UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Administración y Economía

Proyecto de Investigación

¿Como se puede lidiar con la paradoja de Condorcet?

Proyecto de Investigación

Bernardo Bolaños Holguin

Economía

Trabajo de titulación presentado como requisito

para la obtención del título de

Economista

Quito, 12 de diciembre de 2017

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ
COLEGIO DE ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

HOJA DE CALIFICACIÓN
DE TRABAJO DE TITULACIÓN

¿Como se puede lidiar con la paradoja de Condorcet?
Bernardo Bolaños Holguin

Calificación:	....
Nombre del profesor, Título académico:	Sebastián Oleas, Ph.D(c).
Firma del profesor:	....

Quito, 12 de diciembre de 2017

Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante: ....

Nombres y Apellidos: Bernardo Bolaños Holguin

Código: 00111391

Cédula de Identidad : 1718072117

Lugar y fecha: Quito, 12 diciembre de 2017

RESUMEN

En los modelos económicos, se suele asumir racionalidad por parte de los agentes cuando se cumplen tres principios: completitud, racionalidad y transitividad. Se ha comprobado que estos supuestos son fundamentales para obtener resultados que sugieren racionalidad al momento de la toma de decisiones. Cuando se habla de sistemas de votaciones por mayoría y bajo una cierta distribución poblacional, si no se cuenta con el supuesto de transitividad en un nivel agregado, puede presentarse lo que se conoce como la paradoja de Condorcet. La paradoja de Condorcet es una situación bajo la cual un sistema de votaciones por mayoría resulta en la elección del candidato menos preferido por parte de la población, lo que en definitiva significa una insatisfacción por parte de los votantes con los resultados electorales. El objetivo principal de la investigación fue el de plantear un modelo económico donde bajo ciertos parámetros se dé la paradoja de Condorcet y exponerlo bajo un contexto de teoría de juegos para proponer una solución mediante la interpretación de los equilibrios de Nash. Se planteó un juego de tres jugadores sin preferencias transitivas agregadas y con funciones de pago que reflejan sus preferencias y se resolvió mediante eliminación iterativa de estrategias dominantes y equilibrios de Nash. Los resultados del modelo planteado demostraron la importancia del set de preferencias y la distribución poblacional y además presentó equilibrios de Nash que sugieren la coordinación como una posible solución a la paradoja. Finalmente, se presentaron posibles herramientas de coordinación y modificaciones al estudio para elaborar un diseño experimental y evaluar su eficacia.

Palabras clave: paradoja de Condorcet, teorema de imposibilidad de Arrow, distribución poblacional, equilibrios de Nash, y transitividad, coordinación, set de preferencias, convergencia, teoría de juegos, candidato electoral, grupo de votantes.

ABSTRACT

In economic models, one usually assumes rationality by economic agents when three principles are fulfilled: completeness, rationality and transitivity. It has been proved that these assumptions are fundamental to have results that follow rationality at the moment of decision making. When one speaks of a voting system by majority and under a certain population distribution, if the assumption of transitivity is not fulfilld at an aggregate level, what is known as the Condorcet paradox can occur. The Condorcet paradox is a situation under which a majority voting system results in the election of the less preferred candidate by the population, which ultimately means voter dissatisfaction with the election results. The main objective of this research was to propose an economic model where under certain parameters the paradox of Condorcet presents itself and expose it under a context of game theory to find a solution through the interpretation of the Nash equilibria. A game of three players without added transitive preferences and with payment functions that reflected their preferences was used to represent this situation and was solved by iterative elimination of dominant strategies and Nash equilibria. The results of the model presented demonstrated the importance of the set of preferences and the population distribution, and also presented Nash equilibria that follow coordination as a possible solution to the paradox. Finally, possible coordination tools and modifications to the study were presented to elaborate an experimental design and evaluate their effectiveness.

Keywords: Condorcet paradox, Arrow's impossibility theorem, population distribution, Nash equilibria, transitivity, coordination, set of preferences, convergence, game theory, election candidate, voter group.

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

¿Cómo se puede lidiar con la paradoja de Condorcet?

La toma de decisiones por parte de un grupo de personas con diferentes sets de preferencias es de suma importancia al momento de escoger a un líder de manera democrática. En los modelos económicos, se suele suponer racionalidad en cuanto a las preferencias, lo que se logra mediante el cumplimiento de tres principios básicos:

i) Completitud: es posible comparar dos o más cestas (en este caso candidatos)

ii) Reflexividad: una cesta es al menos tan buena como sí misma

iii) Transitividad: si una cesta A es preferida a una cesta B, y esta cesta B es preferida a una cesta C, la cesta A es preferida a una cesta C. (Singer, 2014)

Bajo un contexto en el cual contamos con dos candidatos, la mayoría simple en una votación es un método efectivo en la toma de decisiones debido a que se cumplen los parámetros de racionalidad como se demuestra a continuación:

i) Completitud: es posible realizar comparaciones entre ambos candidatos.

ii) Reflexividad: un candidato es al menos tan bueno como sí mismo

iii) Transitividad: si la mayor parte de la población prefiere a un candidato A sobre un candidato B, la mayor parte de la población no puede preferir al candidato B sobre el candidato A.

En el caso de contar con dos candidatos, la distribución poblacional y sus preferencias definen al candidato ganador y además aseguran que la mayor parte de la población estará satisfecha con el proceso electoral. Sin embargo, las votaciones para escoger a un líder político, por lo general incluyen a más de dos candidatos.

Se ha demostrado por el método de Condorcet y el teorema de imposibilidad de Arrow que cuando existen más de dos candidatos bajo ciertos sets de preferencias y distribuciones poblacionales, no es posible diseñar un sistema de votación bajo el cual se asegure que el resultado electoral será aquel que brindará satisfacción al mayor porcentaje de votantes (Arrow, 1951). Estos casos en particular se dan cuando se viola el supuesto de transitividad como se demostrará más adelante.

En el año 1785 el matemático y filósofo Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, también conocido como el Márquez de Condorcet, aborda el tema de decisión publica y define lo que sería un ganador de Condorcet. Este concepto resultará útil al momento de definir el porcentaje poblacional que se encuentra satisfecho con un resultado electoral. El ganador de Condorcet se define como aquel candidato que es preferido por la población y es identificado por representar una mayoría simple al ser comparado uno a uno con los demás candidatos (De Caritat Marquis de Condorcet, McLean, y Hewitt, 1994). En este caso se cumplirían los parámetros de racionalidad incluyendo las preferencias transitivas y además se puede asegurar que la mayor parte de la población estará satisfecha con el resultado. Para ilustrar de mejor manera lo que sería un ganador de Condorcet, se puede plantear el siguiente escenario: existen tres candidatos electorales a quienes se denotan con las letras A, B y C y además se presentan tres grupos de votantes con las siguientes preferencias:

Grupo de Votantes 1: A >B >C (distribución poblacional: 1/3)

Grupo de Votantes 2: A >C >B (distribución poblacional: 1/3)

Grupo de Votantes 3: C >A >B (distribución poblacional: 1/3)

En este escenario se asume por simplicidad que la distribución poblacional refleja el mismo número de votantes por grupo. Para encontrar al ganador de Condorcet se tiene que considerar todos los posibles escenarios o resultados electorales de manera agregada y después se procede a comparar cada candidato con su competencia, lo que se logra formulando las elecciones con el supuesto de contar solamente con elecciones de dos candidatos. Al mirar a esta situación de manera agregada es posible identificar que, si cada grupo de votantes escoge la opción que le traería un mayor nivel de satisfacción, el ganador del ejercicio electoral sería el candidato A debido a que es preferido por 2/3 de la población. Ahora que se ha definido al ganador en este escenario de manera agregada, es necesario analizar que sucedería en el caso de que solamente se contaría con elecciones de dos candidatos para el ganador. Si se cuenta solamente con los candidatos A y B, el ganador de las elecciones sería el candidato A debido a que los tres grupos de votantes prefieren al candidato A sobre su competencia. Si se cuenta solamente con los candidatos A y C, el ganador de las elecciones sería el candidato A debido a que 2/3 de la población lo prefieren sobre C. En este ejemplo en particular, el ganador de Condorcet sería el candidato A, quien a su vez asegura la satisfacción para la mayor parte de la población. La razón por la cual existe un ganador de Condorcet en este escenario es porque bajo este esquema de distribución poblacional y set de preferencias, se cumplen de manera agregada los supuestos de racionalidad.

Sin embargo, si no se cumplen las preferencias transitivas podría no existir un ganador de Condorcet como se demuestra en el siguiente escenario:

Grupo de Votantes 1: A >B >C (distribución poblacional: 1/3)

Grupo de Votantes 2: B >C >A (distribución poblacional: 1/3)

Grupo de Votantes 3: C >A >B (distribución poblacional: 1/3)

En este ejemplo se sigue utilizando una distribución poblacional igual para cada grupo de votantes, pero las preferencias han cambiado. A continuación se demostrará que en este escenario ya no se cumple con el axioma de transitividad al mirar las preferencias de manera agregada. Esto se puede lograr mediante analizar todos los escenarios posibles. Si el ganador del ejercicio electoral es el candidato A, se podría argumentar que en realidad el candidato C tenía que ganar debido a que el grupo de votantes 2 y el grupo de votantes 3 prefiere a C sobre A. Estos dos grupos de votantes representan una mayoría poblacional de 2/3. Si el ganador del ejercicio electoral es el candidato B, se podría argumentar que en realidad el candidato A tenía que ganar debido a que el grupo de votantes 1 y 3 lo prefieren sobre B. En el último caso posible donde el ganador del ejercicio electoral es el candidato C, se podría argumentar que en realidad el candidato B tenía que ganar debido a que es preferido a C para el grupo de votantes 1 y 2. Como se puede evidenciar en este escenario, al no cumplirse el axioma de preferencias transitivas no existe un ganador de Condorcet, pero más importante aún, en esta sociedad la mayoría de votantes nunca estaría satisfecha con el resultado electoral.

En los ejemplos anteriores se asumió por simplicidad que la distribución poblacional es igual para cada grupo de votantes. Si se elimina este supuesto y se introducen distribuciones poblacionales, el resultado de no tener preferencias transitivas es aún más preocupante. En el siguiente ejemplo se demostrará que al variar las distribuciones poblacionales y no contar con preferencias transitivas agregadas, no solamente no se contará con un ganador de Condorcet, si no que aparece lo que se conoce como un perdedor de Condorcet.

Se asume ahora el siguiente set de preferencias y distribución poblacional:

Grupo de Votantes 1: A >B >C (distribución poblacional: 2/7)

Grupo de Votantes 2: B >A >C (distribución poblacional: 2/7)

Grupo de Votantes 3: C >A = B (distribución poblacional: 3/7)

En este caso, si cada grupo de votantes escoge al candidato que le brindaría el mayor nivel de satisfacción, el resultado sería una victoria para el candidato C debido a que recibiría 3/7 de los votos totales mientras que los otros dos candidatos recibiríán 2/7 cada uno. Si se observa más de cerca, el candidato C es el menos preferido por la población al solo brindar el mayor nivel de satsifacción a 3/7 de la población total. Por ende, este resultado se resumiría en una insatisfacción para 4/7 de la población. El candidato C, al ser aquel que brinda el menor nivel de satisfacción a la mayor parte de la población se define como el perdedor de Condorcet.

La hipótesis para este trabajo de investigación es que al tomar este caso en particular y ponerlo en un contexto de teoría de juegos, este se convierte en un juego de coalición por parte del grupo de votantes 1 y 2. Además, que si el grupo de votantes 3 tiene una mayoría poblacional comparada con los otros grupos de votantes de manera individual, y que este grupo prefiere a C sobre los demás candidatos (es decir sin importar sus preferencias entre A y B), el ganador será el candidato C (el perdedor de Condorcet).

El principal objetivo de esta investigación es determinar la importancia de la coordinación por parte de la población bajo el escenario expuesto y proponer posibles soluciones a la paradoja.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Resulta de suma importancia realizar una revisión de trabajos académicos relacionados al tema expuesto. En primer lugar, es importante presentar pruebas de la existencia del teorema de imposibilidad de Arrow y como depende de los supuestos de racionalidad expuestos anteriormente. Mark Frey desarrolla un trabajo en el cual propone evidencia de la existencia del teorema de imposibilidad, en este trabajo define al teorema como una situación en la cual, si no se cumple con los supuestos de racionalidad, existirá un dictador. Con un simple modelo y tan solo 7 pasos demuestra la existencia de dicho teorema y concluye que bajo ciertas condiciones existirá un dictador que definirá el resultado de un proceso de toma de decisiones (Frey, 2014). En el caso particular expuesto en este trabajo de investigación el dictador podria ser interpretado como el grupo de votantes 3 quienes definen el resultado electoral. Frey no es el único economista en abordar este tema, John Geanakoplos escribe un trabajo de investigación en el cual ofrece pruebas del teorema de imposibilidad de Arrow y además menciona a la paradoja de Condorcet. Su primera prueba yace en el lema de extremidad donde queda demostrado que bajo un set de preferencias, en el cual un candidato se encuentra en el extremo de preferencias para todos los individuos, se puede incumplir el supuesto de transitividad sin necesariamente reflejar irracionalidad por parte de dichos individuos. Su segunda prueba utiliza el perfil de Condorcet y tras analizar todos los posibles resultados de un sistema de votaciones con N número de preferencias de Condorcet, concluye que se presentará un resultado definido por un dictador (Geanakoplos, 2005). Werner Güth es otro economista quien analiza este tema en un contexto más teórico, Güth menciona algo muy importante al momento de formular un marco teórico, recalcando que un sistema de votación por mayoría no funciona si hay un sistema de preferencias transitivas, lo que causa la paradoja de Condorcet. Además, aplicándolo a un contexto de teoría de juegos, menciona que en este caso no va a existir un equilibrio único lo que nos lleva a buscar una solución externa (Güth y Selten, 1991).

Los resultados de las investigaciones mencionadas anteriormente utilizan modelos económicos y demuestran la existencia del problema expuesto, sin embargo, se enfocan en identificar el problema y no ofrecen una solución. Las posibles soluciones son contempladas en otros artículos académicos, como por ejemplo un trabajo realizado por Joseph M. Colomer. Colomer no solamente reconoce el problema y menciona que la paradoja se da en muchos latinoamericanos, sino que también busca una posible solución. Tras un análisis empírico, Joseph llega a la conclusión de que el perdedor de Condorcet se puede eliminar si se realizan elecciones de varios períodos (Colomer, 2014). Esta conclusión es de suma importancia porque puede proporcionar una herramienta de coordinación y ser agregada al modelo que se expone a continuación para mirar cómo cambian los equilibrios de Nash. De funcionar, podría darse una situación de convergencia en un juego repetido y los equilibrios de Nash podrían ser aquellos que brindan el mayor nivel de satisfacción a la población. El Dr. Antonio Garrido también propone una posible solución al problema que se enfoca en la modificación del sistema de votaciones al incluir una segunda vuelta electoral (Garrido, 1998). Robert Forsythe et al. publican una investigación sobre el tema. En este trabajo tratan de lidiar con la paradoja de Condorcet introduciendo herramientas de coordinación, que en este caso son encuestas antes de las elecciones. Su trabajo de investigación incluye votaciones repetidas y además encuestas antes y después de cada etapa con el objetivo de proporcionar la información necesaria para que se dé una coordinación. Sus resultados son que con esta herramienta de coordinación los votantes convergen a coordinar, sin embargo, no es una herramienta completamente efectiva (Forsythe, Myerson, Rietz, y Weber, 1991).

Aunque muchos economistas presentan modelos económicos teóricos o empíricos, Rebecca Morton et al. mencionan que los modelos teóricos no son suficientes para idear una solución, por lo que argumentan que lo mejor es formular un experimento. Su principal justificación es que un experimento es más fácil de controlar dadas las condiciones de laboratorio y mencionan que los resultados de varios experimentos sobre el tema, han demostrado que existen algunas herramientas de coordinación y condiciones experimentales que permiten la eliminación del perdedor de Condorcet (Morton y Williams, 2011).

METODOLOGÍA

Con el fin de encontrar una solución a la paradoja de Condorcet, es importante plantear este caso en particular bajo un marco teórico económico. Una manera de lograrlo es mediante formular un contexto de teoría de juegos donde se plantea la siguiente forma normal:

Número de Tipo de Jugadores: 3 grupos de votantes

Estrategias Disponibles: [A,B,C]

Funciones de pago:

Grupo de Votantes 1: 10(A)>5(B)>0(C)

Grupo de Votantes 2: 10(B)>5(A)>0(C)

Grupo de Votantes 3: 10(C)>5(A)=5(B)

Como se puede evidenciar, se mantiene el mismo set de preferencias mediante la asignación de un pago para cada contingencia. Es importante también tomar en cuenta la siguiente distribución poblacional:

Grupo de Votantes 1: 2/7

Grupo de Votantes 2: 2/7

Grupo de Votantes 3: 3/7

Para la resolución del problema planteado, se procede a representar cada contingencia en matrices con el fin de encontrar los equilibrios de Nash. Es importante mencionar que al momento de construir las matrices, se tiene que asumir que dentro de cada grupo de votantes todos votarán por el mismo candidato. Esto se puede asumir debido a que se establece un sistema de preferencias basado en pagos y además al tener los mismos incentivos y preferencias sus decisiones no deberían ser diferentes. También es importante mencionar que las decisiones del Grupo de Votantes 1 pertenecen a las filas, las del Grupo de Votantes 2 pertenecen a columnas y las del Grupo de Votantes 3 pertenecen a escoger entre matrices. Los pagos para el Grupo de Votantes 1 son el primer número de cada recuadro, para del Grupo de Votantes 2 son el segundo número y para el Grupo de Votantes 3 son el tercer número.

Tabla 1: Caso Original: Grupo de Votantes 3 opción A

	A	B	C
A	10,5,5	10,5,5	10,5,5
B	10,5,5	5,10,5	10,5,5
C	10,5,5	10,5,5	0,0,10

Tabla 2: Caso Original: Grupo de votantes 3 opción B

	A	B	C
A	10,5,5	5,10,5	5,10,5
B	5,10,5	5,10,5	5,10,5
C	5,10,5	5,10,5	0,0,10

Tabla 3: Caso Original: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,5	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5	0,0,10
C	0,0,10	0,0,10	0,0,10

Los pagos en cada contingencia se calculan de la siguiente manera: se considera cada recuadro de cada matriz, por ejemplo, para la matriz 1, fila A y columna A el ganador del ejericio será el candidato A por lo que el grupo de votantes 1 recibirá un pago de 10 mientras que los grupos de votantes restantes recibiran un pago de 5. Un segundo ejemplo un poco más complejo del cálculo de pagos es el caso de la matriz 2, donde el Grupo de Votantes 1 escoge C y el Grupo de votantes 2 escoge C. En este caso el Grupo de Votantes 1 causa 2/7 de votos para C, el grupo de votantes 2 causa 2/7 de votos para C y el grupo de votantes 3 causa 3/7 de votos para B en cuyo caso C gana por mayoría. Tomando en cuenta la distribución poblacional y aplicando un sistema de elecciones por mayoría, se pueden calcular todos los pagos para cada contingencia. Es importante recordar que la distribución poblacional no se distribuye de manera equitativa entre los grupos de votantes. Si se desea ver un cálculo de ganadores y de pagos para cada contingencia, consultar el Anexo 1.

La solución a este juego mediante equilibrios de Nash será un vector de decisiones por cada grupo de votantes con el cual se puede determinar aquel candidato que será el ganador del ejercicio o el presidente electo.

El juego se resuelve de la siguiente manera:

1. Jugador 1: La elección de la estrategia A por parte del jugador elimina a la elección C en las 3 matrices debido a que tiene dominancia de pagos. Las matrices resultantes tras la eliminación son las siguientes:

Tabla 4: Caso Original Resolución: Grupo de Votantes 3 opción A

	A	B	C
A	10,5,5	10,5,5	10,5,5
B	10,5,5	5,10,5	10,5,5

Tabla 5: Caso Original Resolución: Grupo de votantes 3 opción B

	A	B	C
A	10,5,5	5,10,5	5,10,5
B	5,10,5	5,10,5	5,10,5

Tabla 6: Caso Original Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,5	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5	0,0,10

2. Jugador 3: La matriz 3 elimina a las matrices 1 y 2 por dominancia. La matriz resultante de esta eliminación es la siguiente:

Tabla 7: Caso Original Resolución : Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,5	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5	0,0,10

3. Jugador 2: La elección de la estrategia B por parte del jugador elimina a la elección C debido a que tiene dominancia de pagos. Tras la eliminación se obtiene la siguiente matriz con 4 contingencias, la cual se puede resolver mediante el equilibrio de Nash:

Tabla 8: Caso Original Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B
A	10,5,5	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5

4. La resolución mediante equilibrios de Nash es la siguiente: debido a que el Grupo de Votantes 3 ya no escogerá entre matrices, se analizan las decisiones del Grupo de Votantes 1 y 2. Si el Grupo de Votantes 1 escogería la opción A, el Grupo de Votantes 2 escogería la opción A debido a que recibiría un mejor pago. Si el Grupo de Votantes A escogería la opción B, el Grupo de Votantes 2 escogería la opción B con el fin de recibir mejores pagos. Si el Grupo de Votantes 2 escogería A el Grupo de Votantes 1 escogería la opción A por mejores pagos y si el Grupo de Votantes 2 escogería B el grupo de Votantes 1 escogería la opción B por mejores pagos. Tras esta resolución se presentan los siguientes dos únicos equilibrios de Nash:

$$(A,A,C)$$

$$(B,B,C)$$

Para poder comprobar la hipótesis es necesario analizar qué sucedería en el caso de eliminar la indiferencia en el set de preferencias para el grupo de votantes 3. De esta manera, se puede eliminar cualquier sesgo del modelo y se puede comprobar que, efectivamente los únicos factores que derivan los equilibrios de Nash, son la distribución poblacional y los sets de preferencias que no cumplen con el supuesto de transitividad de manera agregada. Para lograrlo se analizan dos casos adicionales.

Variación 1

Número de Tipo de Jugadores: 3 grupos de votantes

Estrategias Disponibles: [A,B,C]

Funciones de pago:

Grupo de Votantes 1: 10(A)>5(B)>0(C)

Grupo de Votantes 2: 10(B)>5(A)>0(C)

Grupo de Votantes 3: 10(C)>5(A)>0(B)

En este caso se mantiene la distribución poblacional expuesta pero se modifica el set de preferencias para el grupo de votantes 3, eliminando la indiferencia. El resultado son las siguientes matrices de pago:

Tabla 9: Variación 1: Grupo de Votantes 3 opción A

	A	B	C
A	10,5,5	10,5,5	10,5,5
B	10,5,5	5,10,0	10,5,5
C	10,5,5	10,5,5	0,0,10

Tabla 10: Variación 1: Grupo de votantes 3 opción B

	A	B	C
A	10,5,5	5,10,0	5,10,0
B	5,10,0	5,10,0	5,10,0
C	5,10,0	5,10,0	0,0,10

Tabla 11: Variación 1: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,5	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,0	0,0,10
C	0,0,10	0,0,10	0,0,10

Si se desea consultar el cálculo de los pagos para cada contingencia, consultar el Anexo 2.

El juego se resuelve de la siguiente manera:

1. Jugador 1: La elección de la estrategia A por parte del jugador elimina a la elección C en las 3 matrices debido a que tiene dominancia de pagos. Las matrices resultantes tras la eliminación son las siguientes:

Tabla 12: Variación 1 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción A

	A	B	C
A	10,5,5	10,5,5	10,5,5
B	10,5,5	5,10,0	10,5,5

Tabla 13: Variación 1 Resolución: Grupo de votantes 3 opción B

	A	B	C
A	10,5,5	5,10,0	5,10,0
B	5,10,0	5,10,0	5,10,0

Tabla 14: Variación 1 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,5	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,0	0,0,10

2. Jugador 3: La matriz 3 elimina a las matrices 1 y 2 por dominancia. La matriz resultante de esta eliminación es la siguiente:

Tabla 15: Variación 1 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,5	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,0	0,0,10

3. Jugador 2: La elección de la estrategia B por parte del jugador, elimina a la elección C debido a que tiene dominancia de pagos. Tras la eliminación se obtiene la siguiente matriz con 4 contingencias la cual se puede resolver mediante el equilibrio de Nash:

Tabla 16: Variación 1 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B
A	10,5,5	0,0,10
B	0,0,10	5,10,0

4. La resolución mediante equilibrios de Nash es la siguiente: debido a que el Grupo de Votantes 3 ya no escogerá entre matrices, se analizan las decisiones del Grupo de Votantes 1 y 2. Si el Grupo de Votantes 1 escogiera la opción A, el Grupo de Votantes 2 escogería la opción A debido a que recibiría un mejor pago. Si el Grupo de Votantes A escogería la opción B, el Grupo de Votantes 2 escogería la opción B con el fin de recibir mejores pagos. Si el Grupo de Votantes 2 escogiera A el Grupo de Votantes 1 escogería la opción A por mejores pagos y si el Grupo de Votantes 2 escogería B el grupo de Votantes 1 escogería la opción B por mejores pagos. Tras esta resolución se presentan los siguientes únicos equilibrios de Nash:

   (A,A,C)

   (B,B,C)

Como se puede evidenciar, los equilibrios resultantes son los mismos que se presentan cuando existe una indiferencia en el set de preferencias del Grupo de Votantes 3.

Variación 2

Número de Tipo de Jugadores: 3 grupos de votantes

Estrategias Disponibles: [A,B,C]

Funciones de pago:

Grupo de Votantes 1: 10(A)>5(B)>0(C)

Grupo de Votantes 2: 10(B)>5(A)>0(C)

Grupo de Votantes 3: 10(C)>5(B)>0(A)

En este caso se mantiene la distribución poblacional y se procede a variar una vez más el set de preferencias para el grupo de votantes 3. El resultado son las siguientes matrices de pago:

Tabla 17: Variación 2: Grupo de Votantes 3 opción A

	A	B	C
A	10,5,0	10,5,0	10,5,0
B	10,5,0	5,10,5	10,5,0
C	10,5,0	10,5,0	0,0,10

Tabla 18: Variación 2: Grupo de votantes 3 opción B

	A	B	C
A	10,5,0	5,10,5	5,10,5
B	5,10,5	5,10,5	5,10,5
C	5,10,5	5,10,5	0,0,10

Tabla 19: Variación 2: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,0	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5	0,0,10
C	0,0,10	0,0,10	0,0,10

Si se desea consultar el cálculo de los pagos para cada contingencia, consultar el Anexo 3.

El juego se resuelve de la siguiente manera:

1. Jugador 1: La elección de la estrategia A por parte del jugador elimina a la elección C en las 3 matrices, debido a que tiene dominancia de pagos. Las matrices resultantes tras la eliminación son las siguientes:

Tabla 20: Variación 2 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción A

	A	B	C
A	10,5,0	10,5,0	10,5,0
B	10,5,0	5,10,5	10,5,0

Tabla 21: Variación 2 Resolución: Grupo de votantes 3 opción B

	A	B	C
A	10,5,0	5,10,5	5,10,5
B	5,10,5	5,10,5	5,10,5

Tabla 22: Variación 2 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,0	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5	0,0,10

2. Jugador 3: La matriz 3 elimina a las matrices 1 y 2 por dominancia. La matriz resultante de esta eliminación es la siguiente:

Tabla 23: Variación 2 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B	C
A	10,5,0	0,0,10	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5	0,0,10

3. Jugador 2: La elección de la estrategia B por parte del jugador elimina a la elección C debido a que tiene dominancia de pagos. Tras la eliminación se obtiene la siguiente matriz con 4 contingencias, la cual se puede resolver mediante el equilibrios de Nash:

Tabla 24: Variación 2 Resolución: Grupo de Votantes 3 opción C

	A	B
A	10,5,0	0,0,10
B	0,0,10	5,10,5

4. La resolución mediante equilibrio de Nash es la siguiente: debido a que el Grupo de Votantes 3 ya no escogerá entre matrices, se analizan las decisiones del Grupo de Votantes 1 y 2. Si el Grupo de Votantes 1 escogería la opción A, el Grupo de Votantes 2 escogería la opción A debido a que recibiría un mejor pago. Si el Grupo de Votantes A escogería la opción B, el Grupo de Votantes 2 escogería la opción B con el fin de recibir mejores pagos. Si el Grupo de Votantes 2 escogería A, el Grupo de Votantes 1 escogería la opción A por mejores pagos y si el Grupo de Votantes 2 escogería B, el grupo de Votantes 1 escogería la opción B por mejores pagos. Tras esta resolución se presentan los siguientes únicos equilibrios de Nash:

(A,A,C)

(B,B,C)

Como se puede evidenciar, los equilibrios resultantes son los mismos que se presentan en los dos casos anteriores, comprobando así que el resultado no se ve afectado por variaciones en las preferencias del grupo de votantes 3.

RESULTADOS

Tras haber realizado las tres variaciones expuestas se ha comprobado la hipótesis. Primeramente, se ha demostrado que la paradoja de Condorcet se da dependiendo solamente de la distribución poblacional y del set de preferencias cuando no se cumple con el supuesto de transitividad. En otras palabras, el hecho de que el Grupo de Votantes 3 tenga una mayoría poblacional y que este grupo prefiera al perdedor de Condorcet, define el resultado del ejercicio electoral sin importar sus preferencias en cuanto a los candidatos restantes.

Además de comprobar la importancia de la distribución poblacional y el set de preferencias, se ha llegado a los mismos equilibrios de Nash en todas las variaciones, lo que evidencia la importancia del Grupo de Votantes 1 y el Grupo de Votantes 2. Para generar una situación bajo la cual el presidente electo no es el perdedor de Condorcet, se tiene que dar una coordinación por parte de ambos grupos de votantes, es decir, se tienen que llegar a un acuerdo previo al ejercicio electoral.

Este resultado es un poco preocupante debido a que, si no se logra la coordinación, el perdedor de Condorcet o el candidato menos preferido, ganará las elecciones. Esto se transmitiría en una insatisfacción por la mayor parte de la población y como resultado final, la inestabilidad política se vuelve muy probable afectando a la economía entera del país.

Debido a que la coordinación se convierte en un escenario muy difícil al contar con una población grande y dispersa, la única forma de solucionar esta situación es mediante la introducción de herramientas de coordinación o el planteamiento de una modificación en el sistema de votaciones.

DISCUSIÓN

Al analizar los resultados obtenidos del modelo de votaciones e identificar el problema, también se puede discutir una posible solución. Esta solución puede darse por dos medios, la creación e implementación de una herramienta de coordinación o la modificación del sistema de votaciones. En esta sección se presentarán posibles soluciones teóricas al modelo tratado.

Primeramente, se puede recurrir a trabajos de investigación escritos por varios economistas y discutir sus propuestas para modificar el sistema de votaciones. El economista Joseph M. Colomer aborda el tema de la paradoja de Condorcet y tras realizar un análisis empírico, llega a la conclusión de que el perdedor de Condorcet se puede eliminar si se realizan elecciones de varios períodos y por mayoría (Colomer, 2014). La propuesta de Colomer no es la única que ha surgido de estudiar dicho problema, algunos como Werner Güth y Robert Forsythe también argumentan que las elecciones de más de un período podrían solucionar el problema. El sustento teórico detrás de tener elecciones con más de un período para que se ocurra la coordinación, es el principio de la convergencia a los equilibrios de Nash. El significado de convergencia en este contexto sería que, si los votantes pueden observar los resultados electorales en más de una etapa, podrán decidir coordinar y votar no con el objetivo de que su candidato preferido sea el ganador, sino con el objetivo de no terminar en una situacion que les brinde el menor nivel de satisfacción posible.

El sistema de votaciones por etapas podría ser una solución viable y puede ser probada en el mismo contexto de teoría de juegos utilizando las herramientas de los juegos repetidos. Además, para agregar valor a las sugerencias de los economistas mencionados anteriormente, se podría dar una ponderación o peso a cada repetición dándole mayor importancia a las últimas elecciones, de esta manera si se da la convergencia, la probabilidad de eliminar la paradoja es más alta.

Una manera de lograr convergencia también podría ser incluir encuestas antes y después de cada etapa del ciclo electoral. Al ver los posibles resultados antes y después de cada etapa, los votantes pueden identificar cual es el candidato más probable de eliminar a su competencia. Esta es solo una de las muchas formas en la cuales se puede aumentar el nivel de información disponible para que los votantes tomen una mejor decisión.

Uno de los problemas que presenta esta modificación al sistema de votaciones, es que es muy difícil que la gente acceda a tener que seguir un complejo sistema de votaciones repetidas ya que resulta tedioso. Sin embargo, gracias a los recursos tecnológicos con los que contamos, podrían realizarse varias votaciones simuladas por internet para tener resultados más cercanos a la realidad de lo que proporcionan las encuestas.

Cuando se trata el tema de decisión política es muy importante tomar en cuenta también la teoría del votante mediano. La teoría del votante mediano es una teoría política en la cual la toma de decisiones por parte de los ciudadanos se divide en dos grupos que se determinan principalmente por ideologías sociales y económicas y se conocen comúnmente como la izquierda o derecha política. La teoría indica que hay aquellos votantes que sin importar las circunstancias votarán por aquel candidato que represente su ideología política, pero hay aquellos que decidirán en función de otros factores. Aquellos votantes medianos son los que definirán un resultado político y es a aquellos a quienes los candidatos trataran de persuadir por medio del gasto público (Stiglitz, 2003). Es importante mencionar esta teoría debido a que el modelo expuesto supone por simplicidad que todos los votantes tienen un candidato preferido y no hay aquellos que no tomaran una decisión hasta el momento de votar. Esto podría suponer un problema para el modelo debido a que a pesar de que se logre llegar a la convergencia todavía no estaría definido un resultado electoral. Una manera de reestructurar el modelo planteado para asemejarlo más a la realidad seria incluir un grupo de votantes con completa indiferencia entre los votantes para encontrar así nuevos equilibrios de Nash.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos son de suma importancia, especialmente en el ámbito latinoamericano. Debido a que la insatisfacción por parte de los votantes con los líderes democráticos escogidos puede resultar en inestabilidad política, la solución a la paradoja de Condorcet podría mejorar las condiciones políticas. La identificación del problema también puede resultar útil para prevenir que se dé la paradoja si se evidencian las condiciones que llevan a un resultado sub óptimo en la práctica, es decir, que si se identifica una cierta distribución poblacional y un set de preferencias agregadas que no cumplen con el supuesto de transitividad, es muy probable que se dé el problema discutido y se tenga que buscar una solución antes de que ocurra.

Además de haber cumplido con los objetivos y comprobado la hipótesis, se han podido proporcionar argumentos teóricos para ampliar la investigación y modificar el modelo para que sea lo más cercano a la realidad. La coordinación representa un desafío, pero podría ser la clave para modelar un sistema de votaciones más efectivo que traiga un mayor nivel de satisfacción a la población.

RECOMENDACIONES

Los estudios económicos han evolucionado mucho en los últimos años. El planteamiento y resolución de problemas económicos se tratan de solucionar con nuevas herramientas tales como la economía experimental. Para futuras investigaciones relacionadas al tema expuesto, es recomendable evaluar las posibles soluciones presentadas en la discusión bajo un contexto de economía experimental debido a que nos proporciona un ambiente controlado y una muestra que puede ser significativa. Si se logra la coordinación en grupos pequeños, el siguiente paso sería experimentar con una población entera.

Además de utilizar las herramientas discutidas, se puede seguir ampliando el modelo planteado. Como se mencionó anteriormente, se podría modificar el juego al hacerlo un juego repetido e identificar si se da convergencia hacia los equilibrios de Nash. Además, se pueden hacer algunos otros cambios como jugar con la distribución poblacional y los sets de preferencia para indagar más en el problema y de esta manera pensar en otras posibles soluciones.

Finalmente, se recomendaría tomar un nuevo enfoque y replantear el problema bajo otro contexto económico, por ejemplo, se puede realizar un estudio utilizando la econometría. Se podría plantear una regresión en la cual se propone como variable dependiente el nivel de satisfacción de la población tras una votación y utilizar variables independientes dicotomicas como por ejemplo votaciones de varios periodos, votaciones con encuestas, etc.

Referencias

Arrow, K. J. (1951). Social choice and individual value. *Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University*.

Colomer, J. (2014). Presidentes no medianos y perdedores de condorcet en américa latina: un factor de inestabilidad. *Politai: Revista de Ciencia Política*.

De Caritat Marquis de Condorcet, J., McLean, I., y Hewitt, F. . . (1994). *Condorcet: Foundations of social choice and political theory*. Edward Elgar Publishing Limited.

Forsythe, R., Myerson, R., Rietz, T., y Weber, R. (1991). An experiment on coordination in multi-candidate elections: The importance of polls and election histories. *Social Choice and Welfare*.

Frey, M. (2014). A straightforward proof of arrow‘s theorem.

Garrido, A. (1998). Nuevas formas de elección de presidentes en américa latina: Consecuencias políticas y desempeño institucional. *Universidad de Murcia*.

Geanakoplos, J. (2005). Three brief proofs of arrow‘s impossibility theorem. *Cowel Foundation for Research in Economics at Yale University*(1116).

Güth, W., y Selten, R. (1991). Game equilibrium models iv. En (p. 7-40). Springer Berlin Heidelberg.

Morton, R., y Williams, K. (2011). *Cambridge handbook of experimental political science*. Cambridge University Press.

Singer, M. (2014). *Una práctica teoría de juegos: Estrategias para cooperar y competir*. Ediciones UC.

Stiglitz, J. (2003). *La economía del sector público*. Antoni Bosch.

ANEXOS

Anexo 1

Tabla 25: Caso Original: Construcción Matriz 1

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAA	2/7+2/7+3/7= 1	0	0	A	(10,5,5)
ABA	2/7+3/7= 5/7	2/7	0	A	(10,5,5)
ACA	2/7+3/7= 5/7	0	2/7	A	(10,5,5)
BAA	2/7+3/7= 5/7	2/7	0	A	(10,5,5)
BBA	3/7	2/7+2/7=4/7	0	B	(5,10,5)
BCA	3/7	2/7	2/7	A	(10,5,5)
CAA	2/7+3/7= 5/7	0	2/7	A	(10,5,5)
CBA	3/7	2/7	2/7	A	(10,5,5)
CCA	3/7	0	2/7+2/7=4/7	C	(0,0,10)

Tabla 26: Caso Original: Construcción Matriz 2

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAB	2/7+2/7+3/7= 1	3/7	0	A	(10,5,5)
ABB	2/7	2/7+3/7=5/7	0	B	(5,10,5)
ACB	2/7	3/7	2/7	B	(5,10,5)
BAB	2/7	2/7+3/7=5/7	0	B	(5,10,5)
BBB	0	2/7+2/7+3/7= 1	0	B	(5,10,5)
BCB	0	2/7+3/7=5/7	2/7	B	(5,10,5)
CAB	2/7	3/7	2/7	B	(5,10,5)
CBB	0	2/7+3/7	2/7	B	(5,10,5)
CCB	0	3/7	2/7+2/7=4/7	C	(0,0,10)

Tabla 27: Caso Original: Construcción Matriz 3

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAC	2/7+2/7=4/7	0	3/7	A	(10,5,5)
ABC	2/7	2/7	3/7	C	(0,0,10)
ACC	2/7	0	3/7+2/7=5/7	C	(0,0,10)
BAC	2/7	2/7	3/7	C	(0,0,10)
BBC	0	2/7+2/7=4/7	3/7	B	(5,10,5)
BCC	0	2/7	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CAC	2/7	0	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CBC	0	2/7	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CCC	0	0	2/7+2/7+3/7= 1	C	(0,0,10)

Anexo 2

Tabla 28: Variación 1: Construcción Matriz 1

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAA	2/7+2/7+3/7= 1	0	0	A	(10,5,5)
ABA	2/7+3/7= 5/7	2/7	0	A	(10,5,5)
ACA	2/7+3/7= 5/7	0	2/7	A	(10,5,5)
BAA	2/7+3/7= 5/7	2/7	0	A	(10,5,5)
BBA	3/7	2/7+2/7=4/7	0	B	(5,10,0)
BCA	3/7	2/7	2/7	A	(10,5,5)
CAA	2/7+3/7= 5/7	0	2/7	A	(10,5,5)
CBA	3/7	2/7	2/7	A	(10,5,5)
CCA	3/7	0	2/7+2/7=4/7	C	(0,0,10)

Tabla 29: Variación 1: Construcción Matriz 2

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAB	2/7+2/7+3/7= 1	3/7	0	A	(10,5,5)
ABB	2/7	2/7+3/7=5/7	0	B	(5,10,0)
ACB	2/7	3/7	2/7	B	(5,10,0)
BAB	2/7	2/7+3/7=5/7	0	B	(5,10,0)
BBB	0	2/7+2/7+3/7= 1	0	B	(5,10,0)
BCB	0	2/7+3/7=5/7	2/7	B	(5,10,0)
CAB	2/7	3/7	2/7	B	(5,10,0)
CBB	0	2/7+3/7	2/7	B	(5,10,0)
CCB	0	3/7	2/7+2/7=4/7	C	(0,0,10)

Tabla 30: Variación 1: Construcción Matriz 3

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAC	2/7+2/7=4/7	0	3/7	A	(10,5,5)
ABC	2/7	2/7	3/7	C	(0,0,10)
ACC	2/7	0	3/7+2/7=5/7	C	(0,0,10)
BAC	2/7	2/7	3/7	C	(0,0,10)
BBC	0	2/7+2/7=4/7	3/7	B	(5,10,0)
BCC	0	2/7	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CAC	2/7	0	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CBC	0	2/7	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CCC	0	0	2/7+2/7+3/7= 1	C	(0,0,10)

Anexo 3

Tabla 31: Variación 2: Construcción Matriz 1

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAA	2/7+2/7+3/7= 1	0	0	A	(10,5,0)
ABA	2/7+3/7= 5/7	2/7	0	A	(10,5,0)
ACA	2/7+3/7= 5/7	0	2/7	A	(10,5,0)
BAA	2/7+3/7= 5/7	2/7	0	A	(10,5,0)
BBA	3/7	2/7+2/7=4/7	0	B	(5,10,5)
BCA	3/7	2/7	2/7	A	(10,5,0)
CAA	2/7+3/7= 5/7	0	2/7	A	(10,5,0)
CBA	3/7	2/7	2/7	A	(10,5,0)
CCA	3/7	0	2/7+2/7=4/7	C	(0,0,10)

Tabla 32: Variación 2: Construcción Matriz 2

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAB	2/7+2/7+3/7= 1	3/7	0	A	(10,5,5)
ABB	2/7	2/7+3/7=5/7	0	B	(5,10,5)
ACB	2/7	3/7	2/7	B	(5,10,5)
BAB	2/7	2/7+3/7=5/7	0	B	(5,10,5)
BBB	0	2/7+2/7+3/7= 1	0	B	(5,10,5)
BCB	0	2/7+3/7=5/7	2/7	B	(5,10,5)
CAB	2/7	3/7	2/7	B	(5,10,5)
CBB	0	2/7+3/7	2/7	B	(5,10,5)
CCB	0	3/7	2/7+2/7=4/7	C	(0,0,10)

Tabla 33: Variación 2: Construcción Matriz 3

	A	B	C	Ganador	Pagos
AAC	2/7+2/7=4/7	0	3/7	A	(10,5,0)
ABC	2/7	2/7	3/7	C	(0,0,10)
ACC	2/7	0	3/7+2/7=5/7	C	(0,0,10)
BAC	2/7	2/7	3/7	C	(0,0,10)
BBC	0	2/7+2/7=4/7	3/7	B	(5,10,5)
BCC	0	2/7	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CAC	2/7	0	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CBC	0	2/7	2/7+3/7=5/7	C	(0,0,10)
CCC	0	0	2/7+2/7+3/7= 1	C	(0,0,10)