

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Administración y Economía

**Impacto de un fácil acceso para Pymes a un mercado de
capitales en la distribución de la valoración de las empresas**

y su estructura de capital

Proyecto de Investigación

Francisco José Larreta Cisneros

Economía

Trabajo de titulación presentado como requisito

para la obtención del título de

Economista

Quito, 11 de diciembre de 2017

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
COLEGIO DE ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

HOJA DE CALIFICACIÓN
DE TRABAJO DE TITULACIÓN

**Impacto de un fácil acceso para Pymes a un mercado de
capitales en la distribución de la valoración de las empresas
y su estructura de capital**

Francisco José Larreta Cisneros

Calificación:

Nombre del profesor, Título académico: Santiago José Gangotena, Ph.D.

Firma del profesor:

Quito, 11 de diciembre de 2017

Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante:

Nombres y Apellidos: Francisco José Larreta Cisneros

Código: 00116486

Cédula de Identidad : 1716665565

Lugar y fecha: Quito, 11 de diciembre de 2017

Dedicatoria y agradecimiento

El presente trabajo se lo dedico a mis padres, que han sido mi fuente de fortaleza durante toda mi carrera. No hubiese sido posible alcanzar este punto de mi vida sin su apoyo incondicional. Además, deseo hacer un especial agradecimiento a mi tutor Santiago José Gangotena por su tiempo y la guía que me ha ofrecido, los cuales me permitieron realizar y culminar con este trabajo de manera satisfactoria.

RESUMEN

La principal, y en la mayoría de los casos, única fuente de financiamiento de las pequeñas y medianas empresas es a través de instituciones financieras. Existen muy pocos mercados de intercambio que permitan tranzar acciones de Pymes, y no han logrado insertarse en los mercados grandes debido a los requisitos exigentes. Este trabajo busca representar el escenario en que este tipo de empresas tengan el mismo tipo de acceso tanto con financiamiento privado, como a través de cotización de acciones pública. Se lo realiza creando un sistema dinámico sintético computacional basado en un modelo teórico matemático el cuál asigna a las empresas (agentes) un set de información, estados posibles, reglas y acciones para adquirir los dos tipos de financiamiento permitiendo evaluar periódicamente como se desarrolla el sistema y su dinámica. Esto nos permite observar el efecto que puede tener la apertura rápida de mercados de intercambios a estas empresas en la distribución general de su valoración y en su estructura de capital.

Palabras clave: Pyme, mercado de capitales, financiamiento público, empresa pública, oferta inicial pública.

ABSTRACT

The main, and in most cases, and only source of financing for small and medium firms is through private financial institutions. There are few exchange markets that allow trading of SME's equity, and they haven't been able to enter bigger exchange markets because of demanding requirements. This paper tries to develop this scenario, where this type of firm has the same access to private financing as to issuing stocks to the public. This is accomplished with the creation of a synthetic computational dynamic system based on a theoretical mathematical model which assigns firms an information set, possible states, rules and actions of acquiring any of the two type of financing, allowing us to periodically evaluate the system's development and dynamics. We can observe the effect of easy access to an exchange market for this type of firms can have in the firms valuation distribution and their capital structure

Keywords: SME, exchange market, public financing, public firm, initial public offering .

TABLA DE CONTENIDO

1	Introducción	10
2	Revisión de Literatura	14
3	Metodología	17
3.1	Modelo matemático	17
3.1.1	Variables globales	18
3.1.2	Variables propias de cada empresa (set de información):	18
4	Análisis y Resultados	27
5	Conclusiones	39
6	Referencias	43
7	Apéndices	45
7.1	Apéndice 1	45
7.2	Apéndice 2	45
7.3	Apéndice 3	46
7.4	Apéndice 4	47

ÍNDICE DE TABLAS

1	Resultados: Tipo y valoración	32
2	Resultados: Ratio de financiamiento	33

ÍNDICE DE FIGURAS

1	Experimento 1. Distribución inicial	29
2	Experimento 1. Distribución final	29
3	Experimento 1. Porcentaje de empresas privadas	30
4	Experimento 1. Ratio de financiamiento	30
5	Experimento 2. Distribución inicial	31
6	Experimento 2. Distribución final	31
7	Experimento 2. Tipo de empresa	31
8	Experimento 2. Ratio de financiamiento	31
9	Experimento 3. Distribución inicial	34
10	Experimento 3. Distribución final	35
11	Experimento 3. Tipo de empresa	35
12	Experimento 3. Ratio de financiamiento	35

Introducción

El mercado de valores sigue siendo accesible solo para aquellas empresas que gozan de capital suficiente para cumplir los requisitos legales de entrada, al igual que los que poseen vínculos que les permiten ingresar fácilmente. En muchos países, las empresas que cotizan en bolsa son muy pocas, mientras que la gran mayoría de empresas existentes se encuentran en la clasificación de pequeñas y medianas, las cuales no cumplen con los requerimientos de entrada, impidiéndoles el acceso a financiamiento a través de intermediación directa que les permitiría crecer y desarrollarse. Esto puede generar que las empresas que ya son grandes crezcan cada vez más y a mayor velocidad, mientras que el resto de empresas, limitadas a la intermediación indirecta y a una estructura de capital muy dependiente de financiamiento privado, no lo hagan aumentando esta brecha.

El presente trabajo busca realizar un modelo basado en dinámica de sistemas, *System Dynamics*, a través del programa NetLogo definiendo las características de un escenario sintético. En este mercado, como en cualquier otro modelo que usa esta metodología, se definirá lo que representan los distintos agentes, los posibles estados que pueden tener en cada periodo, el set de información al que tienen acceso, las acciones que pueden realizar en cada situación, y el set de reglas de comportamiento que determinan los estados y las acciones que toman los agentes. Representar este mercado a través de un modelo dinámico de sistemas nos permitirá evaluar distintos escenarios definiendo funciones de comportamiento de dichos agentes. Este enfoque nos

permite controlar las características del sistema en los distintos periodos de tiempo y analizar los efectos.

El enfoque tradicional en el que se ha evaluado escenarios financieros en base a hipótesis de eficiencia de mercado y paradigmas de agentes representativos racionales está perdiendo alcance y utilidad para describir situaciones reales. Es por esto que autores como Ramanauskas (2008) defienden que modelos financieros basados en agentes muestran características fundamentales más cercanas a escenarios verdaderos, por ejemplo: agentes heterogéneos, interacción compleja entre agentes y racionalidad limitada.

Se define un escenario sintético con agentes, estados, acciones y reglas de comportamiento. Se determinan a las empresas como el único grupo de agentes y tienen un set de información que definirá las distintas características como tamaño, tipo, estado, etc. las cuales definirán su posibilidad y disposición a adquirir financiamiento a través de instituciones financieras u ofreciendo participaciones en el mercado de capitales. Plantear un escenario sintético de este estilo nos puede brindar indicios de cómo sería la participación de empresas pequeñas y medianas a un mercado de capitales. Actualmente, la lista de requerimientos delimita a las empresas en base a sus ingresos, cantidad de acciones y valor del total de acciones ofrecidas públicamente, lo que genera que enlistar en bolsa sea un beneficio de pocas empresas. Si se disminuyeran los requerimientos para cotizar en un mercado de capitales, se permitiría el acceso a muchas más empresas generando mayores ingresos por pagos por participación en el mercado, al igual que un mayor conocimiento de empresas

pequeñas y medianas que disminuiría la segmentación entre ellas, como lo explican Carpentier et al. (2010).

De la misma manera, Kulkarni, P. y Chirputkar, A. (2014) defienden que el acceso de empresas pequeñas y medianas a la posibilidad de cotizar en un mercado de capitales ayuda a que puedan reunir fondos, y desarrollarse para alcanzar sus objetivos. Teniendo esto en cuenta, se puede aumentar el valor de las firmas, llevando a que los beneficios de los inversionistas aumenten, mayor recaudación de impuestos, generación de empleo, mejor distribución de riqueza y desarrollo económico en general.

Finalmente, el hecho de usar herramientas más modernas, como en este caso *System Dynamics*, nos permite tener una representación más cercana a la realidad. Beinhocker (2006), en su libro *The Origin of Wealth*, define que la economía es un sistema complejo dinámico y adaptativo, lo que permite que un enfoque basado en *Complexity Economics*, que utiliza herramientas computacionales como la metodología presentada en este trabajo, modelación basada en agentes, entre otras, nos muestran una idea más clara de cómo los seres humanos se comportan, y no realizan suposiciones de ellos que son falsas. (p.116)

Este enfoque para este estudio nos permite evaluar un escenario financiero desde otro punto de vista. Dado esto, se puede generar la apertura a nuevas investigaciones de este tema modificando el escenario para evaluar distintos temas que permitirán profundizar sobre el impacto de los requerimientos para

lograr cotizar en mercado de capitales.

Se encuentra, como resultados principales, que un fácil acceso a un mercado de capitales genera incentivos a las empresas a ser públicas ya que les genera un menor dependencia de deuda privada en su estructura de capital, pero sin tener un mayor impacto en su valoración. La distribución de la valoración varía a lo largo de los periodos, manteniendo e incluso inclinándose a una aún más sesgada. Sin embargo, las características del financiamiento privado, como el costo que tiene, definen en gran parte la motivación de las empresas a obtener los distintos tipos de financiamiento.

Se reconoce que cotizar en mercado de valores como fuente de financiamiento es privilegio de pocas empresas. Es por esto que se desea evaluar el impacto del ingreso de pequeñas y medianas empresas en la brecha de tamaño y tasas de crecimiento en relación a las empresas grandes ya enlistadas, al igual que en su estructura de capital. La metodología y modelación matemática de este trabajo nos permite elaborar un escenario sintético en el que definimos características útiles que nos permitirán estudiar este tema concisamente, considerando la falta de estudios de esta tesis bajo este enfoque. No existe un estudio existente del tema tratado con el uso de herramientas similares, no obstante, si se ha evaluado anteriormente casos del impacto de los requerimientos de cotización para empresas pequeñas y medianas en la economía como en elementos de la misma. Además, modelación basada en agentes ha sido un método utilizado últimamente en varios estudios financieros, especialmente del mercado de capitales.

Revisión de Literatura

La motivación principal de este trabajo es la dificultad de acceso para las pequeñas y medianas empresas a un mercado de capitales y la importancia que tiene este tipo de financiamiento para las mismas., las cuáles se explicarán en esta sección. A pesar de que no existen estudios empíricos usando el enfoque genérico presentado en este trabajo, y existen pocos acerca del impacto de la participación de Pymes en un mercado de acciones, se han realizado estudios teóricos específicos, para los casos de ciertos países que resaltan las ventajas de adquirir financiamiento en un mercado de capitales.

Según Mensah (2004), en su estudio realizado en Ghana, las características que en común se presentan en las pequeñas y medianas empresas generan un déficit de financiamiento que no permite su crecimiento. Algunas de estas características son que este tipo de empresas son, usualmente, dominadas por una sola persona, la cual toma las principales decisiones y posee limitada educación formal, poco acceso a información, crédito y tecnología. Por otro lado, las habilidades administrativas son muy pocas y débiles, generando baja capacidad de desarrollar una estrategia productiva. Del mismo modo, este tipo de empresas posee una gran volatilidad de capital de trabajo y finalmente, una falta de conocimientos para adquirir habilidades modernas y tecnología que permiten el desarrollo. Como Kulkarni, P. y Chirputkar, A. (2014) lo expresan en un estudio para la India, la mayor parte de financiamiento de las Pymes proviene de bancos, del capital social que pueden aportar los dueños y de todo el financiamiento informal que se puede obtener de familiares o amigos. Este tipo

de empresas tienen menos oportunidades de desarrollo tecnológico, de infraestructura y de realizar investigación y desarrollo debido a la falta de fondos. Es por esto que un fácil acceso al mercado de capitales permitiría a las Pymes mejorar en su productividad y estrategia, obtener beneficios tributarios, y mayor capacidad de adaptación a los ciclos económicos.

Por otro lado, es importante resaltar como el acceso de Pymes a este tipo de financiamiento aportaría a la economía de su país con empleo y contribución a la producción total. Según Mirigo, M. y Karanja, P. (2013), en su estudio realizado para las Pymes en Kenia, las pequeñas y medianas empresas son la principal fuente de crecimiento para las economías desarrolladas y en desarrollo. En la mayoría de las economías, las empresas de este tipo representan el 99% de todas las empresas, y emplean alrededor del 60% de la población. Según estos autores, permitir este tipo de financiamiento a través de mercados con menos regulaciones y requerimientos como el Mercado de Inversión Alternativa, (AIM) el cual es un sub-mercado del London Stock Exchange, permite cultivar motivación e incentivos a los empleados, además de las ventajas ya mencionadas, permitiendo desarrollar estas empresas y generar un impacto positivo en la economía de los países.

Del mismo modo, la estructura de capital adquiere un importante papel para las Pymes ya que, al depender mayoritariamente en deuda más que en capital, son mucho más riesgosas que empresas más grandes. Un mejor acceso a un mercado de capitales disminuye la dependencia en deuda privada, una Pyme puede mejorar su capacidad de acceso a crédito privado ya que su capacidad

de pago es mayor, al tener menos deuda en su estructura de capital. De manera similar, Pagano et al. (1998) demuestran empíricamente para el caso de Italia, que las empresas buscan balancear su estructura de capital después de crecimiento y grandes inversiones, siendo las empresas grandes las que tienen una mayor probabilidad de realizar una Oferta Pública Inicial, es decir ofrecer públicamente acciones de una empresa por primera vez. Asimismo, tal y como lo especifican Hardwood, A. y Konidaris, T. (2015), adquirir financiamiento a través de capital en un mercado de intercambio brinda fondos a la empresa a largo plazo, y no necesita ser pagado. Además que permite aumentar su acceso a crédito bancario, el cuál suele ser costoso con cuotas altas y altos colaterales debido a la asimetría de información.

Después de definir algunas de las muchas ventajas de obtener acceso a un mercado de capitales para las pequeñas y medianas empresas, es pertinente entender por qué son pocos los países que han permitido el desarrollo de mercado de capitales para este tipo de empresas. Todo mercado de capitales posee ciertos requerimientos que facilitan la inversión y el intercambio de securities para asegurar capacidad de control, transparencia y calidad de firmas. Sin embargo, Carpentier et al. (2010) aseguran que los mercados enfrentan un trade off sobre qué tipo y cuantas empresas tiene acceso a ofrecer sus acciones públicamente. Por un lado, mientras más empresas haya se generan mayores ganancias por cotizar de manera pública, al igual que las cuotas por participar en el mercado. Por otro lado, menores requerimientos disminuyen la capacidad de monitoreo y la reputación del capital, generando desincentivos de entrada y participación a inversores.

Este trabajo busca crear un sistema sintético en el que se pueda evaluar la dinámica del mismo a través de la retroalimentación para los agentes definidos por una cantidad de periodos arbitraria. No existe ningún estudio realizado bajo este enfoque, sin embargo, es importante resaltar los atributos y aportaciones principales que nos brinda esta metodología. Como Forrester (2009) lo explica, esta metodología de modelación matemática nos permite generar un vínculo entre los modelos mentales, los cuales son las bases para las decisiones diarias y simulaciones computacionales, los cuales nos permiten evaluar la dinámica de la información obtenida en los modelos mentales. El modelo presentado en este trabajo nace de la motivación expresada anteriormente como un modelo mental, y busca desarrollar una modelación matemática que represente el sistema complejo y pueda programarse en una herramienta computacional.

Metodología

3.1. Modelo matemático

Se desarrolló un modelo matemático para definir las características del escenario sintético como las distintas variables tanto globales como propias de cada agente, sus funciones objetivo que buscan maximizar y los óptimos derivados que asignaran las acciones a realizar en cada periodo. La programación se realizó en NetLogo de Wilensky (1999) de acuerdo a los resultados, las variables, y las características de este modelo.

3.1.1. Variables globales

Se definen como variables globales como aquellas que no se ajustan de acuerdo a la heterogeneidad de cada empresa, y son adoptadas de igual manera por todas.

- Número de firmas
- Tamaño límite que divide empresas Grandes de Pymes
- Porcentaje del total de firmas que son privadas
- Valoración de la empresa más grande
- Valoración promedio de las empresas
- Número de empresas que quiebran y salen del modelo

3.1.2. Variables propias de cada empresa (set de información):

Las variables propias de cada empresa tienen la característica de que varían en cada periodo y son únicas para cada empresa. Algunas de las variables son consideradas en la programación y otras en el modelo matemático. El set de información presentado a continuación abarca todas estas variables:

$$\psi_{it} = \{T_{it}, V_{it}, S_{it}, \sigma_{it}, g_{it}, r_{it}, k_{it}\}$$

A continuación se presenta la descripción de cada una de estas variables:

Tipo:

Es una variable binaria representada de la siguiente manera:

$$T_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si } pública \\ 0 & \text{si } privada \end{cases}$$

Valoración:

Es la variable de mayor interés que nos indicará el resultado principal, es decir el efecto en la distribución de las empresas por su tamaño.

$$V_{it} \in \mathbb{R}^{++}$$

Tamaño:

Esta variable binaria nos permitirá clasificar a las empresas en Grandes y Pymes.

$$s_{it}(V_{it}, \bar{V}) = \begin{cases} 0 = \text{Grande} & \text{si } V_{it} \geq \bar{V}\beta \\ 1 = \text{Pyme} & \text{si } V_{it} \leq \bar{V}\beta \end{cases} \quad \text{donde } \bar{V} = \text{Max}\{V_{it}\}, \quad \beta \in [0, 1]$$

Riesgo:

Esta variable representa la variabilidad que tiene el crecimiento de las empresas, y están condicionadas a su tipo.

$$\sigma_{it}(T_{it}) = \begin{cases} \sigma_{pública} & \text{si } T_{it} = 1 \\ \sigma_{privada} & \text{si } T_{it} = 0 \end{cases} \quad \text{donde } \sigma_{pública} > \sigma_{privada}$$

Media de Crecimiento:

Con esta variable se representa el crecimiento promedio de cada empresa,

condicionado a su tipo.

$$\mu_{it}(T_{it}) = \begin{cases} \mu_{pública} & \text{si } T_{it} = 1 \\ \mu_{privada} & \text{si } T_{it} = 0 \end{cases} \quad \text{donde } \mu_{pública} < \mu_{privada}$$

Crecimiento:

Esta variable sigue una distribución normal sujeta a la media de crecimiento y su riesgo anteriormente explicados.

$$g_{it} \sim N(\mu_{it}, \sigma_{it})$$

Tasa de interés:

La tasa de interés esta definida por una tasa libre de riesgo, más el efecto que tiene la dependencia en deuda privada, representada con el ratio de financiamiento, y por la diferencia entre el crecimiento de la empresa con respecto al crecimiento promedio acorde a su tipo.

$$r_{it}(r_o, F, \Delta F) = r_o + \left(\frac{F + \Delta F}{V_{it}}\right)\gamma_1 + (\mu_{it} - \bar{g}_L)\gamma_2 \quad \text{donde } \bar{g}_L = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L g_{t-1}$$

El primer término de la ecuación anterior representa a la tasa libre de riesgo, el segundo muestra la estructura de capital representada como el ratio de financiamiento, el cual se calculo dividiendo el total de deuda ($F + \Delta F$) para el patrimonio, en este caso la valoración (V_{it}). Por último, el tercer término muestra el efecto de la diferencia entre el crecimiento de la empresa con respecto al crecimiento promedio de las empresas de su tipo. Este último es considerado

ya que se basa en el supuesto de que el costo de un préstamo privado cambiará de acuerdo a la situación de desarrollo y crecimiento de la empresa en relación al crecimiento del resto de empresas. Se considera que esta diferencia refleja la situación económica de la empresa, la cual permite concluir que si una empresa crece más que el promedio de crecimiento del resto de empresas de su tipo, sus costos de financiamiento privado (tasa de interés) disminuye.

$$r_{it}(r_o, F, \Delta F) = r_o + \Delta r_1 + \Delta r_2$$

$$\Delta r_1 = \left(\frac{F + \Delta F}{V_{it}} \right) \gamma_1$$

$$\Delta r_2 = (\mu_{it} - \bar{g}_L) \gamma_2$$

A continuación se presenta el cálculo del efecto de las variables nombradas que definen la tasa de interés para cada empresa:

Ratio de Financiamiento

Se debe encontrar una forma funcional tal que se cumpla las siguientes condiciones:

$$\Delta r_1(FR), \quad \text{donde} \quad \frac{\delta \Delta FR}{\delta FR} > 0; \quad \frac{\delta^2 \Delta FR}{\delta FR^2} > 0$$

Se espera que la primera derivada sea positiva ya que la tasa de interés debe ser mayor cuando la dependencia en deuda privada es mayor. Esto se justifica con el hecho de que el costo de deuda aumenta cuando la deuda es mayor, disminuyendo la capacidad de pago de nuevo crédito, por lo que sería más costoso adquirirlo. Por otro lado, se espera que la segunda derivada sea

igual positiva, ya que a medida que se tiene un mayor ratio de financiamiento, la tasa de interés crece cada vez más.

Del mismo modo, la forma funcional debe cumplir las siguientes condiciones en sus límites:

$$\Delta r_1(FR = 0) = 0$$

$$\Delta r_1(FR \rightarrow 1) \rightarrow \infty$$

Esto se debe a que se espera que si la empresa no posee ningún tipo de deuda privada, el efecto es 0, y que el efecto tiende a infinito, cuando el ratio tiende a infinito. Teniendo en cuenta esto, se concluye que la forma funcional adecuada es la siguiente:

$$f(FR) = \frac{FR}{1 - FR}$$

La cual nos da la siguiente elasticidad:

$$E_{r,FR} = \frac{1}{1 - FR}$$

La demostración del cumplimiento de las condiciones están detalladas en el Apéndice 1.

Tamaño/Crecimiento

Para el segundo efecto, se encuentra que la forma funcional debe cumplir

las siguientes condiciones:

$$\Delta r_2(TC), \quad \text{donde} \quad \frac{\delta \Delta r_2(TC)}{\delta TC} < 0; \quad \frac{\delta^2 \Delta r_2(TC)}{\delta TC^2} < 0$$

Además, debe cumplir con estas condiciones en sus límites:

$$\Delta r_2(TC \rightarrow -\infty) \rightarrow \infty$$

$$\Delta r_2(TC \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

$$\Delta r_2(TC = 0) = R$$

Se concluye que la elasticidad debe tener la siguiente forma funcional:

$$E_{r,TC} = R2^{-mTC} \quad \text{donde } m \text{ es una constante.}$$

donde R es una prima extra a la tasa libre de riesgo pagada en el caso de crecer igual al promedio de las empresas y m es

$$r = r_0 \left(\frac{1}{1 - FR} + R2^{-mTC} \right) \quad (1)$$

Finalmente se encuentra que la tasa de interés se representa por (1)

Decisión de ser pública:

Al momento de decidir si se debe realizar una Oferta Inicial Pública, se asu-

me que las empresas buscan maximizar su valoración tal que:

$$(\mu_{pública}K) > kn_0(d), \quad \text{donde :}$$

$\Delta K \rightarrow$ Cantidad de financiamiento en el mercado de capitales

$k \rightarrow$ Precio de la acción

$n_0 \rightarrow$ Cantidad inicial de acciones emitidas

$d \rightarrow$ Porcentaje de la valoración pagada en dividendos

$\Delta K_t = \alpha V_t$ donde $\alpha \in [0, 1]$ es una constante que representa la valoración dada por la banca de inversión al momento de realizar una Oferta Inicial Pública.

$$k_t = \frac{\Delta K_t}{n_o}$$

Cantidad de financiamiento:

Para las empresas privadas, se define el crecimiento de la valoración como el siguiente:

$$V_t = V_{t-1}(1 + g_L)$$

donde $T = \text{privado}$; g_T ($\mu_{priv}, \sigma_{priv}$) y g_L es el crecimiento promedio de un número de periodos anteriores.

Se define como función objetivo lo siguiente:

$$\max G = g_L \Delta F - r_0 \left(\frac{1}{1 - FR} - R e^{-mTC} \right) (F + \Delta F) + P(\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d) \quad (2)$$

donde $P = 1$ si la empresa es pública y $P = 0$.

La función objetivo representa el efecto de obtener financiamiento. El primer

término muestra el crecimiento que genera el nuevo financiamiento, y se resta el costo representado por la tasa de interés. Finalmente se agrega el efecto de tener acceso a financiamiento público.

Maximizando con respecto a ΔF se encuentra el siguiente óptimo con la condición de primer orden:

1. Para ΔF con $P = 0$

$$\Delta F_{t+1}^* = V_{t+1} \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{g_L + r_0 R e^{-mTC}}} \right) - F_t \quad (3)$$

2. Para ΔF con $P = 1$ La nueva función objetivo se define como:

$$\max G = g_L \Delta F - r_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{F + \Delta F}{V_{t+1} + \Delta K}} - R e^{-mTC} \right) (F + \Delta F) + P(\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d) \quad (4)$$

Se encuentra con la condición de primer orden el siguiente óptimo:

$$\Delta F_{t+1}^{**} = (V_{t+1} + \Delta K) \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{g_L + r_0 R e^{-mTC}}} \right) - F_t \quad (5)$$

La obtención de las condiciones de primer orden para los óptimos presentados se detallan en los Apéndice 2 y 3 respectivamente.

Las empresas reemplazan (3) en (2), y (5) en (4), y escogen la cantidad de financiamiento que es genere un mayor valor en la función objetivo. Por otro lado, para las empresas que ya son públicas, en cada periodo deben escoger la variación en el financiamiento privado, al igual que las nuevas acciones que emiten.

La función objetivo es la siguiente:

$$\max G = g_L \Delta F - r_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{F + \Delta F}{V_{t+1} + \Delta K}} - Re^{-mTC} \right) (F + \Delta F) + (\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d) \quad (6)$$

Encontrando las condiciones de primer orden tanto para ΔF como para Δn se encuentra los siguientes óptimos:

$$\Delta F_{t+1}^{***} = (V_{t+1} + \Delta K + k_t * \Delta n) \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{g_L + r_0 Re^{-mTC}}} \right) - F_t \quad (7)$$

$$\Delta n^* = (F + \Delta F) \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{d + g_L}} \right) - V_{t+1} - \Delta K \quad (8)$$

El detalle de la derivación para obtener los anteriores óptimos se encuentra en el Apéndice 4.

Finalmente, para poder analizar los resultados de este modelo en el que todas las empresas tienen un mismo acceso a un mercado de capitales, se realizó tres experimentos distintos los cuáles son detallados en la siguiente sección. En cada uno de ellos, las empresas calculan los óptimos presentados anteriormente, lo agregan a su función objetivo y a su valoración y se desea encontrar cuál es el efecto de que algunas variables específicas adquieran distintos valores, y se evalúa su efecto en variables de interés como el porcentaje de empresas privadas existentes, la valoración promedio de empresas privadas y públicas, al igual que su ratio de financiamiento. Como resultados obtenemos un set de datos que nos permite evaluar las variables dependientes mencionadas a través de varios periodos, y considerando la heterogeneidad de distintas corridas realizadas. Para poder analizar la dirección del impacto, se realizó mo-

delos de Datos de Panel con Efectos Aleatorios en todos los experimentos para poder observar el comportamiento de las distintas corridas a través del tiempo y concluir sobre el efecto en las variables de interés. Se considera que un modelo con Efectos Aleatorios es el correcto ya que se presume que las variaciones entre una corrida y otro son aleatorias y no están correlacionadas con las variables independientes definidas en cada experimento. Además, se cree que estas diferencias pueden influenciar en las variables dependientes de interés definidas anteriormente.

Análisis y Resultados

Para el análisis de los resultados obtenidos y resumidos en la Tabla 1 y en la Tabla 2, se tomará en cuenta el signo de cada estimador encontrado mas no la magnitud. Esto se debe a que, por características del modelo econométrico utilizado, no se delimita los valores de las variables de interés, y se pueden encontrar incoherencias como porcentajes por fuera del valor entre 0 y 1. A continuación se detallarán las características de los experimentos realizados.

Experimento 1: Crecimiento y riesgo promedio

En este experimento se desea evaluar cuál es el efecto de distintas tasas de crecimiento y riesgo promedio, tanto para empresas públicas como privadas. Como resultados generales, podemos observar comparando la Figura 1 y la 2 que la distribución de la valoración de las empresas se hace aún más sesgada a la derecha al final de todos los periodos. Esto quiere decir que muchas empresas se hacen muy pequeñas y solo una o pocas muy grandes. Por otro lado,

observando las Figuras 3 y 4 se concluye que el porcentaje de empresas privadas se mantiene una tendencia constante con poca volatilidad, mientras que el ratio de financiamiento de las empresas privadas, señalado en verde, tiene un gran volatilidad en contraste con el ratio de las públicas, el cual se mantiene bastante constante y estable. Ahora bien, para un análisis más específico, los resultados para este experimento se muestran en las primeras cuatro filas de cada una de ellas con las variables dependientes señaladas en cada columna de las dos tablas.

En primer lugar, en la Tabla 1 se puede observar que solo para el porcentaje de empresas privadas son significantes el crecimiento, al igual que el riesgo de empresas tanto públicas como privadas. Como se puede esperar, se halla que mientras mayor sea el crecimiento promedio de las empresas públicas, menor será el porcentaje de empresas privadas; en contraste con el crecimiento promedio de las empresas privadas, lo cuál se muestra el efecto contrario. Sin embargo, con respecto al riesgo, se encuentra que un mayor riesgo promedio de empresas públicas aumenta el porcentaje de empresas privadas, mientras que un mayor riesgo promedio privado disminuye la cantidad de empresas privadas.

Por otro lado, se encuentra que la valoración promedio de las empresas privadas no se ve afectada significativamente por ninguna variable de crecimiento o riesgo promedio de las empresas, independientemente del tipo. No obstante, la valoración promedio de las empresas públicas si se ve positivamente afectada en promedio por un aumento en el riesgo de empresas tanto públicas como privadas. Por último, en la Tabla 2 se muestra que el crecimiento promedio de

Figura 1: Experimento 1. Distribución inicial

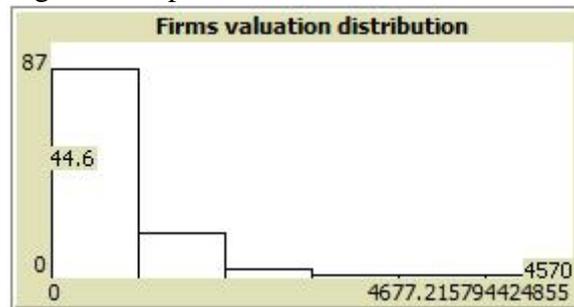
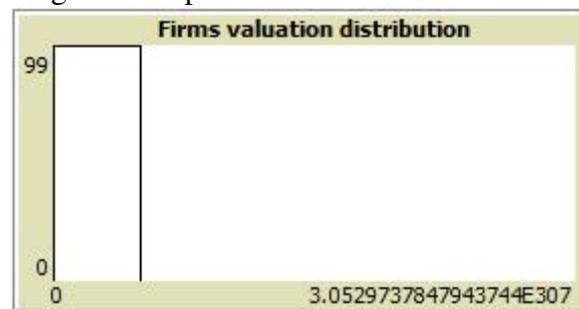


Figura 2: Experimento 1. Distribución final



las empresas públicas afecta positivamente la variación del ratio de financiamiento de las empresas públicas, lo cuál tiene sentido ya que se esperaría que si las empresas estan creciendo, su capacidad de pago mejora, haciendo que sean fácilmente sujetos a crédito. Por otro lado, el ratio de financiamiento promedio de las empresas privadas disminuye con un mayor crecimiento promedio de empresas privadas. esto puede justificarse debido a la dependencia con financiamiento privado, como bancos u otras instituciones bancaria. Si su crecimiento es mayor, las empresas privadas pueden buscar que su estructura de capital dependa menos de deuda privada y evitar sobreendeudarse.

Experimento 2: Características iniciales

Para este experimento, se desea evaluar el efecto de la valoración prome-

Figura 3: Experimento 1. Porcentaje de empresas privadas

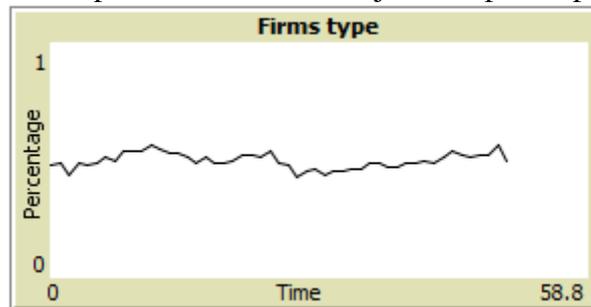
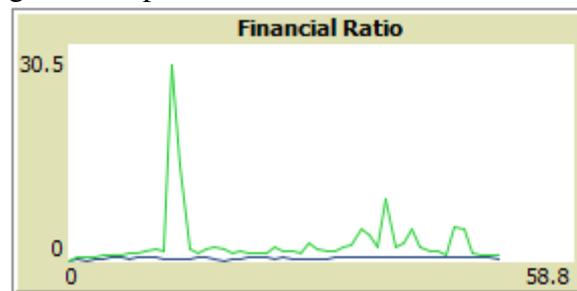


Figura 4: Experimento 1. Ratio de financiamiento



dio inicial para la distribución inicial de las empresas, el porcentaje (Beta) de la valoración de la empresa más grande que define el límite entre empresas grandes con pequeñas y medianas y el porcentaje inicial de empresas privadas. Al igual que en el Experimento 1, observando las Figuras 5 y 6, se concluye que la distribución de la valoración no se hace aún más equitativa, y se mantiene el sesgo a la derecha. Por otra parte, la Figura 7 nos muestra que el porcentaje de empresas privadas es más alto que en el anterior experimento, y se mantiene con una tendencia estable durante todo el periodo. Finalmente, se observa en la Figura 8 los mismos resultados que en el Experimento 1, es decir una alta volatilidad en el ratio de financiamiento de las empresas privadas y uno más estable para las públicas.

Figura 5: Experimento 2. Distribución inicial

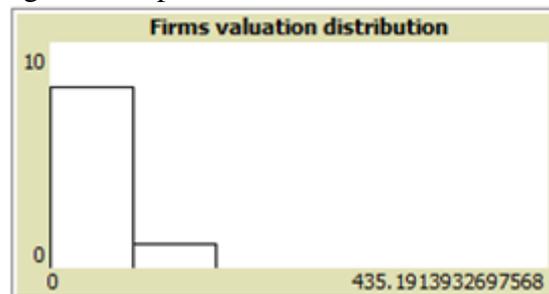


Figura 6: Experimento 2. Distribución final

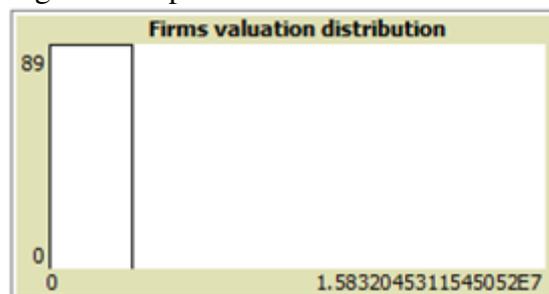


Figura 7: Experimento 2. Tipo de empresa

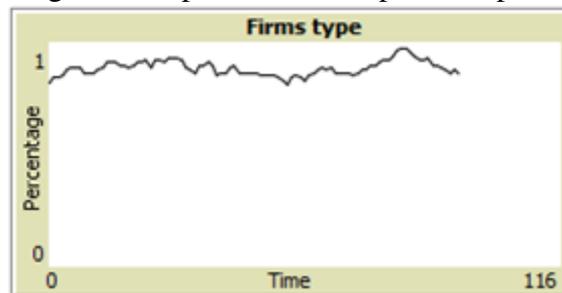


Figura 8: Experimento 2. Ratio de financiamiento

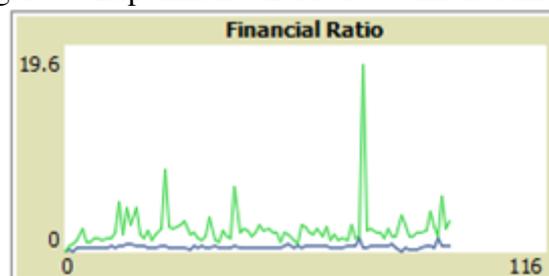


Tabla 1: Resultados: Tipo y valoración

	Priv. Percent.	Av.Pub.Val	Av.Priv.Val
(Exp.1) Pub. Growth	-0.63829**	-4.08e+35	2.67e+11
(Exp.1) Priv. Growth	0.38996**	1.82e+36	-2.67e+11
(Exp.1) Pub. Risk	0.45311***	1.98e+35***	7.88e+08
(Exp.1) Priv. Risk	-0.56002***	2.10e+35***	-5.71e+09
(Exp.2) Init. Mean.Val	0.00002**	8.09e+31	-6.34e+10
(Exp.2) Beta	-0.0045	7.52e+34	-5.91e+13
(Exp.2) Init.Priv.Percent	0.90614***	-1.38e+35*	6.98e+13
(Exp.3) Premium	-0.00302***	1.03e+34	3.14e+26
(Exp.3) Alpha	0.01838***	7.92e+34*	4.56e+26
(Exp.3) Memory	-0.00241***	5.82e+33**	-6.60e+25
(Exp.3) Dividends	-0.00129	8.91e+34	-1.34e+27
(Exp.3) Init. Stock	-0.00002***	-1.68e+32***	6.33e+23
(Exp.3) m	0.00309*	9.48e+33	1.05e+27
(Exp.3) Ro	0.80737***	-2.22e+36	-6.97e+26

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Continuando con un análisis más detallado, en la Tabla 1 se encuentra en primer lugar que mientras mayor sea la valoración inicial promedio del escenario, mayor será el número de empresas privadas. Por otro lado, la valoración promedio de las empresas públicas disminuye si inicialmente hay un mayor porcentaje de empresas privadas, pero solo con significancia de 0.1. Se encuentra

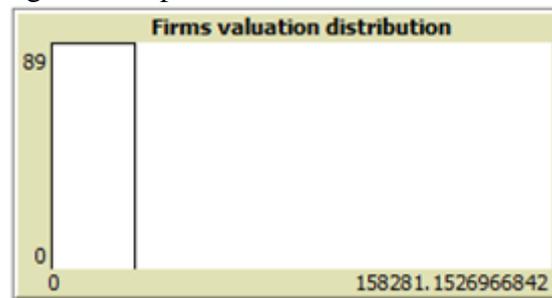
Tabla 2: Resultados: Ratio de financiamiento

	Av.Pub.Fr	Av.Priv.Fr
(Exp.1) Pub. Growth	1.16769***	-3.58871
(Exp.1) Priv. Growth	0.48463	-11.17763**
(Exp.1) Pub. Risk	-0.01034	0.10565
(Exp.1) Priv. Risk	0.02108	2.71625***
(Exp.2) Init. Mean.Val	-0.00004**	-0.00079
(Exp.2) Beta	-0.01536	-3.43798
(Exp.2) Init.Priv.Percent	0.00409	1.7669
(Exp.3) Premium	0.01191**	-1.24216**
(Exp.3) Alpha	-0.0365**	2.14359
(Exp.3) Memory	-0.00981***	0.15525*
(Exp.3) Dividends	-0.05455**	-0.41652
(Exp.3) Init. Stock	6.96e-06	-0.00093
(Exp.3) m	-0.00704	0.28200
(Exp.3) Ro	-19.22577***	-607.0214***

*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

que la valoración inicial promedio de las empresas no posee un efecto significativo promedio en la valoración de las empresas, pero si un efecto negativo en el ratio de financiamiento de las empresas públicas, como se muestra en la primera columna de la Tabla 2.

Figura 9: Experimento 3. Distribución inicial



Experimento 3: Financiamiento

Por otro lado, en este experimento se incluye el análisis de características del financiamiento tanto privado como público para las empresas. La comparación de la Figuras 11 y 12 es similar a la realizada en los experimentos anteriores, ya que se encuentra el mismo efecto causando un mayor sesgo a la derecha en la distribución de la valoración. De manera similar, se encuentra una tendencia estable en el porcentaje de empresas privadas, sin embargo, en este caso hay un mayor número de públicas, como se muestra en la Figura 13. Finalmente, en la Figura 14 se muestra que el ratio de financiamiento para las empresas públicas es estable, el cual es un resultado robusto con el resto de experimentos, no obstante se encuentra que el ratio de las privadas tiene un crecimiento positivo hasta llegar a un pico y luego decrece.

Los estimadores del modelo para este experimento se presentan en la tercera sección de las Tablas 1 y 2. Para el financiamiento privado se evalúa el efecto de variaciones en la prima mínima que se cobra por encima de la tasa libre de riesgo representada por R en la ecuación (1). Del mismo modo, se incluye la tasa libre de riesgo, y el número de periodos tomados para promediar

Figura 10: Experimento 3. Distribución final

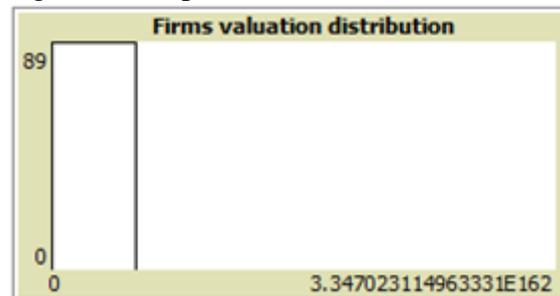


Figura 11: Experimento 3. Tipo de empresa

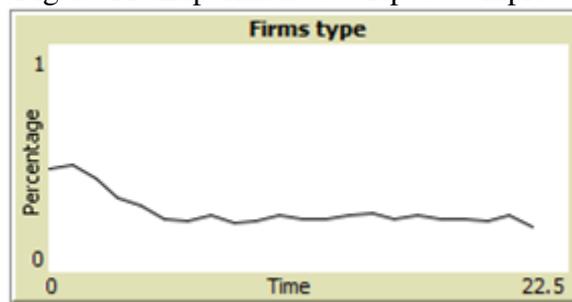
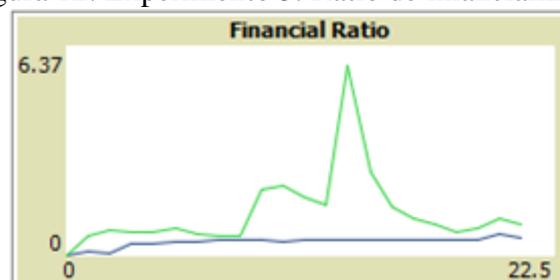


Figura 12: Experimento 3. Ratio de financiamiento



el crecimiento, definido como memoria, y asignar un costo extra al financiamiento. Por otro lado, para el financiamiento público se incluyen el porcentaje de la valoración de la empresa que es considerado para valorar a las empresas por instituciones como bancas de inversión, cuando desean realizar su primera oferta pública de acciones. Además, se evalúa el porcentaje de la valoración que es dedicada a pago de dividendos, y el número inicial de acciones permitido al momento de realizar una primera oferta pública.

Comenzando con el análisis del impacto de las características del financiamiento privado, se encuentra que el porcentaje de empresas privadas se ve afectado significativamente por todas las variables, menos por el porcentaje de dividendos. como se muestra en la primera columna de la Tabla 1. La prima y la memoria tienen un impacto negativo, lo cuál puede ser justificado ya que si la prima al ser un costo de financiamiento, es mayor, genera un desincentivo para las empresas a mantenerse privadas. Del mismo modo, si se toma un mayor número de periodos para definir un costo de financiamiento privado, aumenta la probabilidad de que crecimientos pasados aumenten el costo de obtener crédito, y de igual manera cumplir el papel de desincentivo. Por otra parte, observando el signo positivo del estimador, se encuentra que la tasa libre de riesgo tiene un impacto positivo en el porcentaje de empresas privadas. En teoría, la tasa libre de riesgo es el retorno mínimo que esperan recibir los inversionistas para cualquier inversión, y en este caso, el costo mínimo de una empresa para financiarse, asumiendo que no genera ningún tipo de riesgo al prestamista. El signo positivo del estimador puede significar que al ser mayor el retorno mínimo que se espera de empresas privadas puede deberse a

una mayor productividad o crecimiento de este tipo de empresas, generando un incentivo a las empresas a ser privadas. Por otro lado, curiosamente se encuentra que la valoración promedio privada no se ve afectada significativamente por ninguna de estas variables tanto públicas como privadas. Sin embargo, la valoración promedio de las empresas públicas es afectada positivamente por la memoria. Tal y como se explico anteriormente, mayor memoria genera un desincentivo a ser una empresa privada, por lo que las públicas tienen mayor oportunidad de crecimiento, aumentando su valoración al no tener efecto en su costo de financiamiento público. Finalmente, en la primera columna de la Tabla 2 se encuentra que el ratio de financiamiento de las empresas públicas disminuye cuando la memoria es mayor a causa de este mismo desincentivo a deuda privada, no obstante aumenta con el valor de la prima, como se muestra en la segunda columna, ya que este aumenta el costo y el valor de la deuda, por ende aumentando la dependencia de financiamiento privado en la estructura de capital. La tasa libre de riesgo disminuye el ratio de financiamiento a empresas tanto públicas como privadas, lo cuál tiene sentido al ser un costo base de financiamiento privado.

Por otra parte, analizando el impacto de las características del financiamiento público, se encuentra que el número inicial de acciones que pueden emitir las empresas disminuye el porcentaje de empresas privadas (Columna 1, Tabla 1). Esto tiene sentido ya que un mayor número de acciones amplía las capacidades de financiamiento público de las empresas, generando un desincentivo para las empresas a mantenerse privadas. Sin embargo, se observa que el número inicial de acciones disminuye la valoración promedio de las empresas públicas

(Columna 2, Tabla 1). Por otro lado, se puede observar que la valoración pública definida como porcentaje de la valoración de la empresa por instituciones como bancos de inversión, afectan significativamente al ratio de financiamiento de las empresas públicas como se muestra en la primera columna de la Tabla 2. Esto se soporta con el hecho de que si al momento de realizar una primera oferta inicial pública, la valoración que puede recibir la empresa es mayor, puede basar su estructura de capital en mayor financiamiento público con emisión de acciones y menos de deuda privada, disminuyendo el ratio de financiamiento.

Las ventajas de un fácil acceso a un mercado de capitales se ven reflejadas en las características del financiamiento público ya que recibir una valoración alta, al igual que tener la oportunidad de emitir varias acciones generan incentivos para ser una empresa pública debido a la facilidad de obtener financiamiento público y mejorar la estructura de capital. Sin embargo, no se encuentra que la valoración de las empresas públicas disminuye cuando estas características son más favorables. Por otro lado, se puede observar que las características del financiamiento privado tienen un impacto considerable en la disposición de las empresas a ser públicas participando en un mercado de capitales. Esto se ve reflejado en los costos como la prima, la tasa libre de riesgo y la memoria, las cuáles tienen un efecto negativo en el número de empresas privadas, pero solo la última de ellas teniendo un efecto positivo sobre la valoración. Finalmente, las características iniciales de las empresas según el tipo también poseen un efecto considerable. En escenarios en el que las empresas privadas poseen un crecimiento significativo y baja volatilidad, se generan incentivos a las em-

presas a ser privadas. No obstante, un crecimiento significativo en empresas públicas, al igual que una alta volatilidad en los dos tipos de empresas incentivan a las empresas a ser públicas y a obtener una mayor valoración promedio.

Conclusiones

El acceso rápido y sencillo para Pymes a un mercado de capitales ha sido un tema muy discutido en los últimos años, debido a las ventajas y desventajas que defienden cada una de las posturas de si se debe permitir o no el ingreso de este tipo de empresas a estos mercados. Este trabajo desarrolla un modelo teórico matemático que representa un escenario en el que las empresas maximizan su valoración encontrando el financiamiento óptimo, que puede ser público con emisión de acciones o privado con adquisición de deuda, para maximizar sus funciones objetivos que representaban el aporte y el costo que tiene adquirir nuevo financiamiento. Este modelo es representado en un escenario sintético creado con programación computacional a través del programa NetLogo de Wilensky (1999) en el cual existen empresas (agentes) que definen estos óptimos dinámicamente y simultáneamente buscando maximizar su valoración, y de esta manera se puede evaluar el comportamiento de la distribución de la valoración al igual que de la estructura de capital durante varios periodos.

El modelo se diseñó para ser evaluado a través de tres experimentos distintos, cada uno de ellos con distintos valores en las variables del set de información para evaluar distintos comportamientos. En el primero se asignaron

variaciones a las características de crecimiento y riesgo promedio, en el segundo las características iniciales del mercado con respecto a valoración promedio y número de empresas, y finalmente en el último se asignan distintas características en el financiamiento tanto público como privado. Se encontró de manera robusta en los tres experimentos que la distribución de la valoración no se ve afectada de manera positiva ya que se hace aún más sesgada a la derecha. Del mismo modo, se encuentra que existe una mayor volatilidad en la dependencia de deuda privada en las empresas privadas que en las públicas. Por otro lado, se pudo encontrar que las tasas de crecimiento y riesgo promedio tienen un mayor impacto en la disposición de las empresas a ser públicas. De la misma manera, se observó que las características de la deuda privada como la memoria, la tasa libre de riesgo y las primas extra tienen efectos significativos sobre esta disposición, al igual que las características de la deuda pública como número inicial de acciones permitidas y el porcentaje de la valoración que asignan las bancas de inversión y las instituciones pertinentes como valoración de una empresa al momento de realizar una oferta pública inicial. No obstante, se encuentra que ninguna de estas variables tiene efectos significativos en las valoraciones de las empresas. Analizando con respecto a la estructura de capital de las empresas se encontró un menor patrón con respecto al efecto de las variables y los distintos experimentos. La estructura de capital de las empresas públicas se ven afectadas por las características de financiamiento privado y público, mientras que la estructura de las privadas solo por la variable de la tasa libre de riesgo. Por otro lado se ve que la estructura de las públicas es afectada por el crecimiento de sus empresas, mientras que la estructura de las empresas públicas por el riesgo de este tipo de empresas.

Como se mencionó en las primeras secciones, no existe un estudio sobre este tema bajo este enfoque utilizando herramientas de modelación de agentes en programas computacionales. Este trabajo aporta con la opción de evaluar la dinámica del comportamiento de este escenario y sus agentes, considerando características, como la heterogeneidad entre empresas, que evitan supuestos irrealistas. No obstante, al ser un modelo sintético construido para evaluar una situación específica, seguramente se están obviando ciertas características del comportamiento de los agentes que pueden sesgar los resultados de las situaciones reales. Es por esto que se presentan posibles limitaciones en los resultados obtenidos. En primer lugar, el modelo muestra la heterogeneidad de las empresas en la asignación aleatoria de muchas características como crecimiento promedio, riesgo y nivel inicial de deuda, cuando en realidad estas características únicas de cada empresa se definen internamente por el desarrollo e historia de cada empresa. Además, variables como el crecimiento, no dependen de una función de producción propia de las empresas, la cuál debe variar según la industria, su locación, entre otras características. Dado esto, se concluye que este modelo muestra una estructura base del comportamiento de las empresas hacia el financiamiento según el tipo, y da la apertura a la inclusión de próximos complementos que permitan una mejor comprensión de este escenario.

Los siguientes pasos principales que se pueden realizar a este trabajo están relacionados con la metodología. En primer lugar, se puede transformar el método de *System Dynamics* a un modelo basado en agentes, *ABM* por sus

siglas en inglés. Algunos de los atributos que se pueden agregar en la nueva metodología son:

1. Agregar interacción de agentes:

- Crear un mercado de valores donde *traders* puedan tranzar acciones de las distintas empresas y se pueda observar variaciones de precios.
- Agregar bancos privados y otras instituciones financieras como agentes. De esta manera se puede controlar el comportamiento de la contraparte de empresas prestatarias al obtener financiamiento privado.

2. Desarrollar el set de información para los distintos agentes:

- Agregar heterogeneidad en los modelos de negocios de las empresas
- Agregar estados financieros e a las distintas empresas
- Agregar funciones de producción

De esta manera, se puede generar una mayor heterogeneidad en los agentes, y mayor complejidad al sistema que permita realizar un entorno sintético que brinde de información más certera y permita evaluar otro tipo de cuestionamientos referidos a la entrada de Pymes a un mercado de intercambio de capitales.

Referencias

- Beinhocker, E. (2006). *The Origin of Wealth*. McKinsey & Company.
- Carpentier, C., Cumming, D., and Suret, J.-M. (2010). The valuation effect of listing requirements: An analysis of venture capital-backed ipos. *Scientific Series*.
- Forrester, J. (2009). Some basic concepts in system dynamics. *Sloan School of Management*.
- Hardwood, A. y Konidaris, T. (2015). Sme exchanges in emerging market economies a stocktaking of development practices. *World Bank Group*.
- Kulkarni, P. y Chirputkar, A. (2014). Impact of sme listing on capital structure decisions. *Symbiosis Institute of Management Studies Annual Research Conference*.
- Mensah, S. (2004). A review of sme financing schemes in ghana. *UNIDO Regional Workshop of Financing Small and Medium Scale Enterprises, Accra, Ghana*.
- Mirigo, M. y Karanja, P. (2013). Factors influencing listing of kenyan smes in the securities market for capital raising oportunities. *Symbiosis Institute of Management Studies Annual Research Conference*.
- Pagano, M., Panetta, F., and Zingales, L. (1998). Why do companies go public? an empirical analysis. *The Journal Of Finance*, LIII(1).

Ramanauskas, T. (2008). Agent-based financial modelling as an alternative to the standard representative -agent paradigm. *Lietuvos bankas*.

Wilensky, U. (1999). *NetLogo*. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>.

Apéndices

7.1. Apéndice 1

A continuación se detalla la derivación de la forma funcional de el Ratio de Financiamiento. Dado que:

$$f(FR) = \frac{FR}{1 - FR}$$

Se encuentra que:

$$\frac{\delta \Delta FR}{\delta FR} = \frac{(1 - FR) + FR}{(1 - FR)^2} = \frac{1}{(1 - FR)^2} > 0$$

$$\frac{\delta^2 \Delta FR}{\delta FR^2} = -2(-1)(1 - FR)^{-3} = 2(1 - FR)^{-3} > 0$$

Elasticidad ($E_{r,FR}$):

$$\left(\frac{\delta f(FR)}{\delta FR} \right) \left(\frac{FR}{f(FR)} \right) = \left\{ \frac{1}{(1 - FR)^2 \left[\frac{FR}{(1 - FR)} \right]} \right\} = \left(\frac{1}{(1 - FR)^2} \right) \left(\frac{1 - FR}{1} \right) = \frac{1}{1 - FR}$$

7.2. Apéndice 2

A continuación se detalla la derivación de las condiciones de primer orden obteniendo el financiamiento óptimo. Como se considera que la empresa es privada, $P = 0$

$$\max G = g_L \Delta F - r_0 \left(\frac{1}{1 - FR} - R e^{-mTC} \right) (F + \Delta F) + P(\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d)$$

$$\begin{aligned}
0 &= g_L - \frac{\delta}{\delta \Delta F} \left(\frac{V_{t+1} \Delta F_{t+1} r_0}{V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1}} \right) + r_0 Re^{-mTC} - \frac{\delta}{\delta \Delta F} \left(\frac{V_{t+1} F_t r_0}{V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1}} \right) \\
g_L &= \frac{V_{t+1} r_0 (V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1}) + V_{t+1} \Delta F r_0}{(V_{t+1} r_0 (V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1}))^2} - r_0 Re^{-mTC} + \frac{(V_{t+1} F_t r_0)}{V_{t+1} r_0 (V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1})^2} \\
g_L &= V_{t+1} r_0 \left[\frac{V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1} + \Delta F_{t+1}}{(V_{t+1} F_t r_0)} V_{t+1} r_0 (V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1})^2 \right] - r_0 Re^{-mTC} \\
&+ \frac{(V_{t+1} F_t r_0)}{V_{t+1} r_0 (V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1})^2} \\
\frac{g_L + r_0 Re^{-mTC}}{V_{t+1} r_0} &= \frac{V_{t+1} - F_t + F_t}{(V_{t+1} F_t r_0)} V_{t+1} r_0 (V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1})^2 \\
SiC &= \frac{1}{(V_{t+1} F_t r_0)} V_{t+1} r_0 (V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1})^2 \\
C &= \frac{g_L + r_0 Re^{-mTC}}{V_{t+1}^2 r_0} \\
\sqrt{\frac{1}{C}} &= V_{t+1} - F_t - \Delta F_{t+1} \\
\Delta F_{t+1}^* &= V_{t+1} - F_t - \sqrt{\frac{V_{t+1}^2 r_0}{g_L + r_0 Re^{-mTC}}} = V_{t+1} - F_t - V_{t+1} \sqrt{\frac{r_0}{g_L + r_0 Re^{-mTC}}} \\
\Delta F_{t+1}^* &= V_{t+1} \left(1 + \sqrt{\frac{r_0}{g_L + r_0 Re^{-mTC}}} \right) - F_t
\end{aligned}$$

7.3. Apéndice 3

En seguida, se detalla la derivación del financiamiento óptimo, tomando en cuenta el aporte de ser pública en la función objetivo, es decir $P \neq 0$

$$G = g_L \Delta F_{t+1} - r_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{F_t + \Delta F_{t+1}}{V_{t+1} + \Delta K}} - Re^{-mTC} \right) (F + \Delta F_{t+1}) + (\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d)$$

$$G = g_L \Delta F_{t+1} - r_0 \left(\frac{V_{i_{t+1}} + \Delta K}{V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1}} - Re^{-mTC} \right) (F_t + \Delta F_{t+1}) + (\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d)$$

$$\begin{aligned} \max G = & g_L \Delta F_{t+1} - F_t r_0 \frac{V_{i_{t+1}} + \Delta K}{V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1}} - F_t r_0 Re^{-mTC} - \frac{\Delta F_{t+1} r_0 (V_{t+1} + \Delta K)}{V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1}} \\ & + r_0 Re^{-mTC} \Delta F_{t+1} + (\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & g_L - \frac{F_t r_0 (V_{t+1} + \Delta K)}{(V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1})^2} - \frac{r_0 (V_{t+1} + \Delta K) (V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1})}{(V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1})^2} \\ & + \frac{\Delta F_{t+1} r_0 (V_{t+1} + \Delta K)}{(V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1})^2} + r_0 Re^{-mTC} \end{aligned}$$

$$g_L = (V_{t+1} + \Delta K) r_0 \left[\frac{F_t + V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1} + F_{t+1}}{(V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1})^2} \right] - r_0 Re^{-mTC}$$

$$\frac{g_L + r_0 Re^{-mTC}}{(V_{t+1} + \Delta K) r_0} = \frac{V_{t+1} + \Delta K}{(V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1})^2}$$

$$\frac{g_L + r_0 Re^{-mTC}}{(V_{t+1} + \Delta K)^2 r_0} = \frac{1}{(V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1})^2}$$

$$V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1} = \sqrt{\frac{V_{i_{t+1}}^2 r_0}{g_L + r_0 Re^{-mTC}}}$$

$$\Delta F_{t+1}^{**} = (V_{t+1} + \Delta K) \left(1 + \sqrt{\frac{r_0}{g_L + r_0 Re^{-mTC}}} \right) - F_t$$

7.4. Apéndice 4

Teniendo en cuenta la tendencia encontrada en las derivaciones de los anteriores apéndices, se encuentra que para la nueva función objetivo en la cuál se considera una emisión de acciones óptima, el óptimo financiamiento a través de deuda se da por la siguiente ecuación:

$$\Delta F_{t+1}^{**} = (V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n) \left(1 + \sqrt{\frac{r_0}{g_L + r_0 Re^{-mTC}}} \right) - F_t$$

Por otro lado, derivando la condición de primer orden para el número de acciones emitidas óptimo se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
maxG &= g_L \Delta F_{t+1} - F_t r_0 \frac{V_{t+1} + \Delta K}{V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1}} - F_t r_0 R e^{-mTC} - \frac{\Delta F_{t+1} r_0 (V_{t+1} + \Delta K)}{V_{t+1} + \Delta K - F_t - \Delta F_{t+1}} \\
&\quad + r_0 R e^{-mTC} \Delta F_{t+1} + (\mu_{pub} \Delta K - kn_0 d) \\
0 &= \frac{\delta}{\delta \Delta n} \left[-r_0 (F_t + \Delta F_{t+1}) \left(\frac{1}{1 - \frac{F_t + \Delta F_{t+1}}{V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n}} \right) \right] + g_L - dk_t \\
0 &= \frac{\delta}{\delta \Delta n} \left[-r_0 (F_t + \Delta F_{t+1}) \left(\frac{V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n}{V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n - F_t - \Delta F_{t+1}} \right) \right] + g_L - dk_t \\
0 &= -r_0 (F_t + \Delta F_{t+1}) \left[\frac{k_t (V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n - F_t - \Delta F_{t+1}) - k_t (V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n)}{(V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n - F_t - \Delta F_{t+1})^2} \right] + g_L - dk_t \\
k_t (g_L - d) &= k_t r_0 (F_t + \Delta F_{t+1}) \left[\frac{V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n - F_t - \Delta F_{t+1} - V_{t+1} - \Delta K - k_t \Delta n}{(V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n - F_t - \Delta F_{t+1})^2} \right] \\
g_L - d &= -r_0 (F_t + \Delta F_{t+1}) \left[\frac{1}{(V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n - F_t - \Delta F_{t+1})^2} \right] \\
V_{t+1} + \Delta K + k_t \Delta n - F_t - \Delta F_{t+1} &= (F_t + \Delta F_{t+1}) \sqrt{\frac{-r_0}{g_L - d}} \\
\Delta n^* &= (F_t + \Delta F_{t+1}) \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{d + g_L}} \right) - V_{t+1} - \Delta K
\end{aligned}$$