

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**  
**Colegio de Ciencias e Ingeniería**

# **Plano Hiperbólico y Aplicaciones**

**Proyecto de Investigación**

**Erick Andrés Arguello Cruz**

**Matemáticas**

Trabajo de titulación presentado como requisito para la obtención  
del título de Licenciado en Matemáticas

Quito, 15 de Diciembre de 2017

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ  
Colegio de Ciencias e Ingeniería

**HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE  
TITULACIÓN**

**Plano Hiperbólico y Aplicaciones**

**Erick Andrés Arguello Cruz**

Calificación:

Nombre del profesor, Título académico: John Skukalek, Ph.D.

Firma del profesor .....

Quito, 15 de Diciembre de 2017

## Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas. Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante .....

Nombres y apellidos: Erick Andrés Arguello Cruz

Código: 00118691

Cédula de Identidad: 1722523808

Lugar y fecha: Quito, mes de 2017

*Dedicado a mi familia*

# Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a Dios en primer lugar, por permitirme llegar a cumplir con una muy importante meta en mi vida. A mis padres y a Dome por su inigualable apoyo que me han brindado siempre, han sido, son y serán una motivación muy especial que me permite seguir adelante con más fuerza. A la Ing. Alina Rada, quien me ayudó a ingresar a la universidad y que sin ella, el gusto por las matemáticas no hubiese sido el mismo. Al Dr. Eduardo Alba y al departamento de Matemáticas de la USFQ que me abrió las puertas y me apoyó desde que inicié la carrera.

De forma muy especial a la Dra. Oihane Fernández por aceptar ayudarme con la tesis, por las múltiples horas de oficina y consejos que me han servido para desarrollar de la mejor manera este trabajo, debo reconocer que gracias a ella he podido darle mucho más sustento a este trabajo y he aprendido muchas cosas nuevas. Asimismo, al Dr. John Skukalek, con quien he convivido durante prácticamente toda mi carrera universitaria, por todo el tiempo que me ha dedicado, por sus recomendaciones, revisiones y discusiones que se han tenido para la mejora de este documento.

A mis amigos que, de una u otra forma, me han ayudado a superarme a mí mismo a lo largo de todos estos años y con quienes he pasado varios de los mejores momentos en todo este trayecto de mi vida. Finalmente, por el incondicional apoyo, paciencia y por ser una persona que saca lo mejor de mí, agradezco a mi novia Dani quien entre tantas cosas me supo motivar a realizar este tema de tesis en particular.

# Resumen

En este trabajo se hace un estudio de Geometría no-Euclidiana dos dimensional, en particular del Plano Hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  y sus distintas representaciones. Para comenzar, se define  $\mathbb{H}^2$  mediante el modelo del Plano de Poincaré (o también llamado Semi-plano Superior). A partir de dicho modelo se hace el cálculo de sus geodésicas y consecuentemente se analizan los postulados de Euclides para este tipo de geometría, mostrando así que el quinto de estos postulados (de las paralelas) no se cumple para  $\mathbb{H}^2$ . Además, se enuncia otras tres definiciones para el Plano Hiperbólico y se demuestra que éstos son isométricamente equivalentes entre sí, usando como base el modelo del Plano de Poincaré. Finalmente, se hace referencia a aplicaciones prácticas de  $\mathbb{H}^2$ , como son las teselaciones y las Figuras de Escher.

*Palabras clave:* Plano Hiperbólico, postulados de Euclides, Plano de Poincaré, geodésicas, paralelas, isometría, teselaciones.

# Abstract

In this work it is made an study of two dimensional Non-Euclidean Geometry, in particular of the Hyperbolic Plane  $\mathbb{H}^2$  and its representations. First, it is defined  $\mathbb{H}^2$  through the model of Poincaré's Plane (also called Superior Semi-plane). From this model it is made the calculation of its geodesics and then we discuss the Euclid's postulates for this type of geometry, showing that the fifth of such postulates (parallel postulate) is not true for  $\mathbb{H}^2$ . Furthermore, we enunciate other three definitions for the Hyperbolic Plane and it is proven that these models are isometrically equivalent to each other, using as a reference the Poincaré's Plane model. Finally, a discussion about practical applications of  $\mathbb{H}^2$  is made, like tessellations and Escher's Figures.

*Keywords:* Hyperbolic Plane, Euclid's postulates, Poincaré's Plane, geodesics, parallels, isometry, tessellations.

# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>10</b>
<b>1. Fundamentos Teóricos</b>	<b>15</b>
1.1. Superficies Diferenciables . . . . .	15
1.1.1. Curvas Paramétricas . . . . .	18
1.2. Cálculo Tensorial . . . . .	20
1.3. Superficies Riemannianas . . . . .	25
1.3.1. Plano Hiperbólico: El Modelo de Poincaré . . . . .	26
1.3.2. Longitud de Arco . . . . .	27
1.3.3. Geodésicas . . . . .	28
1.4. Cálculo Variacional . . . . .	31
1.4.1. Funcionales . . . . .	32
<b>2. Geodésicas y Postulados del Plano Hiperbólico</b>	<b>36</b>
2.1. Geodésicas en el Plano de Poincaré . . . . .	36
2.2. Primer Postulado . . . . .	43

2.3. Segundo Postulado . . . . .	43
2.4. Tercer Postulado . . . . .	44
2.5. Cuarto Postulado . . . . .	46
2.6. Quinto Postulado . . . . .	46
<b>3. Modelos del Plano Hiperbólico</b>	<b>52</b>
3.1. Equivalencia entre Modelos . . . . .	53
3.2. Geodésicas de los Modelos . . . . .	63
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>66</b>
4.1. Teselaciones . . . . .	67
<b>Conclusiones</b>	<b>72</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

1.1. Mapa Coordinado $(U, \psi)$ para la superficie $S$ y el plano tangente $T_p S$ para $p \in \psi(U)$ . . . . .	16
1.2. Mapas Coordinados $(U_\alpha, \psi_\alpha)$ y $(U_\beta, \psi_\beta)$ compatibles entre sí. . . . .	17
1.3. Visualización de la diferenciabilidad de $f$ entre dos superficies diferenciables. . . . .	18
1.4. Parametrización de $M$ por medio de $\alpha$ . . . . .	19
1.5. Parametrización de la circunferencia de radio 1. . . . .	20
1.6. Geodésicas en una superficie diferenciable $S \subseteq \mathbb{R}^3$ . . . . .	29
1.7. Círculos Máximos $\alpha$ , esto es geodésicas de la esfera. La segunda derivada $\alpha''$ es ortogonal a la superficie. Mientras que el círculo $\beta$ no corresponde a una geodésica en la esfera. . . . .	30
2.1. Geodésicas del Plano de Poincaré . . . . .	40
2.2. Circunferencias en el Plano Hiperbólico . . . . .	44
2.3. Diferencia entre distancias en el Plano Hiperbólico . . . . .	45
2.4. Líneas paralelas en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	47
2.5. Geodésicas paralelas a $C_1$ en $\mathbb{H}^2$ . Puede observarse fácilmente que $C_2, C_3$ y $C_4$ no son paralelas entre sí. . . . .	48

2.6.	Construcción de semicírculos que también pertenecen al conjunto de geodésicas paralelas a $C_1$ que pasan por el punto $p$ . . . . .	49
2.7.	Construcción de dos geodésicas paralelas a $C_1$ que pasan por $p$ y cuyos centros están entre $a$ y $b$ . . . . .	50
2.8.	Construcción de dos geodésicas paralelas a $C_1$ que pasan por $p$ y cuyos centros son puntos de la forma $(z, 0)$ donde $z$ está en el intervalo $(-\infty, x_{C_1}]$ . Además de las geodésicas, $C_2$ y $C_3$ , que también son paralelas a $C_1$ . . . . .	51
3.1.	Geodésicas en el modelo de la Semiesfera $S$ . . . . .	63
3.2.	Geodésicas en el modelo del Disco de Poincaré $D$ . . . . .	64
3.3.	Geodésicas en el modelo de Klein $K$ . . . . .	64
3.4.	Geodésicas en el modelo del Hiperboloide $H$ . . . . .	65
4.1.	“Círculo Límite IV”, pintura de M. C. Escher [7]. . . . .	66
4.2.	Teselación del plano cartesiano con cuadrados. . . . .	67
4.3.	Teselación del plano cartesiano con triángulos. . . . .	67
4.4.	“Pez Volador”, pintura de M. C. Escher basada en una teselación del plano cartesiano con peces voladores [12]. . . . .	68
4.5.	Construcción de teselado con triángulos en el plano de Poincaré. . . . .	69
4.6.	Teselación con triángulos en el plano de Poincaré. . . . .	70
4.7.	Teselación con triángulos en el disco de Poincaré. . . . .	70
4.8.	Teselación $\{5, 4\}$ en el disco de Poincaré [21]. . . . .	71
4.9.	Teselación <i>cuasi</i> - $\{6, 4\}$ en el disco de Poincaré [11]. . . . .	72

- 4.10. “Círculo Límite III”, pintura de M. C. Escher basada en una tesselación *cuasi*- $\{4, 3\}$  en el disco de Poincaré [6]. . . . . 72

# Introducción

Históricamente, la geometría era una colección de bocetos construidos con líneas rectas y círculos. Por lo que, en el año 300 AC, Euclides escribe 5 principios básicos para describir la geometría plana (en 2 dimensiones), estas afirmaciones se las conoce como los Postulados o Axiomas de Euclides. Los mismos que son recordados de la siguiente manera [26]:

- 1° Por dos puntos cualesquiera en el plano, se puede unir una y sólo una recta que pase por ambos puntos.
- 2° Dados un punto y una distancia fijos, se puede trazar un único círculo centrado en ese punto y con radio igual a la distancia dada.
- 3° Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una recta.
- 4° Todos los ángulos rectos son iguales.
- 5° Considerando una recta  $L_1$  y un punto  $p$  fuera de esta recta, existe una única recta  $L_2$  que pasa por el punto  $p$  y nunca se interseca con  $L_1$ .

De todos estos axiomas, el quinto es el más famoso y se lo conoce también como postulado de las paralelas. En principio, muchos matemáticos intentaron probar dicho postulado a partir de los otros 4, pero no tuvieron éxito. Hoy por hoy, se conoce que el quinto axioma no se puede probar desde los anteriores. Así que, gracias a estos intentos fallidos, en el siglo *XIX* se descubrió una nueva geometría que no cumple con el postulado de las paralelas de Euclides. Esta nueva descripción matemática fue llamada *Geometría no-Euclídiana*. La misma que, de manera más general, se enfoca en el estudio de espacios que no cumplen con el postulado de paralelismo.

Es entonces que, Nikolái Ivánovich Lobachevski (1793-1856), quien partiendo de los cuatro primeros y de un nuevo quinto postulado: **por un punto exterior a una recta se puede trazar al menos dos rectas paralelas a ella**, formuló una nueva Geometría que llamó *Geometría Imaginaria*, la misma que hoy en día se conoce como *Geometría Hiperbólica*.

En cuanto a Geometría Hiperbólica en 2 dimensiones, denominada Plano Hiperbólico o  $\mathbb{H}^2$  y que se utilizará principalmente en este escrito, también cabe destacar al francés Jules Henri Poincaré (1854-1912), quien fue un gran genio matemático y físico; ya que, describió dos modelos de este espacio. Uno de ellos ocupa el interior de un disco unitario y otro el semiplano superior [17]. Fue así como se iniciaron los estudios de la Geometría Hiperbólica. Por lo cual, en este escrito se analizarán algunas de las propiedades de  $\mathbb{H}^2$ , al igual que la equivalencia de algunas de sus representaciones y aplicaciones.

## Resumen de Contenidos

Este escrito está organizado como se indica a continuación. En el Capítulo 1, y como complemento a esta introducción, se muestran los principales conceptos a usarse en este escrito, la *métrica*, las *geodésicas*, el *espacio hiperbólico*, por ejemplo. Así como, notación a implementarse y algunos resultados algebraicos importantes. Además, se usa el cálculo variacional para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange y poder deducir las geodésicas del plano de Poincaré mediante su resolución en la sección 2.1; asimismo se hace el mismo cálculo con la definición dada en la sección 1.3.3, mostrando que ambos métodos son equivalentes. En el Capítulo 2, se hace un análisis de los postulados de la geometría hiperbólica en dos dimensiones ( $\mathbb{H}^2$ ), en contraste con los del plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  comprobando si realmente se cumplen los 4 primeros y cómo se puede modificar el quinto (de paralelismo), ésto se demuestra mediante el Lema 2.6.1 en la sección 2.6. En el Capítulo 3, se enuncian los diferentes modelos que describen el plano hiperbólico y se prueba su equivalencia, encontrando las respectivas isometrías entre los mismos en la sección 3.1; así también, se indica cómo son las geodésicas en cada uno de dichos modelos, tomando como referencia a las encontradas en el Capítulo 2.1, en la sección 3.2. Finalmente, en el Capítulo 4, se presentan teselaciones como aplicaciones del plano hiperbólico, más específicamente con el modelo del disco de Poincaré  $D$ . En esta sección también se realiza una teselación con triángulos hiperbólicos isóceles y se muestran varios ejemplos similares, haciendo referencias a las obras de arte de M.C. Escher.

# Capítulo 1

## Fundamentos Teóricos

Para que este trabajo sea lo más autocontenido posible en este capítulo se mencionan algunos de los resultados principales y necesarios en Geometría Diferencial, en particular para superficies.

### 1.1. Superficies Diferenciables

Así como en la Geometría Euclidiana, que es la más común en el uso cotidiano, existe el concepto de cercanía, ésta puede extenderse para entender otros objetos geométricos o espacios, denominados *Variedades Topológicas*, en los que para poder trabajar con cada punto en este espacio se debe hacer un estudio local usando mapas coordenados. Como esta tesis está enfocada en superficies, las definiciones estarán restringidas al caso 2 dimensional, esto es superficies topológicas <sup>1</sup>.

**Definición 1.1.1.** [9] *Dado un espacio topológico  $S$ , una carta local o mapa coordinado de dos coordenadas es un par  $(U, \psi = \{x^1, x^2\})$  donde  $U$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $\psi : U \rightarrow S$ , tal que:*

1.  $\psi$  es diferenciable.
2.  $\psi : U \rightarrow \psi(U) \subseteq S$  es un homeomorfismo.

---

<sup>1</sup>Para conocer la definición formal de superficies topológicas véase Do Carmo, *Riemannian Geometry* [10].

3.  $d\psi_{(x^1, x^2)}$  es uno a uno,  $\forall (x^1, x^2) \in U$ .

Si a un espacio topológico se le puede asociar de forma local a un punto  $p \in S$  una carta de dos coordenadas con las tres condiciones indicadas, entonces se dice que es una superficie localmente diferenciable en el punto  $p$ .

Si se define a un punto  $p \in S$  como  $p = \psi(x_p^1, x_p^2)$  entonces se dice que  $(x_p^1, x_p^2)$  son las coordenadas locales de  $p$  asociadas con  $\psi$ .

La condición 3 indica que los dos vectores columna<sup>2</sup> de  $d\psi_{(x_p^1, x_p^2)} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Big|_p \right) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_p^1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_p^2} \right)$  son linealmente independientes para cada punto  $p \in S$ , donde  $(x_1, x_2)$  son las variables de  $\psi$  [9].

**Definición 1.1.2.** El espacio generado por los vectores  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial x_p^1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_p^2} \right)$  se denomina plano tangente a  $S$  en el punto  $p$  y se escribe  $T_p S$  como se muestra en la Figura 1.1.

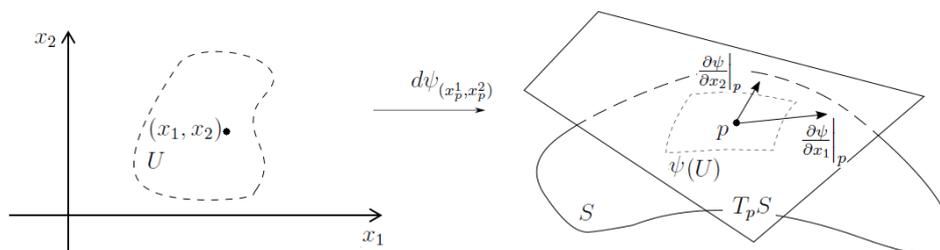


Figura 1.1: Mapa Coordenado  $(U, \psi)$  para la superficie  $S$  y el plano tangente  $T_p S$  para  $p \in \psi(U)$ .

**Definición 1.1.3.** Un atlas diferenciable de dos dimensiones,  $\mathcal{A}$ , para un espacio topológico  $S$  es una familia de cartas locales de dos coordenadas  $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  tal que:

---

<sup>2</sup>Se denominan vectores columna porque,  $\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big|_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \end{pmatrix}$ , donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son las funciones coordenadas de  $\psi$  (es decir  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ ) y las derivadas parciales están evaluadas en el punto  $p$ .

Por otra parte, la expresión  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial x_p^1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_p^2} \right)$  se la implementa con el afán de simplificar la notación correcta, que es  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Big|_p \right)$ .

1. Cubren el espacio topológico por completo,  $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = S$ ,  $\alpha \in \Lambda$ .
2. Si las imágenes de dos cartas  $(U_{\alpha}, \psi_{\alpha})$  y  $(U_{\beta}, \psi_{\beta})$  se superponen:  $M \cap N \neq \emptyset$ , donde  $\psi_{\alpha}(U_{\alpha}) = M$  y  $\psi_{\beta}(U_{\beta}) = N$ , entonces ambas cartas son compatibles entre sí, es decir, la función  $\psi_{\alpha}^{-1} \circ \psi_{\beta} : \psi_{\beta}^{-1}(M \cap N) \rightarrow \psi_{\alpha}^{-1}(M \cap N)$  es diferenciable entre conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^2$ .

Para visualizar la condición de compatibilidad, la Figura 1.2 hace referencia a este hecho.

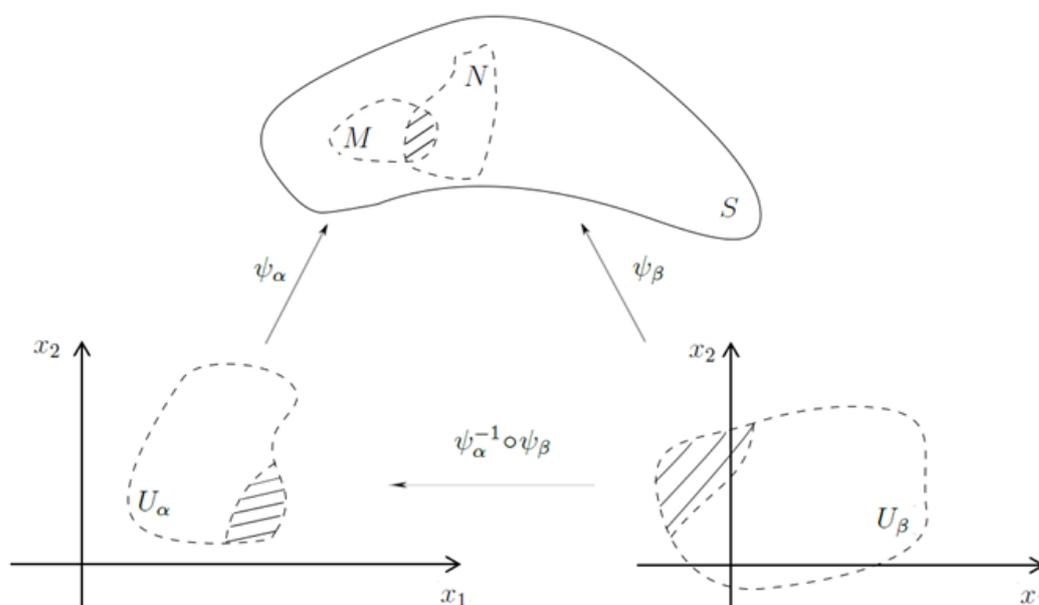


Figura 1.2: Mapas Coordenados  $(U_{\alpha}, \psi_{\alpha})$  y  $(U_{\beta}, \psi_{\beta})$  compatibles entre sí.

**Definición 1.1.4.** Una **Superficie (Diferenciable)**  $S$  es un espacio topológico provisto de un atlas  $\mathcal{A}$  de dos dimensiones que, además de cumplir con las condiciones del mismo, satisface que para puntos cualesquiera  $p \neq q$  en  $S$ , existen conjuntos abiertos de  $S$  disjuntos,  $U$  y  $V$ , tales que  $p \in U$  y  $q \in V$ .

Las superficies (diferenciables) también son conocidas como *variedades (diferenciables) de dimensión 2*. Para entender el concepto de variedad de mejor manera, consulte la referencia [25]. En este escrito, la definición previa es suficiente.

**Definición 1.1.5.** Sea  $f : S_1 \rightarrow S_2$  una aplicación entre superficies,  $p \in S_1$  y  $f(p) \in S_2$ .  $(U, \psi_1)$  y  $(V, \psi_2)$  son cartas locales de  $p$  y  $f(p)$ , respectivamente. Se dice que  $f$  es **diferenciable en**  $p \in S_1$  si la función  $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1 : U \rightarrow V$  es diferenciable en  $\psi_2^{-1}(f(p))$  para todas las cartas  $(U, \psi_1)$  y  $(V, \psi_2)$ .  $f$  es **diferenciable** si es diferenciable  $\forall p \in S_1$ .

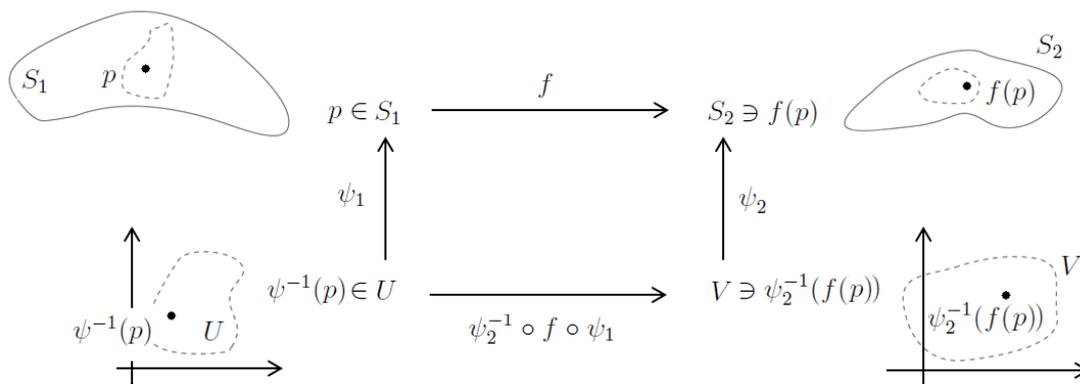


Figura 1.3: Visualización de la diferenciability de  $f$  entre dos superficies diferenciables.

**Definición 1.1.6.** Un **difeomorfismo** entre dos superficies,  $S_1$  y  $S_2$ , es una función biyectiva  $f : S_1 \rightarrow S_2$  tal que  $f$  y su inversa  $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$  son diferenciables.

### 1.1.1. Curvas Paramétricas

En ocasiones, para facilitar el estudio de las curvas, es necesario conocer su longitud (véase subsección 1.3.2). Es así que, intuitivamente, a una curva se la puede ver como una ‘copia continua’ de un intervalo; por lo que sería lo más lógico definir a una curva como la imagen de una función continua  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ . Sin embargo, esta definición es muy general para usos prácticos; la imagen de un intervalo cerrado puede ser un cuadrado en  $\mathbb{R}^2$ . Para mayor información, consulte James Munkres, *Topology. MIT. (2000)* p. 85. Por lo tanto, se imponen condiciones adicionales para la función  $f$ . Las definiciones siguientes son tomadas de Baxandall & Liebeck, *Vector Calculus*, pp. 45-46 y Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, p. 136. [2] y [24], respectivamente:

**Definición 1.1.7.** Una función  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$  se dice que es **continuamente diferenciable** o **función  $C^1$**  si  $f$  es diferenciable y su primera derivada,  $f'$ , es continua; en general, una función  $C^k$  es aquella cuya  $(k-1)$ -ésima derivada existe, es diferenciable y  $f^{(k)}$  es continua.

Debido a que  $f$  es una función en  $S$ , es importante notar que la diferenciable de  $f$  (es decir la existencia de  $f'$ ) tiene sentido siempre y cuando la función  $\psi^{-1} \circ f$  sea diferenciable en  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.1.8.** Una función  $C^k$ ,  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ , donde  $I$  es un intervalo tal que  $\alpha(I) = M$  y  $M$  es un subconjunto de  $S$  se la denomina **curva ( $C^k$ -diferenciable)** en  $I$ . La función  $\alpha$  es también denominada una **parametrización ( $C^k$ ) de  $M$** .

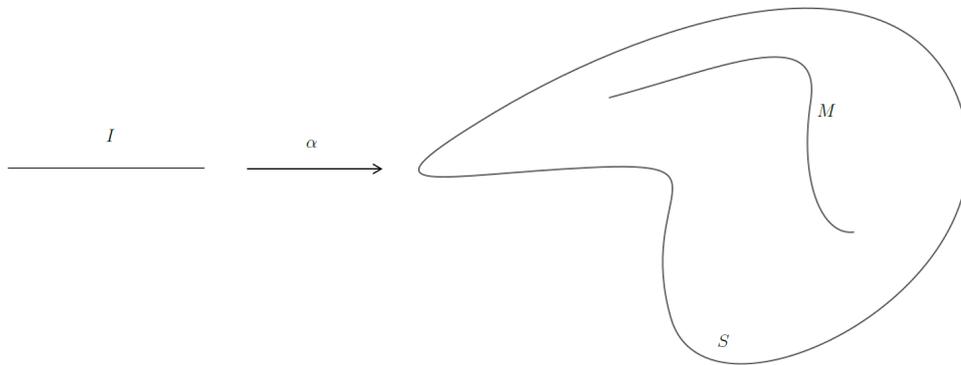


Figura 1.4: Parametrización de  $M$  por medio de  $\alpha$ .

Por ejemplo, la función  $\alpha : [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$  es una parametrización  $C^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , de la circunferencia unitaria mostrada en la Figura 1.5. Se dice que  $\alpha$  es  $C^\infty$  o infinitamente diferenciable.

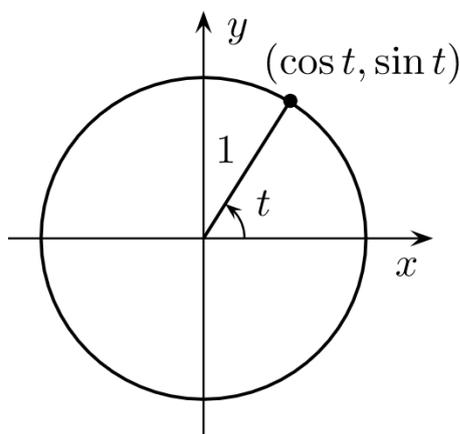


Figura 1.5: Parametrización de la circunferencia de radio 1.

## 1.2. Cálculo Tensorial

Para caracterizar una superficie diferenciable, se deben introducir los conceptos de *distancia entre dos puntos*, el *ángulo entre dos vectores* e incluso el *volumen de una región*. Sin embargo, éstos se obtienen de manera diferente al caso Euclidiano. Es así que en esta sección se introducirá la notación y definición de tensores para entender la métrica de una superficie diferenciable, la cual nos permite realizar cálculos como los mencionados previamente y obtener una forma de medir sobre ésta.

**Definición 1.2.1.** [5] *Se dice que  $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ , donde  $V_1, V_2, \dots, V_k, W$  son espacios vectoriales, es una **aplicación multilineal** si para todo  $1 \leq i \leq k$  :*

1.  $f(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_k) = \lambda f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_k)$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i + \vec{v}_i', \dots, \vec{v}_k) = f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_k) + f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i', \dots, \vec{v}_k)$ .

Generalmente, las variables de una aplicación lineal pertenecen a un mismo espacio vectorial, por lo que  $V_1 = V_2 = \dots = V_k = V$ . Considerando el caso particular en el que  $W = \mathbb{R}$ , se tiene la siguiente definición:

**Definición 1.2.2.** *Se denomina **tensor  $k$  veces covariante ( $k$ -covariante)** a cualquier aplicación multilineal de la forma  $T : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

A partir de ahora y por mayor facilidad, se usará  $V^k$  para representar la expresión  $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}}$ .

**Definición 1.2.3.** Sea  $T$  y  $T'$  dos tensores  $r$  y  $r'$  veces covariante respectivamente. Se define el producto tensorial de  $T$  por  $T'$  como:

$$\begin{aligned} T \otimes T' : \quad V^{r+r'} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_{r+r'}) &\longmapsto T \otimes T'(u_1, \dots, u_{r+r'}) \end{aligned}$$

siendo

$$T \otimes T'(u_1, \dots, u_{r+r'}) := T(u_1, \dots, u_r) \cdot T'(u_{r+1}, \dots, u_{r+r'}).$$

En particular, los tensores pueden actuar en una base determinada del espacio vectorial  $V$  (que se considerará de dimensión 2, ya que a lo largo de este trabajo se trabajará exclusivamente con esta dimensión.). Entonces, sea  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  una base de  $V$  y  $B^* = \{\phi^1, \phi^2\}$  su base dual correspondiente (base <sup>3</sup> del espacio dual  $V^*$ ), una base para un tensor 2 veces covariante se puede escribir como el conjunto  $\{\phi^i \otimes \phi^j : i, j \in \{1, 2\}\}$  [25]. Es decir que si  $T$  es un tensor 2 veces covariante, puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de la base  $\{\phi^i \otimes \phi^j : i, j \in \{1, 2\}\}$ . Como consecuencia, se puede enunciar el siguiente lema:

**Lema 1.2.1.** Si  $T = \sum_{i,j=1}^2 t_{ij} \phi^i \otimes \phi^j$  es un tensor 2-covariante, entonces  $t_{kl} = T(b_k, b_l)$ ,  $\forall k, l \in \{1, 2\}$ .

*Demostración:*

$$T(b_k, b_l) = \sum_{i,j=1}^2 t_{ij} (\phi^i \otimes \phi^j)(\vec{b}_k, \vec{b}_l) = \sum_{i,j=1}^2 t_{ij} \phi^i(\vec{b}_k) \cdot \phi^j(\vec{b}_l) = \sum_{i,j=1}^2 t_{ij} \delta_k^i \delta_l^j = t_{kl}.$$

□

---

<sup>3</sup>[25]El espacio dual a  $V$  es un espacio conformado por todas las transformaciones lineales de  $V$  a  $\mathbb{R}$ . Es decir:  $V^* = \{\phi \mid \phi : V \rightarrow \mathbb{R}\}$  y  $\phi$  es lineal. Si  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  es una base para el espacio vectorial  $V$ , entonces la **base dual de  $B$**  o **base de  $V^*$** ,  $B^* = \{\phi^1, \dots, \phi^n\}$ , está conformada por funciones lineales  $\phi^i : V \rightarrow \mathbb{R}$  que verifican:

$$\phi^i(\vec{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Los elementos  $t_{ij} \in \mathbb{R}$  del tensor  $T$  con respecto a la base  $B$  se pueden escribir de forma matricial:

$$M_B(T) = (t_{ij})_{i,j \in \{1,2\}} = \begin{pmatrix} T(\vec{b}_1, \vec{b}_1) & T(\vec{b}_1, \vec{b}_2) \\ T(\vec{b}_2, \vec{b}_1) & T(\vec{b}_2, \vec{b}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

donde  $M_B(T)$  es la matriz asociada al tensor  $T$  con respecto a la base  $B$  del espacio vectorial  $V$ .

Este estudio requiere el uso de tensores en el espacio vectorial tangente a cada punto de una superficie diferenciable  $S$  (véase definición 1.1.2 donde se define el espacio tangente de una superficie). Entonces, sea  $(U, \psi = \{x^1, x^2\})$  un mapa coordenado de un punto  $p \in \psi(U)$  en la superficie  $S$ . Se toma  $V = T_p S$ . Usando las coordenadas  $\{x^1, x^2\}$  se pueden construir las bases coordenadas  $B_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p \right\}$  y  $B_p^* = \{dx_p^1, dx_p^2\}$ .

Por lo que, cada vector  $\vec{v}_p$  en el espacio tangente a la superficie  $T_p S$  se puede escribir como  $\vec{v}_p = \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Consecuentemente, si  $T_p$  es un tensor  $r$  veces covariante en un punto  $p$  sobre el espacio vectorial  $T_p S$ , existen números reales  $t_{i_1 \dots i_r}$  tales que

$$T_p = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^2 t_{i_1 \dots i_r} dx_p^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_p^{i_r}$$

donde  $t_{i_1 \dots i_r} = T_p \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_p \right)$ .

Para generalizar el concepto de tensores sobre superficies, se define:

**Definición 1.2.4.** *Un campo tensorial  $T$   $r$ -covariante sobre una superficie  $S$  es una asignación diferenciable de un tensor  $T_p$   $r$ -covariante sobre el espacio vectorial tangente  $T_p S$  a cada punto  $p \in S$ .*

La 1-**forma diferencial**<sup>4</sup>  $k$ , por ejemplo, es un campo tensorial 1-covariante, la cual si se le asigna un entorno coordenado  $(U, \psi = \{x^1, x^2\})$  de  $S$  entonces

---

<sup>4</sup>La diferencial de una función  $f$  es un ejemplo de 1-forma diferencial, esto es  $df$ .

$$k = \sum_{i=1}^2 k_i dx^i, \text{ donde } k_i = k \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Siguiendo este ejemplo, si se tiene un campo tensorial  $T$  y un entorno coordenado  $(U, \psi = \{x^1, x^2\})$ , existen funciones diferenciables  $t_{i_1, \dots, i_r}$ , con  $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2\}$  definidas en  $U$ , tales que:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^2 t_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r}$$

**Definición 1.2.5.** [25] *Sea  $T$  un campo tensorial 2-veces covariante sobre una superficie diferenciable  $S$ . Se dice que  $T$  es **simétrico** si  $T_q$  es simétrico, para todo  $q \in S$ . Es decir, si*

$$T_q(\vec{v}_q, \vec{w}_q) = T_q(\vec{w}_q, \vec{v}_q), \quad \forall \vec{v}_q, \vec{w}_q \in T_q S, \quad \forall q \in S.$$

Con esto, se puede obtener la definición de *Métrica* a partir del concepto anterior, como sigue:

**Definición 1.2.6.** *Se dice que  $g$  es un **Campo Tensorial Métrico**, o simplemente **Métrica** sobre una superficie diferenciable  $S$  si es un campo de tensores dos veces covariante simétrico sobre  $S$  y  $g_p$  es un tensor en todo punto  $p \in S$  que representa un producto escalar en  $T_p S$  que cumple las siguientes condiciones:*

1. *Definido positivamente:*  $g_p(\vec{v}_p, \vec{v}_p) \geq 0$ ,  $\forall \vec{v}_p \in T_p S$ , para todo  $p \in S$ . Y  $g_p(\vec{v}_p, \vec{v}_p) = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_p = \vec{0}$ ,
2. *Simetría:*  $g_p(\vec{v}_p, \vec{w}_p) = g_p(\vec{w}_p, \vec{v}_p)$ ,  $\forall \vec{v}_p, \vec{w}_p \in T_p S$ , y
3. *Desigualdad Triangular:*  $g_p(\vec{v}_p, \vec{u}_p) \leq g_p(\vec{v}_p, \vec{w}_p) + g_p(\vec{w}_p, \vec{u}_p)$ ,  $\forall \vec{v}_p, \vec{w}_p, \vec{u}_p \in T_p S$ .

Entonces, la matriz asociada a la métrica con respecto a una base  $B$  es representada de la siguiente forma:

$$M_B(g_p) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

donde  $g_{ij} = g_{ij}(x_1, x_2)$  son funciones diferenciables. Asimismo, se define la matriz inversa asociada a la métrica como:

$$[M_B(g_p)]^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

Es importante notar que como consecuencia de la simetría de  $g$  y si se denota  $dx^i dx^j = \frac{1}{2} (dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$ , entonces la métrica puede escribirse de manera general como <sup>5</sup>

$$g = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^2 g_{ij} dx^i \otimes dx^j = 2 \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.1)$$

donde  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ .

Cabe recalcar también que el tensor métrico es equivalente a una forma cuadrática diferencial<sup>6</sup> y, por tanto, es equivalente al cuadrado del elemento de longitud<sup>7</sup>,  $ds$ . Es así que, la ecuación (1.1) puede escribirse como:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.2)$$

Un ejemplo clásico es la métrica Euclidiana de dimensión 2 en coordenadas cartesianas, cuya matriz asociada está dada por la matriz identidad para la base

---

<sup>5</sup>Debido a la simetría de  $g$ , entonces  $g_{ij} = g_{ji}$ . Por lo tanto,  $\frac{1}{2}g_{ij}dx^i \otimes dx^j + \frac{1}{2}g_{ji}dx^j \otimes dx^i = \frac{1}{2}g_{ij}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i) = g_{ij}dx^i dx^j$ .

Para el caso  $i = j$ , se tiene  $dx_i^2 = dx_i dx_i = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^i + dx^i \otimes dx^i) = dx^i \otimes dx^i$ . Así,  $g = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j$ .

<sup>6</sup>Una **forma cuadrática** es una función  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  ( $V$  es un espacio vectorial que tiene dimensión  $n$ , es decir está conformado por  $n$ -tuplas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) si existe una matriz simétrica  $n \times n$ ,  $A$ , tal que

$$q(\mathbf{h}) = [\mathbf{h}]^t A [\mathbf{h}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j,$$

con  $\mathbf{h} \in V$ ,  $\mathbf{h}^t$  representa la transpuesta de  $\mathbf{h}$  y  $a_{ij}$  son los elementos de la matriz  $A$  [2].

<sup>7</sup>Para la equivalencia entre el elemento de longitud y la métrica se puede consultar la referencia [22].

$B = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$  en todo punto en  $\mathbb{R}^2$ , así se obtiene:

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O de forma equivalente que,  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$ , de manera más familiar se puede escribir  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , con  $x_1 = x$  y  $x_2 = y$ , donde  $s$  representa la longitud de arco, o distancia entre dos puntos en  $\mathbb{R}^2$ .

El Tensor Métrico es muy útil para conocer el producto interno y el ángulo entre dos vectores, así como la norma de los mismos. Dicho esto, se tiene [22]:

**Definición 1.2.7.** *Dada una métrica  $g$  en una superficie diferenciable  $S$  y un mapa coordenado  $(U, \psi = \{x^1, x^2\})$ . Se definen para un punto  $p \in S$ :*

1. **El producto escalar o producto interno entre dos vectores  $\vec{u}_p, \vec{v}_p$  en  $T_pS$  como  $g_p(\vec{u}_p, \vec{v}_p) = \langle \vec{u}_p, \vec{v}_p \rangle_p = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(p)u^i v^j$ , donde  $\vec{u}_p = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\vec{v}_p = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .**
2. **La norma de un vector  $\vec{u}_p \in T_pQ$ ,  $\|\vec{u}_p\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(p)u^i u^j}$ .**
3. **El ángulo  $\theta_p$  entre dos vectores  $\vec{u}_p$  y  $\vec{v}_p$  en  $T_pS$  como  $\cos(\theta_p) = \frac{\langle \vec{u}_p, \vec{v}_p \rangle}{\|\vec{u}_p\| \|\vec{v}_p\|}$ .**

### 1.3. Superficies Riemannianas

Una vez conocido el concepto de métrica, se puede definir una Superficie Riemanniana de la siguiente manera:

**Definición 1.3.1.** *Sea  $S$  una superficie diferenciable y  $g$  su métrica asociada, al par  $(S, g)$  se lo denomina **Superficie Riemanniana**.*

Dicho esto, se puede introducir la noción de isometría que es una equivalencia entre dos superficies Riemannianas, como sigue:

**Definición 1.3.2.** [19] *Sean  $(S_1, g_1)$  y  $(S_2, g_2)$  dos superficies Riemannianas. Un*

difeomorfismo  $\varphi$  de  $S_1$  en  $S_2$  se dice que es una **isometría**<sup>8</sup> si  $\varphi^*g_2 = g_1$ . Se dice que  $S_1$  y  $S_2$  son *isométricos* (o *isométricamente equivalentes*) si existe una isometría  $\varphi$  entre  $S_1$  y  $S_2$ .

### 1.3.1. Plano Hiperbólico: El Modelo de Poincaré

Como ejemplo de superficie Riemanniana se tiene el Plano Hiperbólico. El mismo que corresponde al tema principal del presente trabajo.

Debido a que existen varias formas de representarlo (véase Capítulo 3) se usará por el momento el modelo del Plano de Poincaré, que se define como se muestra a continuación:

**Definición 1.3.3.** Se denomina **Espacio Hiperbólico de dimensión 2 o Plano Hiperbólico**  $\mathbb{H}^2$  al espacio descrito por todos los puntos  $(x_1, x_2)$  tales que  $x_2 > 0$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  y cuya métrica está dada por la expresión:

$$ds^2 = \frac{1}{x_2^2} (dx_1^2 + dx_2^2) \quad (1.3)$$

Obsérvese que la métrica recién descrita se comporta de la siguiente manera: mientras más cerca está un punto del eje  $x_1$ , la distancia Euclídea es mayor con un factor de  $\frac{1}{x_2}$ .

Se puede ver claramente que los elementos de la métrica  $g$  dependen de la coordenada  $x_2$  del punto  $p$  al que se le está aplicando. Es decir,  $M_B(g_p)$  es diagonal, para la base  $B = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p \right\}$  del espacio tangente a  $\mathbb{H}^2$  en  $p$ :

$$M_B(g_p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix},$$

y se puede notar que  $g_{12} = 0$  y  $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{x_2^2}$ . De la misma manera y por la definición 1.2.7, el ángulo entre dos vectores  $\vec{u}_p$  y  $\vec{v}_p \in T_p S$ , queda definido como:

---

<sup>8</sup>La aplicación  $(\varphi^*g_2)_p(\vec{u}, \vec{v}) = (g_2)_{\varphi(p)}(d\varphi_p(\vec{u}), d\varphi_p(\vec{v}))$ , donde  $\vec{u}, \vec{v} \in T_p S_1$ , se denomina **pullback** de  $g_2$  por  $\varphi$  (en nuestra definición, ésta es la métrica de  $S_1$  inducida por  $\varphi$  y  $S_2$ ). Para mayores detalles de esta aplicación, consulte a Javier Lafuente, *Cálculo en Variedades*, p. 62. [15]

$$\cos(\theta_p) = \frac{\sum_{i=1}^2 u_i v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 |u_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^2 |v_i|^2}} \quad (1.4)$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  son dados como en la definición 1.2.7.

Resultado sumamente interesante, ya que esta misma expresión se usa para calcular ángulos en el Plano Euclidiano,  $(\mathbb{R}^2, dx_1^2 + dx_2^2)$ . En el Capítulo 2, sección 2.5, se hablará un poco más de esta relación en comparación con los postulados de Euclides.

Debido a que este trabajo está enfocado en superficies, la definición previa es suficiente. Sin embargo, se puede generalizar dicha definición para el Espacio Hiperbólico  $n$ -dimensional  $\mathbb{H}^n$  que viene dado por  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  y  $ds^2 = \frac{1}{x_n^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)$ .

Asimismo, la Definición 1.3.2 nos permitirá demostrar la equivalencia entre varios de los modelos de  $\mathbb{H}^2$  en el Capítulo 3, sección 3.1.

### 1.3.2. Longitud de Arco

Para conocer la magnitud de un segmento de curva en particular, se debe implementar una función que sea capaz de proporcionar este valor. Es por ello que se define la *función longitud de una curva* o *función longitud de arco* de la siguiente manera:

**Definición 1.3.4.** Sea  $\alpha : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$  una parametrización  $C^1$  de una curva, la longitud de  $\alpha$  se define como:

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Ahora bien, si se considera  $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$  una curva definida localmente, esto es, existe un mapa coordenado  $(U, \psi)$  tal que  $\alpha(I) \subseteq U$ , donde cada  $x_i(t)$  es una función real del mismo parámetro  $t \in \mathbb{R}$  y recordando la Definición 1.3.2 de norma de una superficie diferenciable  $S$  en un punto  $p$  de la misma, se tiene que la longitud de arco de  $\alpha$  en  $U$  queda de la forma:

$$s = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 |g_{ij}(p)x'_i(t)x'_j(t)|} dt \quad (1.5)$$

Es importante notar que el diferencial de la longitud de la curva,  $ds^2$ , es el cuadrado del denominado *elemento de línea* o *elemento de longitud*, el mismo de la ecuación (1.2).

### 1.3.3. Geodésicas

Ahora que se tiene presente la noción de longitud de una curva, es necesario saber cuándo este valor es un extremo (mínimo o máximo). Es decir, dados dos puntos cualesquiera, ¿cuál es la curva que extremiza la distancia entre dichos puntos? Como resultado a esta pregunta, nace la definición de *geodésica*. Por otro lado, debido a la cantidad de definiciones y por la complejidad de este término en sus generalizaciones<sup>9</sup>, la Definición 1.3.6 es suficiente para abordar éste y los capítulos posteriores del presente escrito. Así, por ejemplo, para superficies  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  con la métrica Euclídea se dice que las geodésicas son aquellas curvas parametrizadas  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que para todo punto  $\alpha(t)$  en la superficie, la segunda derivada en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\alpha''(t)$ , es perpendicular (u ortogonal) a la superficie en ese punto, como se observa en la Figura 1.6.

---

<sup>9</sup>Para conocer la expresión general de las geodésicas y varias de sus aplicaciones, se recomienda revisar Manfredo Perdigão Do Carmo. *Riemannian Geometry*. (1993) p. 61.

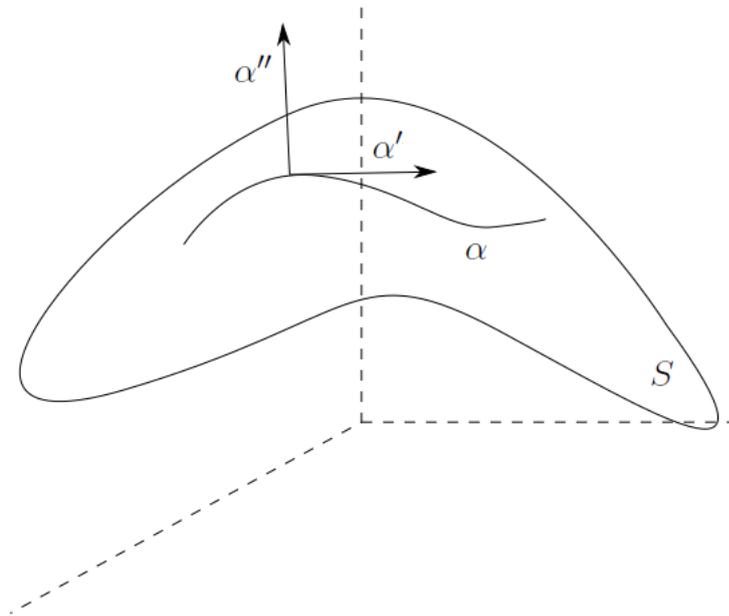


Figura 1.6: Geodésicas en una superficie diferenciable  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ .

A continuación se presenta el ejemplo de la esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Como la esfera es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , se considera  $\alpha$  como una parametrización de cualquier círculo en la esfera, entonces es fácil comprobar que  $\alpha''$  apunta en la dirección del centro de dicho círculo (ortogonal al mismo). Ahora bien, si se consideran *grandes círculos*<sup>10</sup>, su centro coincide con el centro de la esfera; por lo tanto,  $\alpha''$  es perpendicular a la superficie esférica para todos los puntos  $\alpha(t)$ . Concluyendo que las geodésicas en una esfera son **parametrizaciones de sus círculos máximos**, como se muestran en la Figura 1.7.

<sup>10</sup>Un *gran círculo* o *círculo máximo* es una circunferencia en la esfera resultado de una sección trazada mediante un plano que pase a través del centro de la esfera, dividiéndola en dos hemisferios. La sección circular obtenida cuenta con el mismo diámetro de la esfera.

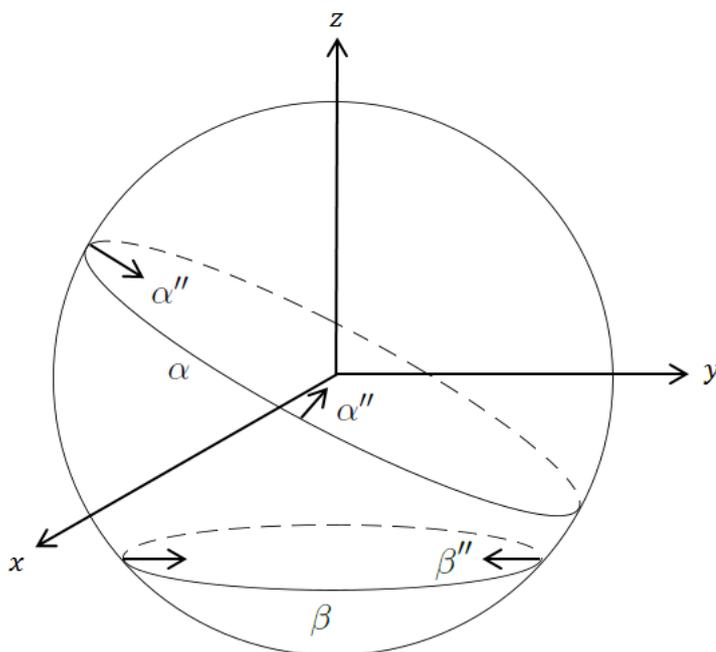


Figura 1.7: Círculos Máximos  $\alpha$ , esto es geodésicas de la esfera. La segunda derivada  $\alpha''$  es ortogonal a la superficie. Mientras que el círculo  $\beta$  no corresponde a una geodésica en la esfera.

Debido a que no todas las superficies riemannianas son subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  y lo único que se conoce es que localmente son iguales de forma diferenciable a un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  se necesita una definición más general para describir las geodésicas. Por lo que, se tiene:

**Definición 1.3.5.** [9] Una curva parametrizada, no-constante  $\alpha : I \rightarrow S$  se dice que es una **geodésica** en  $t \in I$  si el campo de sus vectores tangentes  $\alpha'(t)$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$  en  $t$ ; es decir,  $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t) = 0$ .  
 $\alpha$  es una **geodésica parametrizada** si es una geodésica para todo  $t \in I$ .

Aquí,  $\nabla$  es la denominada *conexión Levi-Civita*<sup>11</sup> que nos permite conocer las propiedades intrínsecas de la superficie, como por ejemplo nos da información de cómo se deriva sobre  $S$ .

<sup>11</sup>Para más detalles del significado de  $\nabla_{\alpha'}\alpha'$  y de la conexión Levi-Civita, en general, consulte a Miguel Sánchez y José Luis Flores, *Introducción a la Geometría Diferencial de Variedades*, [25].

Una consecuencia importante y muy útil de la definición anterior se menciona en la definición 1.3.6. Cabe recalcar que ésta no es necesariamente una definición en las referencias, se la muestra como un teorema. Sin embargo, en este caso se la utilizará como una caracterización utilizando coordenadas locales, para facilidades prácticas.

**Definición 1.3.6.** [14] Sea  $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t))$  una parametrización de una curva en un entorno coordenado  $U$  de una superficie  $S$ . Se dice que  $\alpha$  es una geodésica si y solo si

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, 2$$

donde  $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{im} \left( \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right)$ , (con  $i, j, k = 1, 2$ ) son denominados símbolos de Christoffel y los  $g_p^{im}$  son los componentes de la matriz inversa a  $M_B(g_p)$ . Obsérvese que  $\Gamma_{jk}^i$  es una función diferenciable.

Como ejemplo, se tiene:

**Espacio Euclidiano 2-dimensional,  $\mathbb{R}^2$ :** Usando el método de los símbolos de Christoffel, y recordando que la métrica para  $\mathbb{R}^2$  es la matriz identidad. Entonces,  $\Gamma_{jk}^i = 0$  para todos los  $i, j, k$ . Por lo tanto, por la definición de geodésicas, las ecuaciones a resolver son:  $\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$ , para cada  $i$ . Concluyendo así que la única forma de que estas condiciones se cumplan es que  $\alpha$  sea una línea recta. Por tanto, las geodésicas en  $\mathbb{R}^2$  son **parametrizaciones de líneas rectas**.

## 1.4. Cálculo Variacional

Esta rama matemática se encarga de encontrar la curva, superficie, etc que permite a una función tener un valor estacionario. Es decir encontrar los valores extremos (mínimos y máximos) de funcionales. A raíz de esta formulación, se pueden encontrar las trayectorias más cortas entre dos puntos en un espacio vectorial dado, ecuaciones del movimiento de una partícula, superficies de área mínima, entre otras aplicaciones.

### 1.4.1. Funcionales

Como se mencionó previamente, para resolver problemas de cálculo variacional es necesario encontrar los extremos de *funcionales*; pero, ¿qué es realmente un funcional? De acuerdo con R. Courant y D. Hilbert en su libro *Methods of Mathematical Physics*: “Se entiende por ‘funcional’ a una cantidad o función que depende de una o varias funciones, en lugar de un número de variables discretas”. Para entender este concepto de mejor manera, un **funcional** es una función cuyo dominio es un conjunto de funciones. Considerando la siguiente integral, por ejemplo:

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

la función  $L$  depende únicamente de la función  $f(x)$ , por lo tanto  $L = L(f)$  es un funcional, cuyo dominio es el conjunto de todas las funciones diferenciables. Asimismo, la función,

$$g = g(y, z)$$

donde  $y = y(x)$  y  $z = z(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Implica que  $g$  no es simplemente una función, sino más bien, un funcional que depende de dos funciones.

Ahora bien, para calcular las geodésicas en  $\mathbb{H}^2$ , hay que partir de la definición de *longitud de arco*, ecuación (1.5), y los elementos del tensor métrico de la Definición 1.3.3. Por lo tanto, considerando la relación (1.3) y la curva  $C^2$  diferenciable  $\beta(t) = (x(t), y(t))$ , la ecuación (1.5) puede ser escrita como sigue:

$$s = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}}{y(t)} \frac{dx}{dt} dt$$

o de forma equivalente:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{y} dx \tag{1.6}$$

donde  $x_0 = x(a)$ ,  $x_1 = x(b)$  y  $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$ .

De la ecuación obtenida, se define  $f(y, y')$  como:

$$f(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} \quad (1.7)$$

Por lo tanto, la ecuación (1.6) se reduce a:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y') dx$$

El objetivo es encontrar un camino o función continua particular para  $y(x)$  de tal manera que la integral  $s$  tenga un valor estacionario relativo a un conjunto de caminos próximos (tales que  $y(x_0) = y_0$  y  $y(x_1) = y_1$ ). Esto ocurre cuando la variación relativa a algún conjunto particular de caminos vecinos que dependen de un parámetro infinitesimal  $\alpha$  es nula. Tomando en cuenta lo dicho por Goldstein, en su libro *Mecánica Clásica*, pp. 45-48; se puede representar dicho conjunto de caminos mediante la relación:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x) \quad (1.8)$$

donde  $y(x, 0)$  es el camino con la distancia más corta entre los puntos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y la función  $\eta(x)$  se anula en  $x = x_0$  y  $x = x_1$ . Se asume por mayor sencillez que tanto  $y(x)$  como  $\eta(x)$  son funciones continuas y  $C^2$ . Es así que para cualquier familia de curvas  $C^2$  dadas por (1.8), la integral  $s$  también será una función dependiente del parámetro  $\alpha$ ,

$$s(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx$$

por tanto, la condición para obtener un punto estacionario o valor crítico de la función  $s(\alpha)$  en  $\alpha = 0$  es  $\left. \frac{ds}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ . Dicha condición nos ayuda a calcular las geodésicas o curvas que extremizan la distancia entre los puntos:  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ .

Por lo tanto la derivada de  $s$  con respecto al parámetro  $\alpha$  es

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left[ \int_{x_0}^{x_1} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx \right] \quad (1.9)$$

Como la integral anterior es finita y por la continuidad de  $f$  y  $y$ , así como sus derivadas parciales, usando la Fórmula de Leibniz<sup>12</sup>, la ecuación (1.9) es ahora:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} [f(y, y')] dx$$

Desarrollando la ecuación previa, se tiene:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx \quad (1.10)$$

Enfocándonos en la segunda de estas derivadas  $\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha}$  y usando integración por partes (con  $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$  y  $dv = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha} dx$ ), el segundo término de la parte derecha de la integral puede reducirse a:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \right] dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

dado que  $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$  por la igualdad (1.8) y por las condiciones impuestas a  $\eta(x)$  en  $x_0$  y  $x_1$ , el primer término de la ecuación previa se anula. Por lo tanto, la ecuación (1.10) queda:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Aplicando ahora la condición de valor estacionario:

$$\left. \frac{ds}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} dx = 0$$

<sup>12</sup>Esta fórmula es una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo:

Si  $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t, x) dt$ , entonces  $F'(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dt + f(h(x), x) \cdot h'(x) - f(g(x), x) \cdot g'(x)$

y usando el denominado “lema fundamental” del cálculo variacional<sup>13</sup> se tienen así las ***Ecuaciones de Euler-Lagrange*** para el funcional<sup>14</sup>  $f(y, y')$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.11)$$

En el capítulo siguiente, se utilizará este resultado para conocer las geodésicas del Plano de Poincaré. Las mismas que ayudarán en la obtención de otros resultados interesantes en las secciones posteriores.

---

<sup>13</sup>Dicho lema dice que si se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\eta(x)dx = 0$$

donde  $M(x)$  es continua, para todas las funciones arbitrarias  $\eta(x)$  continuas hasta la segunda derivada que cumplen con  $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ , entonces la función  $M(x)$  será igual a cero en el intervalo  $(x_0, x_1)$ . La demostración de dicho lema puede encontrarse en la referencia [3].

<sup>14</sup>Es importante hacer notar que las ecuaciones aquí mostradas no están restringidas únicamente al funcional (1.7), de hecho pueden ser utilizadas para cualquier funcional  $f$  que se obtiene directamente de la ecuación (1.5).

## Capítulo 2

# Geodésicas y Postulados del Plano Hiperbólico

Para poder saber con exactitud si los 4 primeros postulados de Euclides se aplican al plano hiperbólico, se deben definir, primero, los equivalentes a líneas y círculos en  $\mathbb{R}^2$  con esta nueva geometría definida en la definición 1.3.3. Posteriormente, en el capítulo 3 se observará que esta forma de representación del Plano  $\mathbb{H}^2$  no es única y existen otros modelos equivalentes. Asimismo, en este capítulo se usará el *cálculo variacional* y el concepto de *funcionales*, véase sección 1.5 así como los símbolos de Christoffel (sección 1.3.6).

### 2.1. Geodésicas en el Plano de Poincaré

En la presente sección se estudiarán las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional  $f$  que ayudará a la obtención de las geodésicas del modelo del Plano de Poincaré. Es así que haciendo referencia a la ecuación obtenida en (1.11) y como  $f(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y}$  depende exclusivamente de  $y$  y  $y'$ , se pueden calcular sus respectivas derivadas parciales, obteniendo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y^2} \quad (2.1)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{y} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (2.2)$$

debido a que  $y > 0$  por la Definición 1.3.3, se puede afirmar que tanto el funcional  $f$  como sus derivadas parciales existen en todos los puntos de sus dominios.

Las soluciones de la ecuación  $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$  representan la curva más corta que une dos puntos en el plano Hiperbólico descrito por la métrica (1.3). Por lo tanto, las *geodésicas* del Plano de Poincaré son parametrizaciones de las soluciones de la ecuación (1.11).

Para resolver la ecuación (1.11) con el funcional descrito, se usan las equivalencias obtenidas en (1.7), (2.1) y (2.2). Obteniendo que la ecuación (1.11) queda:

$$\frac{y'' (y')^2}{y (1 + (y')^2)^{3/2}} - \frac{y''}{y \sqrt{1 + (y')^2}} + \frac{(y')^2}{y^2 \sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y^2} = 0$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por  $y^2 (1 + (y')^2)^{3/2}$  y reduciendo términos semejantes, se llega a la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' + \frac{1}{y} (y')^2 + \frac{1}{y} = 0$$

o de forma equivalente,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{1}{y} = 0 \quad (2.3)$$

cuya solución es:

$$x^2 + y^2 - ax - b = 0 \quad (2.4)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes que están determinadas por las condiciones iniciales. Se resolverá para un caso en particular: cuando se conocen dos puntos por donde pasa la geodésica. Entonces, considerando los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  con  $x_0 \neq x_1$  y reemplazando los mismos en la ecuación (2.4), se obtiene que

$$a = (x_1 + x_0) + \frac{y_1^2 - y_0^2}{x_1 - x_0} \quad (2.5)$$

y

$$b = \frac{x_1(x_0^2 + y_0^2) - x_0(x_1^2 + y_1^2)}{x_1 - x_0} \quad (2.6)$$

Por lo que, reescribiendo la ecuación (2.4), se tiene que:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = b + \frac{a^2}{4} \quad (2.7)$$

Es decir, las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos,  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  tal que  $x_0 \neq x_1$ , en el Plano de Poincaré son semicircunferencias centradas en  $(\frac{a}{2}, 0)$  y con un radio igual a

$$r = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \quad (2.8)$$

Para el caso  $x_0 = x_1$ , si se reemplaza los valores de  $a$  y  $b$  de nuevo en la ecuación (2.4) se llega a la siguiente relación

$$(x_1 - x_0)(x^2 + y^2) - (x_1^2 - x_0^2)x - (y_1^2 - y_0^2)x - (x_0^2 + y_0^2)x_1 + (x_1^2 + y_1^2)x_0 = 0$$

usando la condición  $x_0 = x_1$  y agrupando términos semejantes, se llega a una nueva ecuación:

$$x = x_0 \quad (2.9)$$

es decir una línea perpendicular al eje horizontal que pasa por  $x_0$ .

Los resultados obtenidos son llamadas **geodésicas del Plano de Hiperbólico** (modelo de Poincaré). De la misma manera, la ecuación diferencial (2.3) se puede obtener mediante el uso de la definición de geodésicas mostrada en la sección anterior. Para esto, es necesario calcular los símbolos de Christoffel. Por tanto, dado que la matriz inversa a la matriz asociada al tensor métrico para un punto  $p$  y una base  $B$  en la superficie está dada por

$$(M_B(g_p))^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

entonces,  $g^{11} = g^{22} = y^2$ ,  $g^{12} = g^{21} = 0$  y como  $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$ ,  $g_{12} = g_{21} = 0$ ; los símbolos de Christoffel quedan de la siguiente manera:

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}y^2 \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y^2} \right) \right] = -\frac{1}{y}$$

y de manera similar se obtienen

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0$$

Consecuentemente, usando la Definición 1.3.6, las geodésicas se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = 0$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{y} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = 0.$$

Para comprobar que el sistema anterior y la ecuación (2.3) son equivalentes, se toma en cuenta que  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$  y  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2x}{dt^2}$ . Por lo tanto, reemplazando ambas igualdades y sustituyendo el valor de  $\frac{d^2x}{dt^2}$  en la segunda ecuación, el sistema previo queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{2}{y} \left( \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{y} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = 0$$

debido a que  $\frac{dx}{dt}$  no es cero para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces reduciendo términos semejantes la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{1}{y} = 0$$

igual que la ecuación (2.3). Es decir, ambos métodos para el cálculo de las geodésicas son equivalentes, como era de esperarse. Y cuyas soluciones se muestran en la Figura 2.1.

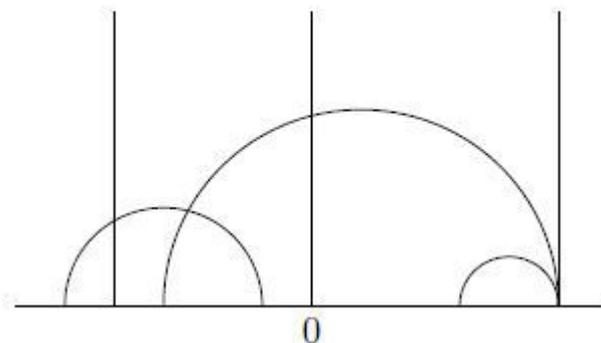


Figura 2.1: Geodésicas del Plano de Poincaré

Ahora bien, es importante recalcar varios aspectos mencionados en los postulados de Euclides para este modelo en particular: Las denominadas ‘rectas’ en el plano Euclidiano son ahora geodésicas en el plano Hiperbólico (descritas por la ecuación (2.7)). Como extensión de ‘segmento de recta’, es decir una geodésica limitada por dos puntos en el plano Hiperbólico, se entiende que ésta puede verse como un subconjunto de una geodésica que pasa dichos puntos. Por otro lado, ángulo recto se denomina a aquel que representa un producto interno nulo entre dos vectores  $\vec{u}_p, \vec{v}_p \in T_pS$ . Las geodésicas paralelas son aquellas que no se intersecan en ningún punto. Finalmente, la distancia entre dos puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  se puede obtener mediante la Definición 1.3.4 para los dos casos:  $x_0 = x_1$  y  $x_0 \neq x_1$ . Para el caso  $x_0 = x_1$ , la distancia está simplemente dada por

$$s((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \quad (2.10)$$

donde  $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$  y  $(x(t_1), y(t_1)) = (x_1, y_1)$ . Dado que por la ecuación (2.9)  $x(t) = x_0 = x_1$  entonces,  $x'(t) = 0$  y la ecuación previa se reduce a:

$$s((x_0, y_0), (x_0, y_1)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right| = \ln \frac{y_1}{y_0}. \quad (2.11)$$

La última igualdad se da porque  $y > 0$ . Dado que el logaritmo puede tener valores negativos, la distancia realmente es el valor absoluto del resultado en (2.11).

De manera similar, para el caso  $x_0 \neq x_1$  si se considera la parametrización:  $x(t) = \frac{a}{2} + r \cos(t)$  y  $y(t) = r \sin(t)$ , donde  $t \in (0, \pi)$  (de tal manera que  $y(t) > 0$ ),

$a$  y  $r$  están definidas en (2.5) y (2.6), respectivamente. Entonces, la ecuación (2.10) queda:

$$s((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{r^2}}{r \sin(t)} dt = \int_{t_0}^t \frac{1}{\sin(t)} dt = \ln \left| \frac{\cot(t_0) + \csc(t_0)}{\cot(t_1) + \csc(t_1)} \right|$$

por definición:  $\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$  y  $\csc(t) = \frac{1}{\sin(t)}$ , además como  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ ,  $y(t) = r \sin(t) > 0$ ,  $\sin(t) \leq 1$  y en consecuencia  $\frac{1}{\sin(t)} \geq 1$ . Entonces  $s((x_0, y_0), (x_1, y_1))$  es ahora<sup>1</sup>:

$$s((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(t_0)} - 1} + \frac{1}{\sin(t_0)}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(t_1)} - 1} + \frac{1}{\sin(t_1)}} \right) = \operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{\sin(t_0)} \right) - \operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{\sin(t_1)} \right)$$

debido a la parametrización para  $x$  e  $y$ , entonces,

$$s((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \operatorname{arcosh} \left( \frac{r}{y_0} \right) - \operatorname{arcosh} \left( \frac{r}{y_1} \right)$$

entre algunas de las identidades de las funciones trigonométricas hiperbólicas [23], se tiene que  $\operatorname{arcosh}(x) \pm \operatorname{arcosh}(y) = \operatorname{arcosh} \left( xy \pm \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} \right)$ . Es así que,

$s((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \operatorname{arcosh} \left[ \frac{r^2}{y_0 y_1} - \sqrt{\left( \frac{r^2}{y_0^2} - 1 \right) \left( \frac{r^2}{y_1^2} - 1 \right)} \right]$ . Reemplazando el valor de  $r$  (de la ecuación (2.8)) y reduciendo términos semejantes, se concluye que la distancia entre dos puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  es:

$$s((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{2y_0 y_1} \right). \quad (2.12)$$

De igual manera que en el caso anterior, la distancia es el valor absoluto de la expresión previa.

Es así que mientras los valores de  $y_0$  o  $y_1$  de algún par de puntos sean muy

---

<sup>1</sup>La función hiperbólica inversa,  $\operatorname{arcosh}(x)$ , puede ser escrita como  $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ , para  $x \geq 1$ . Ésta y otras equivalencias se muestran en [20], p. 430.

pequeños, la distancia es mucho más grande que la distancia Euclidiana de la forma que muestra la ecuación (2.11) o (2.12), dependiendo del caso.

Intuitivamente, cuando se aplica el  $\lim_{x_0 \rightarrow x_1} s((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ , se debe llegar al mismo resultado obtenido en (2.11):

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_1} s((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \operatorname{arcosh} \left( \frac{y_1^2 + y_0^2}{2y_0y_1} \right) = \ln \left( \frac{y_1^2 + y_0^2 + y_1^2 - y_0^2}{2y_0y_1} \right) = \ln \frac{y_1}{y_0}$$

ya que la distancia debe ser positiva, entonces se toma el valor absoluto de la expresión anterior y se tiene la igualdad con (2.11).

Con estos preámbulos y como se mencionó en la Introducción, la Geometría Hiperbólica se definió por no cumplir el postulado 5. Por ende, la pregunta radica si esta geometría realmente cumple con los 4 postulados restantes y cómo es el comportamiento de los mismos. Gracias a que ya se conoce la forma de las geodésicas (véase la sección 2.1), se puede llevar a cabo este estudio. Aún así, ya que el interés radica en otro espacio, se deben reformular los 5 axiomas con la terminología adecuada para el caso particular de  $\mathbb{H}^2$ , como sigue:

- 1° Por dos puntos cualesquiera en el Plano de Poincaré, se puede unir una y solo una geodésica que pase por ambos puntos.
- 2° Dados un punto y una distancia<sup>2</sup> fijos, se puede trazar un único círculo centrado en ese punto y con radio igual a la distancia dada.
- 3° Una geodésica limitada por dos puntos (inicial y final) se puede extender en una geodésica que pasa por dichos puntos.
- 4° Todos los ángulos rectos son iguales.
- 5° Considerando una geodésica  $C_1$  y un punto  $p$  fuera de ésta, existe una única geodésica  $C_2$  que pasa por el punto  $p$  y nunca se interseca con  $C_1$ .

Los postulados 2, 3 y 4 son prácticamente consecuencias de las definiciones y resultados ya obtenidos hasta ahora, por lo que se hará una discusión breve de lo que significan. Por otra parte, se sabe que el quinto postulado no se cumple, pero se lo incluye para comprobar que efectivamente no es verdadero y cómo se lo debe reformular.

---

<sup>2</sup>La distancia, en este caso, es la obtenida en (2.11) o (2.12), dependiendo del caso.

## 2.2. Primer Postulado

Por dos puntos cualesquiera en el Plano de Poincaré, se puede unir una y solo una geodésica que pase por ambos puntos.

Dados dos puntos cualesquiera,  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  en  $\mathbb{H}^2$  que cumplen con la ecuación (2.7) o la ecuación (2.5), respectivamente, se vuelve a considerar los dos casos  $x_0 = x_1$  y  $x_0 \neq x_1$ .

Para el caso  $x_0 = x_1$  que corresponde a una línea recta, es fácil ver que el postulado se cumple al igual que para el plano Euclidiano. Para el caso  $x_0 \neq x_1$  que corresponde a semicircunferencias determinadas por el valor de las constantes  $a$  y  $b$  corresponden a las igualdades (2.5) y (2.6), respectivamente se puede ver trivialmente que los valores de  $a$  y  $b$  dependen únicamente de los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ . Concluyendo entonces, que el primer postulado se cumple de igual manera para el plano  $\mathbb{H}^2$ .

## 2.3. Segundo Postulado

Dados un punto y una distancia fijos, se puede trazar un único círculo centrado en ese punto y con radio igual a la distancia dada.

Básicamente el enunciado del postulado es la definición general de circunferencia, esto es una circunferencia es un conjunto de puntos equidistantes (distancia fija) a un punto denominado centro. Sin embargo, se puede hacer un análisis de cómo se representan las circunferencias en  $\mathbb{H}^2$ .

Es así que, la distancia entre un centro,  $(x_0, y_0)$ , y un conjunto de puntos cualesquiera,  $(x, y)$ , debe ser constante; entonces, la ecuación para la circunferencia se obtiene al resolver la ecuación (2.12) para una distancia fija  $R$ :

$$R = \operatorname{arcosh} \left( 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2y_0y} \right) \quad (2.13)$$

Debido a que se quiere conocer que ecuación representa a las circunferencias Hiperbólicas, se busca expresar la igualdad (2.13) en una forma más familiar. Por lo que se llega a,

$$2yy_0\cosh(R) = (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2$$

y completando el trinomio cuadrado perfecto, se obtiene una fórmula bastante conocida:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0\cosh(R))^2 = (y_0\sinh(R))^2 \quad (2.14)$$

esta ecuación representa las circunferencias en  $\mathbb{H}^2$  con centro en  $(x_0, y_0)$  y radio  $R$ . Dichas curvas son nada más y nada menos que circunferencias en el plano Euclidiano con centro en  $(x_0, y_0\cosh(R))$  y radio  $y_0\sinh(R)$ , es decir que preservan la forma geométrica, como se muestra en la Figura 2.2.

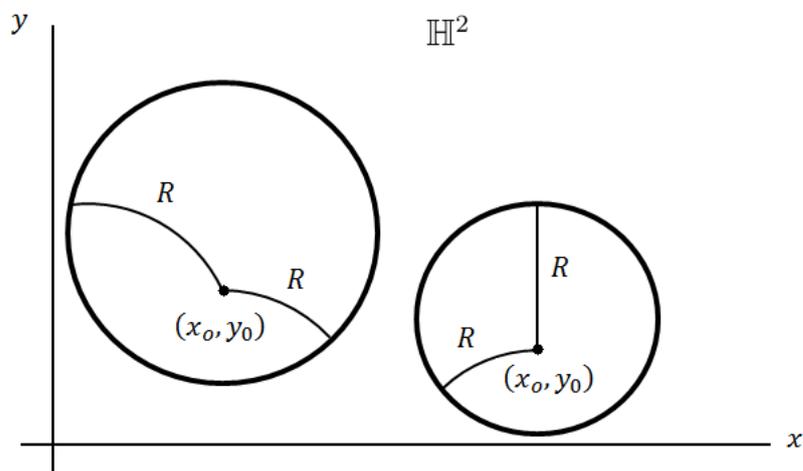


Figura 2.2: Circunferencias en el Plano Hiperbólico

## 2.4. Tercer Postulado

Una geodésica limitada por dos puntos (inicial y final) se puede extender en una geodésica que pasa por dichos puntos.

Este axioma, es una consecuencia de las condiciones iniciales usadas para la obtención de las geodésicas (2.7) y (2.9). Consecuentemente, es válido sin necesidad de hacer cálculos adicionales. Aun así, es importante mencionar que la distancia entre dos puntos cercanos al eje  $x$  se comporta de manera diferente a que si dichos puntos estuvieran lejos del mismo eje, como se mencionó anteriormente. En la Figura 2.3, por ejemplo si se midiera (de forma tradicional, esto es en  $\mathbb{R}^2$ ) la distancia entre  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  así como la distancia entre  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ , se puede notar que ambas son iguales (sea esta distancia:  $y_1 - y_0 = y_3 - y_2 = L$ ). Pero, si se lo hace utilizando la ecuación (2.11) correspondiente a distancias en  $\mathbb{H}^2$  para  $x_0 = x_1$  y  $x_2 = x_3$ , se obtiene que la que tiene los puntos más cercanos al eje horizontal es mayor dado que como  $\frac{y_1}{y_0} = \frac{L}{y_0} + 1$  y  $\frac{y_3}{y_2} = \frac{L}{y_2} + 1$ , entonces  $\frac{y_3}{y_2} > \frac{y_1}{y_0}$ , ya que  $y_0 > y_2$ . Además como  $\frac{y_1}{y_0} > 1$  y  $\frac{y_3}{y_2} > 1$ , se tiene:

$$\left| \ln \frac{y_3}{y_2} \right| > \left| \ln \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

Claramente el resultado previo es válido para las geodésicas que corresponden a líneas perpendiculares al eje  $x$ . Un resultado similar se obtiene para el otro caso.

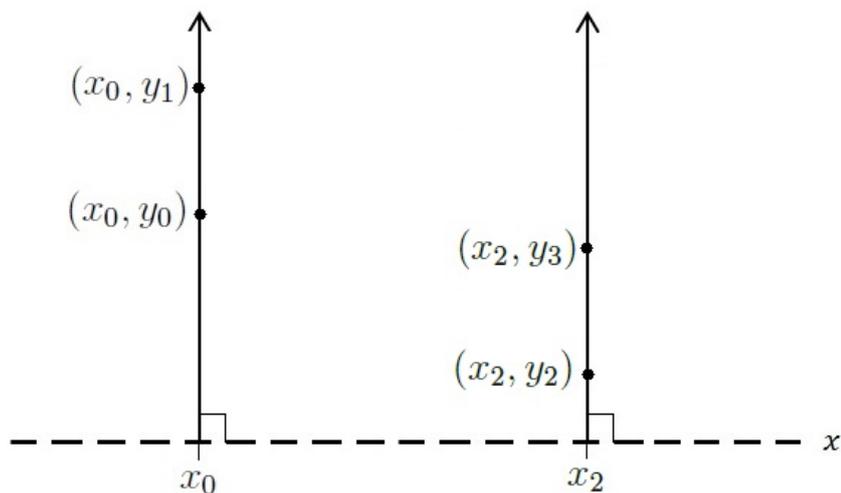


Figura 2.3: Diferencia entre distancias en el Plano Hiperbólico

## 2.5. Cuarto Postulado

Todos los ángulos rectos son iguales.

Como se vio con anterioridad, se puede calcular el ángulo entre dos vectores en el espacio tangente a  $\mathbb{H}^2$  (en un punto  $p \in \mathbb{H}^2$ ). Si los vectores asignados en dicho punto son  $\vec{u}_p$  y  $\vec{v}_p$ , el ángulo queda definido como:

$$\cos \theta_p = \frac{\sum_{i=1}^2 u_i v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 |u_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^2 |v_i|^2}} \quad (2.15)$$

Sin embargo, recordando el ejemplo dado en la sección 1.2 del Capítulo 1, para el espacio Euclídeo,  $\mathbb{R}^2$ , los componentes  $g_{ij}$  son iguales a la unidad cuando  $i = j$  y cero en otros casos. Por lo cual, el ángulo entre dos vectores en  $\mathbb{R}^2$  que se intersecan en un punto  $q \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{w}_q$  y  $\vec{z}_q$ , queda:

$$\cos \theta_q = \frac{\sum_{i=1}^2 w_i z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^2 |w_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^2 |z_i|^2}}$$

Es decir, ¡el cálculo del ángulo entre dos vectores tanto para el plano Euclídeo como para el plano Hiperbólico es el mismo! A pesar de que son espacios diferentes, descritos por métricas distintas, los ángulos se miden de la misma manera en ambos casos. Entonces, ángulos rectos en  $\mathbb{H}^2$  son iguales a ángulos rectos en  $\mathbb{R}^2$  que ocurren cuando el producto interno entre los vectores definidos es cero (es decir  $\sum_{i=1}^2 u_i v_i = 0$ ). Concluyendo de esta forma que se cumple con el cuarto postulado.

## 2.6. Quinto Postulado

Considerando una geodésica  $C_1$  y un punto  $p$  fuera de ésta, existe una única geodésica  $C_2$  que pasa por el punto  $p$  y nunca se interseca con  $C_1$ .

Se puede observar que los 4 postulados se cumplen de igual manera para el plano hiperbólico, y la única forma de que este tipo de Espacio sea diferente al habitual, es que no se cumpla el quinto postulado de Euclides. En consecuencia, en este apartado se estudiará por qué no éste es verdadero. Como se mencionó al principio de esta sección, las geodésicas paralelas son curvas que nunca se intersecan entre sí. Como ejemplo se tiene el plano cartesiano,  $\mathbb{R}^2$ , sean  $L_1 : y = a_1x + b_1$  y  $L_2 : y = a_2x + b_2$  dos rectas, se dice que son paralelas si  $a_1 = a_2$  y  $b_1 \neq b_2$ , como se ilustra en la Figura 2.4.

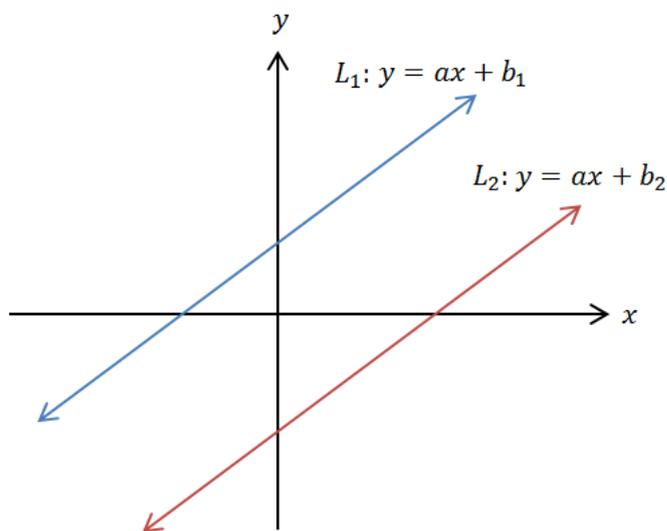


Figura 2.4: Líneas paralelas en  $\mathbb{R}^2$ .

Como ya se conoce, el análogo de las líneas paralelas en  $\mathbb{H}^2$  son geodésicas que no se intersecan entre sí. Por lo tanto, si se considera un punto  $p \in \mathbb{H}^2$  y una geodésica  $C_1$ , entonces existen algunas otras geodésicas que pasan por  $p$  y son paralelas a  $C_1$ , como se observa en la Figura 2.5.

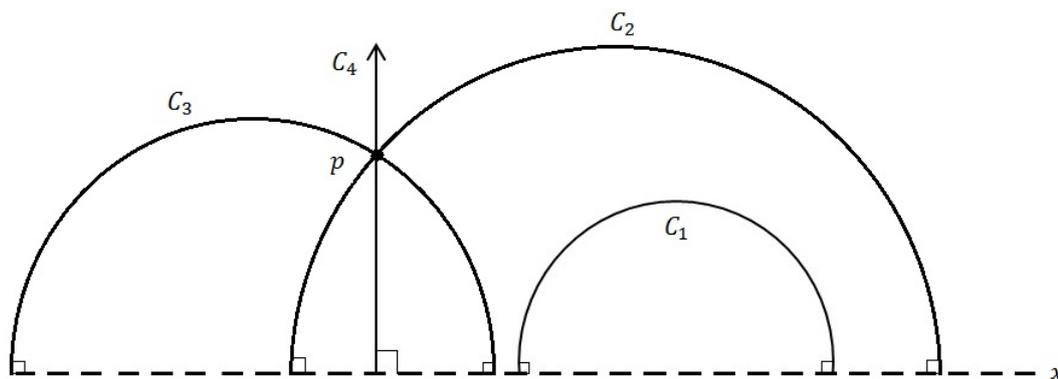


Figura 2.5: Geodésicas paralelas a  $C_1$  en  $\mathbb{H}^2$ . Puede observarse fácilmente que  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  no son paralelas entre sí.

Se puede observar y concluir que el postulado 5 no se cumple, ya que las geodésicas  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son paralelas a  $C_1$  y pasan por  $p$ . Por lo tanto, en  $\mathbb{H}^2$  el postulado 5 es falso.

En consecuencia, la pregunta radica en que si no se cumple con el postulado de paralelismo, entonces ¿cuántas geodésicas paralelas a  $C_1$  se pueden construir tales que pasen por el punto  $p$ ? Como respuesta, se presenta el siguiente lema:

**Lema 2.6.1.** *Dado una geodésica  $C_1$  en  $\mathbb{H}^2$  y un punto  $p$  fuera de ésta, existen infinitas líneas que pasan por  $p$  y son paralelas a  $C_1$ .*

**Demostración:** Se toma una geodésica  $C_1$  que corresponde a una semicircunferencia con centro en  $(x_{C_1}, 0)$  y radio  $r_{C_1}$ ; y un punto  $p$  fuera de ella, cuyas coordenadas son  $(x_p, y_p)$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que  $x_p \geq x_{C_1}$  (dado que para  $x_p \leq x_{C_1}$  la demostración es la misma). Por lo tanto, se dividirá este problema en dos casos: *i*) cuando  $x_p < (x_{C_1} + r_{C_1})$  y *ii*) cuando  $x_p \geq (x_{C_1} + r_{C_1})$ .

- i)  $x_p < (x_{C_1} + r_{C_1})$ : Para este caso, construiremos dos geodésicas paralelas a  $C_1$  que pasen por  $p$ , donde los respectivos centros de las semicircunferencias representarán dos puntos tales que formen un intervalo cerrado. Es decir, se construye una semicircunferencia que pase por  $p$  y tenga centro en el punto  $(x_{C_1}, 0)$  y otra que también pase por  $p$ , pero cuyo centro es tal que la

geodésica se encuentra tangente a  $C_1$  en el punto  $(x_{C_1} + r_{C_1}, 0)$ <sup>3</sup>, como se ve en la Figura 2.6.

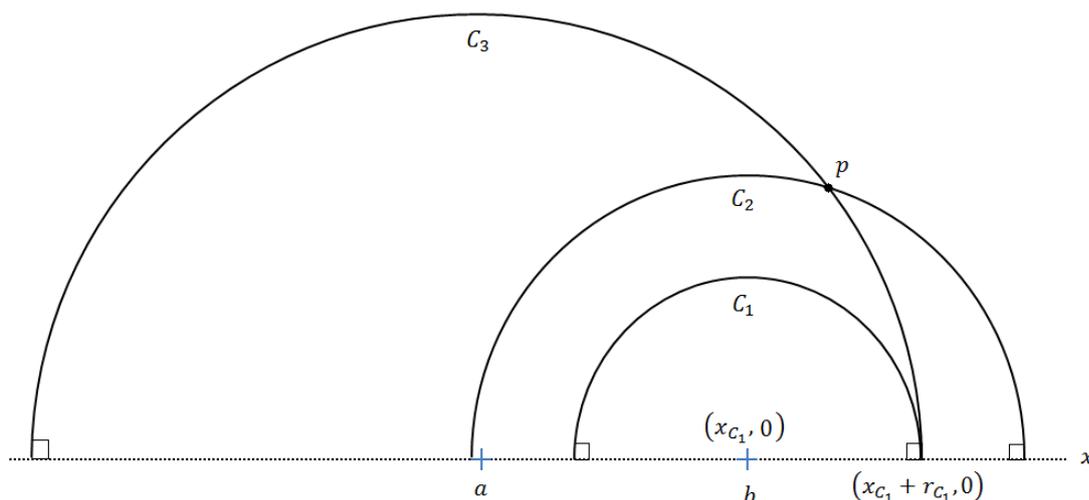


Figura 2.6: Construcción de semicírculos que también pertenecen al conjunto de geodésicas paralelas a  $C_1$  que pasan por el punto  $p$ .

En esta figura se representa a los centros de  $C_1$  y  $C_2$  como  $b = (x_{C_1}, 0)$  y al centro de  $C_3$  como  $a = (x_{C_3}, 0)$ , por simplicidad. Ahora bien, con estas semicircunferencias nos enfocamos en el intervalo  $[a, b] = [(x_{C_3}, 0), (x_{C_1}, 0)]$ , que se reduce a considerar el intervalo  $[x_{C_3}, x_{C_1}]$ . Y en tal intervalo real, existen infinitos  $z \in \mathbb{R}$  de tal manera que  $x_{C_3} \leq z \leq x_{C_1}$ . Es así que existen infinitos puntos  $q \in \mathbb{R}^2$  de la forma  $[z, 0]$  tales que pertenecen a  $[a, b]$ . Estos puntos  $q$  serán los centros de múltiples semicircunferencias que se construyen de tal manera que pasen por  $p$ . Estas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  son todas paralelas a  $C_1$ , como se observan algunas de ellas en la Figura 2.7:

<sup>3</sup>Este punto no pertenece al plano  $\mathbb{H}^2$ ; por lo cual, la recta que pasa por dicho punto es paralela a  $C_1$ .

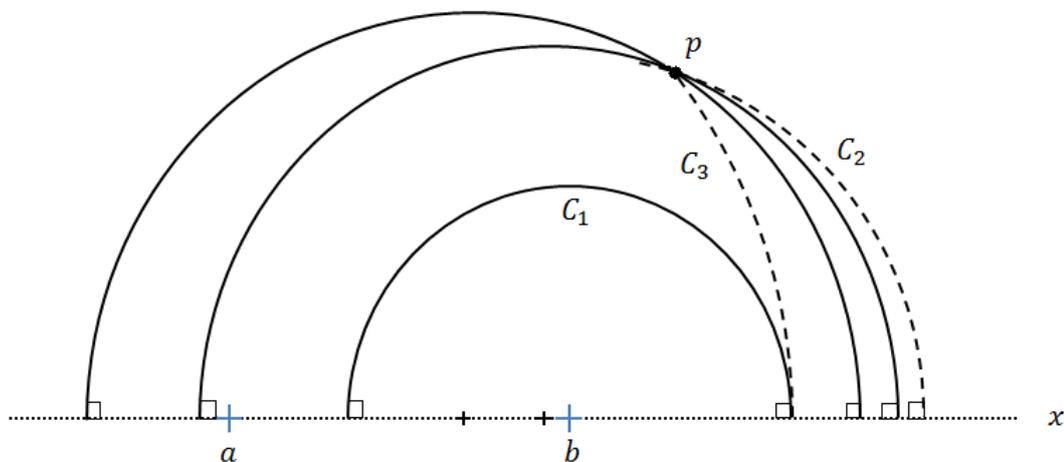


Figura 2.7: Construcción de dos geodésicas paralelas a  $C_1$  que pasan por  $p$  y cuyos centros están entre  $a$  y  $b$ .

- ii)  $x_p \geq (x_{C_1} + r_{C_1})$ : En este caso, el proceso de construcción de las geodésicas es similar: se construye una semicircunferencia que pase por  $p$ , con el mismo centro que  $C_1$  y la geodésica  $x = x_p$ . Por lo cual, se forma el intervalo de puntos de la forma  $(z, 0)$  donde  $z \in (-\infty, x_{C_1}]$ . De igual manera que en el inciso anterior, estos puntos serán los centros de múltiples semicircunferencias (geodésicas en  $\mathbb{H}^2$ ) que se construirán de tal manera que pasen por el punto  $p$  (Figura 2.8). Siendo así infinito el número de geodésicas paralelas a  $C_1$  que pasen por  $p$ , como en el caso previo.

Si se hubiese considerado desde un principio a una geodésica de la forma  $x = x_0$  entonces se aplica únicamente el segundo caso cambiando las condiciones.

□

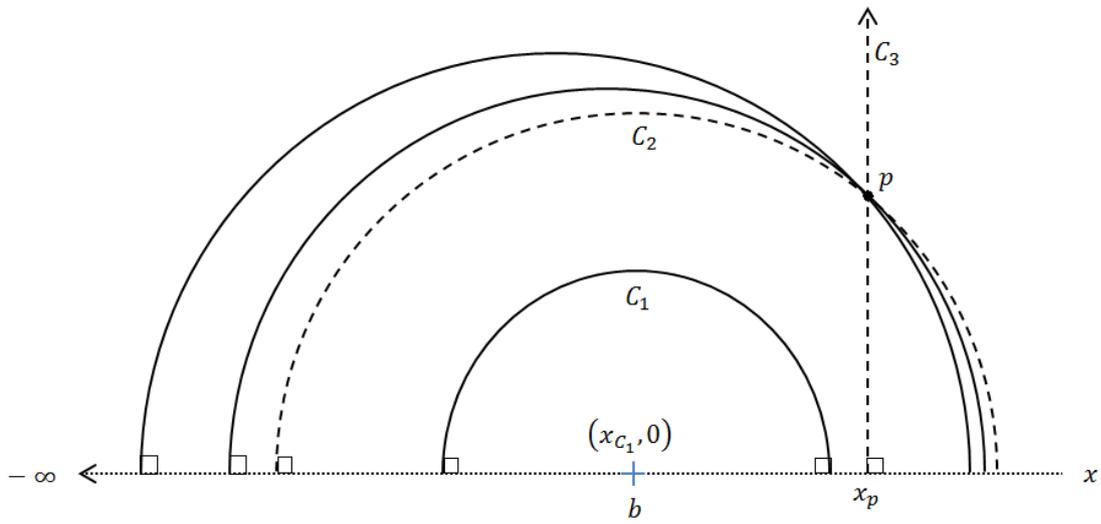


Figura 2.8: Construcción de dos geodésicas paralelas a  $C_1$  que pasan por  $p$  y cuyos centros son puntos de la forma  $(z, 0)$  donde  $z$  está en el intervalo  $(-\infty, x_{C_1}]$ . Además de las geodésicas,  $C_2$  y  $C_3$ , que también son paralelas a  $C_1$ .

## Capítulo 3

# Modelos del Plano Hiperbólico

Como se mencionó en el Capítulo 1 del presente escrito, la Definición dada en 1.3.3 es una descripción del espacio hiperbólico. Sin embargo, existen otros modelos que representan el mismo espacio, pero de diferente manera. Por lo que, en este capítulo se estudiarán 3 de tales modelos  $\mathbb{H}^2$  y el cálculo de sus respectivas geodésicas (que es el resultado más importante) para cualquier uso. Asimismo, se comprueba que los 4 modelos, incluyendo el que se dio en la Definición 1.3.3, son realmente equivalentes (isométricamente equivalentes).

Por lo tanto, entre las representaciones del espacio hiperbólico se encuentran las siguientes:

- i) El modelo del disco de Poincaré:  $D = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ , es el conjunto de puntos en el interior de un círculo  $n$ -dimensional.
- ii) El modelo del Hiperboloide:  $H = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\}$ .
- iii) El modelo de la Semiesfera<sup>1</sup> (Hemisferio):  $S = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} > 0\}$ . Es decir una semiesfera  $(n + 1)$ -dimensional.

Sin embargo, para poder comprobar que las respectivas descripciones para el plano hiperbólico son equivalentes se las debe colocar dentro de una misma di-

---

<sup>1</sup>Esta descripción no es realmente un modelo, pero nos facilita encontrar las isometrías para la equivalencia entre los demás modelos. Entonces, se lo considera como un modelo adicional, pero no lo es necesariamente.

mensión y redefinirlas de tal manera que se aprecie su relación. En este caso se darán definiciones específicas para los 4 modelos en dimensión  $n + 1 = 3$  (como superficies<sup>2</sup> en  $\mathbb{R}^3$ ), cabe notar que el lector puede dar otras definiciones y llegar a los mismos resultados; por lo que, se consideran:

- i) El modelo del disco de Poincaré:  $D = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\}$ . La métrica de esta representación es:

$$g_D = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

- ii) El modelo del Hiperboloide:  $H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$ . Cuya métrica esta dada por:

$$g_H = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

- iii) El modelo de la Semiesfera:  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y } z > 0\}$ . Con métrica:

$$g_S = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

- iv) Y el modelo que ya se conoce (Plano de Poincaré):  $P = \{(1, y, z) : z > 0\}$ . Y métrica:

$$g_P = \frac{dy^2 + dz^2}{z^2}$$

Ahora bien, con estas definiciones, se pueden realizar aplicaciones utilizando todos los modelos al mismo tiempo. Como se verá a continuación.

### 3.1. Equivalencia entre Modelos

Para demostrar la equivalencia entre los modelos, se puede tomar cualquier par, pero por facilidad se tomará como base el de la Semiesfera y se probará que éste es isométrico a los otros 3. Para esto, se deben hallar difeomorfismos que preserven las métricas entre cada par elegido. Es así que, haciendo referencia a

---

<sup>2</sup>Es importante aclarar que se los considera como superficies en  $\mathbb{R}^3$  pero cada modelo tiene su métrica respectiva que lo describe.

James Cannon, William Floyd, et al. en *Hyperbolic Geometry*, p. 71. [4]. se tienen las siguientes funciones biyectivas:

$$\alpha : S \longrightarrow P, (x, y, z) \mapsto \left(1, 2\frac{y}{x+1}, 2\frac{z}{x+1}\right)$$

$$\beta : S \longrightarrow D, (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}, 0\right)$$

$$\delta : H \longrightarrow S, (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{1}{z}\right)$$

Si éstas son difeomorfismos, tanto las funciones como sus inversas deben ser diferenciables; ésto se comprobará usando la Definición 1.1.5. Sin embargo y para comenzar, se deben encontrar los atlas de cada modelo y luego trabajar con sus respectivos mapas coordenados para probar que son diferenciables. Cabe recalcar que en esta sección se hará referencia a dos proposiciones enunciadas en Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, pp. 59-64:

**Proposición 3.1.1.** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y  $a \in f(U)$  es un valor regular<sup>3</sup> de  $f$ , entonces  $f^{-1}(a)$  es una superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 3.1.2.** Sea  $p \in S$  un punto en una superficie regular  $S$ , sea  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  un mapa diferenciable con  $p \in \mathbf{x}(U)$ ,  $\mathbf{x}$  es uno a uno y  $\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y$  son linealmente independientes. Entonces,  $\mathbf{x}^{-1}$  es continua. Y asimismo,  $\mathbf{x}$  es una carta local de coordenadas de  $S$ ,  $\forall p \in U$ .

Considerando el modelo del hiperboloide,  $H$ , y la función  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . El gradiente de ésta función está dado por:  $\text{grad}(f(x, y, z)) = (2x, 2y, -2z)$ , entonces el único punto en el cual  $f_x, f_y$  y  $f_z$  son cero al mismo tiempo es  $(0, 0, 0)$ . Sin embargo,  $(0, 0, 0) \notin f^{-1}(-1)$ , por tanto  $-1$  es un valor regular de  $f$ . Consecuentemente, por la proposición 3.1.1,  $f^{-1}(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$  (hiperboloide de dos hojas) es una superficie regular. Finalmente, como  $H = \{(x, y, z) : z > 0\} \cap f^{-1}(-1)$  es un conjunto abierto

---

<sup>3</sup> $a \in f(U)$  es un valor regular de  $f$  si y sólo si  $f_x, f_y$  y  $f_z$  (sus derivadas parciales) no son nulas simultáneamente en cualquier punto de la imagen inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = a\}.$$

de  $f^{-1}(-1)$ , se concluye que  $H$  es una superficie regular.

Ahora, si se toma en cuenta la función  $\psi_H : \mathbb{R}^2 \rightarrow H$ , tal que  $\psi_H(x, y) = (x, y, +\sqrt{x^2 + y^2 + 1})$ , se debe demostrar que ésta es un mapa coordinado por medio de la proposición 3.1.2. Dos de las condiciones son evidentes:  $H$  es una superficie regular y  $\psi_H(x, y) = (x, y, +\sqrt{x^2 + y^2 + 1})$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, se debe probar que  $\psi_{H_x}(x, y)$  y  $\psi_{H_y}(x, y)$  son linealmente independientes y que  $\psi_H$  es uno a uno.

Calculando sus derivadas parciales de  $\psi_H$ :

$$\psi_{H_x}(x, y) = \left( 1, 0, \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right)$$

$$\psi_{H_y}(x, y) = \left( 0, 1, \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right)$$

Entonces,

$$\psi_{H_x} \times \psi_{H_y}(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \end{vmatrix} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, 1 \right)$$

como  $\psi_{H_x} \times \psi_{H_y}(x, y) \neq (0, 0, 0)$ , por lo tanto  $\psi_{H_x}(x, y)$  y  $\psi_{H_y}(x, y)$  son linealmente independientes. Finalmente, si  $\psi_H(x_1, y_1) = \psi_H(x_2, y_2)$ , entonces  $(x_1, y_1, +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 1}) = (x_2, y_2, +\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + 1})$ , ésto implica que  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$ . Concluyendo que  $\psi_H$  es uno a uno y asimismo  $\psi_H$  es una carta local de coordenadas de  $H$ .

Debido a que este mapa cubre por completo a  $H$ , entonces el atlas para esta superficie queda como  $\mathcal{A}_H = \{(H, \psi_H)\}$ .

**Lema 3.1.1.** *Un plano en  $\mathbb{R}^3$  es una superficie regular.*

*Demostración*

*Un plano cualquiera en  $\mathbb{R}^3$  se puede representar como  $ax + by + cz = d$ , para  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  de tal manera que  $a$  y  $b$  y  $c$  no son todos cero. Ahora, considerando la función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = ax + by + cz$ , el gradiente de dicha función es  $\text{grad}(f(x, y, z)) = (a, b, c)$ , como  $\text{grad}(f(x, y, z)) = (0, 0, 0)$  si y sólo si  $a$  y  $b$  y  $c$  son todos cero, pero este punto no pertenece a  $f^{-1}(d) = \{(x, y, z) : ax + by + cz = d\}$ . Por lo tanto,  $d$  es un valor regular de  $f$  y entonces, usando la proposición 3.1.1,  $f^{-1}(d)$  es una superficie regular.  $\square$*

Con esto, se considera la superficie conformada por el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  tales que  $x = 1$ , que es un caso particular de un plano en  $\mathbb{R}^3$ . Y como se mostró en el lema anterior, entonces  $\{(x, y, z) : x = 1\}$  es una superficie regular; por lo que, como el plano de Poincaré, que está dado por  $P = \{(x, y, z) : x = 1\} \cap \{(x, y, z) : z > 0\}$ , es un conjunto abierto del plano  $x = 1$ ; se obtiene como resultado que  $P$  es una superficie regular.

Tomando en cuenta la función  $\psi_P : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow P$ , tal que  $\psi_P(x, y) = (1, x, y)$ . Claramente es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$ , ahora sus vectores tangentes son:

$$\psi_{P_x} = (0, 1, 0)$$

$$\psi_{P_y} = (0, 0, 1)$$

que son vectores linealmente independientes. Por otro lado, si  $\psi_P(x_1, y_1) = \psi_P(x_2, y_2)$ , entonces  $(1, x_1, y_1) = (1, x_2, y_2)$ . Lo que indica que tanto  $x_1 = x_2$  como  $y_1 = y_2$ ; es decir,  $\psi_P$  es uno a uno. Por lo tanto, gracias a la proposición 3.1.2,  $\psi_P$  es un mapa coordinado. Y ya que,  $\psi_P$  cubre todo  $P$ , el atlas asociado a dicha superficie es  $\mathcal{A}_P = \{(P, \psi_P)\}$ .

Asimismo, el plano  $z = 0$  es una superficie regular por el Lema 3.1.1. Y como el modelo del disco de Poincaré  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$  es un subconjunto abierto del plano  $z = 0$ , entonces  $D$  es una superficie regular también.

Ahora, sea la función  $\psi_D : \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow D$ , tal que  $\psi_D(x, y) = (x, y, 0)$ . Evidentemente, es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$  y es uno a uno (cuya prueba es idéntica a  $\psi_P$ ). Sus vectores tangentes son:

$$\psi_{D_x} = (1, 0, 0)$$

$$\psi_{D_y} = (0, 1, 0)$$

claramente,  $\psi_{D_x}$  y  $\psi_{D_y}$  son linealmente independientes. Es así que mediante la proposición 3.1.2,  $\psi_D$  es una carta local de coordenadas para  $D$ . Y debido a que  $\psi_D$  cubre por completo a  $D$ , el atlas de esta superficie es  $\mathcal{A}_D = \{(D, \psi_D)\}$ .

Finalmente para el modelo de la semiesfera,  $S$ , es un conjunto abierto de la esfera en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2$ , la cual es una superficie regular (cuya demostración está en las páginas 55-57 de Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*). Más precisamente,  $S = \{(x, y, z) : z > 0\} \cap \mathbb{S}^2$ . Por lo tanto,  $S$  es una superficie regular.

Con esto, considerando  $\psi_S : \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow S$ , tal que  $\psi_S(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ , es diferenciable en  $\mathbb{R}^3$  ya que  $x^2 + y^2 < 1$ . Sus vectores

tangentes están dados por:

$$\psi_{S_x} = \left( 1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$$\psi_{S_y} = \left( 0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

Entonces,

$$\psi_{S_x} \times \psi_{S_y}(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \left( -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

como  $\psi_{S_x} \times \psi_{S_y}(x, y) \neq (0, 0, 0)$ , por lo tanto  $\psi_{S_x}(x, y)$  y  $\psi_{S_y}(x, y)$  son linealmente independientes. Ahora, si  $\psi_S(x_1, y_1) = \psi_S(x_2, y_2)$ , entonces  $(x_1, y_1, +\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}) = (x_2, y_2, +\sqrt{1-x_2^2-y_2^2})$ , ésto implica que  $x_1 = x_2$  y  $y_1 = y_2$ . Concluyendo que  $\psi_S$  es uno a uno y, por ende,  $\psi_S$  es una carta local de coordenadas de  $S$ . Finalmente, debido a que  $\psi_S$  cubre toda la superficie en mención, el atlas de  $S$  es:  $\mathcal{A}_S = \{(S, \psi_S)\}$ .

Ahora bien, debido a que la Definición 1.1.5 trabaja también con las inversas de las cartas coordenadas, hay que especificarlas como sigue:  $\psi_H^{-1} : H \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\psi_H^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ ;  $\psi_P^{-1} : P \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\psi_P^{-1}(1, y, z) = (y, z)$ ;  $\psi_D^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\psi_D^{-1}(x, y, 0) = (x, y)$  y  $\psi_S^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\psi_S^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ . Asimismo las inversas de las funciones entre superficies son necesarias, por tanto se definen:

$$\alpha^{-1} : P \rightarrow S, (1, y, z) \mapsto \left( \frac{4-y^2-z^2}{4+y^2+z^2}, \frac{4y}{4+y^2+z^2}, \frac{4z}{4+y^2+z^2} \right)$$

$$\beta^{-1} : D \rightarrow S, (x, y, 0) \mapsto \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1} \right)$$

$$\delta^{-1} : S \rightarrow H, (x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{1}{z} \right)$$

Para comprobar que dichas funciones están bien definidas, se hace referencia a las definiciones de cada superficie y se obtiene:

1. Para  $\alpha^{-1}$ :  $\left(\frac{4-y^2-z^2}{4+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{4y}{4+y^2+z^2}\right)^2 + \left(\frac{4z}{4+y^2+z^2}\right)^2 = \frac{16+y^4+z^4-8y^2-8z^2+2y^2z^2+16y^2+16z^2}{(4+y^2+z^2)^2}$   
 $= \frac{16+y^4+z^4+8y^2+8z^2+2y^2z^2}{16+y^4+z^4+8y^2+8z^2+2y^2z^2} = 1$ . Además,  $\frac{4z}{4+y^2+z^2} > 0$  ya que  $z > 0$  por definición del argumento. Entonces,  $\alpha^{-1}$  está bien definida en  $S$ .
2. Para  $\beta^{-1}$ :  $\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1}\right)^2 = \frac{4x^2+4y^2+1+x^4+y^4-2x^2-2y^2+2x^2y^2}{(x^2+y^2+1)^2}$   
 $= \frac{2x^2+2y^2+1+x^4+y^4+2x^2y^2}{1+x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2+2y^2} = 1$ . Y  $\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1} > 0$  ya que  $x^2+y^2 < 1$  por definición de  $D$ . Entonces,  $\beta^{-1}$  está bien definida en  $S$ .
3. Para  $\delta^{-1}$ :  $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2-1}{z^2} = \frac{-z^2}{z^2} = -1$  usando la definición de  $S$ . Además,  $\frac{1}{z} > 0$  ya que  $z > 0$ . Entonces,  $\delta^{-1}$  está bien definida en  $H$ .

Con esto hecho, se utilizará la Definición 1.1.5 para demostrar que las funciones mostradas con anterioridad son diferenciables. Por lo tanto,  $\alpha$  es diferenciable si  $\psi_P^{-1} \circ \alpha \circ \psi_S$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_P^{-1}(\alpha(\psi_S(x, y))) &= \psi_P^{-1}(\alpha(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})) \\ &= \psi_P^{-1}\left(1, \frac{2y}{x+1}, \frac{2\sqrt{1-x^2-y^2}}{x+1}\right) \\ &= \left(\frac{2y}{x+1}, \frac{2\sqrt{1-x^2-y^2}}{x+1}\right) \end{aligned}$$

resultado que es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  ya que  $x^2+y^2 < 1$ ; por tanto  $\alpha$  es diferenciable. Asimismo para  $\alpha^{-1}$ , se calcula:

$$\begin{aligned} \psi_S^{-1}(\alpha^{-1}(\psi_P(x, y))) &= \psi_S^{-1}(\alpha^{-1}(1, x, y)) \\ &= \psi_S^{-1}\left(\frac{4-x^2-y^2}{4+x^2+y^2}, \frac{4x}{4+x^2+y^2}, \frac{4y}{4+x^2+y^2}\right) \\ &= \left(\frac{4-x^2-y^2}{4+x^2+y^2}, \frac{4x}{4+x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

que es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces,  $\alpha^{-1}$  es diferenciable y consecuentemente  $\alpha$  es un difeomorfismo.

Evaluando a  $\beta$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\psi_D^{-1}(\beta(\psi_S(x, y))) &= \psi_D^{-1}(\beta(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})) \\ &= \psi_D^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 0\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)\end{aligned}$$

que es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  ya que  $x^2 + y^2 < 1$ , entonces  $\beta$  es diferenciable. De igual manera:

$$\begin{aligned}\psi_S^{-1}(\beta^{-1}(\psi_D(x, y))) &= \psi_S^{-1}(\beta^{-1}(x, y, 0)) \\ &= \psi_S^{-1}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right)\end{aligned}$$

es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , es decir  $\beta^{-1}$  es diferenciable y, por ende  $\beta$  es un difeomorfismo.

Considerando a  $\delta$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\psi_S^{-1}(\delta(\psi_H(x, y))) &= \psi_S^{-1}(\delta(x, y, \sqrt{1 + x^2 + y^2})) \\ &= \psi_S^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right)\end{aligned}$$

resultado que es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que  $\delta$  es diferenciable. De forma similar:

$$\begin{aligned}\psi_H^{-1}(\delta^{-1}(\psi_S(x, y))) &= \psi_H^{-1}(\delta^{-1}(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})) \\ &= \psi_H^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)\end{aligned}$$

que es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  ya que  $x^2 + y^2 < 1$ . Entonces,  $\delta^{-1}$  es diferenciable y en

consecuencia  $\delta$  es un difeomorfismo.

Para demostrar, finalmente, que los 4 modelos son equivalentes, queda comprobar que los difeomorfismos preserven la métrica; es decir, sean isometrías. Así, usando la Definición 1.3.2, se muestran los siguientes cálculos:

Sean,  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , y:

$$y_i = \frac{2x_i}{x_1 + 1}, \quad i = 2, 3$$

entonces,

$$dy_i = \frac{2dx_i}{x_1 + 1} - \frac{2x_i dx_1}{(x_1 + 1)^2}$$

además, como  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , se tiene:

$$x dx + y dy + z dz = 0 \tag{3.1}$$

Por lo tanto, para todo  $p \in S$ :

$$\begin{aligned} (\alpha^* g_P)_p &= \sum_{i=2}^3 \frac{dy_i^2}{y_i^2} \\ &= \sum_{i=2}^3 \frac{(x_1 + 1)^2}{4x_i^2} \left[ \left( \frac{2dx_i}{x_1 + 1} - \frac{2x_i dx_1}{(x_1 + 1)^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4(x_1 + 1)^2}{(x_1 + 1)^4} \sum_{i=2}^3 \frac{(dx_i(x_1 + 1) - x_i dx_1)^2}{4x_i^2} \\ &= \frac{1}{x_3^2(x_1 + 1)^2} \left[ (x_1 + 1)^2 \sum_{i=2}^3 dx_i^2 - 2(x_1 + 1) dx_1 \sum_{i=2}^3 x_i dx_i + dx_1^2 \sum_{i=2}^3 x_i^2 \right] \end{aligned}$$

Usando la definición de  $S$  y la relación (3.1):

$$(\alpha^* g_P)_p = \frac{1}{x_3^2(x_1 + 1)^2} \left[ (x_1 + 1)^2 \sum_{i=2}^3 dx_i^2 + 2(x_1 + 1) dx_1 x_1 dx_1 + dx_1^2 (1 - x_1^2) \right]$$

Resolviendo el álgebra, se obtiene,

$$\begin{aligned}
 (\alpha^* g_P)_p &= \frac{1}{x_3^2(x_1+1)^2} \left[ (x_1+1)^2 \sum_{i=2}^3 dx_i^2 + (x_1+1)^2 dx_1^2 \right] \\
 &= \frac{1}{x_3^2} \sum_{i=1}^3 dx_i^2 \\
 &= g_{S_p}.
 \end{aligned}$$

A continuación se muestra que  $\beta$  preserva la métrica entre las superficies  $S$  y  $D$ . Sean:

$$y_i = \frac{x_i}{x_3+1}, \quad i = 1, 2$$

entonces,

$$dy_i = \frac{dx_i}{x_3+1} - \frac{x_i dx_3}{(x_3+1)^2}$$

Por lo que, se tiene, para todo  $p \in S$ :

$$\begin{aligned}
 (\beta^* g_D)_p &= \frac{4 \sum_{i=1}^2 dy_i^2}{(1 - y_1^2 - y_2^2)^2} \\
 &= \frac{4 \sum_{i=1}^2 ((x_3+1)dx_i - x_i dx_3)^2}{(x_3+1)^4 \left[ 1 - \sum_{i=1}^2 \left( \frac{x_i}{x_3+1} \right)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

usando la definición de  $S$  y la ecuación (3.1),

$$\begin{aligned}
 (\beta^* g_D)_p &= \frac{4 \left[ (x_3+1)^2 \sum_{i=1}^2 dx_i^2 - 2(x_3+1)dx_3 \sum_{i=1}^2 x_i dx_i + dx_3^2 \sum_{i=1}^2 x_i^2 \right]}{\left[ (x_3+1)^2 - 1 + x_3^2 \right]^2} \\
 &= \frac{(x_3+1)^2 \sum_{i=1}^2 dx_i^2 + 2(x_3+1)x_3 dx_3^2 + dx_3^2(1-x_3^2)}{x_3^2(x_3+1)^2}
 \end{aligned}$$

resolviendo el álgebra:

$$\begin{aligned}
 (\beta^* g_D)_p &= \frac{(x_3+1)^2 \sum_{i=1}^2 dx_i^2 + (x_3+1)^2 dx_3^2}{x_3^2(x_3+1)^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^3 dx_i^2}{x_3^2} \\
 &= g_{S_p}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, para demostrar que  $(\delta^* g_S)_p = g_{H_p}$ , se considera:

$$y_i = \frac{x_i}{x_3}, \quad y_3 = \frac{1}{x_3}, \quad i = 1, 2$$

entonces,

$$dy_i = \frac{dx_i}{x_3} - \frac{x_i dx_3}{x_3^2}$$

y

$$dy_3 = -\frac{dx_3}{x_3^2}$$

Y dado que  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ , se tiene

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3 = 0 \tag{3.2}$$

Esto nos ayuda a justificar el siguiente cálculo,  $\forall p \in H$ :

$$\begin{aligned} (\delta^* g_S)_p &= \frac{\sum_{i=1}^3 dy_i^2}{y_3^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^2 \left( \frac{dx_i}{x_3} - \frac{x_i dx_3}{x_3^2} \right)^2 + \frac{dx_3^2}{x_3^4}}{\frac{1}{x_3^2}} \\ &= \frac{x_3^2 \sum_{i=1}^2 dx_i^2 - 2x_3 dx_3 \sum_{i=1}^2 x_i dx_i + dx_3^2 \sum_{i=1}^2 x_i^2 + dx_3^2}{x_3^2} \end{aligned}$$

usando la definición de  $H$  y (3.2):

$$\begin{aligned} (\delta^* g_S)_p &= \frac{x_3^2 \sum_{i=1}^2 dx_i^2 - 2x_3^2 dx_3^2 + (x_3^2 - 1) dx_3^2 + dx_3^2}{x_3^2} \\ &= \frac{x_3^2 \sum_{i=1}^2 dx_i^2 - 2x_3^2 dx_3^2 + x_3^2 dx_3^2}{x_3^2} \\ &= \sum_{i=1}^2 dx_i^2 - dx_3^2 \\ &= g_{H_p} \end{aligned}$$

Concluyendo que las funciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  son isometrías y, consecuentemente, los modelos  $S$ ,  $P$ ,  $D$  y  $H$  son equivalentes entre sí.

## 3.2. Geodésicas de los Modelos

Debido a que ya se conocen las geodésicas en el modelo del plano superior, y debido a que los otros modelos son equivalentes al mismo; entonces, basta aplicar las funciones previas a las geodésicas del modelo conocido y observar los resultados. De ésta manera se tienen las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4. En las cuales, se muestra que las geodésicas del modelo de la Semiesfera son semicírculos ortogonales al borde (ecuador); en el modelo del Disco de Poincaré son segmentos de circunferencia, perpendiculares al borde; en el modelo de Klein<sup>4</sup> son segmentos de línea recta, o cuerdas; y finalmente, el modelo del Hiperboloide tiene como geodésicas a hipérbolas, respectivamente.

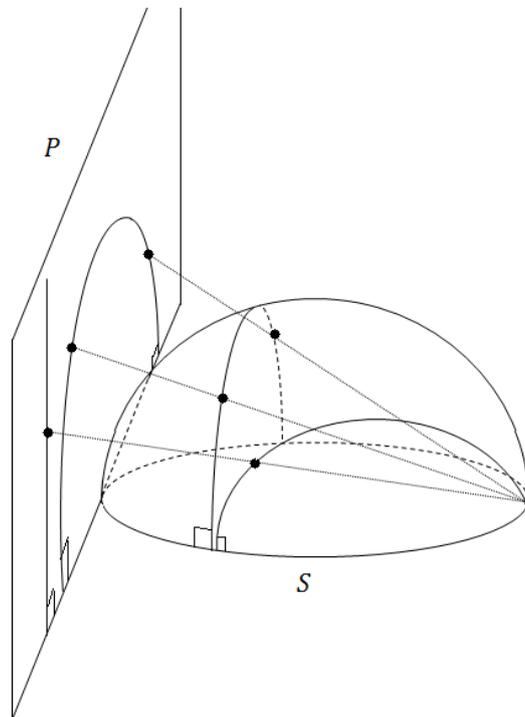


Figura 3.1: Geodésicas en el modelo de la Semiesfera  $S$ .

---

<sup>4</sup>Este modelo no se lo considera en este escrito por su similitud con el modelo  $D$  (con distinta métrica), pero la demostración de la equivalencia del mismo con los anteriores es la misma, para mayores detalles, revisar James Cannon, William Floyd, et. al. *Hyperbolic Geometry*, p. 72.

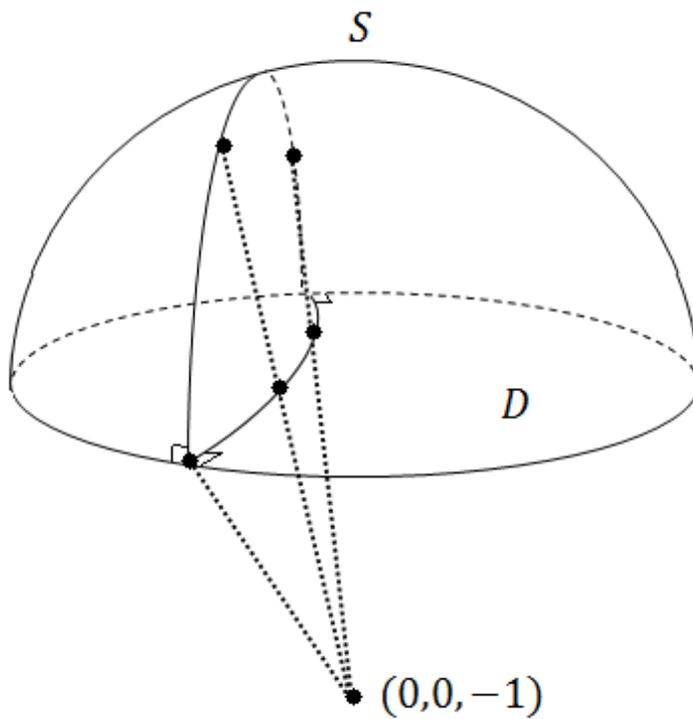


Figura 3.2: Geodésicas en el modelo del Disco de Poincaré  $D$ .

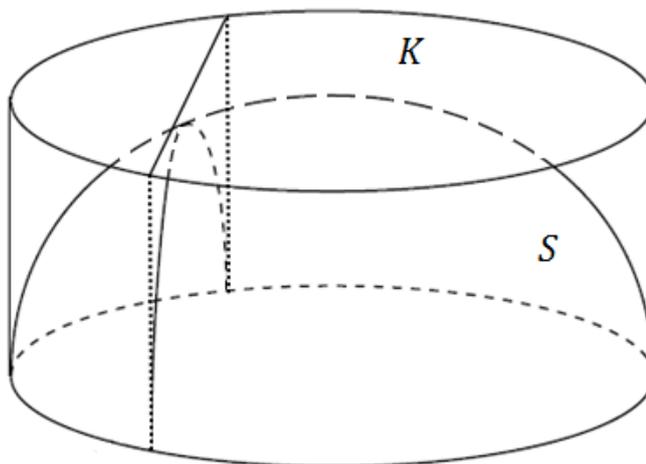


Figura 3.3: Geodésicas en el modelo de Klein  $K$ .

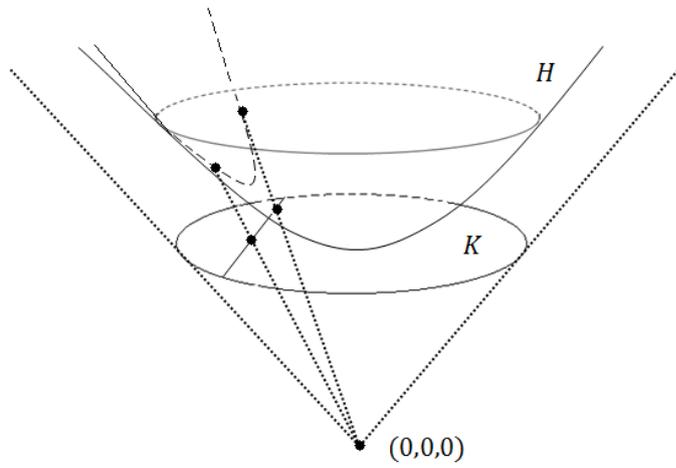


Figura 3.4: Geodésicas en el modelo del Hiperboloide  $H$ .

Con esto, se tiene lo necesario para hacer aplicaciones del plano hiperbólico, haciendo uso de cualquiera de sus distintos modelos y las equivalencias entre los mismos.

## Capítulo 4

### Aplicaciones

Existen algunas aplicaciones que involucran el uso del plano  $\mathbb{H}^2$ . En el arte, por ejemplo, el uso de las propiedades del disco de Poincaré ha sido la base de algunas de las pinturas del famoso artista Maurits Cornelis Escher. En la Figura 4.1 se muestra una de dichas obras en la que el autor usó el concepto de *teselación* dentro del disco Hiperbólico.



Figura 4.1: “Círculo Límite IV”, pintura de M. C. Escher [7].

## 4.1. Teselaciones

Una teselación hace referencia a un recubrimiento de una superficie por completo con un patrón de figuras. Las características principales son que no queden espacios en dicha superficie y que las figuras no se superpongan. Las Figuras 4.2 y 4.3 muestran ejemplos de teselados del plano cartesiano con cuadrados y triángulos equiláteros, respectivamente. O incluso con otros objetos (Figura 4.4).

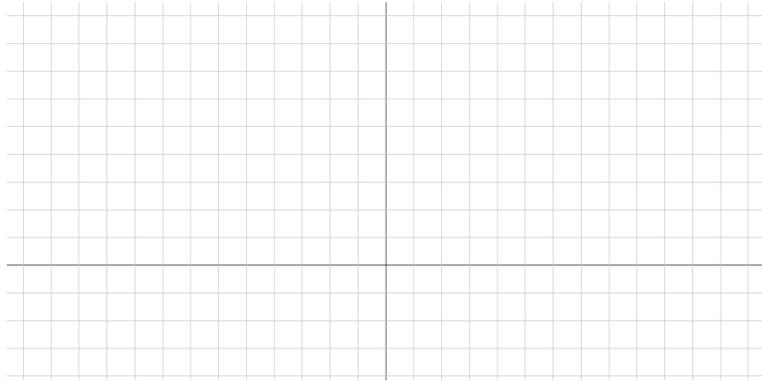


Figura 4.2: Teselación del plano cartesiano con cuadrados.

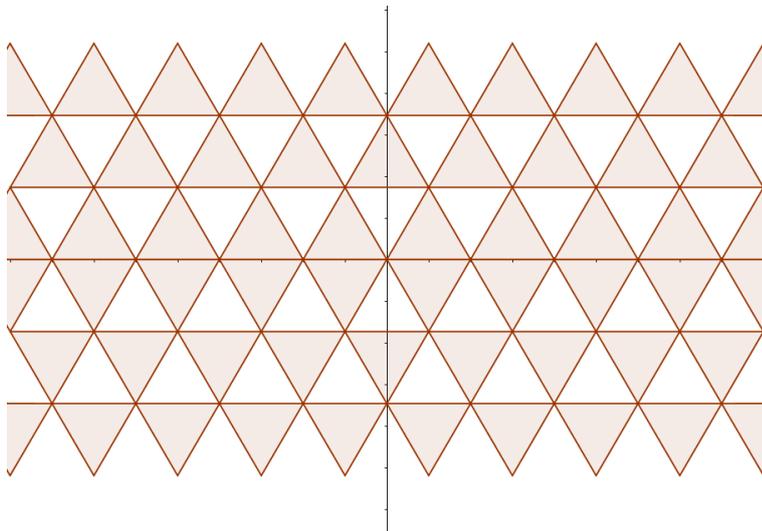


Figura 4.3: Teselación del plano cartesiano con triángulos.

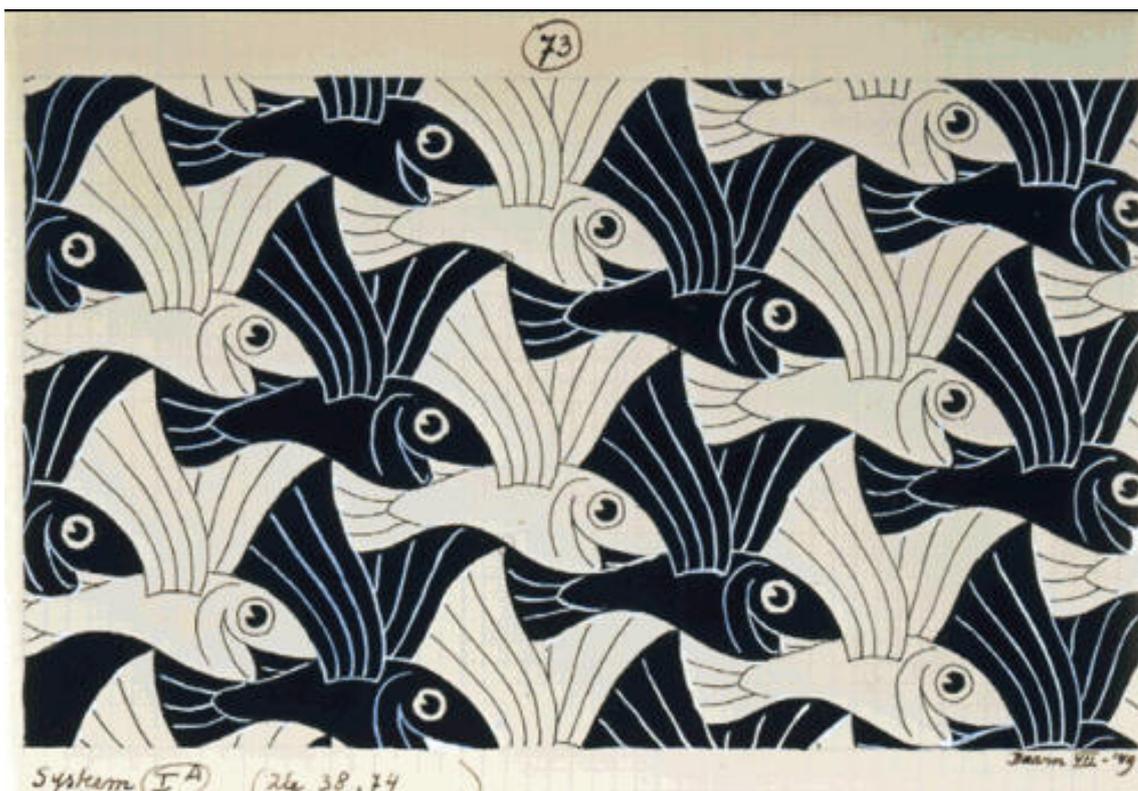


Figura 4.4: “Pez Volador”, pintura de M. C. Escher basada en una teselación del plano cartesiano con peces voladores [12].

En este apartado, se creará una teselación con triángulos hiperbólicos. Éstos están conformados por la unión de 3 puntos mediante sus respectivas geodésicas. Se partirá de la creación de un teselado en el Plano de Poincaré y luego se lo trasladará al modelo del Disco (a través de la isometría), para obtener así una figura similar a la realizada por Escher (4.1), dando fundamentos matemáticos a dicha obra.

La construcción de esta teselación está conformada por triángulos isóceles (la primera línea de estos triángulos está sombreada en la Figura 4.5), donde el lado más grande de un triángulo es el nuevo lado del próximo triángulo. Para entender mejor esta representación la Figura 4.5 muestra los pasos y los triángulos que se forman. Cabe recalcar que el primer paso es sólo una referencia base, ya que todo el plano está cubierto por triángulos de las mismas características.

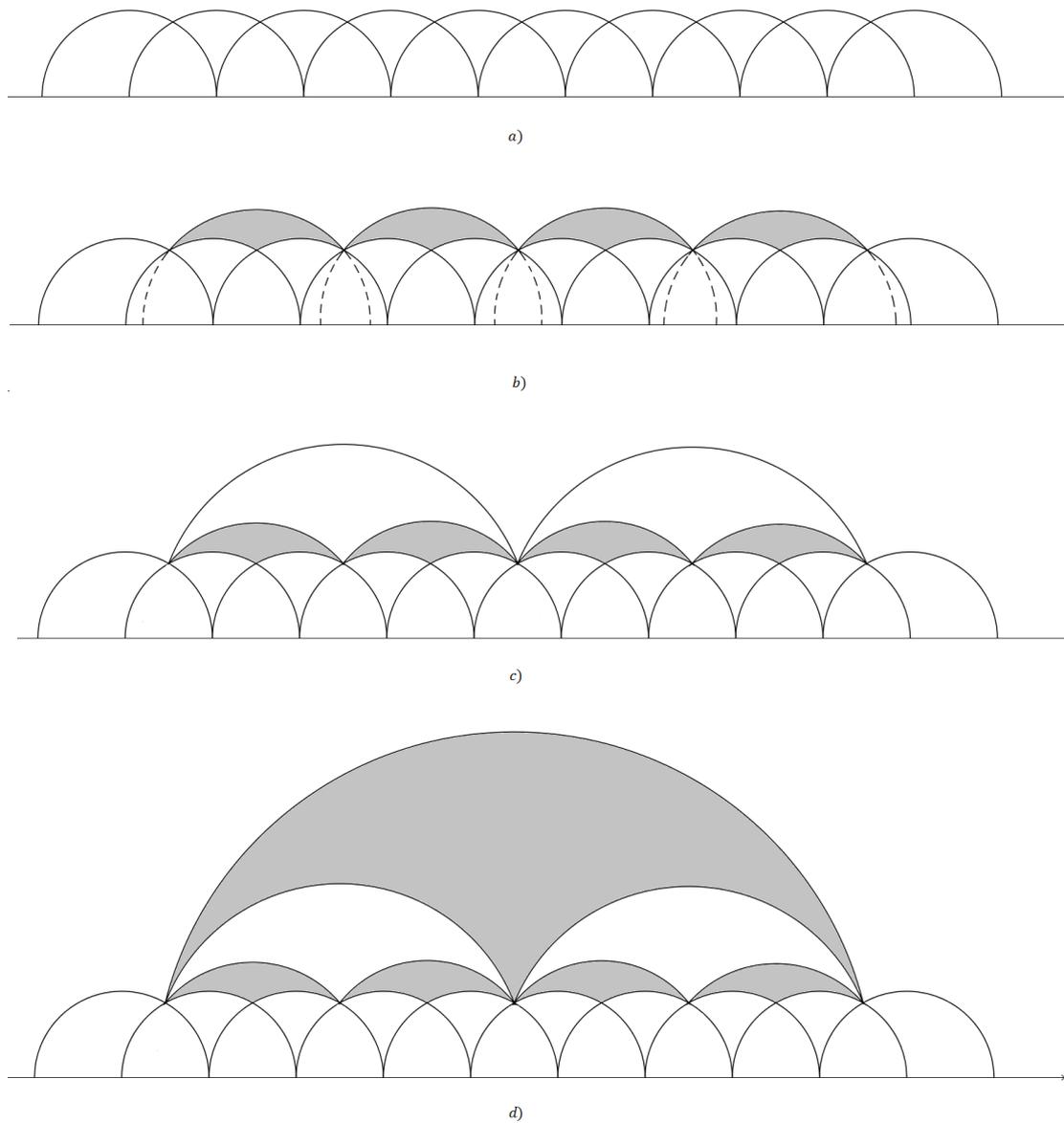


Figura 4.5: Construcción de teselado con triángulos en el plano de Poincaré.

Haciendo este proceso en todo el plano de Poincaré, se obtiene un teselado con

triángulos isóceles como se muestra en la Figura 4.6.

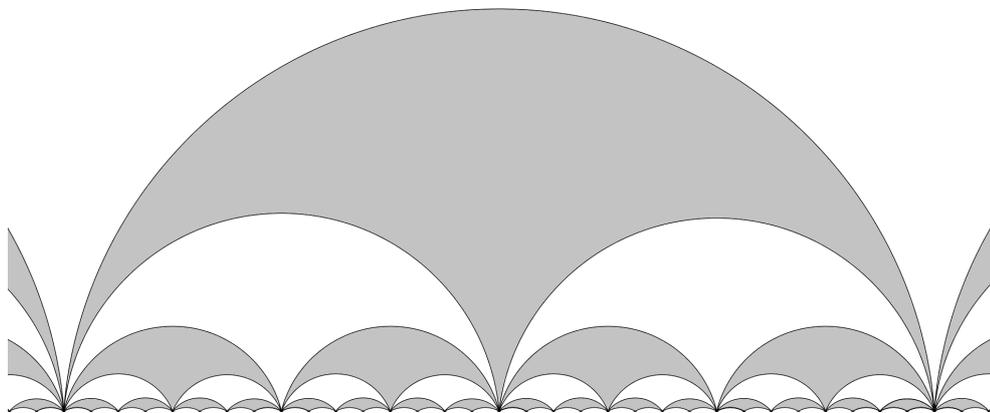


Figura 4.6: Tesselación con triángulos en el plano de Poincaré.

Ahora bien, usando el hecho de que tanto este modelo como el disco de Poincaré son isométricos, se obtiene el teselado equivalente que se muestra en la Figura 4.7.

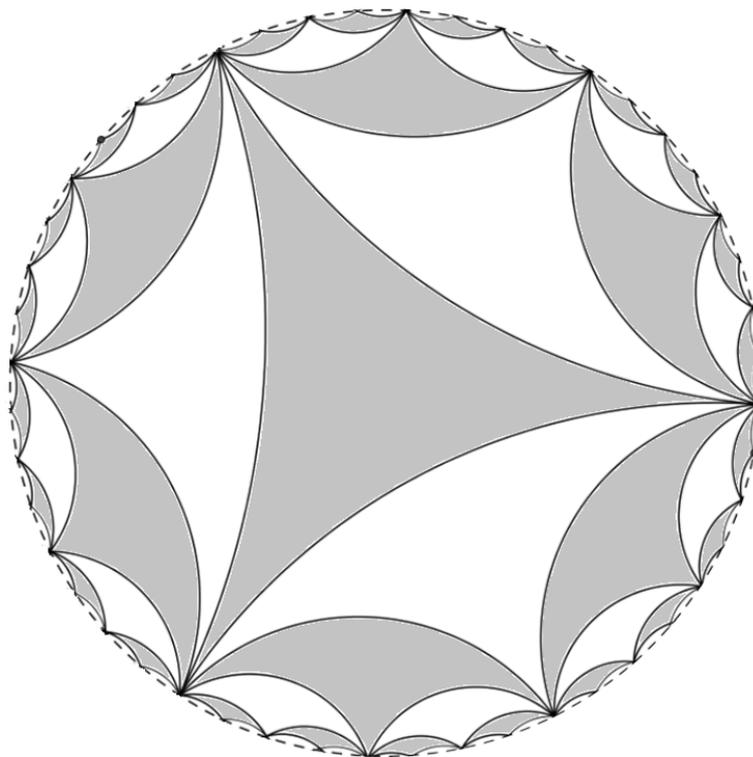


Figura 4.7: Tesselación con triángulos en el disco de Poincaré.

Las teselaciones en el plano hiperbólico que se construyen con polígonos regulares (teselaciones regulares) se pueden escribir como teselaciones  $\{n, k\}$ , donde  $n$  representa el número de vértices del polígono (igual al número de lados del mismo) y  $k$  representa el número de polígonos de  $n$  vértices que se pueden encontrar en cada vértice. Una característica del plano hiperbólico, a comparación del euclídeo es que, en el caso de las teselaciones regulares,  $\mathbb{R}^2$  admite únicamente 3, las cuales son:  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 4\}$  y  $\{6, 3\}$ ; mientras que el plano hiperbólico admite una cantidad infinita de las mismas. Es así que, en el caso particular de la Figura 4.7, en cada vértice de los triángulos existe una infinidad de triángulos. Por tanto, la representación adecuada sería  $\{3, \infty\}$ . Y por otro lado, la Figura 4.1 puede verse como una teselación  $\{6, 4\}$ . De igual manera, el teselado  $\{5, 4\}$ , se ilustra como sigue:

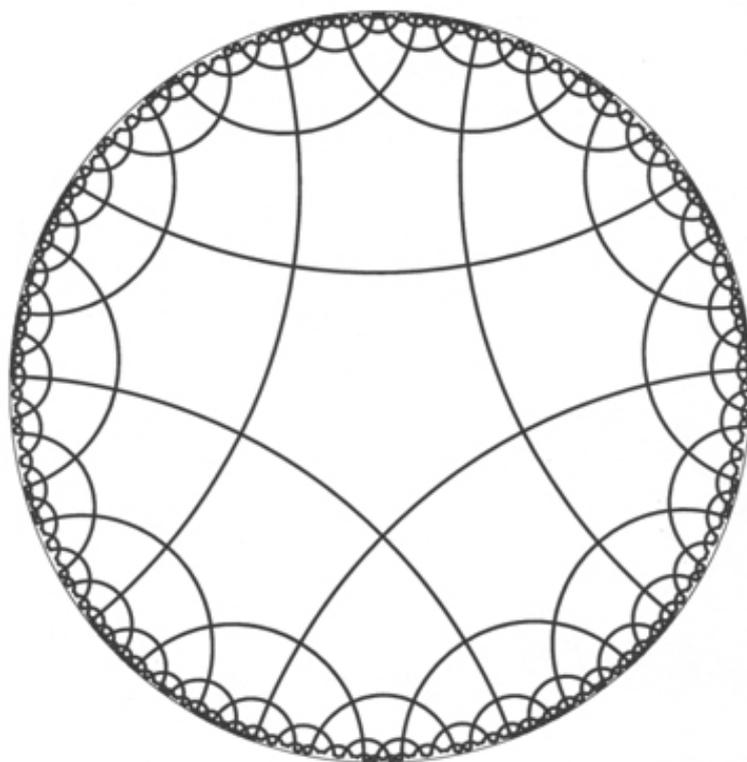


Figura 4.8: Teselación  $\{5, 4\}$  en el disco de Poincaré [21].

Sin embargo, existe otro tipo de teselaciones, denominadas *teselaciones cuasi-regulares*, las mismas que están conformadas por dos polígonos regulares de tal manera que en cada vértice hay al menos uno de cada polígono. La representación para este tipo de teselado es *cuasi*- $\{p, q\}$ , donde  $p$  y  $q$  representan el número de lados de los polígonos en mención. Las Figuras 4.9 y 4.10 muestran gráficamente

estos tipos de cubrimientos.

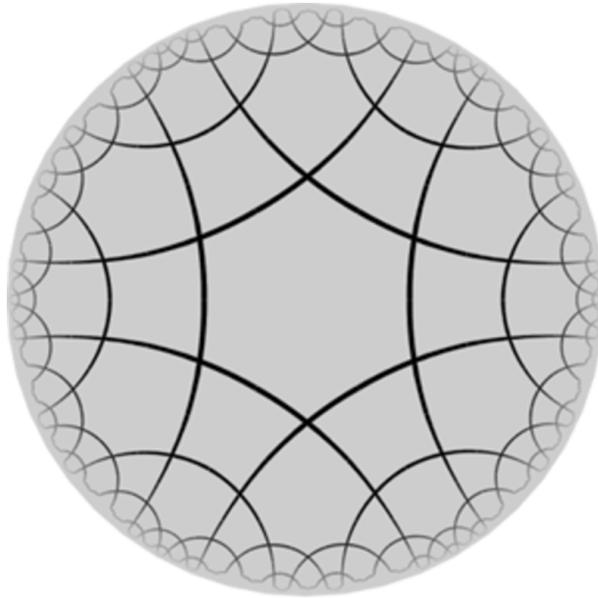


Figura 4.9: Teselación *cuasi*- $\{6, 4\}$  en el disco de Poincaré [11].

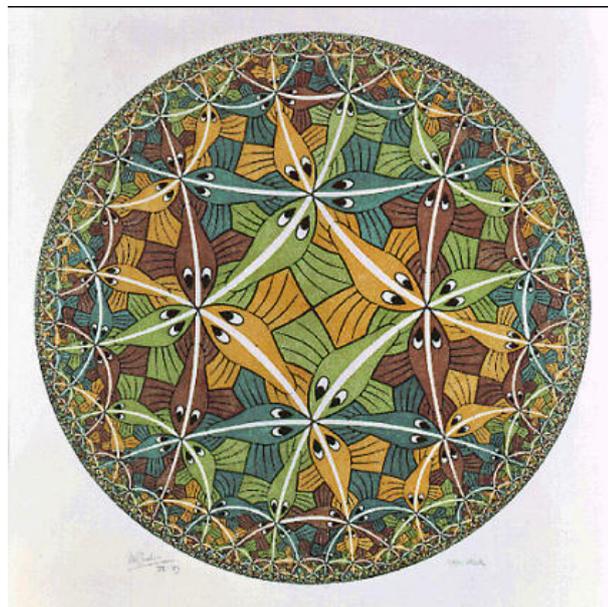


Figura 4.10: “Círculo Límite III”, pintura de M. C. Escher basada en una teselación *cuasi*- $\{4, 3\}$  en el disco de Poincaré [6].

## Conclusiones

En este escrito se hizo un análisis del Plano Hiperbólico y su comportamiento en contraste con la geometría Euclidiana. Para esto, se partió del modelo del Plano de Poincaré y se calcularon sus respectivas geodésicas, las mismas que se utilizaron para verificar el porqué de la falsedad del quinto postulado de Euclides en esta superficie. Incluso se mostró que el número de geodésicas paralelas a una (que denominamos  $C_1$ ) y que pasan por un punto fuera de ésta ( $p$ ) son infinitos. Uno de los cálculos más relevantes que se presentó es la equivalencia entre los 4 modelos que describen de distintas formas a  $\mathbb{H}^2$ , permitiéndonos así usar cualquiera de dichos modelos para un uso en específico y relacionarlo de inmediato con los demás. Éste es el caso del último capítulo, en el que se parte de una teselación en el Plano de Poincaré para poder analizarlo en el Disco de Poincaré, donde se conocen varios resultados similares (como las Figuras de Escher).

Sin embargo, es importante notar que este estudio se enfocó principalmente en superficies, por lo que cada definición, cálculo y resultado obtenido puede ser generalizado para el caso  $n$ -dimensional y encontrar una descripción más completa del Espacio Hiperbólico. Cabe recalcar también que existen varias otras aplicaciones aparte de las mencionadas aquí, por ejemplo la Teoría de la Relatividad Especial está basada en Geometría Hiperbólica.

## Bibliografía

- [1] Barret O' Neill. (2006). *Elementary Differential Geometry*. Segunda Edición Revisada. Department of Mathematics, University of California: Los Angeles.
- [2] Baxandall, P. & Liebeck, H. (2008). *Vector Calculus*. Dover Publications, INC: New York.
- [3] Bliss, G. (1925). *Calculus of Variations*. Carus Mathematical Monographs, 1. LaSalle: Open Court.
- [4] Cannon, J., Floyd, W., Kenyon, R. & Parry, W. (1997). *Hyperbolic Geometry*. MSRI Publications.
- [5] Chamizo, F. (2007). *Álgebra Tensorial*. Geometría IV. Universidad Autónoma de Madrid: Madrid.
- [6] Circle Limit III. (s.f.). Países Bajos: M. C. Escher. Recuperado de <http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iii/>.
- [7] Circle Limit IV. (s.f.). Países Bajos: M. C. Escher. Recuperado de <http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/circle-limit-iv/>
- [8] Courant, R. & Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Volumen 1. Interscience Publishers, INC: New York.
- [9] Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc: New Jersey.
- [10] Do Carmo, M. (1993). *Riemannian Geometry*. Instituto de Matemática Pura y Aplicada: Río de Janeiro.
- [11] Euclidean Patterns in Non-Euclidean Tilings. (s/f). Creative Commons. Recuperado de [http://epinet.anu.edu.au/mathematics/delaney\\_dress](http://epinet.anu.edu.au/mathematics/delaney_dress).

- [12] Flying Fish (No. 73). (s.f.). Países Bajos: M. C. Escher. Recuperado de <http://www.mcescher.com/gallery/back-in-holland/no-73-flying-fish/>
- [13] Goldstein, H. (2008). *Mecánica Clásica*. Editorial REVERTÉ: Barcelona.
- [14] Kobayashi, S. & Nomizu, K. (1996). *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Classics Library Edition: United States of America.
- [15] Lafuente, J. (2010). *Cálculo en Variedades*. Recuperado de <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/own/Manuales/Variedades/cv.pdf>.
- [16] Manuel, L. (2011). *Espacios Métricos*. Matemática Aplicada II. Universidad Nacional de Rosario.
- [17] Márquez, J. (2016). *El Plano Hiperbólico: Historia y Fundamentos*. Universidad de Sevilla: Sevilla.
- [18] Munkres, J. (2000). *Topology*. Segunda Edición. Massachusetts Institute of Technology: United States of America.
- [19] Pámpano, A. (2014). *Geodésicas en Variedades de Riemann*. Universidad de País Vasco: Bilbao.
- [20] Pérez, J. (2008). *Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una sola Variable*. Universidad de Granada: Granada.
- [21] Peterson, I. (2003). *Hyperbolic Five*. Science News, Magazine of the Society for Science and the Public. Recuperado de <https://www.sciencenews.org/article/hyperbolic-five>.
- [22] Pfahler, L. (1964). *Riemannian Geometry*. Princeton University: United States of America.
- [23] Pino, C. (s/f). *Trigonometría Hiperbólica*. Fórmulas de Adición de Ángulos.
- [24] Rudin, W. (1964). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill: United States of America.
- [25] Sánchez, M. & Flores, J. (2003). *Introducción a la Geometría Diferencial de Variedades*. Universidad de Granada: Granada.
- [26] Stillwell, J. (2010). *The Four Pillars of Geometry*. University of San Francisco: California.