, m') du \right]^n \frac{(\kappa(m))^n}{n!} e^{-\kappa(m)} \\ &= \exp[-\kappa(m)] \left(1 - \int_{M_0}^{m'} s(m^*) \zeta(u, m') du \right) \end{aligned}$$

(Zhuang y Ogata, 2006) donde $s(m) = \beta e^{-\beta(m-M_0)}$ es la densidad de probabilidad de las magnitudes (Gutenberg-Richter) y de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \zeta(m, m') &= \exp[-\kappa(m)F(m')] \\ \text{con } F(m') &= 1 - \int_{M_0}^{m'} s(m^*) \exp[-\kappa(m)F(m')] dm^* \end{aligned}$$

es la probabilidad de que el mayor sismo en un conglomerado y todos sus descendientes tienen magnitud mayor o igual que m' (Zhuang y Ogata, 2006) También se puede calcular la probabilidad de la extinción de eventos inducidos de un evento magnitud m

$$\begin{aligned} P_c(m) &= \Pr(\text{el árbol de ramificación del evento magnitud } m \text{ se extingue}) \\ &= \Pr(\text{evento magnitud } m \text{ produce un número finito descendientes}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} Pr(\text{cada hijo produce número finito de descendientes} | \text{evento} \\
&\text{magnitud } m \text{ tiene } n \text{ hijos directos}) Pr(\text{evento magnitud } m \text{ tiene } n \text{ hijos directos}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{M_0}^{+\infty} s(u) \zeta(u, m') du \right]^n \frac{(\kappa(m))^n}{n!} e^{-\kappa(m)}
\end{aligned}$$

y haciendo $P_c(m) = \exp[-C\kappa(m)]$ con C constante se obtiene

$$C = 1 - \int_{M_0}^{\infty} s(m^*) \exp[-C\kappa(m)] dm^*$$

y sustituyendo $\kappa(m) = Ae^{\alpha(m-M_0)}$ y $s(m) = \beta e^{-\beta(m-M_0)}$ se obtiene

$$C = 1 - \frac{\beta}{\alpha} C^{-\beta/\alpha} \Gamma(-\frac{\beta}{\alpha}, C)$$

con $\Gamma(x) = \int_x^{\infty} e^{-u} u^a du$ la función Gamma incompleta complementaria. (Zhuang y Ogata, 2006)

2.3.3. ETAS espacio temporal

En el modelo ETAS espacio temporal la intensidad condicional de los sismos es

$$\lambda(t, x, y) = \mu(x, y) + \sum_{j: t_j < t} \kappa(M_j) g(t - t_j) f(x - x_j, y - y_j | M_j, H_t) \quad (\text{III})$$

donde

$\mu(x, y)$ es la intensidad de fondo que es función de la latitud y longitud pero no del tiempo.

$\kappa(M) = Ae^{\alpha(M-M_0)}$ es el número esperado de eventos desencadenados por evento de magnitud M (Utsu, 1969), (Yamanaka y Shimazaki, 1990).

$g(t) = \frac{(p-1)c^{p-1}}{(t+c)^p}$ es la función de densidad de probabilidad de los tiempos de

ocurrencia de los eventos desencadenados por otros eventos anteriores.

y la densidad de probabilidad espacial de los sismos puede tener una de las formas:

$$f(x, y | M, H_t) = \frac{1}{2\pi d e^{\alpha(M_j - M_0)}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2d e^{\alpha(M_j - M_0)}}\right) \quad (\text{IIIa})$$

$$\circ f(x, y | M, H_t) = \frac{(q-1)d^{q-1}}{\pi} * \left\{ \frac{x^2 + y^2}{e^{\alpha(M - M_0)}} + d \right\}^{-q} \quad (\text{IIIb})$$

$$\circ f(x, y | M, H_t) = \frac{(q-1)d^{q-1} e^{\alpha(M - M_0)}}{\pi} * \{x^2 + y^2 + d\}^{-q} \quad (\text{IIIc})$$

$$\circ f(x, y | M, H_t) = \frac{(q-1)}{\pi d e^{\alpha(M - M_0)}} * \left\{ 1 + \frac{x^2 + y^2}{d e^{\alpha(M - M_0)}} \right\}^{-q} \quad (\text{IIIId})$$

(Ogata y Zhuang, 2006) y (Hernandez Vargas, 2012)

La intensidad $\mu(x, y)$ dependiente de la posición se calcula mediante superficies de splines bicubicos(Ogata, 1998), funciones kernel (Zhuang, Ogata, y Vere-Jones, 2002) Helmstetter y cols., 2007), promedio de grillas(Tsukakoshi and Shimazaki, 2006), teselación(Ogata 2004), mediante estimación no paramétrica por el método Forward Likelihood Predictive o FLP(Adelfio y Chiodi, 2011) que está implementado en la librería etasFLP de R.

En 1998 propuso el siguiente modelo ETAS espacio temporal:

$$\lambda(t, x, y) = \mu + \sum_{j: t_j < t} g(t - t_j, x - x_j, y - y_j, M_j | H_t) \quad (\text{IV})$$

donde $g(t, x, y, M) = \frac{Ke^{\alpha(M-M_0)}}{(t+c)^p} \left\{ \frac{x^2+y^2}{e^{\gamma(M-M_0)}} + d \right\}^{-q}$

y la intensidad de fondo μ es contante y la versión normalizada de $g(t, x, y, M)$

es

$$g(t, x, y, M) = \frac{K(p-1)c^{p-1}(q-1)d^{q-1}\alpha e^{(\alpha-\gamma)(M-M_0)}}{\pi(t+c)^p} * \left\{ \frac{x^2+y^2}{e^{\gamma(M-M_0)}} + d \right\}^{-q}$$

Los modelos anteriores modelan la correlación espacial entre los sismos, condicionada a la magnitud del evento principal, a través de la distancia euclídeana entre los sismos: $D = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$ o sea de forma isotrópica(no depende de la dirección, sólo de la distancia), sin embargo el propio Ogata propuso modelos anisótropos donde los conglomerados tienen formas elípticas:

$$\lambda(t, x, y) = \mu + \sum_{j:t_j < t} g(t - t_j, x - x_j, y - y_j, M_j | H_t)$$

donde $g(t, x, y, M) = \frac{Ke^{\alpha(M-M_0)}}{(t+c)^p} \left\{ \frac{pS_j p^T}{e^{\alpha(M-M_0)}} + d \right\}^{-q}$

$p = (x - x_j, y - y_j)$ (vector fila), x_j, y_j son las coordenadas del sismo precedente j al sismo de epicentro x, y (ambos el un mismo conglomerado) y S_j son matrices simétricas definidas positivas que representan la matriz de varianza covarianza normalizada de los conglomerados de sismos obtenidos al aplicar

el algoritmo MBC o Magnitud Based Cluster. Este método se basa en seleccionar el sismo de mayor magnitud M_j entre los que no estén en ningún conglomerado aún (si hay dos con igual magnitud se escoge el más antiguo) y todos los sismos del mismo conglomerado son aquellos con latitud y longitud de $\pm 3,33 * 10^{0,5M_j-2}$ km (distancia espacial de Utsu) desde la latitud y longitud del primer sismo y con una diferencia de tiempo del mismo hacia adelante de $\max(100, 10^{0,5M_j-1})$ días (Ogata, 1998). Luego se repite el proceso con los sismos que no están aún en ningún conglomerado y así sucesivamente.

Además Ogata en 2011 (Ogata, 2011) propuso un método para estimar los parámetros del modelo ETAS dependientes de la latitud y longitud usando triangulación de Delaunay con los 3 sismos más cercanos a un sismo dado.

2.3.4. ETAS hipocéntrico

En el artículo (Guo y Zhou, 2015) se presenta una modificación del modelo ETAS espacio temporal que incluye las profundidades de los sismos:

$$\lambda(t, x, y) = \mu + \sum_{j:t_j < t} g(t - t_j, x - x_j, y - y_j, M_j | H_t)$$

$$\text{donde } g(t, x, y, M) = \frac{Ke^{\alpha(M-M_0)}}{(t+c)^p} \left\{ \frac{pS_j p^T}{e^{\alpha(M_j-M_0)}} + d \right\}^{-q} h(z - z_i, z_i)$$

$$y h(z, z') = \frac{\left(\frac{z}{Z}\right)^{\eta \frac{z'}{Z}} \left(1 - \frac{z}{Z}\right)^{\eta \left(1 - \frac{z'}{Z}\right)}}{Z B\left(\eta \frac{z'}{Z} + 1, \eta \left(1 - \frac{z'}{Z}\right) + 1\right)}$$

con Z es el grosor de la capa sismogénica y $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}$ es la función Beta

2.4. Desagregación estocástica

Consideramos una serie de eventos (t_j, x_j, y_j) con $j = 1, \dots, N$ asociados con las probabilidades ρ_j $j = 1, \dots, N$ y supongamos que cada evento j es removido con probabilidad ρ_j , entonces los eventos restantes representan un nuevo proceso puntual llamado thinned process. Ahora ρ_j es la probabilidad de que el evento j sea inducido por los eventos restantes anteriores en el tiempo $\rho_j = \sum_{i=1}^{j-1} \rho_{i,j}$ donde $\rho_{i,j}$ es la probabilidad de que evento j sea inducido por evento i y la probabilidad de que el evento j es evento de fondo es $1 - \rho_j$. Si borramos el evento j con probabilidad ρ_j para todo $j = 1, \dots, N$ obtendremos proceso Poisson no homogéneo asociado a la intensidad espacial $\mu(x, y)$. Este subproceso se llama proceso de fondo y al proceso complementario se le llama proceso de aglomeración. (Zhuang y cols., 2002)

La función de intensidad total es

$$m_1(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t, x, y | H_t) dt \approx \mu(x, y) + \frac{1}{T} \sum_{j: t_j < t} \kappa(M_j) f(x - x_j, y - y_j | M_j)$$

Se puede estimar mediante estimación de kernel gaussiano

$$\hat{m}_1(x, y) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N k_{d_j}(x - x_j, y - y_j) \text{ con } k_d(x, y) = \frac{1}{2\pi d} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2d^2}\right)$$

y d_j es un ancho de banda variable para cada sismo j que se calcula: dado n_p entero entre 10 y 100 encontramos el disco más pequeño centrado en el epicentro del evento j y con radio mayor de cierto valor pequeño (0.02 grados). La tasa de ocurrencia del conglomerado y de los subprocesos de fondo se calculan mediante

$$\hat{\gamma}(x, y) = \frac{1}{T} \sum_j \rho_j k_{d_j}(x - x_j, y - y_j) \text{ y}$$

$$\hat{\mu}(x, y) = \hat{m}_1(x, y) - \hat{\gamma}(x, y) = \frac{1}{T} \sum_j (1 - \rho_j) k_{d_j}(x - x_j, y - y_j)$$

(Zhuang y cols., 2002)(Zhuang, Ogata, y Vere-Jones, 2004)

Este método está implementado en el paquete `etas` en R, se usa para estimar la sismicidad de fondo $\mu(x, y)$ y luego obtener estimaciones de los otros parámetros de los modelos ETAS mediante Rstan.

2.5. Verosimilitud predictiva hacia adelante

Se estima al mismo tiempo la intensidad de fondo y la intensidad inducida del proceso de ramificación del modelo ETAS. Se basa en incrementos sucesivos del logaritmo de la verosimilitud al adicionar un evento cada vez.

Sea

$$\log L(\hat{\lambda}_{\psi; H_{t_k}}(z); H_{t_{k+1}})$$

el logaritmo de la verosimilitud con los primeros $k + 1$ eventos usando el estimador $\hat{\lambda}_{\psi; H_{t_k}}(z)$ donde ψ son los parámetros. Se mide la información predictiva de los primeros k eventos en el evento $k + 1$ mediante

$$\delta_{k,k+1}(\psi) = \log L(\hat{\lambda}_{\psi; H_{t_k}}(z); H_{t_{k+1}}) - \log L(\hat{\lambda}_{\psi; H_{t_k}}(z); H_{t_k})$$

Esto es similar a la validación cruzada pero solo aplicado a los eventos siguientes.

Por tanto se escoge $\tilde{\psi}(H_{t_k})$ que maximiza

$$FLP_{k_1, k_2}(\tilde{\psi}) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \delta_{k, k+1}$$

con $k_1 = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ y $k_2 = n - 1$

Este método es mejor que la estimación de kernel para modelos espacio temporales (Chiodi y Adelfio 2011)

2.6. Cadenas Markov Hamiltonianas

MCMC o Monte Carlo Markov Chains es una clase general de métodos para extraer valores de la distribuciones a posteriori de los parámetros.

Las cadenas de Markov se estabilizan en un estado de equilibrio independientemente del estado inicial si la cadena es irreducible (de cualquier estado se puede llegar a otro con probabilidad > 0), aperiódica (la cadena no es atrapada en ciclos) y recurrente positiva (el número de pasos para llegar de un estado a otro es finito).

Si θ es el último valor aceptado del parámetro, se propone un nuevo valor θ^* a partir de una distribución de salto $q(\cdot|\cdot)$ o sea $\theta^* = q(\cdot|\theta)$ y calculamos

$$r = \frac{L(\theta^*)p(\theta^*)q(\theta^*|\theta)}{L(\theta)p(\theta)q(\theta|\theta^*)}$$

donde L es la verosimilitud, p es la a priori. Para el caso del algoritmo Metropolis la distribución de salto es simétrica. Luego se genera una valor u de una distribución uniforme y si $u < \min\{1, r\}$ aceptamos el valor θ^* y sino, se rechaza. (Barrows, 2016)

EL algoritmo Metropolis-Hastings puede que no explore eficientemente el espacio de los parámetros

En el algoritmo HMC las estimaciones de los parámetros son tratadas como partículas físicas que se mueven en la superficie de la verosimilitud. La energía potencial es análoga a - logaritmo de la verosimilitud $U(\theta) = -\log(L(\theta)p(\theta))$. La energía cinética es $K(r) = \frac{1}{2}r^T M^{-1}r$ donde $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ con n es el número de componentes de θ y $M_{n \times n}$ una matriz cuadrada que pue-

de ser la identidad pero también puede ser la correlación de las componentes de θ . El hamiltoniano del sistema es $H(\theta, r) = U(\theta) + K(r)$ y la dinámica del sistema está dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= M^{-1}r \\ \frac{dr}{dt} &= -\nabla U(\theta)\end{aligned}$$

El método de Euler para el sistema anterior provoca inestabilidad y se usa en su lugar Leapfrog donde se emplean longitudes de paso de ϵ y $\epsilon/2$ para las evoluciones de $\frac{dr}{dt}$ en el primer paso y el último respectivamente.

Los valores finales de los pasos del Leapfrog son los valores propuestos (θ^*, r^*) y son aceptados o rechazados similar al Metropolis, pero ahora

$$r = \exp[H(\theta, r) - H(\theta^*, r^*)]$$

Esto viene de la definición del Hamiltoniano como función de energía. La distribución de la energía potencial total en función del Hamiltoniano es

$$P(\theta, r) = \frac{1}{Z} \exp(-H(\theta, r))$$

con Z una constante de normalización. Entonces

$$r = \frac{P(\theta^*, r^*)}{P(\theta, r)} = \exp[H(\theta, r) - H(\theta^*, r^*)]$$

(Barrows, 2016)

2.7. Estimaciones de los parámetros

Los parámetros del modelo ETAS se estiman generalmente maximizando el logaritmo de la verosimilitud:

$$\log L(\theta) = \sum_j \log \lambda(t_j | H_t) - \int_0^{T_{max}} \lambda(t) dt$$

para los modelos (I) y (II) y

$$\log L(\theta) = \sum_j \log \lambda(t_j, x_j, y_j | H_t) - \int_0^{T_{max}} \int_S \lambda(t, x, y) dx dy dt$$

para los modelos espacio-temporales donde θ es el vector de parámetros y S es la región que contiene los sismos, generalmente $[long_{min}, long_{max}] \times [lat_{min}, lat_{max}]$.

Para los modelos (I) y (II) el logaritmo de la verosimilitud tiene las formas analíticas siguientes:

$$\log L(\mu, k, p, c) = \sum_{i=1}^N \log(\lambda(t_i)) - \mu T_{max} - k \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{c^{p-1}}{(T_{max} - t_i + c)^{p-1}}\right)$$

$$\log L(\mu, k, p, c, A, \alpha) = \sum_{i=1}^N \log(\lambda(t_i)) - \mu T_{max} - kA \sum_{i=1}^N e^{\alpha(M_i - M_0)} \left(1 - \frac{c^{p-1}}{(T_{max} - t_i + c)^{p-1}}\right)$$

Para el caso de los modelos ETAS espacio temporales, el logaritmo de la verosimilitud no tiene una forma analítica cerrada. Como se menciona en (Schoenberg, 2013) la primera sumatoria del logaritmo de la verosimilitud se puede calcular fácilmente pero la integral en general es difícil de aproximar. Las aproximaciones numéricas de esta integral pueden ser computacionalmente costosas ya que la función tiene picos en 3 dimensiones y esta integral tiene que ser calculada para cada tupla de parámetros durante la optimización. (Schoenberg, 2013). Schoenberg menciona que las aproximaciones de la integral funcionan mal con las rutinas de optimización. En (Ogata, 1998) se divide el espacio alrededor de cada sismo en K cuadrantes y se calcula la integral en cada cuadrante, sin embargo esto es computacionalmente costoso y la elección del número K es problemática. (Schoenberg, 2013). En (Schoenberg, 2013) se propone para el modelo espacio temporal (IV) la aproximación:

$$\log L(\mu, k, p, c, d, \alpha, \gamma) \approx \sum_{i=1}^N \log(\lambda(t_i)) - \mu T_{max} - k \sum_{i=1}^N e^{\alpha(M_i - M_0)}$$

Esta aproximación que asume que el tiempo $T_{max} \rightarrow \infty$ y el tamaño del área observada de los sismos tiende al infinito, es exacta si para cada sismo la región de las réplicas provocadas por éste está contenida enteramente dentro del área observada. (Schoenberg, 2013) y tiene la propiedad de que para cualquier j y valores cualesquiera de los parámetros del modelo ETAS

$$Ke^{\alpha(M_j - M_0)} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(t - t_j, x - x_j, y - y_j) dt dx dy \geq \int \int_S \int g(t - t_j, x - x_j, y - y_j) dt dx dy$$

O sea si ciertos valores de los parámetros son pobres entonces $k \sum_{i=1}^N e^{\alpha(M_i - M_0)}$ será más grande que $\int \int_S \int g(t - t_j, x - x_j, y - y_j) dt dx dy$ y la rutina de optimización evitará estos valores de los parámetros. (Schoenberg, 2013)

Sin embargo en (Lippiello, Arcangelis, Giacco, y Godano, 2014) se analiza esta aproximación y se demuestra que la suposición de que $t \rightarrow \infty$ es demasiado cruda lo que provoca que se introduzcan sesgos sistemáticos. (Lippiello y cols., 2014)

Debido a que los sismos analizados en las provincias de Manabí y Esmeraldas están en una zona reducida (comparada al radio de la tierra) podemos despreciar la curvatura de la tierra en dicha zona y hallar el círculo de radio mínimo que cubre todos los sismos para aproximar la integral doble de la verosimilitud, en este trabajo se explora la posibilidad de calcular la integral del modelo espacio temporal de conglomerados isotrópicos (IV) haciendo la región S el círculo de menor radio que contiene las posiciones de los sismos. Esto se hace mediante el algoritmo de Welzl (Welzl, 1991) y luego podemos hacer una aproximación de la integral mediante coordenadas polares centradas en la posición de cada sismo con:

$$\log L(\mu, k, p, c, d, \alpha, \gamma) \approx \sum_{i=1}^N \log(\lambda(t_i)) - \mu T_{max} \pi r^2 -$$

$$k\alpha \sum_{i=1}^N e^{\alpha(M_i - M_0)} \left(1 - \frac{c^{p-1}}{(T_{max} - t_i + c)^{p-1}}\right) * \left(1 - \frac{d^{q-1}}{\left(\frac{r_i^2}{e^{\alpha(M_i - M_0)}} + d\right)^{q-1}}\right) \}$$

donde r es el radio del círculo de menor radio que contiene todos los sismos y r_i la distancia más grande entre la coordenadas del sismo i y los sismos precedentes según la métrica definida en el conglomerado al que pertenecen. (En general para resolver la doble integral sobre el área de los sismos en coordenadas polares centradas en el sismo i , la distancia ρ depende del ángulo θ y aquí se aproxima el ρ máximo en cualquier dirección como la máxima distancia entre el sismo i y los demás sismos).

En esta aproximación no se asume que $t \rightarrow \infty$ sino que la integral respecto al tiempo va de 0 a T_{max} .

El algoritmo de Welzl se basa a que el círculo de radio mínimo que contiene los puntos debe contener a lo sumo 3 en su frontera (sólo dos puntos si los mismos están sobre un diámetro). Este algoritmo es aleatorizado e incremental y en cada paso mantiene el círculo de cubrimiento mínimo y añade un punto: si el punto está dentro del círculo mínimo actual, éste no se actualiza, pero si está afuera entonces el nuevo círculo mínimo pasa por el nuevo punto. Este algoritmo tiene un orden esperado $O(n)$. En resumen el algoritmo es:

- 1- Se aleatorizan los puntos p_1, p_2, \dots, p_{i-1} y sea C_j es el círculo de cubrimiento mínimo de p_1, p_2, \dots, p_j ($j \leq i - 1$) con el punto p en la frontera
- 2- Conocemos C_{j-1} y queremos agregar p_j . Si p_j está dentro de C_{j-1} entonces $C_{j-1} = C_j$ y si está fuera entonces C_j tendrá en su frontera a p_j y a p

3-Trazamos la línea l por p_j y p y la mediatriz de l , y se puede asumir sin pérdida de generalidad que la primera línea es vertical, luego encontramos puntos p_l y p_r a la derecha e izquierda de l tales que los centros de los círculos que pasan por $p_j = q, p, p_l$ y $p_j = q, p, p_r$ estén lo más a la izquierda y a la derecha de l respectivamente. Luego escojemos el círculo de menor radio de los 3 anteriores.

Para el modelo anisótropo se cambia la distancia euclidiana por la métrica definida por la matriz de varianza covarianza normalizada S_j donde ahora el r_i se calcula como la máxima distancia según dicha métrica anterior y el resto de los sismos precedentes en el conglomerado.

Para el modelo ETAS hipocentral, el logaritmo de la verosimilitud es

$$\log L(\theta) = \sum_j \log \lambda(t_j, x_j, y_j | H_t) - \int_0^{T_{max}} \int_S \int_0^Z \lambda(t, x, y) dz dx dy dt$$

y en este caso usamos la misma aproximación propuesta para la integral doble sobre S . Para poder comparar el modelo hipocentral con los modelos anteriores usamos la corrección del logaritmo de la verosimilitud del modelo hipocentral $\log(L_{3d}) = \log(L_{2d}) - N \log(Z)$ (Guo y Zhou, 2015)

Para el caso de los modelos (I) y (II) con sismicidad de fondo variables (en vez de μ se tiene $\mu * \mu(x, y)$) el logaritmo de la verosimilitud es

$$\log L(\mu, k, p, c) = \sum_{i=1}^N \log(\lambda(t_i)) - \mu t_{\max} \sum_{i=1}^N \mu(x, y) - k \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{c^{p-1}}{(t_{\max} - t_i + c)^{p-1}}\right)$$

$$\log L(\mu, k, p, c, A, \alpha) = \sum_{i=1}^N \log(\lambda(t_i)) - \mu t_{\max} \sum_{i=1}^N \mu(x, y) - kA \sum_{i=1}^N e^{\alpha(M_i - M_0)} \left(1 - \frac{c^{p-1}}{(t_{\max} - t_i + c)^{p-1}}\right)$$

y análogamente para los modelos espacio temporal e hipocentral.

Se obtuvieron estimaciones de los parámetros de los modelos ETAS mediante FLP y se compararon con las estimaciones obtenidas mediante Monte Carlo cadenas de Markov MCMC (Rasmussen 2011), en este caso Hamiltonian Monte Carlo HMC que está implementado en la librería Rstan. También para el caso de los modelos temporales (I) y (II) se compararon los resultados obtenidos con Rstan con los obtenidos mediante el programa ETAS.exe de Ogata disponible en (["http://www.ism.ac.jp/ogata/S-tatsei4/programme.html"](http://www.ism.ac.jp/ogata/S-tatsei4/programme.html), s.f.) y que minimiza $-\ln L$ mediante el método de Davidon-Fletcher-Powell (Fletcher y Powell, 1963).

2.8. Preprocesamiento

Para lograr eficiencia se realizó un preprocesamiento consistente en no pasarle a la librería Rstan directamente los tiempos, magnitudes y latitudes de los sismos (como se hace para el modelo temporal en Stackoverflow

(“<http://stackoverflow.com/questions/37033535/stan-programming-for-etaz-model>”, s.f.) y (“<http://stackoverflow.com/questions/37699772/stan-code-for-large-data-set>”, s.f.) lo que provocaría que en cada iteración hubiera que re calcular por cada sismo, las diferencias de tiempo, latitud y longitud, con todos los sismos anteriores

($O(N^2)$), sino que previamente en R, se ordenaron los datos por tiempo descendente y se calcularon estas diferencias en tres listas de dimensión $N(N-1)/2$ que no hace falta recorrer pues para cada sismo j sabemos los índices inicial y final donde están las diferencias de su tiempo, latitud y longitud con respecto a los sismos anteriores en el tiempo son:

$$inicio = N * (j - 1) - (j * (j - 1)) / 2 + 1$$

$$fin < -j * N - (j * (j + 1)) / 2$$

Para el caso del modelo de conglomerados anisótropos se ajustaron los datos de los sismos de cada conglomerado con cuatro modelos normales bivariados (Ogata 1998, Ogata 2006, Ogata 2011):

$$N\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$N\left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$N\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1^2 & \tilde{\rho} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{\rho} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 & \tilde{\sigma}_2^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$N\left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\rho} \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\rho} \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

donde (x_1, y_1) son la latitud y longitud del sismo principal del conglomerado, (\bar{x}, \bar{y}) son las coordenadas del centroide del conglomerado y los parámetros corresponden a

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= [\sum_j (x_j - x_1)^2 + \sum_j (y_j - y_1)^2] / (2n) \\ \hat{\sigma}^2 &= [\sum_j (x_j - \bar{x})^2 + \sum_j (y_j - \bar{y})^2] / (2n) \\ \tilde{\sigma}_1^2 &= [\sum_j (x_j - x_1)^2] / n, \quad \tilde{\sigma}_2^2 = [\sum_j (y_j - y_1)^2] / n \\ \tilde{\rho} &= [\sum_j (x_j - x_1)(y_j - y_1)] / (n \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2) \\ \hat{\sigma}_1^2 &= [\sum_j (x_j - \bar{x})^2] / n, \quad \hat{\sigma}_2^2 = [\sum_j (y_j - \bar{y})^2] / n \\ \hat{\rho} &= [\sum_j (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})] / (n \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \end{aligned}$$

(Ogata, 1998)

y se escogió el modelo con el menor $AIC = -n \ln(\det(S)) + 2k$ donde S es la matriz de varianza covarianza de cada uno de los cuatro modelos y k es el número de parámetros correspondiente. (Ogata, 1998). Para el caso de que el número de sismos en el conglomerado es menor que 6 se escoge de los dos primeros modelos el de menor AIC (Ogata, 1998). Luego se normaliza la matriz de varianza covarianza escogida quedando

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \begin{pmatrix} \sigma_2/\sigma_1 & -\rho \\ -\rho & \sigma_1/\sigma_2 \end{pmatrix}$$

Además se calculó previamente, para cada conglomerado, todas las distancias de cada sismo a cada uno de los sismos precedentes en el mismo conglomerado, tanto definida por la distancia euclídeana como con la métrica anisótropa.

Una vez que se tienen los parámetros de los modelos ETAS podemos estimar la probabilidad de que un evento dado es espontáneo o es desencadenado por otros

(Y. Y. Kagan y Knopoff, 1980)(Zhuang y cols., 2002). La contribución de la tasa de sismicidad espontánea a la ocurrencia de un evento i se puede tomar como la probabilidad de que el evento i es espontáneo(Zhuang y cols., 2008):

$$\phi(i) = \frac{\mu(x_i, y_i)}{\lambda(t_i, x_i, y_i)}$$

Similarmente la probabilidad de que el evento j es producido por el evento i es

$$\rho_{ij} = \frac{\kappa(M)g(t_j - t_i)f(x_j - x_i, y_j - y_i, m_i)}{\lambda(t_i, x_i, y_i)}$$

en términos de las funciones definidas en (III).

También podemos obtener el número esperado de réplicas directas del sismo i como $\sum_j \rho_{ij}$ (Zhuang y cols., 2008)

Podemos además verificar el supuesto de que la intensidad sísmica de fondo $\mu(x,y)$ es estacionaria o sea no depende del tiempo calculando para cada t :

$$S(t) = \sum_{i:t_i < t} \phi(i) \text{ (Zhuang y cols., 2004)}$$

2.9. Análisis residual y bondad de ajuste

El análisis de los residuos y la bondad de ajuste de los modelos se puede hacer como se menciona en (Zhuang y cols., 2004) o sea podemos evaluar la función de intensidad sísmica en el tiempo, magnitud, latitud, longitud y profundidad de cada sismo(según el modelo ETAS que corresponda) y comparar la curva acumulada obtenida del modelo con la observada. En este caso como tenemos los valores de los parámetros obtenidos de la distribución a posteriori podemos hacer simulaciones y para cada tupla de parámetros, evaluar en la función de intensidad sísmica y luego calcular la mediana de estos valores y los cuantiles al 0,025 y 0,975 para obtener un intervalo al 95 %.

Para analizar las diferencias entre los modelos y lo observado podemos graficar el tiempo transformado $\lambda(t)$.

2.10. Tiempos entre eventos

La relación entre los tiempos entre los eventos y los modelos ETAS fue estudiada analíticamente por (Saichev y Sornette, 2007) y (Saichev y Sornette, 2006) y se analiza la propuesta de la existencia de una ley universal de escalamiento (Corral, 2004) para la función de densidad de probabilidad de los tiempos de recurrencia o tiempos entre sismos (tiempo entre dos eventos sucesivos) τ

$$H(\tau) \approx \lambda f(\lambda \tau)$$

donde la función $f(x)$ se ha encontrado prácticamente la misma en diferentes regiones (Saichev y Sornette, 2007) y λ la tasa media de eventos observados en dicha región. (Saichev y Sornette, 2007)

.

El factor de ecalamiento de los tiempos entre sismos se toma como el inverso de su media .

.

La forma de la función $f(x)$ que se demuestra en (Saichev y Sornette, 2007) es

$$f(x) = (n\varepsilon^\theta x^{-1-\theta} + [1 - n + n\varepsilon^\theta x^{-\theta}]^2) \varphi(x, \varepsilon)$$

donde θ es el parámetro de la forma de la ley de Omori-Utsu o Omori Modificada $\Phi(t) = \frac{\theta c^\theta}{(c+t)^{1+\theta}}$, $x = \lambda \tau$, $\varepsilon = \lambda c$, n el número promedio de hijos por sismo y

$P(\tau) \approx \varphi(x, \varepsilon) = \exp(-(1-n)x - \frac{n\varepsilon^\theta}{1-\theta}x^{1-\theta})$ es la probabilidad de que no hay eventos en $[t, t + \tau]$.

.

Capítulo 3

Análisis de datos y resultados

En la tabla 1 se muestra un resumen por provincia y mes de los 908 sismos ocurridos desde 18 marzo 2016 al 16 julio del 2016. De los 908 sismos, 810 tuvieron su epicentro más cercano a las provincias de Manabí y Esmeraldas. Por su parte las ciudades que tuvieron mayor cantidad de sismos cercanos son: Jama 241 sismos; Muisne 222 sismos; Pedernales 77 sismos; Manta 66 sismos; Puerto López 64 sismos y Bahía de Caráquez 49 sismos. En la tabla 2 se muestra el promedio mensual de la magnitud de los sismos en la provincia Manabí y Esmeraldas y el promedio total por mes. La profundidad promedio de los sismos de Manabí fue 8.44km y la de Esmeraldas fue de 8.07.

Cuadro 3.1: Distribución sismos Ecuador 18/03/2016-16/07/2016

provincia más cercana	marzo	abril	mayo	junio	julio	Total
Azuay			1			1
Bolivar		4				4
Canar	1	4				5
Carchi	1	1				2
Cotopaxi	1	1				2
El Oro	2	3	4	2		11
Esmeraldas		171	47	16	35	269
Galapagos		3				3
Guayas		3	5			8
Imbabura	1	1				2
Loja	1	3	1	1		6
Los Rios		1		1		2
Manabi	1	399	92	27	22	541
Los Rios		1		1		2
Morona Santiago		6	7	2	1	16
Napo		1	1			2
Pastaza		4	1	1		6
Pichincha	2	5				7
Santa Elena		3	3	1		7
Sto Domingo de los Tsachilas		4				4
Tungurahua		5	1			6
Zamora Chinchiipe		2	2			4
Total	10	624	165	51	58	908

Cuadro 3.2: Magnitud promedio mensual sismos en Manabí y Esmeraldas

Provincia	marzo	abril	mayo	junio	julio	Total
Esmeraldas		3.76	4.05	3.59	3.85	3.82
Manabi	3.40	3.87	3.68	3.75	4.12	3.84
Total	3.53	3.83	3.80	3.74	3.95	3.83

A continuación se muestra la distribución de los sismos por la profundidad, en verde los sismos a profundidad mayor de 30 km y en rojo los sismos con profundidad menor de 30 km. Se observa que los sismos de las provincias de Manabí y Esmeraldas que son los analizados en esta tesis ocurrieron a profundidad menor de 30 km por lo que se escogió en el modelo ETAS hipocentral $Z = 30$ km.

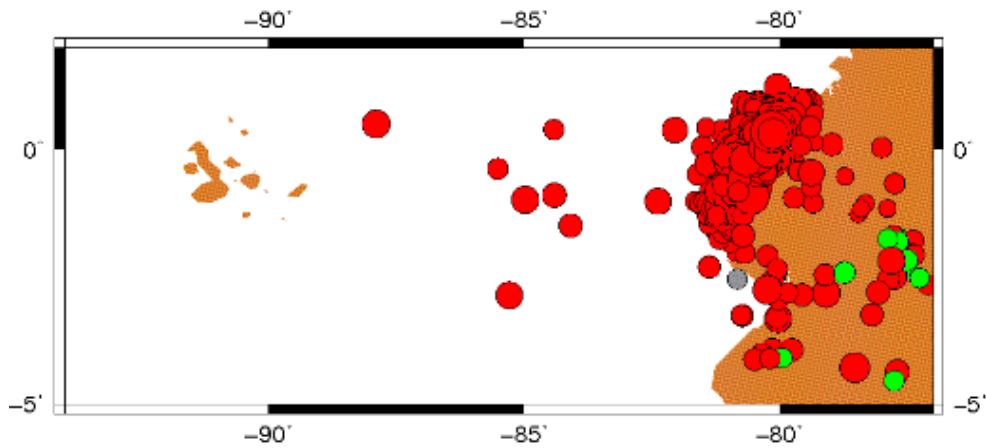


Figura 3.1: Distribución de sismos por profundidad

Luego se muestra la distribución de los sismos con círculos proporcionales a su magnitud y en rojo los sismos más recientes en el tiempo y con azul los sismos más antiguos.

Posteriormente se muestran los sismos por intervalos de magnitud y se observa que la cantidad de sismos de mayor magnitud es menor lo que concuerda con la ley de Gutenberg-Richter. En la gráfica de la derecha se muestra la posición de los sismos respecto a la posición de las placas terrestre más cercana.

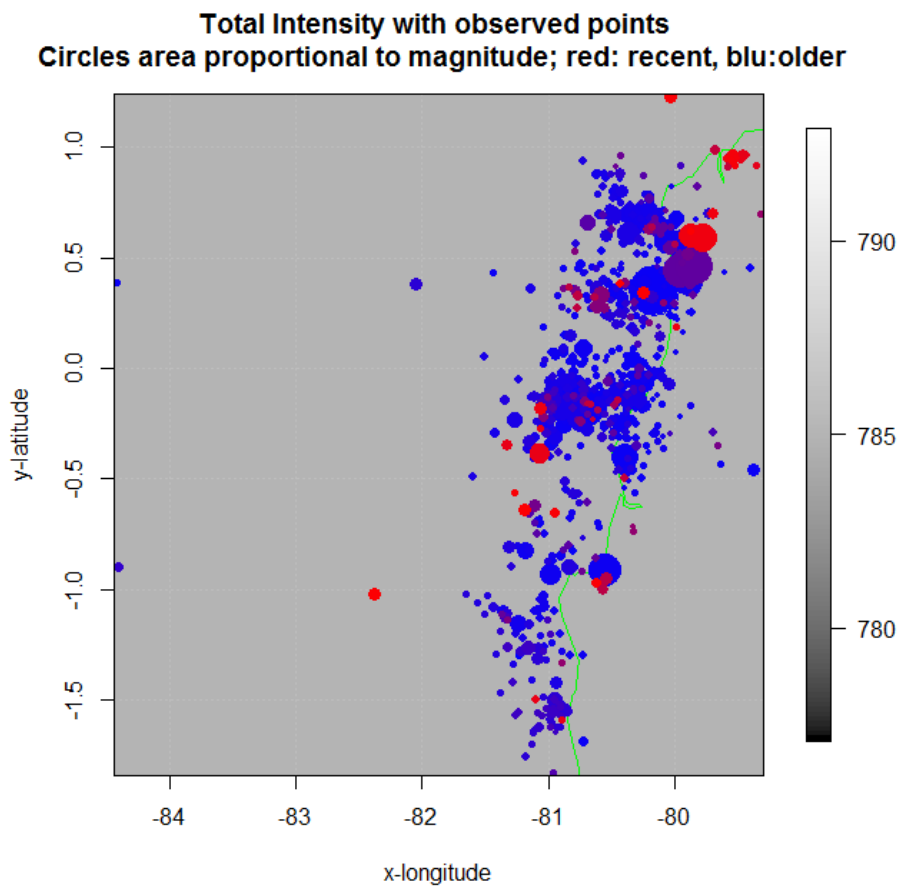


Figura 3.2: Distribución de sismos por magnitud y antigüedad

Sismos Ecuador 18/03/ 2016-16/07/2016

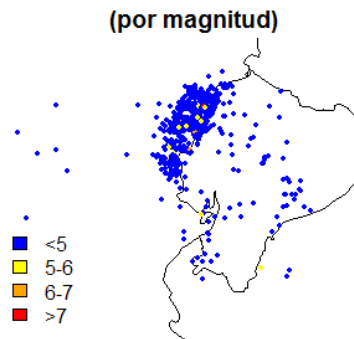


Figura 3.3: Distribución de sismos por magnitud

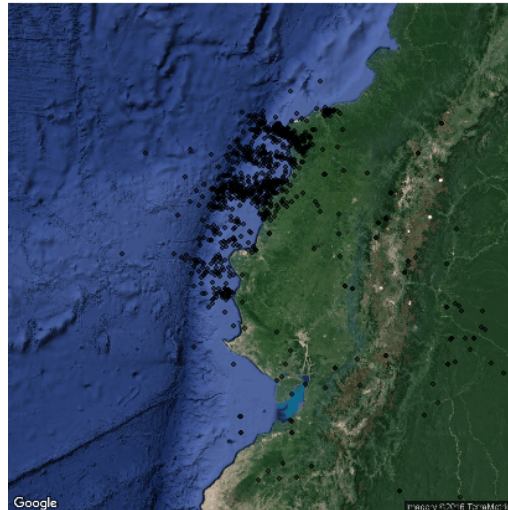


Figura 3.4: Distribución de sismos(foto Google Maps)

En el siguiente gráfico se muestra el número acumulado de sismos en el tiempo y con segmentos verticales los sismos con altura su magnitud. Se observa que las magnitudes han ido disminuyendo luego del 16 de abril aunque han existido sismos de más de 6 grados Richter. Se puede apreciar el brusco cambio de la curva del número acumulado de eventos luego del sismo de 7.4 del 16 de abril 2016. Luego se muestra como la tasa media de sismos diaria ha ido disminuyendo después de alcanzar una tasa media diaria de más de 150 sismos luego del sismo del 16 de abril.

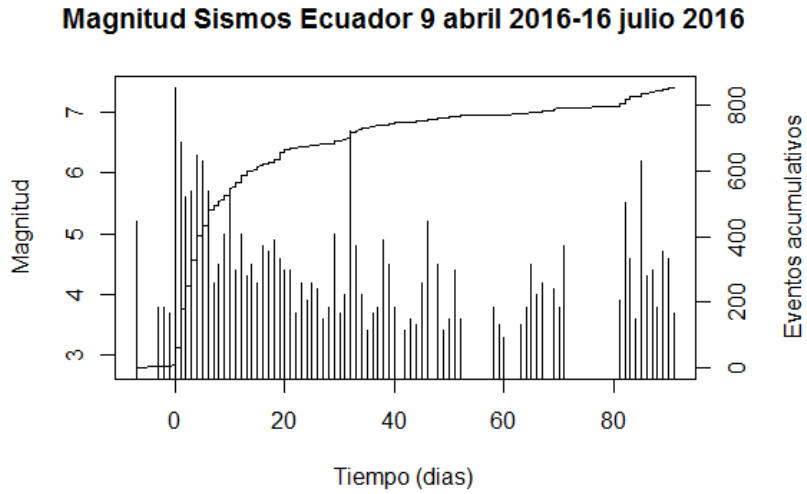


Figura 3.5: Número acumulado de sismos y magnitud de eventos en el tiempo

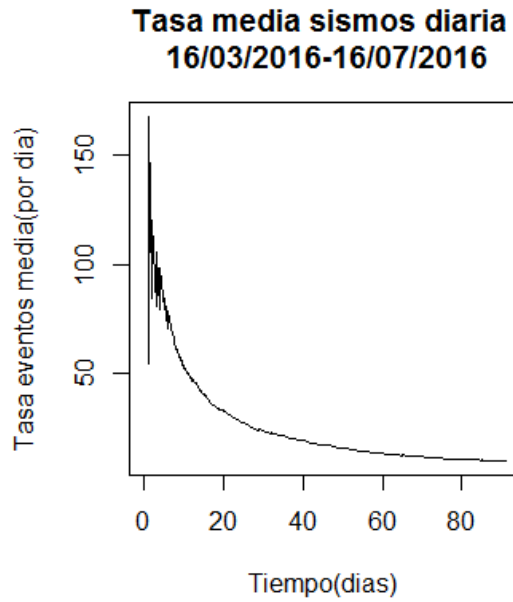


Figura 3.6: Tasa media diaria de sismos en el tiempo

Para comprobar la ley de Gutenberg-Richter se graficó el número de eventos mayor que una magnitud dada en función de las magnitudes (figura 3.7) y el logaritmo en base 10 de ese número acumulado en función de las magnitudes (figura 3.8). Luego se ajustó un modelo de regresión lineal $\log(N) = a + bM$ y se obtuvieron los valores $a = 5,064$ ($sd = 0,039$) y $-0,694$ ($sd = 0,007$) con un p-value para ambos valores de $2,2e - 16$ o sea muy significativo, un error estándar residual de $0,1041$ y un R^2 ajustado de $0,9888$. Con estos valores, el b en la ley de Gutenberg-Richter es $0,694$ y $\beta = b \ln(10) = 1,598$.

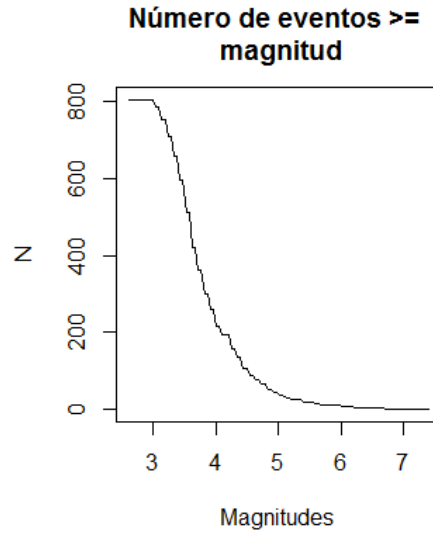


Figura 3.7: Número de eventos de magnitud mayor o igual que una magnitud dada en función de las magnitudes

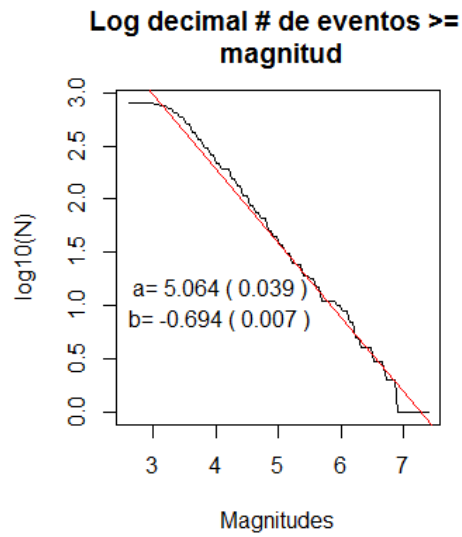


Figura 3.8: Logaritmo decimal número de eventos de magnitud mayor o igual que una magnitud dada en función de las magnitudes

Al ajustar los datos de los sismos de Ecuador y Esmeraldas mediante el paquete de R *etas* con 10 iteraciones obtuvimos estimaciones de la sismicidad de fondo. La figura 3.10 muestra las distribución de la sismicidad de fondo en las dos provincias de la costa ecuatoriana analizadas. Los parámetros del modelo ETAS en el paquete *etas* (la versión de Zhuang que se combina con el método de desagregación estocástica) obtenidos maximizando la verosimilitud fueron $\mu = 1,0227$, $A = 0,4789$, $c = 0,0434$, $\alpha = 0,6947$, $p = 1,4058$, $D = 0,0054$, $q = 1,7413$, $\gamma = 0,1783$, el logaritmo de la verosimilitud de $\ln(L) = 1414,451$ y el $AIC = -2\ln(L) + 2k = -2 * 1414,451 + 2 * 8 = -2812,902$. En el gráfico 3.11 se muestra la distribución de la magnitud de los sismos, la latitud y la longitud en el tiempo.

Background seismicity raclustering coefficient

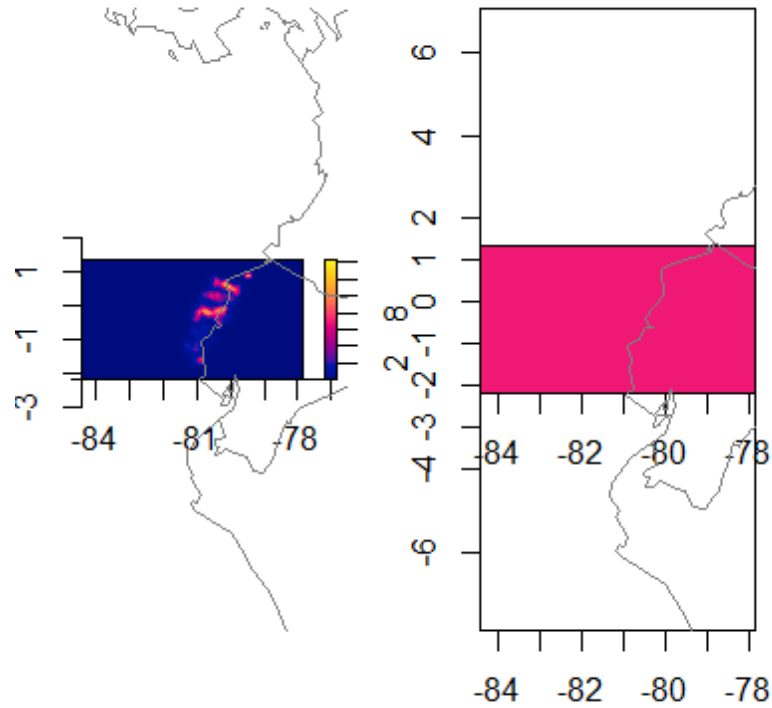


Figura 3.9: Resultado desagregación estocástica en el paquete etas

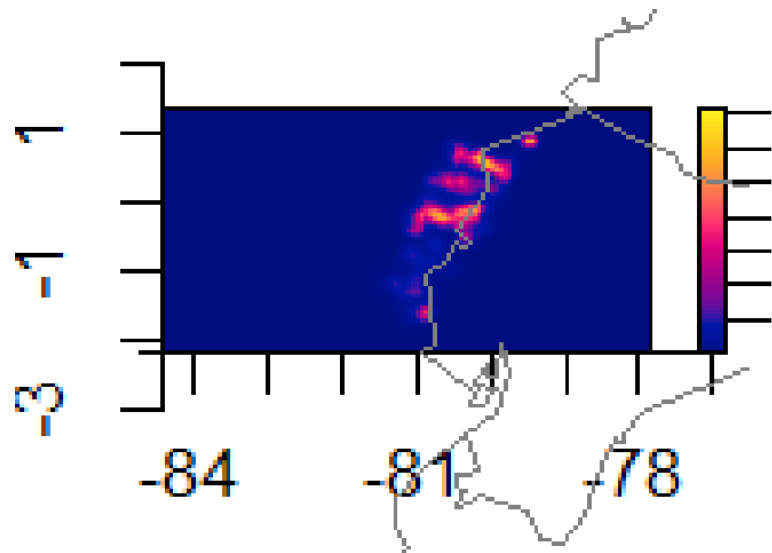


Figura 3.10: Resultado desagregación estocástica en el paquete etas

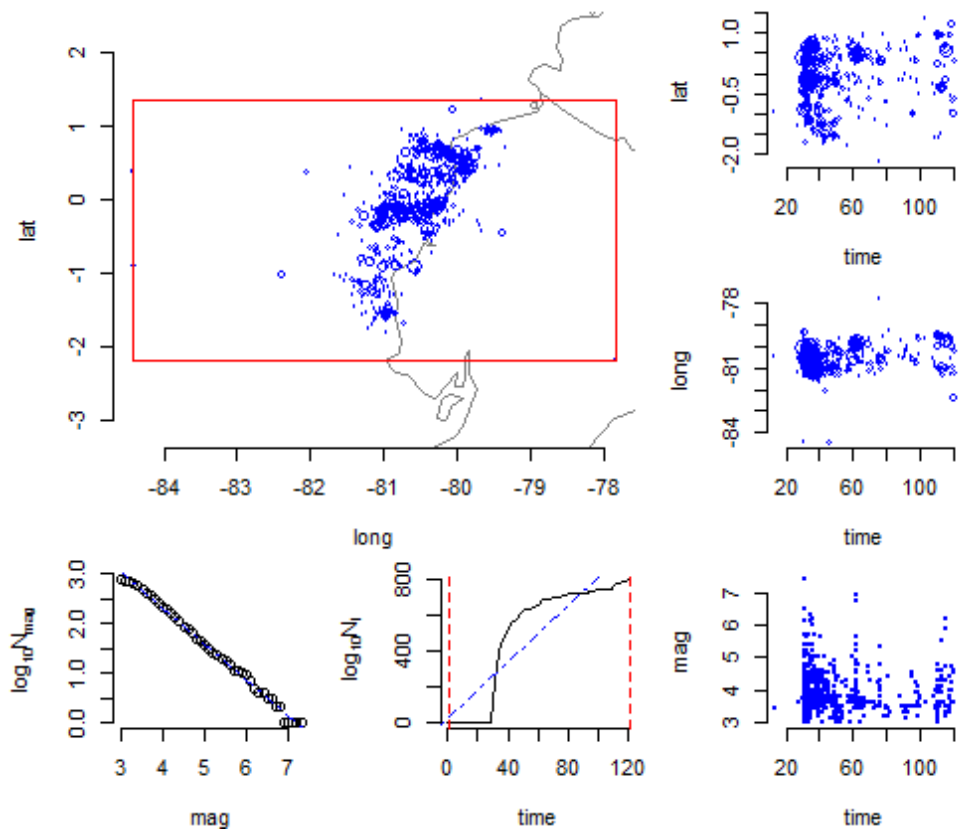


Figura 3.11: Distribución magnitud, latitud, longitud sismos en tiempo

Los resultados de ajustar el modelo Flp o Verosimilitud Predictiva Hacia Adelante mediante el paquete de R EtasFlp se muestra en las figuras 3.12 a 3.17. En la figura 3.12 se observa la intensidad sísmica de fondo y las zonas donde es mayor dentro de las provincias de Manabí y Esmeraldas. En el gráfico 3.13 se muestra la sismicidad inducida o desencadenada por sismos anteriores. En los gráficos 3.16 y 3.17 se observa que existen zonas donde los residuos estandarizados (que tienen media 0 y varianza 1) entre teórico y observado, es considerable.

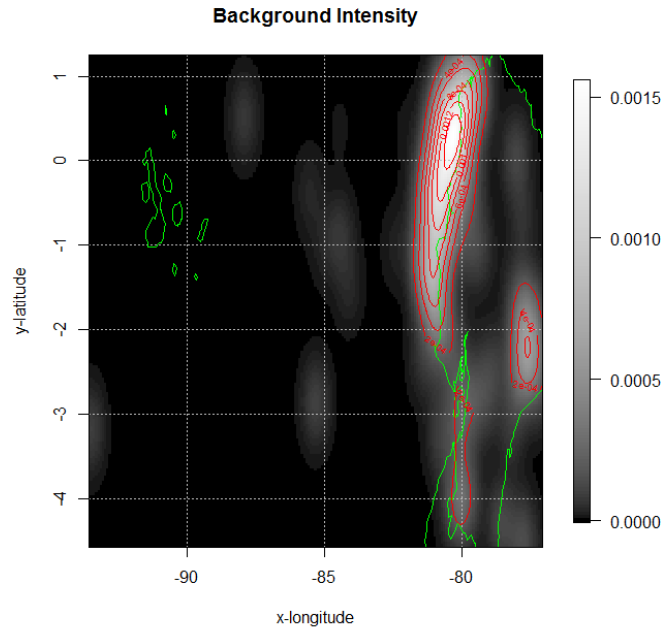


Figura 3.12: Intensidad de la sismicidad de fondo

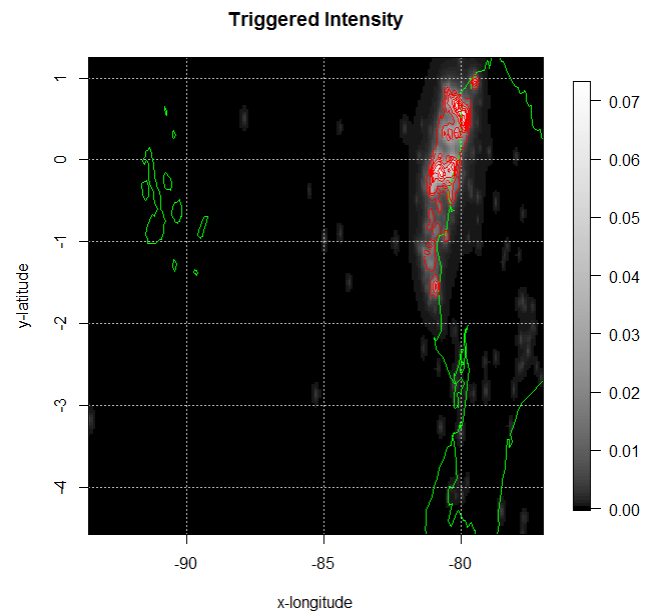


Figura 3.13: Intensidad de la sismicidad inducida

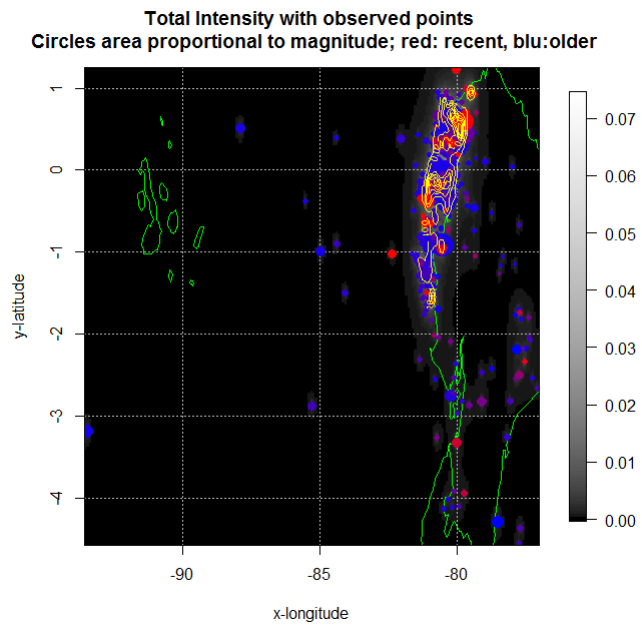


Figura 3.14: Intensidad de la sismicidad total con eventos observados

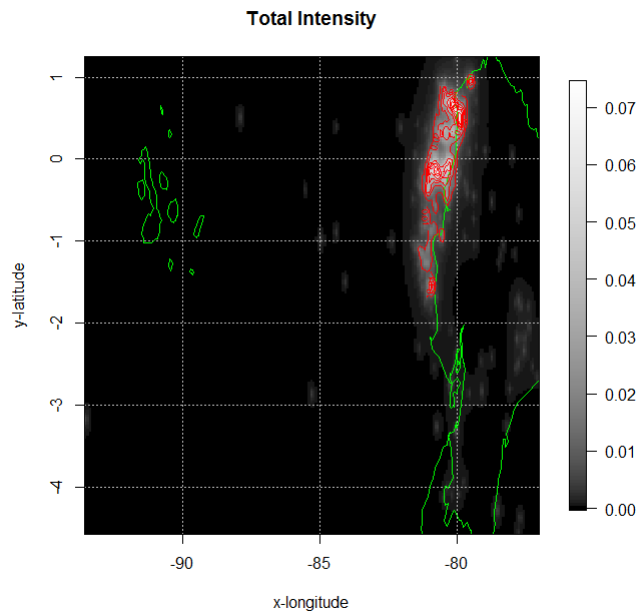


Figura 3.15: Intensidad de la sismicidad total

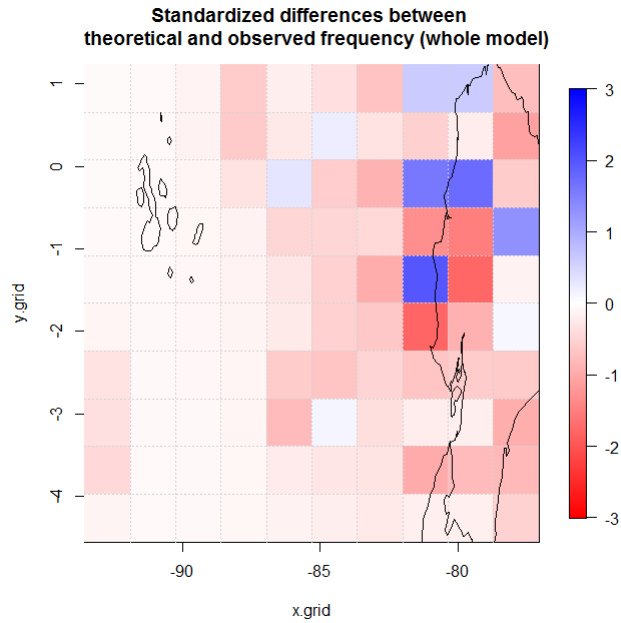


Figura 3.16: Diferencias estandarizadas entre teórico y observado etasFlp 1

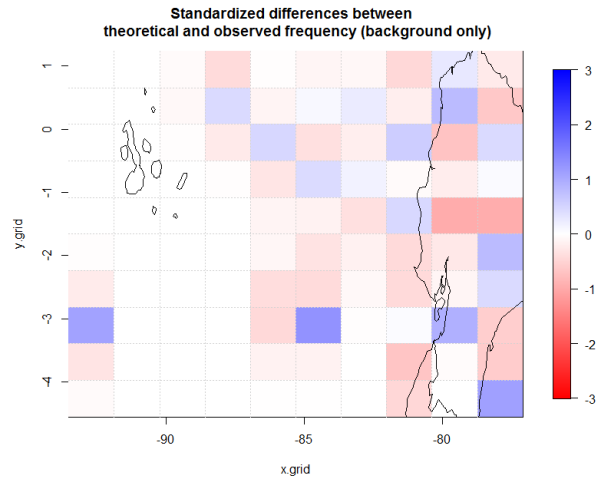


Figura 3.17: Diferencias estandarizadas entre teórico y observado etasFlp 2

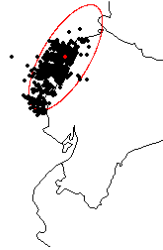
En las figuras 3.18 y 3.19 se muestra la distribución anisótropa de los sismos, esto se hace ajustando los 4 modelos bivariados a los 810 sismos con epicentros cercanos a Manabí y Esmeraldas y escogiendo el de menor *AIC* y luego los ejes de la elipse son los autovectores de la matriz de varianza covarianza normalizada analizada en el capítulo 2.

La matriz de varianza covarianza normalizada para el conglomerado de 804 sismos relacionado con el sismo principal de 7.4 del 16 de abril es

$$\begin{pmatrix} 1,469 & -0,696 \\ -0,696 & 0,709 \end{pmatrix}$$

y corresponde al cuarto modelo de los modelos bivariados ajustados.

Conglomerado Manabi-Esmeraldas



Sismos Manabi Esmeraldas 9/04/2016-16/07/2016

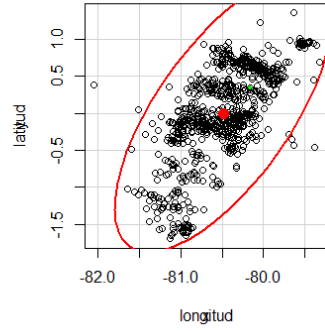


Figura 3.18: Conglomerado asociado al sismo 7.4 del 16 abril 2016 (1)

Figura 3.19: Conglomerado asociado al sismo 7.4 del 16 abril 2016 (2)

En la gráfica 3.20 se muestra la densidad bivariada estimada de los sismos en Ecuador mediante la libreria kde de R.

Kernel density bivariado sismos Ecuador 9 abril-16 julio 2016

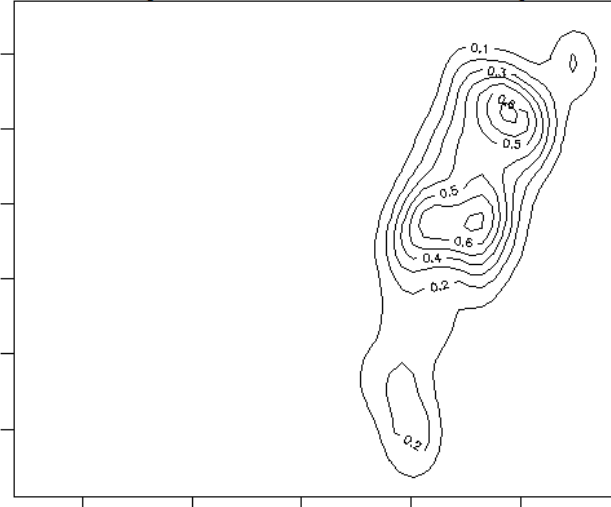


Figura 3.20: Densidad bivariada estimada por kernel

Los resultados de las estimaciones de los parámetros de los modelos mediante el algoritmo HMC en Rstan se muestran en las siguientes tablas. Para todos los parámetros de los modelos ETAS(que deben ser positivos) se usó distribuciones a priori exponenciales y para el caso de p y q se usó además como valor mínimo un valor cercano y superior a 1:1,000005. Para el valor inicial de μ en los modelos espacio temporales e hipocentral se usó $\mu = 0,25 * N / (tmax * pi * r^2)$ (Ogata, 1998) y (Ogata, 1988) donde N es el número de eventos, $tmax$ es el tiempo máximo de los eventos en días, medido desde el evento más antiguo y r es el radio del círculo de cubrimiento mínimo de los sismos con epicentro más cercano a las provincias de Manabí y Esmeraldas, $r = 1,70479$.

Para los otros parámetros se usaron valores iniciales como sigue:

$$k = 0,3, p = 1,3, c = 0,01, d = 0,01, q = 1,7, alpha = 1,005, gamma = 0,9, eta = 0,7$$

En todos los casos se usaron 4 cadenas y 100 iteraciones por cada una. En las tablas se muestra el *Rhat* que es una forma de medir la convergencia de las cadenas: cuando es cercano a 1 indica convergencia.

Las figuras 3.21 a 3.24 muestran la evolución de las cadenas para el modelo Etas anisótropo con sismicidad fondo constante

Cuadro 3.3: Resultados Rstan modelo temporal sin magnitudes y sismicidad fondo constante (100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	0.26	0.04	0.12	[0.08 ,0.52]	7	1.20
k	1.01	0.01	0.05	[0.91,1.11]	101	1.03
p	1.41	0.01	0.06	[1.30,1.52]	69	1.04
c	0.03	0.00	0.01	[0.17,0.46]	60	1.03
lp	1790.74	0.23	1.61	[1787.26,1792.78]	47	1.06

Cuadro 3.4: Resultados Rstan modelo temporal sin magnitudes y sismicidad fondo variable(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	5.35e-05	6.6e-06	4.3e-05	[6.5e-06, 1.6e-04]	43	1.07
k	1.09	3.5e-03	5e-02	[1.01,1.20]	200	1.02
p	1.32	4.2e-03	4.3e-02	[1.24,1.41]	102	1.04
c	0.02	5.3e-04	5.8e-03	[0.14,0.37]	122	1.03
lp	1773.29	0.23	1.61	[1769.71,1774.99]	39	1.08

Cuadro 3.5: Resultados Rstan modelo temporal con magnitudes y sismicidad fondo constante(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	0.31	0.07	0.33	[0.10 ,1.42]	20	1.13
k	0.83	0.05	0.41	[0.30,1.69]	51	1.06
p	1.41	0.01	0.09	[1.15,1.59]	44	1.07
c	0.46	0.00	0.02	[0.02,0.13]	31	1.08
alpha	0.83	0.01	0.11	[0.64,1.04]	88	1.02
A	0.65	0.04	0.31	[0.22,1.41]	61	1.03
lp	1832.84	8.80	40.47	[1689.23,1842.83]	21	1.14

Cuadro 3.6: Resultados Rstan modelo temporal con magnitudes y sismicidad fondo variable(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	6.9e-05	9.6e-06	4.6e-05	[1.2e-05, 1.7e-04]	23	1.10
k	0.75	0.05	0.37	[0.25,1.60]	52	1.03
p	1.32	0.00	0.05	[1.24,1.44]	156	0.99
c	0.32	0.00	0.01	[0.02,0.05]	171	0.99
alpha	0.81	0.00	0.08	[0.65,0.95]	125	1.02
A	0.78	0.05	0.37	[0.29,1.73]	64	0.99
lp	1800.76	0.16	1.59	[1797.36,1802.91]	93	1.05

Cuadro 3.7: Resultados Rstan modelo espacio temporal con conglomerados isotropos con sismicidad constante(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	0.012	0.000	0.005	[0.004 ,0.024]	88	0.99
k	0.864	0.019	0.1651	[0.572,1.205]	74	1.04
p	1.22	0.004	0.035	[1.16,1.290]	57	1.05
c	0.025	0.000	0.005	[0.015,0.035]	50	1.08
d	0.006	0.000	0.001	[0.003,0.010]	27	1.14
q	1.926	0.0017	0.145	[1.694, 2.251]	68	1.01
alpha	0.704	0.008	0.071	[0.58,0.845]	78	1.03
gamma	0.253	0.041	0.164	[0.000,0.575]	15	1.39
lp	1394.355	0.563	2.574	[1387.357,1398.070]	20	1.20

Cuadro 3.8: Resultados Rstan modelo espacio temporal con conglomerados anisotropos con sismicidad constante(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	0.008	0.000	0.003	[0.002 ,0.014]	54	1.04
k	0.875	0.015	0.166	[0.604,1. 246]	119	1.014
p	1.213	0.005	0.044	[1.136,1.305]	85	1.051
c	0.028	0.000	0.008	[0.015,0.047]	77	1.042
d	0.002	0.000	0.000	[0.001,0.003]	55	1.070
q	1.782	0.006	0.081	[1.645,1.929]	140	1.017
alpha	0.711	0.005	0.064	[0.573,0.847]	139	1.002
gamma	0.304	0.017	0.129	[0.085,0.592]	59	1.049
lp	1857.145	0.186	1.842	[1852.712,1859.596]	98	0.995

Cuadro 3.9: Resultados Rstan modelo espacio temporal con conglomerados anisótropos con sismicidad variable(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	6.4e-06	0.000	0.000	[7.7e-07, 1.6e-05]	52	1.082
k	0.915	0.013	0.160	[0.651, 2.294]	147	0.999
p	1.227	0.023	0.032	[1.164, 1.297]	200	0.999
c	0.030	0.000	0.007	[0.019, 0.046]	200	0.988
d	0.002	0.000	0.000	[0.001, 0.004]	130	1.011
q	1.753	0.007	0.093	[1.596, 1.956]	200	0.995
alpha	0.687	0.005	0.065	[0.550, 0.798]	144	1.010
gamma	0.238	0.014	0.134	[0.042, 0.513]	86	1.032
lp	1799.904	0.217	1.942	[1794.635, 1801.923]	80	1.022

Cuadro 3.10: Resultados Rstan modelo hipocentral con conglomerados anisotropos con sismicidad constante(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	2.9e-04	1.9e-05	0.000	[1e-04, 5.5e-04]	47	0.983
k	0.872	0.219	0.219	[0.577,1.335]	100	0.994
p	1.199	0.048	0.040	[1.119,1.287]	71	0.999
c	0.035	0.013	0.010	[0.018,0.056]	61	1.002
d	0.003	0.001	0.000	[0.002,0.005]	39	0.990
q	1.864	0.087	0.087	[1.690,2.040]	100	0.995
alpha	0.735	0.084	0.084	[0.584,0.892]	100	0.989
gamma	0.378	0.021	0.140	[0.144,0.631]	42	1.013
eta	6.384	0.551	0.552	[5.385,7.377]	100	0.991
lp	-709.462	5.085	2.163	[-714.144,-706.497]	18	1.087

Cuadro 3.11: Resultados Rstan modelo hipocentral con conglomerados anisotropos con sismicidad variable(100 iteraciones, 4 cadenas)

	media	sd(media)	sd	intervalo-confianza(95%)	neff	Rhat
mu	2.9e-07	2.7e-08	1.7e-07	[7.3e-08, 6.9e-07]	40	1.090
k	0.912	0.015	0.151	[0.656,1.216]	97	0.988
p	1.199	0.003	0.032	[1.145,1.264]	150	0.993
c	0.036	0.001	0.009	[0.023,0.055]	118	1.000
d	0.003	0.000	0.001	[0.001,0.004]	90	1.001
q	1.770	0.009	0.102	[1.568,1.977]	126	0.994
alpha	0.714	0.006	0.060	[0.604,0.820]	93	0.989
gamma	0.352	0.018	0.119	[0.141,0.598]	43	1.015
eta	6.121	0.039	0.476	[5.218,6.957]	150	0.993
lp	-719.413	0.231	1.766	[-723.034,-716.626]	58	1.047

Cuadro 3.12: Comparación de modelos Etas

Modelo Etas	ln(L)	Int. 95 % ln(L)		# param.	AIC	int.95 % AIC	
Temp. sis. cte	1790.7	1787.3	1792.8	4	-3573.5	-3577.6	-3566.5
Temp. sis. var.	1773.3	1769.7	1775.0	4	-3538.6	-3542.0	-3531.4
Magn. sis. cte	1832.8	1689.2	1842.8	6	-3653.7	-3673.7	-3366.5
Magn. sis. var.	1800.8	1797.4	1802.9	6	-3589.5	-3593.8	-3582.7
Esp. temp. iso. sis. cte	1394.4	1387.4	1398.1	8	-2772.7	-2780.1	-2758.7
Esp. temp. ani. sis. cte	1857.1	1852.7	1859.6	8	-3698.3	-3703.2	-3689.4
Esp. temp. ani. sis. var.	1799.9	1794.6	1801.9	8	-3583.8	-3936.8	-3573.3
Hipo. ani. sis. cte.	1974.1	1969.4	1977.0	9	-3930.2	-3936.1	-3920.8
Hipo. ani. sis. var.	1923.3.1	1919.4	1926.1	9	-3828.6	-3834.2	-3821.4

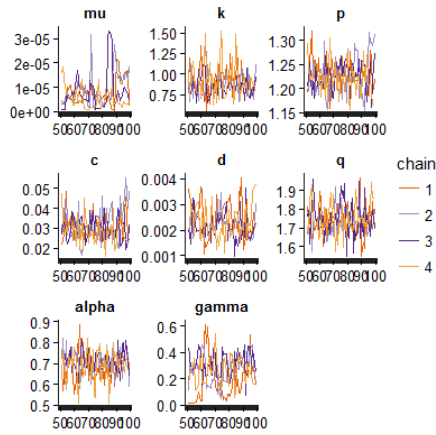


Figura 3.21: Evolución cadenas Etas anisótropo sismicidad cte

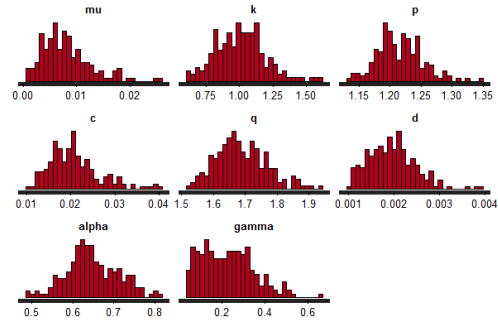


Figura 3.22: Distribuciones a posteriori Etas anisótropo sismicidad cte

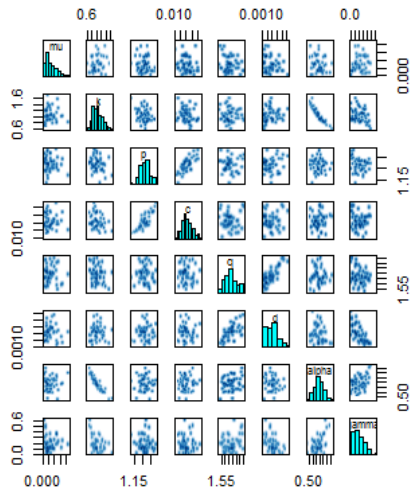


Figura 3.23: Correlación valores cadenas parámetros Etas anisótropo sismicidad cte

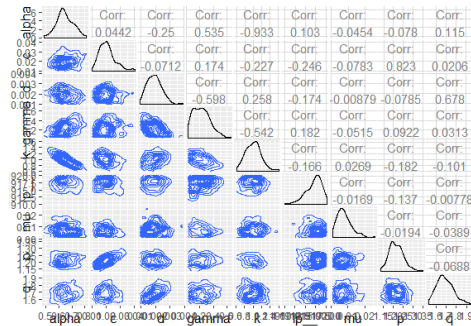


Figura 3.24: Correlación valores cadenas parámetros Etas anisótropo sismicidad cte

De las tablas anteriores observamos que los modelos con sismicidad fondo variable($\mu(x,y) = \mu u(x,u)$) tienen un valor de la constante μ considerablemente menor que los modelos con sismicidad fondo constante.

Como se observa en la tabla 3.11, el modelo que mejor ajusta a los datos es el modelo hipocentral anisótropo con sismicidad fondo constante. También podemos observar que en nuestro caso, los modelos con sismicidad variable no proporcionan mejores ajustes que los modelos similares con sismicidad fondo constante, a pesar de que los métodos de desagregación estocástica y Flp mostraron que la sismicidad no es constante. La posible causa de esto es que la zona es pequeña(el radio del círculo de recubrimiento mínimo es 1,70479 grados) lo que hace que la sismicidad de fondo variable pueda ser sustituida por una sismicidad fondo constante(aunque en el caso de los modelos con sismicidad fondo constante los valores de los otros parámetros pueden estar sesgados). Sin embargo, lo que sí permite que el ajuste sea mejor es la introducción de una métrica definida por la matriz de varianza covarianza para medir las distancias entre los epicentros de los sismos o sea el modelo anisótropo y también considerar las profundidades de los sismos. Tenemos que el logaritmo de la verosimilitud equivalente al modelo hipocentral con sismicidad fondo constante en 2 dimensiones es $\ln(L_{2d}) = \ln(L_{3d}) - N\ln(Z) = -709,462 + 789 * \log(30) = 1974,083$ y un $AIC = -2 * 1974,083 + 2 * 9 = -3930,165$ (hubo 789 sismos en el conglomerado asociado al sismo de magnitud 7.4 del 16 de abril con los datos de

profundidad válidos) y analógicamente para el modelo hipocentral con sismicidad variable(en este caso tuvimos $N=777$ valores de sismicidad de fondo disponibles)

Usando los valores obtenidos de las distribuciones a posteriori de los parámetros del modelo de mejor ajuste: hipocentral anisótropo con sismicidad fondo constante, podemos despreciar los valores de la primera mitad de la evolución de las cadenas y realizar simulaciones mediante extracciones de valores de los parámetros y estimar la probabilidad de que un sismo sea espontáneo/inducido o sea que no sea evento provocado por la sismicidad de fondo. En la gráfica 3.25 se muestra la probabilidad de ser sismo espontáneo/inducido en función del tiempo y en rojo los eventos con probabilidad mayor de 0,95 de ser evento espontáneo/inducido. Como se observa los eventos del 16 de abril tienen una alta probabilidad de no ser provocados por la sismicidad de fondo. Igualmente luego de 80 días desde 13/04/2016, aún existen eventos con alta probabilidad de ser espontáneo/inducido por los sismos anteriores en especial por el sismo 7.4 del 16 de abril.

En la gráfica 3.26 se muestra la probabilidad de ser sismo de fondo en función del tiempo, y en rojo los eventos con probabilidad mayor de 0,95 de ser evento sísmico fondo. Se observa que muy pocos eventos luego del 16 de abril del 2016 tienen probabilidad alta de ser provocado por la sismicidad de fondo aunque si existen tales eventos.

En la gráfica 3.27 se muestra como ha cambiado la tasa de sismicidad inducida con el tiempo luego de la fecha del último evento usado para ajustar los modelos: 16/07/2016, esto se logra realizando simulaciones del modelo hipocentral anisótropo con sismicidad fondo constante y evaluando para cada tupla de parámetros en los tiempos de los eventos del 16/07/2016-11/09/2016 y luego tomando la mediana por todas las tuplas de parámetros. Se observa que la tasa inducida ha ido disminuyendo y esta cercana a extinguirse.

En la gráfica 3.28 se muestra los intervalos de confianza (o credibilidad en este caso pues usamos enfoque bayesiano) de los sismos antecesores más probables. En el eje x tenemos los índices de los sismos en el catálogo, del más reciente al más antiguo, o sea del 16/07/2017 al más antiguo sismo registrado disponible en el mes de marzo y los segmentos verticales son los intervalos de credibilidad del índice del sismo padre más probable. Para esto se realizaron simulaciones de los parámetros y por cada tupla de ellos se calculó para cada evento j (índice en eje x), la probabilidad de que sea inducido por el evento i : $\rho_{ij}(i > j)$, luego se escogió el de mayor probabilidad y se calculó la mediana y los cuantiles para el índice i por todas las tuplas de parámetros simuladas. La línea horizontal verde corresponde al índice del sismo de magnitud 7.4 del 16 de abril. Como se observa existen intervalos de credibilidad que sólo están formados por la mediana (los puntos azules) o sea dichos eventos son inducidos por dicho sismo del 16 de abril con probabilidad 95%.

Para demostrar las ventajas del enfoque bayesiano respecto al enfoque frecuentista, en la tabla 3.12 se muestran los sismos que tienen mayor probabilidad de ser sismos padres de la mayor cantidad de sismos, tomando los valores de las medianas de las distribuciones a posteriori de los parámetros obtenidos por Rstan. En la tabla 3.13, se muestran las probabilidades de los sismos hijos del sismo de magnitud 7.4 del 16 de abril mediante un enfoque frecuentista. Sin embargo mediante un enfoque bayesiano, podemos hacer simulaciones de los valores de los parámetros y para cada tupla de valores calcular la probabilidad de ser sismo inducido por el de magnitud 7.4 del 16 de abril. Con esto podemos saber que de los 16 sismos que el enfoque frecuentista arrojó como hijos directos, solo cinco de ellos tienen una probabilidad mayor de 0,95 de serlo. Estos se muestran en la tabla 3.14.

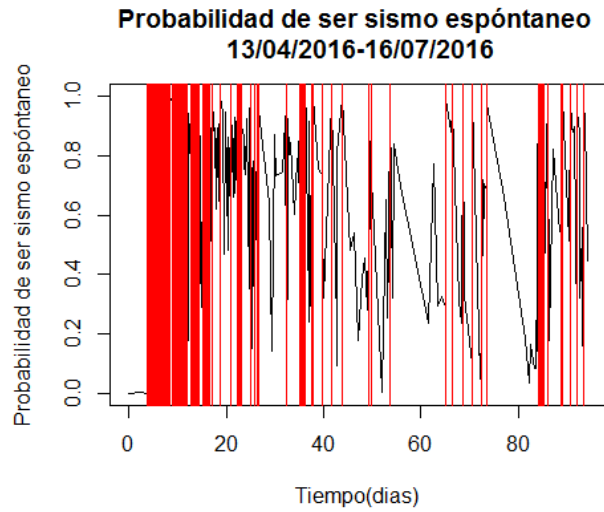


Figura 3.25: Probabilidad ser sismo espontáneo/inducido

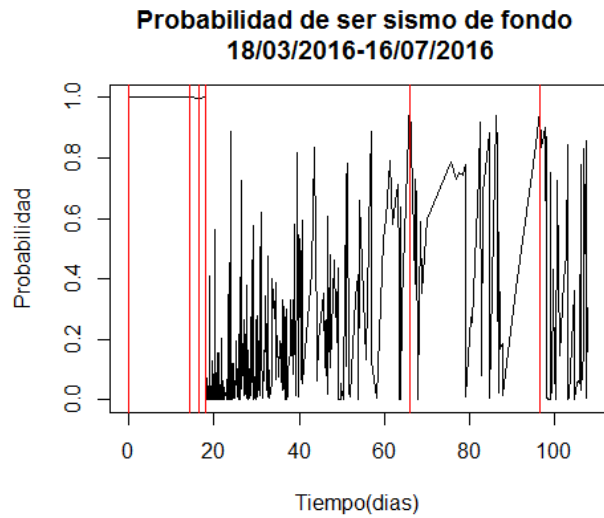


Figura 3.26: Probabilidad ser sismo de fondo

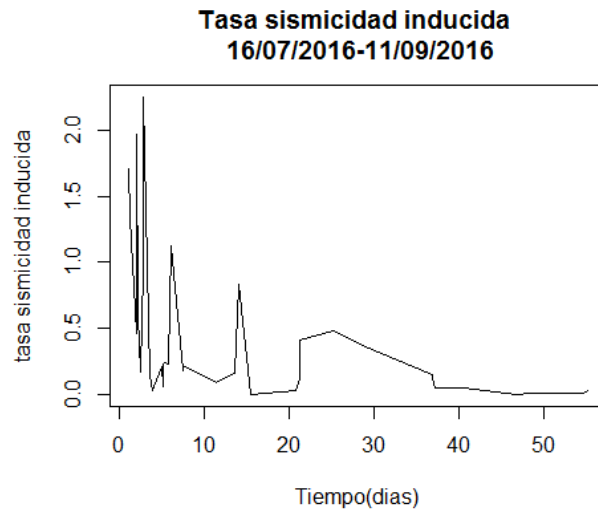


Figura 3.27: Tasa sismicidad inducida

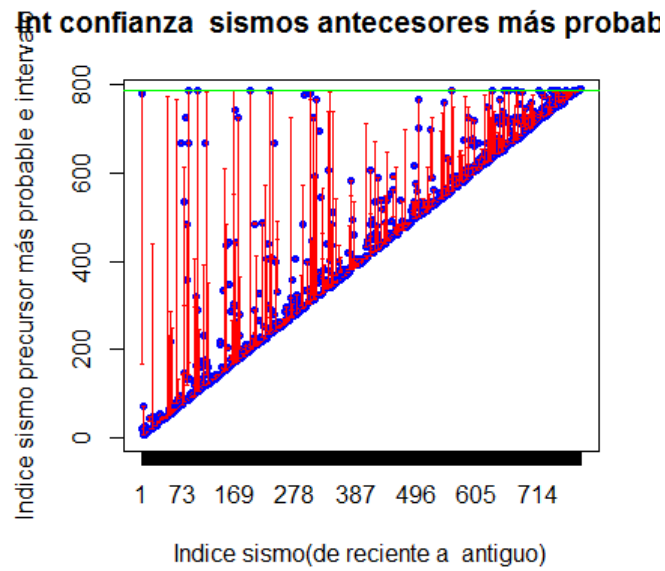


Figura 3.28: Índices sismos antecesores más probables

Cuadro 3.13: Sismos con más de 3 réplicas directas

Magn.	Fecha	Lat.	Long.	Prof.	Más cercana	No réplicas
7.4	16/04/2016 18:58	0.35° N	80.16° W	17	Pedernales	16
6.7	18/05/2016 11:46	0.46° N	79.84° W	9	Muisne	9
6.3	20/04/2016 3:35	0.68° N	80.22° W	4	Muisne	9
6.2	21/04/2016 22:03	0.18° S	80.77° W	10	Jama	8
6.6	18/05/2016 2:57	0.44° N	79.95° W	7	Muisne	7
5.7	19/04/2016 17:22	0.57° N	80.07° W	5	Muisne	7
6.1	17/04/2016 2:13	0.40° S	80.40° W	7	San Vicente	7
6	21/04/2016 22:20	0.18° S	80.88° W	4	Jama	6
5.5	07/07/2016 23:28	0.39° S	81.07° W	5	Bahia de Caraquez	5
6.1	20/04/2016 3:33	0.39° N	79.89° W	55	Muisne	5
6.5	17/04/2016 16:35	0.91° S	80.56° W	10	Jaramijo	5
4.3	16/04/2016 21:14	0.29° S	80.48° W	8	Jama	5
5.1	16/04/2016 19:11	0.07° S	80.23° W	11	Jama	5
4.4	12/07/2016 13:32	0.95° N	79.53° W	2	Esmeraldas	4
5.6	26/04/2016 16:58	0.14° S	80.99° W	10	Jama	4
5.4	21/04/2016 22:06	0.14° S	80.37° W	14	Jama	4
4.8	20/04/2016 6:23	0.11° S	80.48° W	6	Jama	4
5.6	18/04/2016 13:38	0.93° S	80.99° W	0	Manta	4
5.1	18/04/2016 8:25	0.25° S	80.42° W	9	Jama	4
4.1	17/04/2016 21:09	0.70° S	81.08° W	5	Manta	4
4.3	17/04/2016 2:28	0.06° N	80.94° W	10	Jama	4
5.2	16/04/2016 21:17	0.18° S	80.66° W	6	Jama	4

Cuadro 3.14: Sismos con mayor probabilidad de ser provocados por el sismo de magnitud 7.4 del 16 abril(enfoque frecuentista)

Magn.	Fecha	Lat.	Long.	Prof.	Más cercana	Probabilidad
3.5	05/06/2016 2:32	0.30° N	80.09° W	5	Pedernales	0.1646961
3.4	28/05/2016 14:43	0.21° N	80.21° W	7	Pedernales	0.114522
3.1	05/05/2016 18:18	0.46° N	80.14° W	10	Muisne	0.1209538
4.5	30/04/2016 20:49	0.32° N	80.18° W	5	Pedernales	0.2839891
3	19/04/2016 8:07	0.37° N	80.08° W	10	Muisne	0.1556532
4.8	17/04/2016 19:38	0.39° N	80.24° W	5	Muisne	0.257433
3.2	17/04/2016 18:17	0.19° N	80.25° W	5	Pedernales	0.1783448
3.3	17/04/2016 0:59	0.32° N	80.16° W	8	Pedernales	0.5395906
3.5	17/04/2016 0:01	0.43° S	79.64° W	9	El Carmen	0.1781111
4.4	16/04/2016 23:04	0.53° N	79.96° W	3	Muisne	0.3284828
4.2	16/04/2016 21:23	0.28° N	80.16° W	9	Pedernales	0.4430858
3.8	16/04/2016 20:25	0.24° N	80.04° W	6	Pedernales	0.5594365
4.7	16/04/2016 19:59	0.32° N	80.22° W	5	Pedernales	0.8844682
5.7	16/04/2016 19:29	0.21° S	80.66° W	6	Jama	0.4358462
4.6	16/04/2016 19:16	0.46° S	79.38° W	10	El Carmen	0.7047577
5.1	16/04/2016 19:11	0.07° S	80.23° W	11	Jama	0.7823534

Cuadro 3.15: Sismos con probabilidad mayor de 95% de ser provocados por sismos 7.4 del 16 abril (enfoque bayesiano)

Magnitud	Fecha	Latitud	Longitud	Profundidad	Ciudad más cercana
3.3	17/04/2016 0:59	0.32° N	80.16° W	8	Pedernales
3.8	16/04/2016 20:25	0.24° N	80.04° W	6	Pedernales
4.7	16/04/2016 19:59	0.32° N	80.22° W	5	Pedernales
4.6	16/04/2016 19:16	0.46° S	79.38° W	10	El Carmen
5.1	16/04/2016 19:11	0.07° S	80.23° W	11	Jama

En las figuras siguientes se muestra el análisis residual de los modelos y la predicción del número acumulado de eventos, evaluado en los tiempos de los sismos. Esto se logra mediante 1000 simulaciones de las distribuciones a posteriori de los parámetros. Las líneas verticales verdes representan el primer mes luego del 16/07/2016 que es es la fecha del último evento que se usó para la estimación. Como se ve los modelos temporales con sismicidad fondo constante y variable no se diferencian mucho.

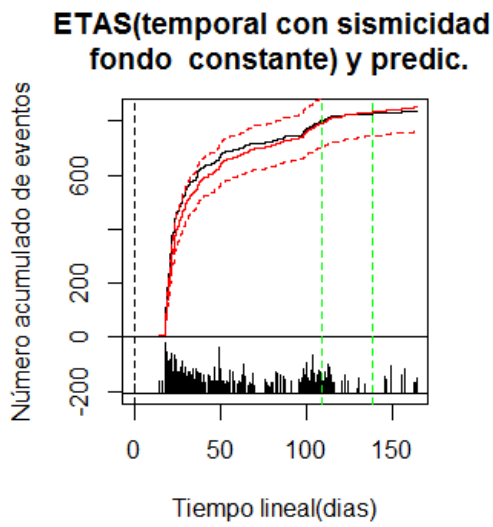


Figura 3.29: Número acumulado eventos Etas temporal sismicidad fondo constante

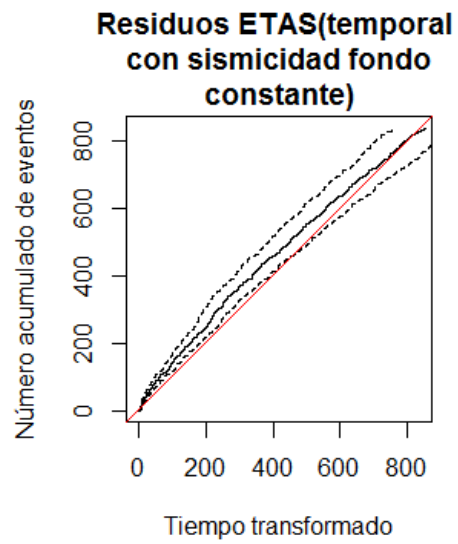


Figura 3.30: Residuos Etas temporal sismicidad fondo constante

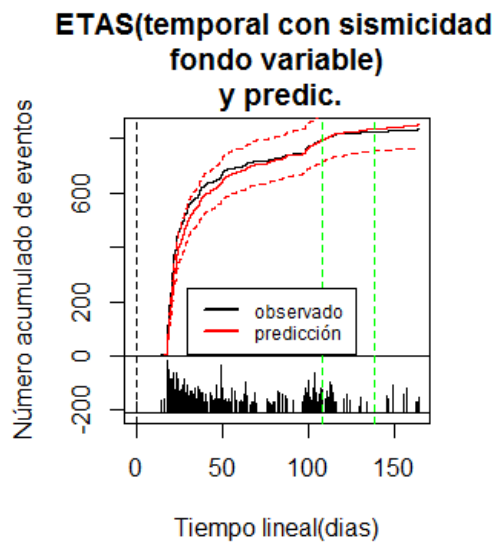


Figura 3.31: Número acumulado eventos Etas temporal sismicidad fondo variable

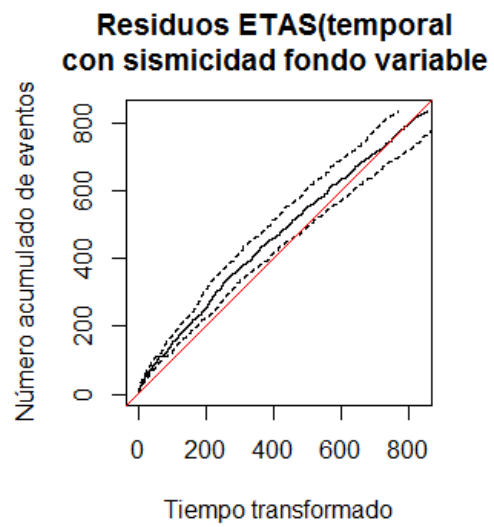


Figura 3.32: Residuos Etas temporal sismicidad fondo variable

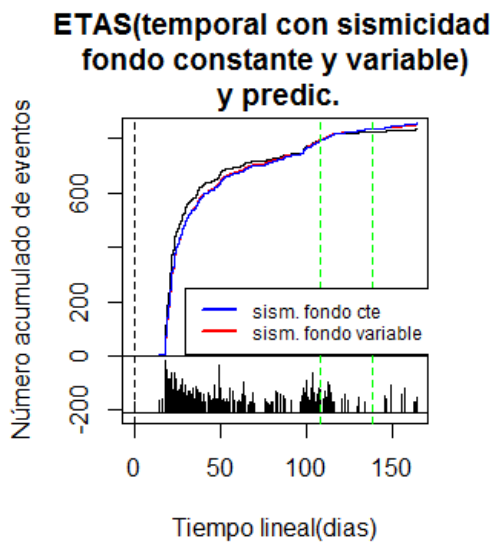


Figura 3.33: Número acumulado eventos Etas temporal sismicidad fondo constante vs variable

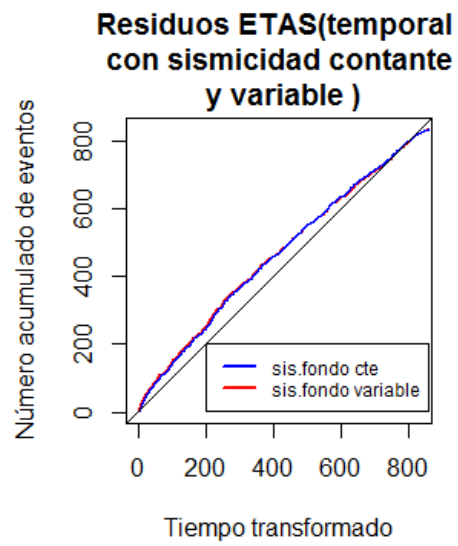


Figura 3.34: Residuos Etas temporal sismicidad fondo constante vs variable

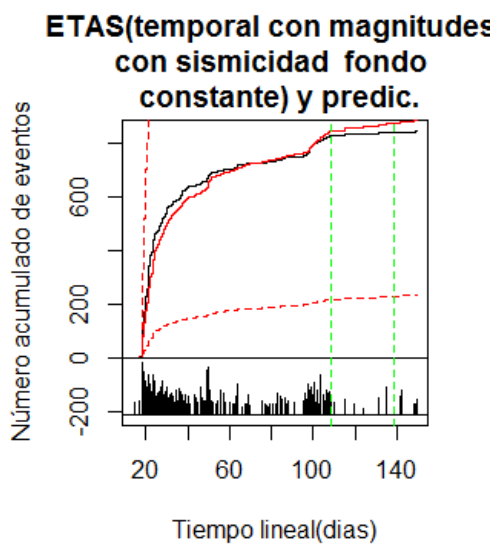


Figura 3.35: Número acumulado eventos Etas temporal con magnitudes y sismicidad fondo constante

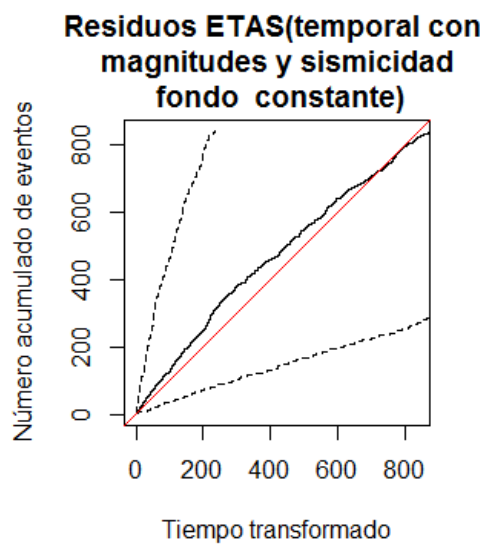


Figura 3.36: Residuos Etas temporal con magnitudes y sismicidad fondo constante

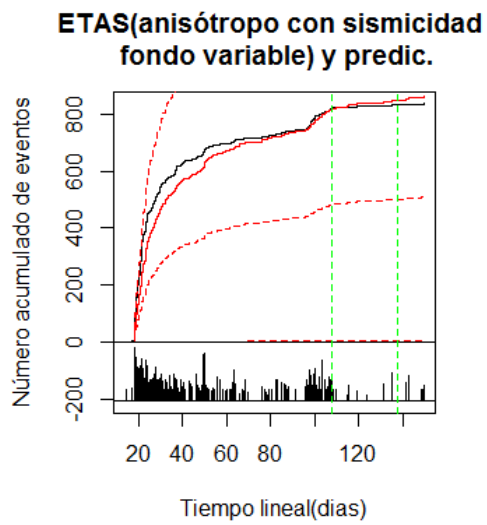


Figura 3.37: Número acumulado eventos Etas espacio temporal anisótropo sismicidad fondo variable

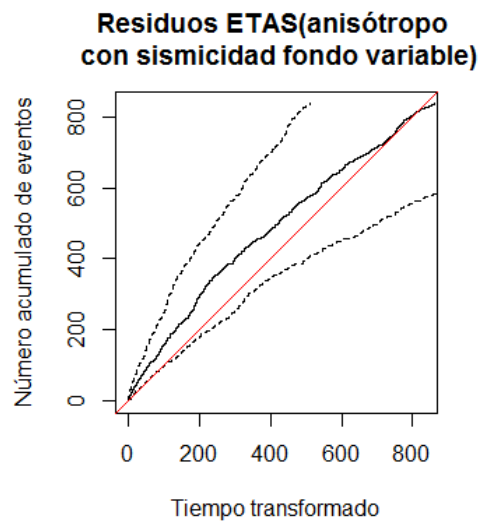


Figura 3.38: Residuos Etas espacio temporal anisótropo sismicidad fondo variable

Mediante el modelo Etas considerando las magnitudes podemos realizar simulaciones de los parámetros y con esto calcular el número medio de sismos hijos por sismo padre n y con esto podemos estimar mediante la fórmula de Saichev-Sornette, la distribución del logaritmo de los tiempos entre eventos(escalados por el inverso de la media de los tiempos entre sismos). En la figura 3.39 se muestra la estimaciones con 1000 simulaciones y los intervalos de credibilidad al 95% de la predicción del modelo vs lo observado. En la figura 3.39 no se muestra el intervalo de credibilidad para poder diferenciar mejor las gráficas.

Se puede observar que el ajuste es aceptable aunque existen diferencias considerables entre el modelo y lo observado.

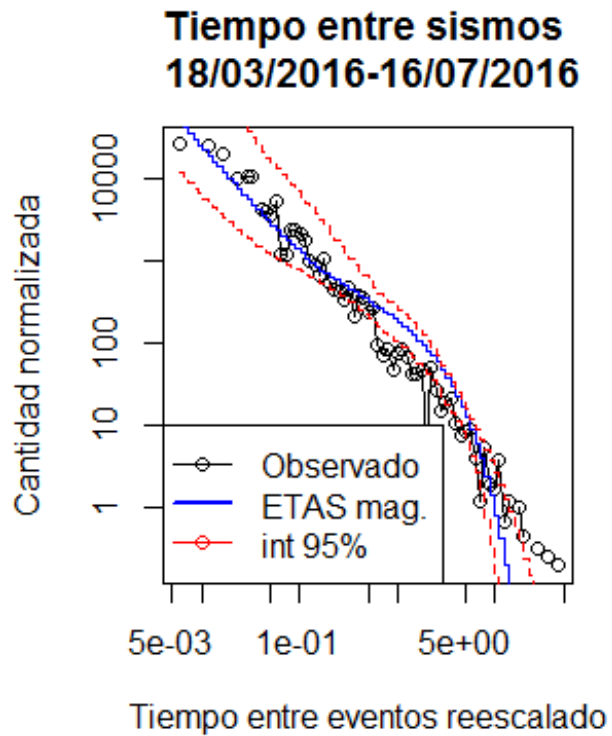
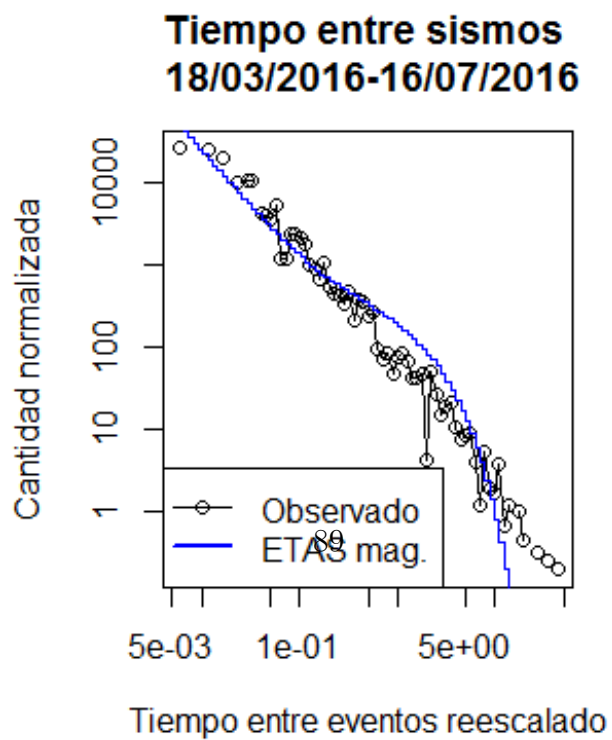


Figura 3.39: Modelación tiempos entre sismos por la formula de Saichev-Sornette



Capítulo 4

Conclusiones

EL análisis bayesiano es una herramienta útil de estimación de parámetros para maximizar el logaritmo de la verosimilitud. Además de brindar estimaciones finales, el análisis bayesiano brinda una distribución de probabilidad a posteriori para los parámetros lo que permite, hacer simulaciones mediante extracciones y obtener estimaciones robustas a partir de ellas. .

El estudio de la sismicidad es un tema complejo por el número de factores a considerar, afortunadamente hay modelos flexibles que permiten incorporar los diferentes aspectos como los modelos ETAS.

El tema de los tiempos entre los eventos es un tema que requiere estudios más avanzados para dilucidar la validez de una ley universal que sea independiente de la región analizada.

Capítulo 5

Referencias

Referencias

- Adelfio, G., y Chiodi, M. (2011). Forward likelihood-based predictive approach for space-time processes. *Environmetrics*, 22, 749 – 757.
- Barrows, D. (2016). Estimation and inference of nonlinear stochastic time series. , *Master Thesis*, McMaster University.
- Bayraktarli, Y., Baker, J., y Faber, M. (2011). Uncertainty treatment in earthquake modeling using bayesian probabilistic networks. *Georisk*, 5, 44-58.
- Collot, J.-Y., Marcaillou, B., Sage, F., Michaud, F., Agudelo, W., Charvis, P., ... Spence, G. (2004). Are rupture zone limits of great subduction earthquakes controlled by upper plate structures? evidence from multichannel seismic reflection data acquired across the northern ecuador–southwest colombia margin. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, VOL. 109, B11103, 109, <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2004 JB003060/references>.
- Corral, A. (2004). Universal local versus unified global scaling laws in the statistics of seismicity. *Physica A*, 340, 590–597.

- Cressie, N. (1993). Statistics for spatial data. *Ed Wiley, New York,*.
- Daley, D., y Vere-Jones, D. (2002). An introduction to the theory of point processes: Volume i: Elementary theory and methods, second edition.
- Epifany, L. P. A., I.and Ladelli. (2014). Bayesian estimation for a parametric markov renewal model appled to seismic data.
- Fletcher, R., y Powell, M. J. D. (1963). A rapidly convergent descent method for minimization. *Comput. J.*, 6, 163-168.
- Government of Japan, H. (1998). Aftershock probability evaluation methods. *The Headquarters for Earthquake Research Promotion Earthquake Research Committee Prime Minister's Office Government of Japan.*
- Guo, Z. J., Y., y Zhou, S. (2015). A hypocentral version of the space–time etas model. *Geophysical Journal International*, DOI: 10.1093/gji/ggv319.
- Hawkes, A. G., y Adamopoulos, L. (1973). Cluster models for earthquakes-regional comparisons. *Bull. Int. Statist. Inst.*, 45(3), 454-461.
- Hernandez Vargas, N. A. (2012). Bayesian point process modelling of earthquake occurrences.
- Holden, L., Natvig, B., Sannan, S., y Bungum, H. (2000). Modeling spatial and temporal dependencies between earthquakes. *Natural and Anthropogenically Induced Hazards.*
- <http://stackoverflow.com/questions/37033535/stan-programming-for-etas-model>. (s.f.).
- <http://stackoverflow.com/questions/37699772/stan-code-for-large-data-set>. (s.f.).

- <http://www.ism.ac.jp/ogata/statsei4/programme.html>. (s.f.).
- Kagan, Y., y Knopoff, L. (1981). Stochastic synthesis of earthquake catalogs. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 86, 2853–2862.
- Kagan, Y. Y., y Knopoff, L. (1980). Dependence of seismicity on depth. *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 70 no. 5.
- Lippiello, E., Arcangelis, L., Giacco, F., y Godano, C. (2014). Parameter estimation in the etas model: Approximations and novel methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, DOI: 10.1785/0120130148.
- Lotto, G., y Stein, R. (2016). Ecuador earthquakes: What happened and what’s next? , <http://temblor.net/earthquake-insights/ecuador-earthquakes-what-happened-and-what-is-next-986/>.
- Ogata, Y. (1983). Stimulation of the parameters in the modified omori formula for aftershock frequencies by the maximum likelihood procedure. *J. Phys. Earth*, 31, 115-124.
- Ogata, Y. (1988). Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 83, 9-27.
- Ogata, Y. (1998). Space-time point-process models for earthquake occurrences, annals of the institute of statistical mathematics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 50(2), 379-402.
- Ogata, Y. (2011). Significant improvements of the space-time etas model for forecasting of accurate baseline seismicity. *Earth Planets Space*, 63, 217–229.
- Ogata, Y., y Zhuang, J. (2006). Space-time etas models and an improved

extension.

- Omori, O. (1894). On the aftershocks of earthquakes. *Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo*, 7, 111–200.
- Saichev, A., y Sornette, D. (2006). Universal distribution of inter-earthquake times explained,. *Phys. Rev. Letts.*, 97, 078501.
- Saichev, A., y Sornette, D. (2007). Theory of earthquake recurrence times. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, 112 , B04313, doi:10.1029/2006JB004536, 2007.
- Schoenberg, F. P. (2013). Facilitated estimation of etas. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 103(1), 601-605 doi:10.1785/0120120146.
- Sornette, D., y Werner, M. J. (2005a). Apparent clustering and apparent background earthquakes biased by undetected seismicity. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 110, 243-261.
- Sornette, D., y Werner, M. J. (2005b). Constraints on the size of the smallest triggering earthquake from the epidemic type aftershock sequence model, bath's law, and observed aftershock sequences. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 110.
- Touati, S. (2011). Complexity, aftershock sequences, and uncertainty in earthquake statistics. *University Edingburgh, Phd. Thesis*.
- Utsu, T. (1969). Aftershocks and earthquake statistics (i) - some parameters which characterize an aftershock sequence and their interrelations. *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. VII* 3, 121-195.
- Utsu, T., Ogata, Y., y Matsu'ura, R. (1995). The centenary of the omori

- formula for a decay law of aftershock activity. *Journal of Physics of the Earth*, 43, 1-33.
- Varini, E., y Ogata, Y. (2014). Bayesian estimation of doubly stochastic poisson processes for detection of seismicity phases.
- Vere-Jones, D. (1995). Forecasting earthquakes and earthquake risk. *International Journal of Forecasting*, 11, 503-538.
- Welzl, E. (1991). Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids) occurrences. *H. Maurer (Ed.), New Results and New Trends in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science*, 555, 359-37.
- WorkingGroup, W. G. O. C. E. P. (2003). Earthquake probabilities in the san francisco bay region: 2002-2031. *U.S. Geological Survey, Open-File Report 03-214*, https://pubs.usgs.gov/of/2003/of03-214/WG02_OFR-03-214_chapter5.pdf.
- Yamanaka, Y., y Shimazaki, K. (1990). Scaling relationship between the number of aftershocks and the size of the main shock. *J. Phys. Earth*, 38, 305-324.
- Zhuang, J., Christophersen, A., Savage, M., Vere-Jones, D., Ogata, Y., y Jackson, D. (2008). Differences between spontaneous and triggered earthquakes: Their influences on foreshock probabilities. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, 113,, B11302, doi:10.1029/2008JB005579.
- Zhuang, J., y Ogata, Y. (2006). Properties of the probability distribution associated with the largest event in an earthquake cluster and their

implications to foreshocks. *PHYSICAL REVIEW, E* 73, 046134.

Zhuang, J., Ogata, Y., y Vere-Jones, D. (2002). Stochastic declustering of space-time earthquake occurrences. *Journal of the American Statistical Association*, 97, No. 458.

Zhuang, J., Ogata, Y., y Vere-Jones, D. (2004). Diagnostic analysis of space-time branching processes for earthquakes.

Anexos

Modelos Rstan

Listing 1: Modelo Rstan temporal con sismicidad de fondo constante

```
1 functions {
2   real loglikelihood (int N,
3                       real mu,
4                       real k,
5                       real p,
6                       real c,
7                       vector dif_tiempos,
8                       real tmax) {
9     real tasa_sismicidad [N];
10    real integral_tasa [N];
11    real integral_mu;
12    real log_verosimilitud;
13    tasa_sismicidad [N] <- log (mu);
14    integral_tasa [N] <- 0;
15    for (j in 1:(N-1)) {
16      vector [N-j] y;
17      int inicio;
```

```

18     int fin ;
19     inicio <-N*(j-1)-(j*(j-1))/2 + 1;
20     fin <-j*N-(j*(j+1))/2;
21     y<-dif_tiempos [ inicio : fin ];
22     y<-(k*(p - 1) * c^(p-1))*exp(-p*log (y+c)
23         );
24     tasa_sismicidad [ j]<-log (mu+sum (y) );
25     integral_tasa [ j]<-(k)*(1-c^(p-1)/
26         (( dif_tiempos [ j]+c)^(p-1)));
27     }
28     integral_mu<-mu*tmax;
29     log_verosimilitud <-sum ( tasa_sismicidad )-
30         integral_mu-sum ( integral_tasa );
31     return ( log_verosimilitud );
32 }
33 data {
34     int<lower=0> N;
35     real<lower=0> tiempo_max;

```

```

36   vector [N*(N-1)/2] dif_tiempos;
37 }
38 parameters{
39   real<lower=0> mu;
40   real<lower=0> k;
41   real<lower=1.000005> p;
42   real<lower=0.00005> c;
43 }
44 model{
45   mu~exponential(2.8);
46   k~exponential(2.8);
47   p~exponential(0.3);
48   c~exponential(2.8);
49   increment_log_prob(loglikelihood(N,mu,k,
50     p,c,dif_tiempos,tiempo_max));
51 }

```

Listing 2: Modelo Rstan temporal considerando magnitudes con sismicidad de fondo constante

```
1 functions{
2   real loglikelihood(int N,
3                       real mu,
4                       real k,
5                       real p,
6                       real c,
7                       real alpha,
8                       real A,
9                       vector t,
10                      vector magnitudes,
11                      vector dif_tiempos,
12                      real tiempo_max,
13                      real magnitud0){
14   real tasa_sismicidad[N];
15   real integral_tasa[N];
16   real integral_mu;
17   real log_verosimilitud;
18   tasa_sismicidad[N] <- log(mu);
```

```

19     integral_tasa [N] <- 0;
20     for (j in 1:(N-1)) {
21         vector [N-j] y;
22         int inicio;
23         int fin;
24         inicio <- N*(j-1) - (j*(j-1))/2 + 1;
25         fin <- j*N - (j*(j+1))/2;
26         y <- dif_tiempos [inicio : fin];
27         y <- (k*A*(p-1)*c^(p-1))*exp(alpha*
28             (magnitudes [(j+1):] - magnitud0))
29             .* exp(-p*log(y+c));
30         tasa_sismicidad [j] <- log(mu + sum(y));
31         integral_tasa [j] <- (k*A)*exp(alpha*
32             (magnitudes [j+1] -
33             magnitud0))*(1 - c^(p-1)/
34             ((dif_tiempos [j] + c)^(p-1)));
35     }
36     integral_mu <- mu*tiempo_max;
37     log_verosimilitud <- sum(tasa_sismicidad) -

```



```

38         integral_mu = sum( integral_tasa );
39     return( log_verosimilitud );
40 }
41 }
42 data {
43     int<lower=0> N;
44     vector[N] tiempo;
45     real<lower=0> tiempo_max;
46     vector[N] magnitudes;
47     vector[N*(N-1)/2] dif_tiempos;
48     real<lower=0> magnitud_corte;
49 }
50 parameters {
51     real<lower=0> mu;
52     real<lower=0> k;
53     real<lower=1.000005> p;
54     real<lower=0.00005> c;
55     real<lower=0> alpha;
56     real<lower=0> A;

```

```
57 }
58 model{
59   mu~exponential(2.8);
60   k~exponential(2.8);
61   p~exponential(0.3);
62   c~exponential(2.8);
63   alpha~exponential(2.8);
64   A~exponential(2.8);
65   increment_log_prob(loglikelihood(N,mu,k,p,c
66     ,alpha ,A, tiempo , magnitudes , dif_tiempos ,
67     tiempo_max , magnitud_corte));
68 }
```

Listing 3: Modelo Rstan espacio temporal anisótropo y con sismicidad de fondo constante

```
1 functions{
2   real loglikelihood(int N,
3                     real mu,
4                     real k,
5                     real p,
6                     real c,
7                     real q,
8                     real d,
9                     real alpha,
10                    real gamma,
11                    vector t,
12                    vector magnitudes,
13                    vector dif_tiempos,
14                    vector latitudes,
15                    vector longitudes,
16                    vector
17                    factor_cuadraticoAni,
18                    vector
```

```

18         factor_cuadraticoIso ,
19         real tmax ,
20         real magnitud0 ,
21         real lat_min ,
22         real lat_max ,
23         real long_min ,
24         real long_max ,
25         real radio
26     ){
27     real tasa_sismicidad [N];
28     real integral_tasa [N];
29     real integral_mu ;
30     real log_verosimilitud ;
31     tasa_sismicidad [N] <- log (mu) ;
32     integral_tasa [N] <- 0;
33     for (j in 1:(N-1)) {
34         vector [N-j] y ;
35         vector [N-j] z ;
36         vector [N-1] x ;

```

```

36     real temp;
37     real temp1;
38     real temp2;
39     int inicio;
40     int fin;
41     inicio <-N*(j-1)-(j*(j-1))/2 + 1;
42     fin <-j*N-(j*(j+1))/2;
43     y<-dif_tiempos [ inicio : fin ];
44     z<-exp(-q*log ( factor_cuadraticoAni [
45         inicio : fin ] ./
46         ( exp ( gamma*( magnitudes [ ( j+1):] - magnitud0
47             ))) + d ));
48     y<-(k*alpha*(p-1)*c^(p-1)*(q-1)*d^(q-1)
49         *(1/pi ( )))
50     *exp (( alpha-gamma)*( magnitudes [ ( j+1):] -
51         magnitud0))
52     .* exp(-p*log ( y+c ));
53     y<-y .* z;
54     tasa_sismicidad [ j ] <- log ( mu+sum ( y ) );

```

```

52     temp<-exp( alpha*( magnitudes [ j+1]-
           magnitud0));
53     temp1<-exp( gamma*( magnitudes [ j+1]-
           magnitud0));
54     temp2<-max( factor_cuadraticoAni [ inicio :
           fin ] );
55     integral_tasa [ j]<-k* alpha*temp*(1-c^(p
           -1)/
56     (( dif_tiempos [ j]+c)^(p-1)))*(1-d^(q-1)/
57     (( temp2/(temp1)+d)^(q-1)));
58 }
59     integral_mu<-mu*tmax*pi()*radio^2;
60     log_verosimilitud<-sum( tasa_sismicidad)-
61     integral_mu-sum( integral_tasa );
62     return( log_verosimilitud );
63 }
64 }
65 data {
66     int<lower=0> N;

```

```

67  vector [N] tiempo;
68  real<lower=0> tiempo_max;
69  vector [N] magnitudes;
70  vector [N*(N-1)/2] factor_cuadraticoAni;
71  vector [N*(N-1)/2] factor_cuadraticoIso;
72  vector [N*(N-1)/2] dif_tiempos;
73  real<lower=0> magnitud_corte;
74  vector [N] latitudes;
75  vector [N] longitudes;
76  real lat_min;
77  real lat_max;
78  real long_min;
79  real long_max;
80  real<lower=0> radio;
81 }
82 parameters{
83  real<lower=0> mu;
84  real<lower=0> k;
85  real<lower=1.000005> p;

```

```

86   real<lower=0> c;
87   real<lower=0> d;
88   real<lower=1.00005> q;
89   real<lower=0> alpha;
90   real<lower=0> gamma;
91 }
92 model{
93   mu~exponential(2.8);
94   k~exponential(2.8);
95   p~exponential(2.8);
96   c~exponential(2.8);
97   d~exponential(2.8);
98   q~exponential(2.8);
99   gamma~exponential(2.8);
100  alpha~gamma~exponential(5);
101  increment_log_prob(loglikelihood(N,mu,k,p,c,
      q,d,
102  alpha,gamma,tiempo,magnitudes,dif_tiempos,
103  latitudes,longitudes,factor_cuadraticoAni,

```



```
104     factor_cuadraticoIso , tiempo_max ,  
        magnitud_corte ,  
105     lat_min , lat_max , long_min , long_max , radio ) ) ;  
106 }
```

Listing 4: Modelo Rstan espacio temporal anisótropo con las profundidades y con sismicidad de fondo constante

```
1 functions {
2   real loglikelihood(int N,
3                     real mu,
4                     real k,
5                     real p,
6                     real c,
7                     real q,
8                     real d,
9                     real alpha,
10                    real gamma,
11                    real eta,
12                    vector t,
13                    vector magnitudes,
14                    vector dif_tiempos,
15                    vector dif_profundidades,
16                    vector latitudes,
17                    vector longitudes,
18                    vector profundidades,
```

```

19         vector
           factor_cuadraticoAni ,
20         vector
           factor_cuadraticoIso ,
21         real tmax ,
22         real magnitud0 ,
23         real lat_min ,
24         real lat_max ,
25         real long_min ,
26         real long_max ,
27         real radio ,
28         real profundidad_capa
29     ){
30
31     real tasa_sismicidad [N];
32     real integral_tasa [N];
33     real integral_mu ;
34     real log_verosimilitud ;
35     tasa_sismicidad [N]=log (mu) ;

```

```

36     integral_tasa [N]=0;
37     for (j in 1:(N-1)) {
38         vector [N-j] y;
39         vector [N-j] z;
40         vector [N-j] x;
41         vector [N-j] w;
42         real temp;
43         real temp1;
44         real temp2;
45         real temp3;
46         int inicio;
47         int fin;
48         inicio =N*(j-1)-(j*(j-1))/2 + 1;
49         fin =j*N-(j*(j+1))/2;
50         y=dif_tiempos [ inicio : fin ];
51         z=exp(-q*log ( factor_cuadraticoAni [ inicio
52             : fin ]
53             ./ ( exp ( gamma * ( magnitudes [ ( j + 1 ) : ] -
magnitud0 ) ) + d ) ) );

```

```

54     y=(k*alpha*(p-1)*c^(p-1)*(q-1)*d^(q-1)*
55         (1/pi()))*exp((alpha-gamma)*
56         (magnitudes[(j+1):]-magnitud0))
57         .*exp(-p*log(y+c));
58     x=y .* z ;
59     z=(1/profundidad_capa) *
60         dif_profundidades[inicio:fin];
61     y=(1/profundidad_capa) *
62         profundidades[(j+1):N];
63     for(i in 1:(N-j)){
64         w[i]=(1/(profundidad_capa * exp(lbeta
65             (eta *
66             (y[i]) + 1,eta - eta * (y[i])+ 1))
67             )) *
68             (z[i] ^ (eta * (y[i]))) * ((1 - z[i]
69             ]) ^
70             (eta-eta * (y[i])));
71     }
72     tasa_sismicidad[j]=log(mu+sum(x .* w));

```

```

70     temp=exp(alpha*(magnitudes[j+1]-
        magnitud0));
71     temp1=exp(gamma*(magnitudes[j+1]-
        magnitud0));
72     temp2=max(factor_cuadraticoAni[inicio:
        fin]);
73     integral_tasa[j]=k*alpha*temp*(1-c^(p-1)
74     /((dif_tiempos[j]+c)^(p-1)))*(1-d^(q-1)
75     /((temp2/(temp1)+d)^(q-1)));
76 }
77     integral_mu=mu*tmax*pi()*profundidad_capa*
78     (radio^2);
79     log_verosimilitud=sum(tasa_sismicidad)-
80     integral_mu-sum(integral_tasa);
81     return(log_verosimilitud);
82 }
83 }
84 data{
85     int<lower=0> N;

```

```

86  vector [N] tiempo;
87  real <lower=0> tiempo_max;
88  vector [N] magnitudes;
89  vector [N*(N-1)/2] factor_cuadraticoAni;
90  vector [N*(N-1)/2] factor_cuadraticoIso;
91  vector [N*(N-1)/2] dif_tiempos;
92  vector [N*(N-1)/2] dif_profundidades;
93  real <lower=0> magnitud_corte;
94  vector [N] latitudes;
95  vector [N] longitudes;
96  vector [N] profundidades;
97  real lat_min;
98  real lat_max;
99  real long_min;
100 real long_max;
101 real <lower=0> radio;
102 real <lower=0> profundidad_capa;
103 }
104 parameters{

```

```
105   real<lower=0> mu;
106   real<lower=0> k;
107   real<lower=1.000005> p;
108   real<lower=0> c;
109   real<lower=0> d;
110   real<lower=1.00005> q;
111   real<lower=0> alpha;
112   real<lower=0> gamma;
113   real<lower=0> eta;
114 }
115 model{
116   mu~exponential(2);
117   k~exponential(2);
118   p~exponential(2);
119   c~exponential(2);
120   d~exponential(2);
121   q~exponential(2);
122   eta~exponential(2);
123   gamma~exponential(2);
```



```
124  alpha-gamma~exponential(5);
125  increment_log_prob(loglikelihood(N,mu,k,p,c,
    q,d,
126  alpha,gamma,eta,tiempo,magnitudes,
    dif_tiempos,
127  dif_profundidades,latitudes,longitudes,
128  profundidades,factor_cuadraticoAni,
129  factor_cuadraticoIso,tiempo_max,
130  magnitud_corte,lat_min,lat_max,long_min,
131  long_max,radio,profundidad_capa));
132 }
```

Listing 5: Modelo Rstan anisótropo con sismicidad de fondo variable

```

1 functions{
2   real loglikelihood(int N,
3                     real mu,
4                     real k,
5                     real p,
6                     real c,
7                     real q,
8                     real d,
9                     real alpha,
10                    real gamma,
11                    vector t,
12                    vector magnitudes,
13                    vector dif_tiempos,
14                    vector latitudes,
15                    vector longitudes,
16                    vector tasas_sismicidad_fondo,
17                    vector factor_cuadraticoAni,
18                    vector factor_cuadraticoIso,
19                    real tmax,

```

```

20         real magnitud0 ,
21         real lat_min ,
22         real lat_max ,
23         real long_min ,
24         real long_max ,
25         real radio
26         ){
27     real tasa_sismicidad [N];
28     real integral_tasa [N];
29     real integral_mu;
30     real log_verosimilitud;
31     tasa_sismicidad [N]<-log(mu);
32     integral_tasa [N]<-0;
33     for(j in 1:(N-1)){
34         vector [N-j] y;
35         vector [N-j] z;
36         vector [N-1] x;
37         real temp;
38         real temp1;

```

```

39     real temp2;
40     int inicio;
41     int fin;
42     inicio <-N*(j-1)-(j*(j-1))/2 + 1;
43     fin <-j*N-(j*(j+1))/2;
44     y<-dif_tiempos [ inicio : fin ];
45     z<-
46         exp(-q*log ( factor_cuadraticoAni [ inicio
47             : fin ] ./
48             ( exp ( gamma*( magnitudes [ ( j+1): ] -
49                 magnitud0 ) ) + d ) );
50     y<-(k*alpha*(p-1)*c^(p-1)*(q-1)*d^(q-1)*
51         (1/pi ( ) ) * exp ( ( alpha-gamma ) * (
52             magnitudes [ ( j+1): ]
53             -magnitud0 ) ) .* exp(-p*log ( y+c ) ) );
54     y<-y .* z;
55     tasa_sismicidad [ j ] <-
56         log ( mu*tasas_sismicidad_fondo [ j+1 ] + sum
57             ( y ) );

```

```

54     temp<-exp( alpha*( magnitudes [ j+1]-
           magnitud0));
55     temp1<-exp( gamma*( magnitudes [ j+1]-
           magnitud0));
56     temp2<-max( factor_cuadraticoAni [ inicio :
           fin ] );
57     integral_tasa [ j]<-k* alpha*temp*(1-c^(p
           -1)/
58         (( dif_tiempos [ j]+c)^(p-1))) *
59         (1-d^(q-1)/(( temp2/(temp1)+d)^(q-1)));
60 }
61 integral_mu<-mu*sum( tasas_sismicidad_fondo
           ) *
62     tmax*pi()*radio^2;
63 log_verosimilitud<-sum( tasa_sismicidad)-
64     integral_mu-sum( integral_tasa );
65 return( log_verosimilitud );
66 }
67 }

```

```

68 data{
69   int<lower=0> N;
70   vector [N] tiempo;
71   real<lower=0> tiempo_max;
72   vector [N] magnitudes;
73   vector [N*(N-1)/2] factor_cuadraticoAni;
74   vector [N*(N-1)/2] factor_cuadraticoIso;
75   vector [N*(N-1)/2] dif_tiempos;
76   real<lower=0> magnitud_corte;
77   vector [N] latitudes;
78   vector [N] longitudes;
79   vector [N] tasas_sismicidad_fondo;
80   real lat_min;
81   real lat_max;
82   real long_min;
83   real long_max;
84   real<lower=0> radio;
85 }
86 parameters{

```

```

87   real<lower=0> mu;
88   real<lower=0> k;
89   real<lower=1.000005> p;
90   real<lower=0> c;
91   real<lower=0> d;
92   real<lower=1.00005> q;
93   real<lower=0> alpha;
94   real<lower=0> gamma;
95 }
96 model{
97   mu~exponential(2.8);
98   k~exponential(2.8);
99   p~exponential(2.8);
100  c~exponential(2.8);
101  d~exponential(2.8);
102  q~exponential(2.8);
103  gamma~exponential(2.8);
104  alpha~gamma~exponential(5);
105  increment_log_prob(loglikelihood(N,mu,k,p,c,

```

```
    q,d,  
106    alpha ,gamma, tiempo ,magnitudes ,dif_tiempos ,  
107    latitudes ,longitudes ,  
        tasas_sismicidad_fondo ,  
108    factor_cuadraticoAni ,factor_cuadraticoIso ,  
109    tiempo_max ,magnitud_corte ,  
110    lat_min ,lat_max ,long_min ,long_max ,radio )) ;  
111 }
```