

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Ciencias e Ingeniería**

**Las Transformaciones de Möbius y el Problema de Dirichlet**

**Ensayo Académico**

**Darío Andrés Terán Acaro**

**Matemáticas**

Trabajo de titulación presentado como requisito  
para la obtención del título de  
Licenciado en Matemática

Quito, 30 de abril de 2018

# UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

## COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERÍA

### HOJA DE CALIFICACIÓN DE TRABAJO DE TITULACIÓN

#### Las Transformaciones de Möbius y el Problema de Dirichlet

**Darío Andrés Terán Acaro**

Calificación:

Nombre del profesor, Título académico

David Fernando Hervas Ortega, PhD.

Firma del profesor

---

Quito, 30 de abril de 2018

## Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante: \_\_\_\_\_

Nombres y apellidos: Darío Andrés Terán Acaro

Código: 00127141

Cédula de Identidad: 1718488826

Lugar y fecha : Quito, 30 de abril de 2018

## Dedicatoria

*A mis padres José e Isabel, que con su ejemplo y paciencia siempre han logrado ser el pilar fundamental de las definiciones y decisiones de mi vida. Y sin duda alguna, a mi hermano Álvaro, quien siempre ha sido mi compañero de vida.*

*Todo este trabajo no hubiera sido posible sin ellos.*

## Agradecimientos

Le agradezco fundamentalmente a toda la comunidad educativa de la Universidad San Francisco de Quito por haberme permitido una formación profesional óptima y de calidad siempre en busca de nuevas oportunidades y objetivos, y sobre todo por haberme dado una visión distinta del mundo en el que vivimos.

Agradezco a los miembros del departamento de matemática de la USFQ que bajo su dirección pude ser parte de todas las oportunidades que se presentaron a lo largo del camino, y siempre estuvieron dispuestos a colaborar conmigo y educarme de la mejor manera posible.

Gracias a todos. Durante estos años he tenido la dicha de aprender una gran cantidad de cosas, visitar lugares impresionantes, conocer gente increíble, hacer grandes amistades, y sobre todo me he divertido mucho.

# Resumen

En este trabajo se define y estudia las transformaciones de Möbius desde un enfoque geométrico y algebraico. Se muestra las características más fundamentales de dichas transformadas mediante el estudio de funciones más simples que se denominan transformaciones fundamentales demostrando que las transformaciones de Möbius son una composición de éstas para luego sumarlas al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, en particular a la resolución del problema de Dirichlet.

**Palabras Clave:** Transformaciones de Möbius, Problema de Dirichlet, Transformaciones Bilineales.

# Abstract

In this paper, the transformations of Möbius are defined and studied from a geometric and algebraic approach, showing the most fundamental characteristics of these transformations by working on the fundamental transformations, and then proving that transformations of Möbius are a composition of them. Then Möbius transformations are added to the study of partial differential equations, in particular to the resolution of the Dirichlet's problem.

**Keywords:** Möbius Transformations, Dirichlet's Problem, Bilinear Transformations

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>9</b>
<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. La Esfera de Riemann</b>	<b>11</b>
1.1. La Esfera . . . . .	11
1.2. La compactitud de $\Sigma$ . . . . .	14
1.3. Comportamiento de las funciones en $\infty$ . . . . .	14
<b>2. Transformaciones de Möbius</b>	<b>16</b>
2.1. Preliminares . . . . .	16
2.1.1. Círculos en $\Sigma$ . . . . .	16
2.1.2. Transformaciones . . . . .	17
2.2. Transformaciones de Möbius . . . . .	25
2.2.1. El Grupo $M_o(\Sigma)$ . . . . .	26
2.2.2. Nociones Geométricas de las Transformaciones de Möbius . . . . .	27
2.2.3. Representación Matricial del Grupo $M_o(\Sigma)$ . . . . .	28
2.2.4. El Teorema Fundamental de las Transformaciones de Möbius . . . . .	30
<b>3. Problemas de Dirichlet</b>	<b>34</b>
3.1. El problema de Dirichlet . . . . .	34
3.1.1. El problema de Dirichlet en una Franja Infinita . . . . .	35
3.1.2. El problema de Dirichlet en un Anillo . . . . .	36
3.2. Solución al problema de Dirichlet en dominios complejos . . . . .	38
Conclusiones . . . . .	47
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

## Índice de figuras

1.1. Proyección Estereográfica $\pi$ . . . . .	12
2.1. Rotación de $\Sigma$ por un ángulo $\theta$ . . . . .	18
2.2. Imagen de $\Sigma$ mediante $J$ . Se observa como se han invertido $0$ y $\infty$ . . . . .	19
2.3. Imagen de $\Sigma$ mediante una traslación $T_b(z) = z + b$ . . . . .	20
2.4. Imagen de $\Sigma$ mediante la dilatación $D_r(z)$ . . . . .	21
2.5. Proyección en 2 dimensiones de la acción de $D_r(z)$ en $\Sigma$ . . . . .	22
2.6. Imagen de $\Sigma$ mediante una transformación bilineal $M$ . . . . .	28
3.1. Problema de Dirichlet en una franja infinita horizontal . . . . .	35
3.2. Problema de Dirichlet en un anillo delimitado por dos círculos concéntricos . . . . .	36
3.3. Problema de Dirichlet en el dominio $D$ limitado por $l_1$ y $C$ . . . . .	39
3.4. Plano $w$ . Problema de Dirichlet equivalente en el dominio $D'$ . . . . .	40
3.5. Problema de Dirichlet en el dominio $D$ con borde $C_1$ y $C_2$ . . . . .	41
3.6. Plano $w$ . Problema de Dirichlet equivalente en el dominio $D_1$ bajo la transformación $S(z)$ . . . . .	42
3.7. Problema de Dirichlet en el dominio $D$ delimitado por $C_1$ y $C_2$ . . . . .	43
3.8. Plano $w$ . Problema de Dirichlet equivalente en el dominio $D_1$ delimitado por $C_3$ y $C_4$ . . . . .	45

# Introducción

Si se planteara la tarea de identificar a la matemática con una sola palabra muchos conceptos aparecerían de inmediato como candidatos idóneos. Sin embargo, el concepto función me parece ser el más adecuado porque en base a las funciones y sus aplicaciones ha sido posible conectar cada parte de la matemática ya no solo por objetos, sino también mediante las relaciones entre estos.

Este trabajo se centra en el estudio de las transformadas de Möbius, un tipo especial de funciones definidas sobre el plano complejo extendido  $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , cuyas propiedades geométricas y algebraicas las dotan de una versatilidad muy particular que puede evidenciarse en las múltiples aplicaciones de las mismas en distintos temas. Como es de esperarse, es imposible entender las transformadas de Möbius sin una idea clara de su dominio de definición, y es por ello que en el primer capítulo se desarrolla un tratado adecuado de lo que se conoce como el plano complejo extendido  $\Sigma$ . Luego de esto, se procede a definir y estudiar a las transformadas de Möbius desde un punto de vista geométrico y uno algebraico, siempre cuidando que estos no se impongan el uno sobre el otro, sino que coexistan en armonía para un mejor entendimiento de su estrecha relación.

Finalmente, con el objetivo de mostrar la versatilidad de las transformaciones de Möbius, se presenta la solución al problema de Dirichlet en lo que denominaremos dominios complejos. A nivel de pregrado no es común el estudio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, por lo tanto el problema de Dirichlet puede resultar en extremo complejo resolverlo a este nivel. Sin embargo, se mostrará que las transformaciones de Möbius pueden reducir la complejidad de este proceso mediante un tratamiento adecuado del dominio de definición de la ecuación de Laplace.

# Capítulo 1

## La Esfera de Riemann

Sin duda alguna, trabajar sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$  representa una gran ventaja para el análisis matemático debido a todas sus propiedades. Entre las más populares se tiene que  $\mathbb{C}$  es algebraicamente cerrado, y además puede ser identificado geoméricamente con  $\mathbb{R}^2$ , por lo que a veces recibe el nombre de plano complejo. Sin embargo, su mayor ventaja se presenta como dominio de definición de funciones diferenciables. Pese a todo esto, se reconoce que trabajar en  $\mathbb{C}$  también tiene sus ventajas como por ejemplo, funciones como  $\frac{1}{z}$  no se encuentran definidas para  $z = 0$ , existen secuencias que no tienen subsecuencias convergentes, lo que es más importante aún,  $\mathbb{C}$  no es compacto [4]. Y para efecto de estudios de algunas funciones, la compactitud de un conjunto puede representar grandes ventajas para la prueba de ciertos resultados.

### 1.1. La Esfera

Con el objetivo de evitar las desventajas presentadas en la introducción de este capítulo, se define lo que se conoce como el plano complejo extendido o esfera de Riemann  $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , donde  $\infty$  debe ser entendido como un punto adicional que no pertenece a  $\mathbb{C}$  cuyo nombre es el punto en el infinito, o solo el infinito [4]. Como se presenta a continuación,  $\Sigma$  puede ser entendido geoméricamente como una esfera, y es de ahí de donde obtiene su nombre.

Se empieza por considerar la 2-esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , donde

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

y por identificar cada punto  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  con un punto en el plano  $C : x_3 = 0 \subset \mathbb{R}^3$  mediante

$\beta : C \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $z = \beta(x, y, 0)$ . Luego, se denota a  $(0, 0, 1) \in S^2$  como  $N$ , y la proyección estereográfica  $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow C$ , la cual consiste en identificar cada punto  $P \in C$  con un punto  $P_1 \in S^2$  mediante la recta que une a  $N$  y a  $P$ , donde el punto de intersección entre  $S^2$  y dicha recta, que no es  $N$ , es el punto  $P_1$ . Esto permitirá identificar biyectivamente puntos en  $S^2 - \{N\}$  con puntos en  $\mathbb{C}$  al hacer  $\beta(\pi(\alpha, \gamma, \xi))$ . Esta idea se la puede visualizar en la Figura 1.1. y de ahora en adelante cada que refiera a  $\pi$  será a la composición  $\beta \circ \pi$ .

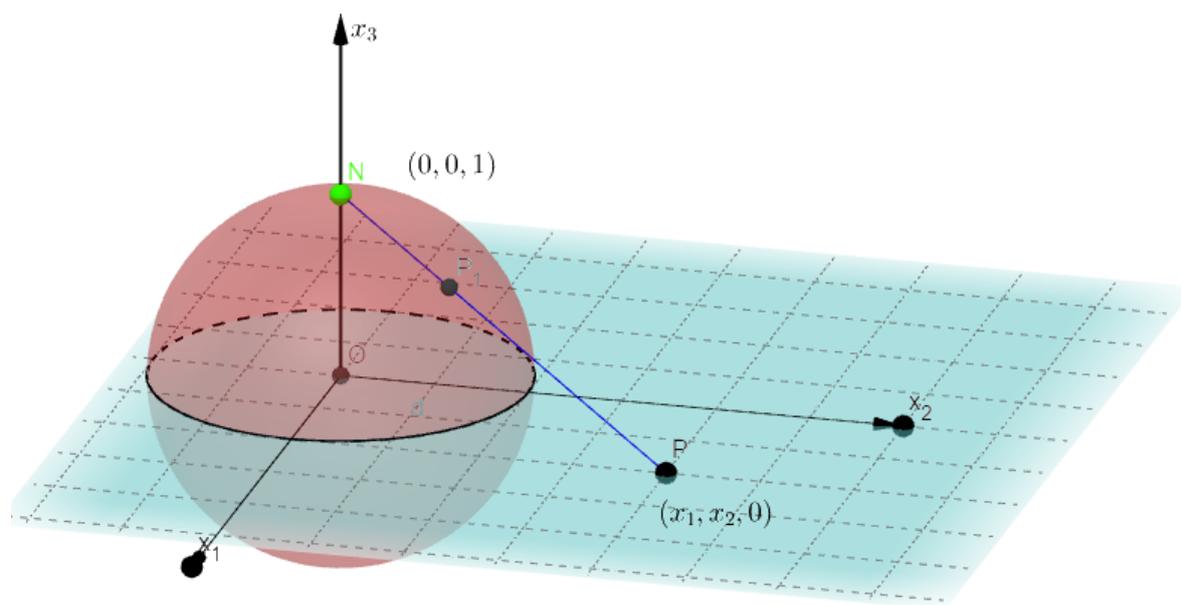


Figura 1.1: Proyección Estereográfica  $\pi$

Sin embargo,  $\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  no es simplemente una función biyectiva, pues el siguiente argumento mostrará que  $\pi$  es también un homeomorfismo entre  $S^2 - N$  y  $\mathbb{C}$ . Para esto, se define las coordenadas de  $P_1 = (x, y, z) \in S^2$ , y de  $P = (\alpha, \xi, 0) \in C$ , y se toma a la Figura 1.1 como guía. Entonces, claramente el triángulo  $\triangle OPN$  es semejante al triángulo  $\triangle NP_1Q$  ( $\triangle OPN \simeq \triangle NP_1Q$ ), donde  $Q = (0, 0, z)$ . Luego, mediante las proyecciones de ambos triángulos en los planos  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 0$  simultáneamente se obtiene las siguientes ecuaciones debido a su semejanza

$$\frac{\xi}{y} = \frac{1}{1-z} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \alpha = \frac{x}{1-z}, \quad \xi = \frac{y}{1-z}$$

entonces

$$\pi(P_1) = \left( \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \right) = \beta(P) \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

En la ecuación 1.1 claramente se observa que  $\pi$  es continua, pues tanto la parte real como la imaginaria de  $\beta(P)$  son continuas, debido a que su dominio no contiene a  $N = (0, 0, 1)$ . A más de ello, la misma ecuación también es una prueba de la inyectividad de  $\pi$ . Ahora, si la atención se centra en la relación  $\triangle OPN \simeq \triangle NP_1Q$  se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{1}{1-z} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1-z)^2}} \Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{\alpha^2 + \xi^2 + 1}{x^2 + y^2 + (1-z)^2}$$

pero  $P_1 \in S^2$ , luego  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , por lo tanto

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{\alpha^2 + \xi^2 + 1}{2-2z} \Rightarrow 1-z = \frac{2}{\alpha^2 + \xi^2 + 1}$$

luego con las relaciones para  $\alpha$  y  $\xi$  definidas para  $\pi$  en la ecuación 1.1 se obtiene que

$$x = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2 + 1}, \quad y = \frac{2\xi}{\alpha^2 + \xi^2 + 1}, \quad z = \frac{\alpha^2 + \xi^2 - 1}{\alpha^2 + \xi^2 + 1}$$

con lo cual es posible definir la función  $\pi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{N\}$ , de la siguiente manera

$$\pi^{-1}(\alpha + i\xi) = \left( \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2 + 1}, \frac{2\xi}{\alpha^2 + \xi^2 + 1}, \frac{\alpha^2 + \xi^2 - 1}{\alpha^2 + \xi^2 + 1} \right) = P_1 \quad (1.2)$$

donde claramente se observa que  $\pi^{-1}$  es continua e inyectiva, y más aun es la inversa de  $\pi$  debido a su proceso de definición, lo que termina por demostrar la biyectividad de  $\pi$ . Con esto es posible concluir que, en efecto,  $\pi$  es un homeomorfismo.

Ahora es preciso recordar a la esfera de Riemann  $\Sigma$ , porque una vez que se ha visto que  $\pi$  es un homeomorfismo lo que se hace es extender su dominio de definición de  $S^2 - \{N\}$  a toda la esfera  $S^2$ , y en consecuencia su rango de  $\mathbb{C}$  a  $\Sigma$ , y para lograrlo se define  $\pi(N) = \infty$  y  $\pi^{-1}(\infty) = N$ , lo cual claramente no altera la biyectividad de  $\pi$ . De ahora en adelante siempre que se haga referencia a  $\pi$ , será a su extensión  $\pi : S^2 \rightarrow \Sigma$ .

## 1.2. La compactitud de $\Sigma$

La parte fundamental de este trabajo se centra sobre el estudio de un tipo de funciones particulares definidas sobre  $\Sigma$  llamadas transformaciones de Möbius. Sin embargo, antes de empezar a trabajar sobre cualquier tipo de funciones sobre  $\Sigma$ , es importante definirle una topología. Y es aquí donde  $\pi$  adquiere su mayor importancia.

**Definición 1.2.1.** *Un conjunto  $G \subseteq \Sigma$  es abierto en  $\Sigma$  siempre que  $\pi^{-1}(G) \subseteq S^2$  sea abierto en  $S^2$ , donde la topología de  $S^2$  es la usual inducida por  $\mathbb{R}^3$  [4].*

La definición 1.2.1 tiene como consecuencia directa la continuidad de  $\pi$ , pues es fundamentalmente la definición de continuidad presente en [7]. Además con este último resultado queda demostrado que  $\pi$  es un homeomorfismo. A partir de esto, es claro cómo las características topológicas y algebraicas de  $S^2$  son transferidas a  $\Sigma$  y viceversa, y el porqué del nombre de  $\Sigma$ , de hecho, en [4] se narra como conveniente indentificar a  $S^2$  y  $\Sigma$  como estructuras idénticas, sugerencia que será adoptada en este trabajo de ahora en adelante.

Hasta ahora la construcción de  $\pi$  nos deja como resultado fundamental que  $\Sigma$  es un conjunto compacto, razón por la cual a veces se llama a la esfera de Riemann la compactación de un punto de  $\mathbb{C}$  [8]. Ahora el punto  $\infty$  se encuentra en igualdad de condiciones que cualquier otro punto de  $\mathbb{C}$ , es decir, ya se puede definir vecindades alrededor de  $\infty$  e incluso conjuntos abiertos que lo contengan, y aunque se requiera cierto cuidado para desarrollar la teoría de funciones de una variable compleja sobre  $\Sigma$ , es fácil anticipar que las imagenes de los polos de cualquier función ahora cobran un sentido más intuitivo al poder ser manejadas sobre la esfera de Riemann. En particular lo que se ha logrado es dar una perspectiva geométrica más amplia a  $\mathbb{C}$ , y a la teoría de funciones meromorfas [8], la cual se menciona en la siguiente sección.

## 1.3. Comportamiento de las funciones en $\infty$

Una vez que se ha extendido  $\mathbb{C}$  a  $\Sigma$ , es importante desarrollar conceptos y comportamientos análogos de las funciones de variable compleja para  $z = \infty$ . En particular, se centrará toda la atención en las funciones meromorfas. Es importante recalcar que en adelante siempre que se mencione a una función su dominio será un subconjunto abierto de  $\Sigma$  a menos que se indique lo contrario.

De forma intuitiva las funciones meromorfas son funciones con singularidades aisladas que son polos. En [8], se define formalmente a una función  $f$  como meromorfa sobre un abierto  $D \subseteq \Sigma$  si existe una secuencia de puntos  $\{z_n\}$  en  $D$  que no tiene un punto límite en  $D$  y cumple lo siguiente:

1. la función  $f$  es holomorfa en  $D - \{z_n\}$
2.  $f$  tiene polos en  $\{z_n\}$

Esta definición es bastante clásica cuando  $D$  no contiene al infinito, pues  $D$  estará plenamente contenido en  $\mathbb{C}$ . Sin embargo, si  $D$  es una vecindad de  $\infty$  que contiene a  $\infty$ , o lo que es lo mismo  $f$  se encuentra definida para  $|z|$  suficientemente grande ( $|z| \rightarrow \infty$ ), entonces será necesario desarrollar una definición análoga. Para ello, en [4] se describe que se utiliza la función  $g(z) = \frac{1}{z}$  con la convención de que  $g(0) = \infty$ , y  $g(\infty) = 0$ . Luego,  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ , siempre y cuando dicho límite exista, lo que es lo mismo a  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} f \circ g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$ . Entonces, se dirá que  $f$  es meromorfa en  $\infty$  si  $f \circ g$  es meromorfa en 0.

Una consecuencia importante de esta última extensión es que ahora las funciones meromorfas pueden ser entendidas como mapeos de  $S^2$  en si misma, y se reducen a las funciones racionales como detalla [8], en su teorema 3.4.

## Capítulo 2

### Transformaciones de Möbius

En este capítulo se estudia un tipo de funciones definidas sobre  $\Sigma$  conocidas como Transformaciones de Möbius. En [3] se detalla que su importancia radica en su cualidad de transformar rectas y círculos en rectas y círculos, aunque no necesariamente en ese orden. Y esta versatilidad brinda gran ventaja en aplicaciones donde se requiere transformar dominios, o incluso tener una visión geométrica diferente.

#### 2.1. Preliminares

Antes de empezar a trabajar en detalle a las Transformaciones de Möbius se definirán algunos conceptos indispensables, que ayudarán al estudio de dichas transformaciones, y permitirán un flujo adecuado de toda la siguiente sección.

##### 2.1.1. Círculos en $\Sigma$

Los círculos euclidianos en  $\mathbb{C}$  son bastante conocidos, pues son conceptos indispensables en el estudio de la geometría. Ahora es necesario extender dicho concepto a  $\Sigma$ , y aunque parezca una tarea complicada, se verá que es bastante sencilla si se usa la herramienta adecuada, que como puede predecirse es  $\pi$  nuevamente.

En [5], se define como círculo en  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  a la intersección de un plano  $\Pi$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $S^2$  con la condición de que  $|\Pi \cap S^2| > 1$ , lo cual significa que el plano  $\Pi$  tiene que intersectar a la esfera  $S^2$  en más de un punto, es decir que los planos tangentes a  $S^2$  no son considerados. Luego, se define como un círculo en  $\Sigma$  a la imagen de cualquier círculo en  $S^2$  mediante  $\pi$ . Con esto en mente, sea  $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$  un plano tal que  $\Pi \cap S^2$  es un círculo en  $S^2$ , y

$$\Pi : \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$$

al usar la ecuación 1.2 se obtiene que

$$x_1 = \frac{2x}{z\bar{z} + 1}; \quad x_2 = \frac{2y}{z\bar{z} + 1}; \quad x_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}$$

donde  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ . Al sustituir este resultado en la ecuación de  $\Pi$  se obtiene que

$$\frac{2x\alpha}{z\bar{z} + 1} + \frac{2y\beta}{z\bar{z} + 1} + \frac{\gamma(z\bar{z} - 1)}{z\bar{z} + 1} = \delta \Rightarrow 2x\alpha + 2y\beta + \gamma(|z|^2 - 1) = \delta(|z|^2 + 1)$$

luego, si se define  $a = \gamma - \delta$ ,  $b = \alpha - i\beta$ , y  $c = -\gamma - \delta$ , se tiene que la ecuación de  $\Pi$  en  $\Sigma$  es

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \quad [5] \quad (2.1)$$

De esto se obtiene que si  $a = 0$ , entonces lo que tendremos en  $\mathbb{C}$  será una línea recta  $\Lambda \cup \{\infty\}$ , o lo que es equivalente, un círculo en  $S^2$  que pasa por  $N$ , pues  $\gamma = \delta$ . Si por el contrario,  $a \neq 0$ , entonces el círculo no pasa por  $N$  en  $S^2$ , y en  $\mathbb{C}$  será un círculo euclideo típico cuyo centro es  $\frac{-\alpha}{a} + \frac{-\beta i}{a}$  con radio  $\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - ac}{a^2}}$ , pues la ecuación 2.1 es equivalente a la siguiente ecuación

$$\left(x + \frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{a}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - ac}{a^2} \quad [5].$$

En conclusión, los círculos en  $\Sigma$  son de dos tipos, círculos euclideos típicos, o por el contrario rectas a las cuales se les añade el punto  $\infty$ , es por eso que muchas veces se hace referencia a los círculos en  $\Sigma$  como clines [2].

### 2.1.2. Transformaciones

En esta parte del presente capítulo centraremos nuestro estudio sobre las transformaciones, que como se narra en [2] son funciones principalmente, cuyo uso fundamental es el traslado de objetos de un lugar a otro, y en efecto esto conlleva a la definición de nuevas geometrías. Su definición formal se encuentra detallada en la definición 2.1.1, de donde es claro que  $A = \Sigma$ , y las transformaciones que se va a discutir tienen como papel fundamental generar a las transformaciones de Möbius [4], las cuales son nuestro objeto de estudio principal.

**Definición 2.1.1.** Una transformación de un conjunto  $A$  en si mismo es una función  $T : A \rightarrow A$  de tal manera que  $T$  es biyectiva [2].

## Rotaciones

Las funciones  $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$  con  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $z \in \Sigma$  son conocidas como rotaciones [2]. Si se toma  $z_1, z_2 \in \Sigma$  y se supone que  $R_\theta(z_1) = R_\theta(z_2)$  entonces se tiene que  $e^{i\theta}z_1 = e^{i\theta}z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$ , por lo tanto  $R_\theta$  es inyectiva; de la misma manera si se toma un  $z \in \Sigma$ , y se usa la representación polar de  $z = re^{i\phi}$  se tiene que claramente  $z$  es la imagen de  $z_1 = re^{i(\phi-\theta)}$ , y en efecto  $R_\theta$  es sobreyectiva, y por lo tanto biyectiva con lo cual se concluye que  $R_\theta$  es una transformación que mantiene fijos a  $0$  y  $\infty$ . En [4], se detalla que esta transformación es equivalente a rotar a la esfera  $S^2$  un ángulo  $\theta$  alrededor del eje que une a  $N$  y  $(0, 0, 0)$  y luego proyectarla mediante  $\pi$ , lo cual se muestra en la figura 2.1.

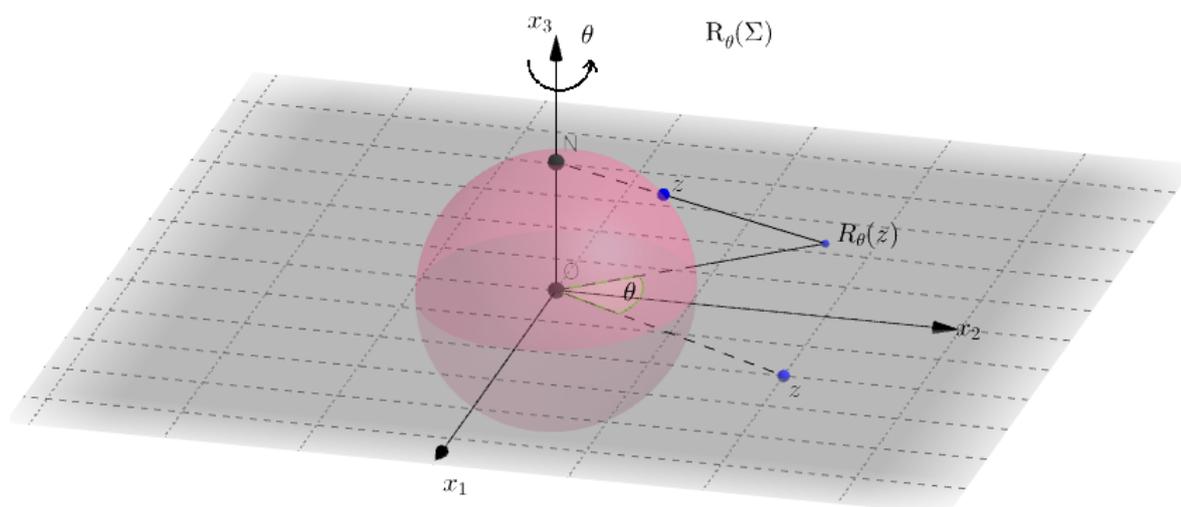


Figura 2.1: Rotación de  $\Sigma$  por un ángulo  $\theta$

**La transformación  $J(z) = \frac{1}{z}$**

La función  $J(z) = \frac{1}{z}$  fue utilizada en el capítulo anterior para extender las nociones de funciones meromorfas en  $\infty$ . Como se puede observar,  $J$  es inyectiva pues si  $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} \Rightarrow z_1 = z_2$ , y de la misma forma se observa que  $J$  es sobreyectiva pues cualquier  $z \in \Sigma$  es la imagen de  $\frac{1}{z}$  mediante  $J$ , por lo tanto  $J$  es una transformación. Ahora para entender su efecto geométrico lo que se hace es tomar un punto  $p = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$  distinto del infinito y de  $(0, 0, -1)$ , y se calcula  $\pi^{-1}J\pi(p)$

[4]. Entonces en base a la ecuación 1.1 se tiene que

$$\pi(p) = \left( \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \right) = z$$

$$J(\pi(p)) = \frac{1}{\frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}} = \frac{\frac{x_1}{1-x_3} - i \frac{x_2}{1-x_3}}{\left( \frac{x_1}{1-x_3} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{1-x_3} \right)^2} = \frac{x_1(1-x_3)}{x_1^2 + x_2^2} - i \frac{x_2(1-x_3)}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\Rightarrow J(\pi(p)) = \frac{x_1}{1+x_3} - i \frac{x_2}{1+x_3}$$

por lo tanto al usar la ecuación 1.2 se obtiene que

$$\pi^{-1}(J(\pi(p))) = \left( \frac{2x_1(1+x_3)^2}{(1+x_3)(x_1^2+x_2^2+(1+x_3)^2)}, \frac{-2x_2(1+x_3)^2}{(1+x_3)(x_1^2+x_2^2+(1+x_3)^2)}, \frac{x_1^2+x_2^2-(1+x_3)^2}{x_1^2+x_2^2+(1+x_3)^2} \right)$$

$$\pi^{-1}(J(\pi(p))) = \left( \frac{2x_1(1+x_3)}{x_1^2+x_2^2+(1+x_3)^2}, \frac{-2x_2(1+x_3)}{x_1^2+x_2^2+(1+x_3)^2}, \frac{x_1^2+x_2^2-(1+x_3)^2}{x_1^2+x_2^2+(1+x_3)^2} \right)$$

$$\pi^{-1}(J(\pi(p))) = \left( \frac{2x_1(1+x_3)}{2+2x_3}, \frac{-2x_2(1+x_3)}{2+2x_3}, \frac{-2x_3(x_3+1)}{2+2x_3} \right) = (x_1, -x_2, -x_3)$$

con lo cual se ha mostrado que  $J$  corresponde a la rotación de la esfera  $\pi$  radianes teniendo como eje de rotación a  $x_1$ . A más de eso, se ve que esta rotación concuerda con la convención adoptada de  $J(\infty) = 0$  y  $J(0) = \infty$ , y que los únicos puntos fijados son 1 y -1. En la figura 2.2 se muestra un gráfico de la acción de  $J$  en  $\Sigma$ .

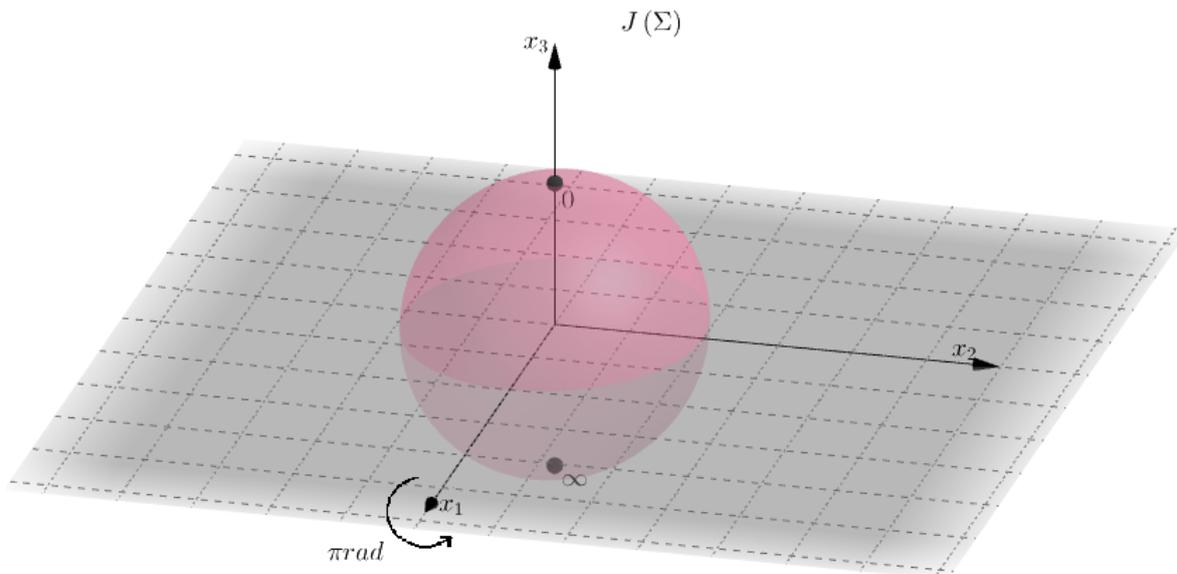


Figura 2.2: Imagen de  $\Sigma$  mediante  $J$ . Se observa como se han invertido 0 y  $\infty$

## Traslaciones

Las traslaciones son funciones  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$  de la forma  $T_b(z) = z + b$  donde  $b \in \mathbb{C}$  es una constante [2]. Se requiere que  $b \neq \infty$  debido a que en ese caso se obtendría que  $T$  es una función constante de tal forma que  $T(z) = \infty$  para todo  $z \in \Sigma$ . Nuevamente  $T$  es una transformación pues su inyectividad se demuestra a partir de que si  $z_1 + b = z_2 + b \rightarrow z_1 = z_2$ , y su sobreyectividad parte del hecho de que todo  $z \in \Sigma$  es la imagen de  $z - b \in \Sigma$ . En este caso el único punto fijo de cualquier  $T$  es  $\infty$ , y geoméricamente lo que hace es desplazar el centro de la esfera y luego proyectarla nuevamente mediante  $\pi$ . Para llegar a dicha observación se recuerda la identificación de  $S^2$  con  $\Sigma$ , y se nota que el  $0 \in \mathbb{C}$  corresponde a la punto de intersección entre la recta que une  $N$  y  $-N$  con  $S^2$ , de tal forma que dicho punto no sea  $N$ , es decir el  $0$  y  $-N$  son en efecto el mismo punto desde esta perspectiva. Ahora bien, si  $T_b(z) = z + b$  es cualquier traslación entonces  $T_b(0) = b$ , por lo que ahora se requiere que la línea que une  $N$  y  $-N$  (el  $0$  inicial) interseque al plano  $C : x_3 = 0$  en  $b$ , y ya que se requiere que  $\infty$  sea invariante bajo  $T$  la única opción posible es trasladar el centro de  $S^2$  de  $0 \in \mathbb{C}$  a  $b$  manteniendo su orientación. En la figura 2.3 se muestra la acción de  $T$  sobre  $\Sigma$ .

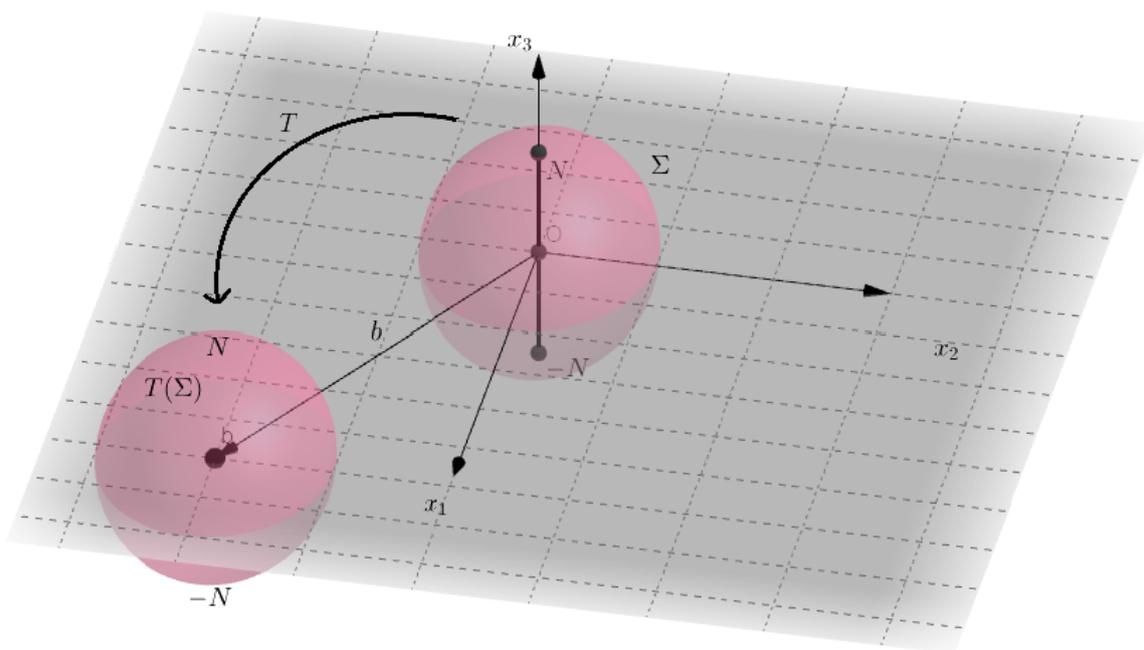


Figura 2.3: Imagen de  $\Sigma$  mediante una traslación  $T_b(z) = z + b$

## Dilataciones o Contracciones

Las dilataciones o contracciones son funciones  $D_r : \Sigma \rightarrow \Sigma$  de la forma  $D_r(z) = rz$  donde  $r > 0$  [2]. Lo que hacen geoméricamente es dilatar o contraer distancias de tal manera que fija el 0 y el  $\infty$ , así como también la dirección de los elementos de  $\mathbb{C}$  por lo que al usar la identificación de  $S^2$  con  $\Sigma$  lo que hace es mover a la esfera  $S^2$  a lo largo de la recta que pasa por  $N$  y  $-N$ . Es posible comprobar de forma inmediata que cualquier dilatación es una transformación pues si  $rz_1 = rz_2 \rightarrow z_1 = z_2$ , y debido a que  $r > 0$ , cualquier  $z \in \mathbb{C}$  es la imagen de  $\frac{z}{r} \in \mathbb{C}$ . En la imagen 2.4 se muestra las nociones geométricas de la acción de  $D_r$  en  $\Sigma$ .

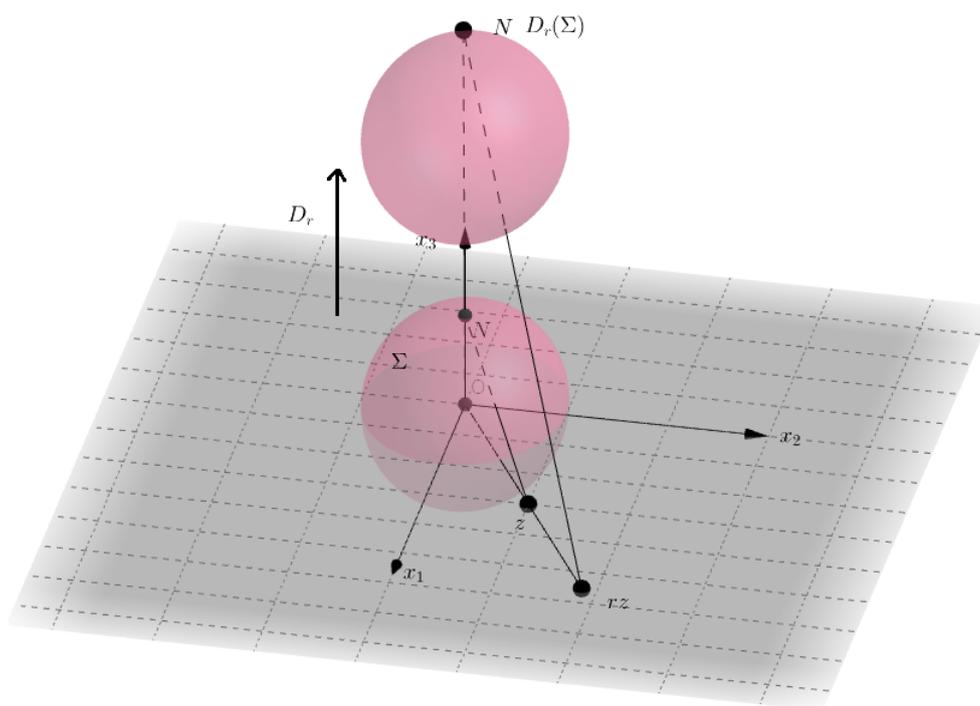


Figura 2.4: Imagen de  $\Sigma$  mediante la dilatación  $D_r(z)$

La acción de cualquier  $D_r$  parte naturalmente de los conceptos y relaciones de semejanza entre triángulos, y a partir de ellos es posible calcular exactamente cuanto debe subir o bajar la esfera a lo largo de  $x_3$  para que mediante su proyección  $\pi$  se obtenga  $D_r$ .

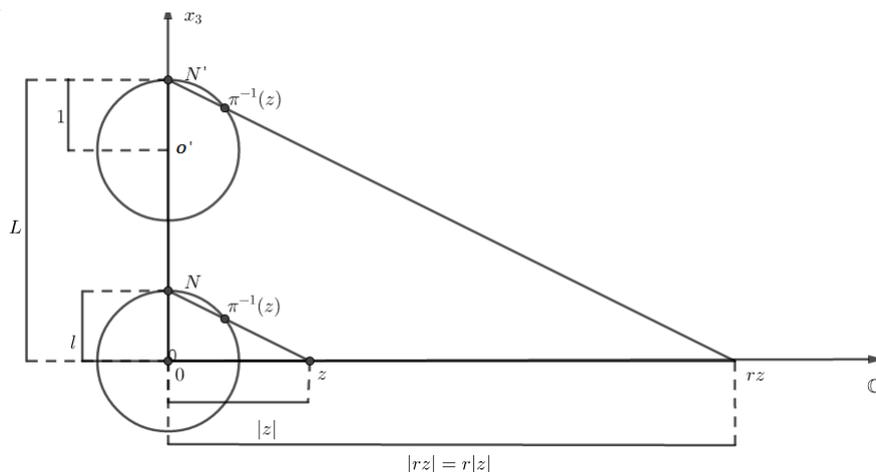


Figura 2.5: Proyección en 2 dimensiones de la acción de  $D_r(z)$  en  $\Sigma$

En la figura 2.5 se tiene que el triángulo  $\triangle OzN \simeq \triangle ON'rz$ , por lo tanto si se llama  $d$  a la distancia que se debe mover  $S^2$  se obtiene que

$$\frac{L}{l} = \frac{r|z|}{|z|} \Rightarrow L = r \Rightarrow d + 1 = r \Rightarrow d = r - 1$$

con lo que es posible concluir que si  $r > 1$  entonces  $S^2$  se moverá hacia arriba y por lo tanto  $D_r$  será una dilatación, y si por el contrario  $r < 1$  la esfera se moverá hacia abajo y  $D_r$  será una contracción. Las cuatro transformaciones que se ha estudiado hasta ahora tomaran el nombre de transformaciones fundamentales, y a más de una perspectiva geométrica cuentan con propiedades indispensables que se resumen en los siguientes teoremas.

**Teorema 2.1.1.** *Las transformaciones fundamentales mapean círculos en  $\Sigma$  (clines) a círculos en  $\Sigma$  [2].*

*Demostración.* La ecuación 2.1 es la ecuación general de una cline en  $\Sigma$ , entonces supongamos que  $\Gamma$  es cualquier cline de tal forma que

$$\Gamma : \quad az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \quad (a, c \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{C})$$

Luego se nota que las dilataciones, rotaciones, traslaciones o cualquier composición de éstas pueden ser descritas de forma general mediante la siguiente ecuación

$$T(z) = mz + n \quad (m, n \in \mathbb{C})$$

entonces si  $w = mz + n$ , y  $z \in \Gamma$  se tiene que  $z = \frac{w - n}{m}$ , y

$$a \frac{w - n}{m} \left( \frac{\overline{w - n}}{\bar{m}} \right) + b \frac{w - n}{m} + \bar{b} \left( \frac{\overline{w - n}}{\bar{m}} \right) + c = 0$$

al multiplicar todo por  $m\bar{m}$  se obtiene que

$$a(w - n)(\bar{w} - \bar{n}) + b(w - n)\bar{m} + \bar{b}(\bar{w} - \bar{n})m + m\bar{m}c = 0$$

$$aw\bar{w} + w(-a\bar{n} + b\bar{m}) + \bar{w}(-an + \bar{b}m) + (a|n|^2 + |m|^2c - bn\bar{m} - \bar{b}nm) = 0$$

si se define  $\alpha = -a\bar{n} + b\bar{m}$ , claramente  $\bar{\alpha} = -an + \bar{b}m$ , pues  $a \in \mathbb{R}$ , y  $\beta = a|n|^2 + |m|^2c - bn\bar{m} - \bar{b}nm \in \mathbb{R}$  pues para todo  $x \in \mathbb{C}$   $x + \bar{x} \in \mathbb{R}$ . Luego se tiene que

$$aw\bar{w} + w\alpha + \bar{w}\bar{\alpha} + \beta = 0 \quad (a, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C})$$

lo cual es una ecuación de la forma 2.1, es decir un cline en  $\Sigma$ .

Cuando se trabaja con la transformación  $J$ , la demostración es inmediata pues si  $w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$  por lo tanto

$$\frac{a}{w\bar{w}} + \frac{b}{w} + \frac{\bar{b}}{\bar{w}} + c = 0$$

luego al multiplicar todo por  $w\bar{w}$  se obtiene que

$$cw\bar{w} + \bar{b}w + b\bar{w} + a = 0$$

lo cual, nuevamente, es un cline. □

Por otro lado, se dirá que una función  $f$  conserva ángulos, o es conforme, si siempre que dos curvas planas  $c_1$  y  $c_2$  se corten en un punto  $p$  con un ángulo  $\theta$ , entonces  $f(c_1)$  y  $f(c_2)$  se cortan en  $f(p)$  con el mismo ángulo  $\theta$ , tomando en cuenta que el ángulo entre dos curvas se define como el ángulo entre sus tangentes [4]. Entonces, la segunda propiedad importante de las transformaciones fundamentales es que conservan ángulos.

**Teorema 2.1.2.** *Las transformaciones fundamentales son conformes [2].*

*Demostración.* El esquema que sigue esta prueba es similar al que se sigue en la demostración del teorema 2.1.1. Es decir que a las rotaciones, traslaciones, dilataciones o alguna composición de estas transformaciones se las puede expresar de forma general como

$$T(z) = pz + q \quad (p, q \in \mathbb{C})$$

luego, en base a la definición que se da de ángulo entre curvas, es posible reducir esta demostración, sin pérdida de generalidad, a mostrar que el ángulo  $\theta$  entre dos rectas que se cortan en el origen se conserva bajo  $T$ . Como se mencionó en la sección anterior, las rectas en  $\mathbb{C}$  pueden ser consideradas como cines en  $\Sigma$ , por lo tanto es posible definir las mediante la ecuación 2.1. Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos rectas en el plano complejo que se cortan en el origen, es decir

$$l_1 : b_1 z + \bar{b}_1 \bar{z} = 0 \quad (b_1 \in \mathbb{C})$$

$$l_2 : b_2 z + \bar{b}_2 \bar{z} = 0 \quad (b_2 \in \mathbb{C})$$

si  $b_1 = m_1 + n_1 i$ ,  $b_2 = m_2 + n_2 i$ , y  $z = x + yi$  con  $m_j, n_j, x, y \in \mathbb{R}$  se obtiene que

$$l_1 : (m_1 + n_1 i)(x + yi) + (m_1 - n_1 i)(x - yi) = 0 \Rightarrow 2(m_1 x - n_1 y) = 0 \therefore l_1 : y = \frac{m_1}{n_1} x$$

$$l_2 : (m_2 + n_2 i)(x + yi) + (m_2 - n_2 i)(x - yi) = 0 \Rightarrow 2(m_2 x - n_2 y) = 0 \therefore l_2 : y = \frac{m_2}{n_2} x$$

si  $M_1 = \frac{m_1}{n_1}$  y  $M_2 = \frac{m_2}{n_2}$ , se tiene que

$$\tan(\theta) = \frac{M_2 - M_1}{1 + M_1 M_2}.$$

Luego, se define  $x' + y'i = w = T(z) = pz + q \Rightarrow z = \frac{w - q}{p}$ , y se tiene que

$$b_1 \frac{w - q}{p} + \bar{b}_1 \frac{\bar{w} - \bar{q}}{\bar{p}} = 0 \Rightarrow b_1 \bar{p} w + \bar{b}_1 p \bar{w} - b_1 q \bar{p} - \bar{b}_1 \bar{q} p = 0 \Rightarrow b_1 \bar{p} w + \bar{b}_1 p \bar{w} + c = 0$$

donde  $c = (-b_1 q \bar{p} - \bar{b}_1 \bar{q} p)$  está claramente en  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto

$$T(l_1) : y' = \left( \frac{M_1 p_1 - p_2}{M_1 p_2 + p_1} \right) x' + \frac{c}{M_1 p_2 + p_1}$$

con  $p = p_1 + p_2i$ . De manera análoga se obtiene que

$$T(l_2) : y' = \left( \frac{M_2p_1 - p_2}{M_2p_2 + p_1} \right) x' + \frac{c'}{M_2p_2 + p_1}$$

con  $c' \in \mathbb{R}$ . Si se llama  $\theta_2$  al ángulo entre  $T(l_1)$  y  $T(l_2)$ , se ve que

$$\begin{aligned} \tan(\theta_2) &= \frac{\frac{M_2p_1 - p_2}{M_2p_2 + p_1} - \frac{M_1p_1 - p_2}{M_1p_2 + p_1}}{1 + \left( \frac{M_2p_1 - p_2}{M_2p_2 + p_1} \right) \left( \frac{M_1p_1 - p_2}{M_1p_2 + p_1} \right)} = \frac{(M_2p_1 - p_2)(M_1p_2 + p_1) - (M_1p_1 - p_2)(M_2p_2 + p_1)}{(M_2p_2 + p_1)(M_1p_2 + p_1) + (M_2p_1 - p_2)(M_1p_1 - p_2)} \\ &= \frac{M_2p_1^2 - M_1p_2^2 - M_1p_1^2 + M_2p_2^2}{M_1M_2p_1^2 + M_1M_2p_2^2 + p_1^2 + p_2^2} = \frac{(M_2 - M_1)(p_1^2 + p_2^2)}{(1 + M_1M_2)(p_1^2 + p_2^2)} = \frac{(M_2 - M_1)}{(1 + M_1M_2)} = \tan(\theta) \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que en efecto  $\theta = \theta_2$ , y  $T$  es conforme.

Para el caso de  $w = J(z) = \frac{1}{z}$  se tiene que  $z = \frac{1}{w}$ , por lo tanto

$$b_1 \left( \frac{1}{w} \right) + \bar{b}_1 \left( \frac{1}{\bar{w}} \right) = 0 \Rightarrow b_1 \bar{w} + \bar{b}_1 w = 0 \therefore J(l_1) : y' = M_1 x'$$

y de forma análoga  $J(l_2) : y' = M_2 x'$ . De lo que es fácil concluir que  $J$  es conforme, pues  $J(l_1)$  y  $J(l_2)$  tiene las mismas pendientes que  $l_1$  y  $l_2$  respectivamente.  $\square$

## 2.2. Transformaciones de Möbius

Un automorfismo de la esfera de Riemann  $\Sigma$  se define como una función  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$  que es meromorfa y biyectiva [5]. En base a esta definición es posible decir que los automorfismos de la esfera de Riemann son funciones racionales que a su vez son transformaciones. Esto se fundamenta en lo que se expresó en la tercera sección del primer capítulo, donde se obtuvo que todas las funciones meromorfas de  $\Sigma$  en  $\Sigma$  son funciones racionales, y debido a su biyectividad la definición 2.1.1 garantiza que sean transformaciones. El conjunto de todos los automorfismos de  $\Sigma$  se denota  $M_o(\Sigma)$ .

**Teorema 2.2.1.** *Los automorfismos de  $\Sigma$  son transformaciones  $M : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , de la forma*

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

con  $ad - bc \neq 0$  [4].

*Demostración.* Ya fue establecido que  $M(z)$  es una función racional, por lo tanto  $M(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ , con  $p$  y  $q$  polinomios coprimos, es decir que no tienen ceros en común. Lo que sigue es demostrar que el grado de  $p$ , y de  $q$  es a lo sumo 1. Entonces, supongamos que  $p$  es un polinomio con grado mayor a uno con al menos dos raíces distintas  $z_1$  y  $z_2$ , esto implica que  $M(z_1) = M(z_2) = 0$ , negado así la inyectividad de  $M$ . El caso en que el grado de  $q$  es mayor a uno y tiene al menos dos raíces distintas es análogo, debido a la inyectividad de  $J$ .

Cuando  $p$  y  $q$  tienen grados  $m, n \geq 1$  respectivamente, pero una sola raíz cada uno se tiene que  $M(z) = \frac{(z - z_1)^m}{(z - z_2)^n}$ , si  $m > n$  entonces  $M(\infty) = M(z_2) = \infty$ , si  $m < n$  entonces  $M(\infty) = M(z_1) = 0$ , y si  $m = n$  las  $n$  raíces distintas de la unidad negarán la inyectividad de  $M$  a menos que  $n = 1$ , de lo que se concluye que para que  $M$  sea inyectiva el grado de  $p$  y  $q$  debe ser a lo sumo 1 y no ambos cero pues en ese caso sería  $M$  una constante que claramente no es inyectiva, luego debido a que se supuso que  $p$  y  $q$  son coprimos la sobreyectividad de  $M$  se garantiza. Finalmente, ya se mencionó que una función constante no es inyectiva, por lo tanto tampoco biyectiva, entonces si  $p(z) = az + b$  y  $q(z) = cz + d$  la condición  $ad - bc \neq 0$ , garantiza que nunca ocurra que  $p(z) = \alpha q(z)$ , o análogamente  $q(z) = \alpha p(z)$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$  una constante, y así se evita que  $M$  sea constante.  $\square$

Todas las transformaciones  $M \in M_o(\Sigma)$  son conocidas como transformaciones de Möbius, fraccionarias lineales, o transformaciones bilineales [4].

### 2.2.1. El Grupo $M_o(\Sigma)$

Las transformaciones de Möbius presentan propiedades geométricas y algebraicas muy particulares. En concreto, si  $M(z)$  es una transformación bilineal se tiene que

$$w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow w(cz + d) = az + b \Rightarrow wd - b = (a - wc)z \Rightarrow z = -\frac{wd - b}{wc - a}$$

lo cual muestra que la inversa de  $M$ ,  $M^{-1}(z) = -\frac{zd - b}{zc - a}$ , es una transformación bilineal pues  $ad - bc \neq 0$ . Luego, si  $M(z)$ , y  $N(z)$  son dos transformaciones bilineales arbitrarias se tiene que

$N \circ M(z)$  es también una transformación bilineal, pues

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad N(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} \Rightarrow N \circ M(z) = \frac{a' \frac{az + b}{cz + d} + b'}{c' \frac{az + b}{cz + d} + d'} = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(ac' + cd')z + (bc' + dd')}$$

con

$$(a'a + b'c)(bc' + dd') - (a'b + b'd)(ac' + cd') = aa'dd' + bb'cc' - a'bcd' - ab'c'd = (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0 [5]$$

Finalmente, si en  $M(z)$  se tiene que  $a = d \neq 0$  y que  $b = c = 0$ ,  $M$  todavía es bilineal, mostrando así que la función identidad también es una transformación de Möbius. Todos estos argumentos junto con el hecho de que la composición de funciones es asociativa son la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 2.2.2.**  $M_o(\Sigma)$  es un grupo cuya operación es la composición de funciones [5].

## 2.2.2. Nociones Geométricas de las Transformaciones de Möbius

En [1] se puede observar que si  $M(z)$  es una transformación bilineal entonces se la puede expresar de la siguiente manera

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} + \frac{a}{c}$$

donde nuevamente se ve la necesidad de  $ad - bc \neq 0$ , además si  $b - \frac{ad}{c} = re^{i\theta}$  y  $c = r_1 e^{i\phi}$  se observa que  $M(z) = (T_{a/c} \circ D_r \circ R_\theta \circ J \circ T_d \circ D_{r_1} \circ R_\phi)(z)$  es la composición de transformaciones fundamentales. Esta observación junto con el hecho de que  $M$  es arbitraria, y los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2 son la prueba de los siguientes teoremas.

**Teorema 2.2.3.** Todas las transformaciones de Möbius mapean círculos de  $\Sigma$  en círculos de  $\Sigma$  (círculos) [2].

**Teorema 2.2.4.** Todas las transformaciones de Möbius son conformes [2].

Adicionalmente, cuando se estudió en la sección anterior todas las transformaciones fundamentales se obtuvo que cada una de ellas correspondía a un movimiento particular de la esfera  $S^2$  y luego a su mapeo  $\pi$  sobre  $\mathbb{C}$ , de esto es posible concluir que las transformaciones de Möbius corresponden a la composición de movimientos rígidos de la esfera  $S^2$  con  $\pi$ . Al componer dos transformaciones bilineales en la sección anterior nos dimos cuenta que  $M_o(\Sigma)$  no es abeliano, por lo tanto la

composición de movimientos de la esfera  $S^2$  no sigue un esquema visual trivial. Sin embargo, en el caso más general se tendrá que  $M\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$ ,  $M(0) = \frac{b}{d}$ ,  $M(\infty) = \frac{a}{c}$ , y  $M\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$ , lo cual permite una orientación geométrica de la posición final de la esfera, es decir de  $M(\Sigma)$ . Aquí se observa que  $S^2$  quedará posicionada de tal manera que  $\frac{-d}{c}$  quedará en la posición original de  $N$ , y las rectas que unen a  $\frac{-d}{c}$  con  $N$ ,  $-N$ ,  $\frac{-b}{a}$  intersectarán al plano  $C$  en  $\frac{a}{c}$ ,  $\frac{b}{d}$  y  $0$  respectivamente. En la Figura 2.6 se presenta un esquema gráfico de la acción de  $M$  sobre  $\Sigma$ .

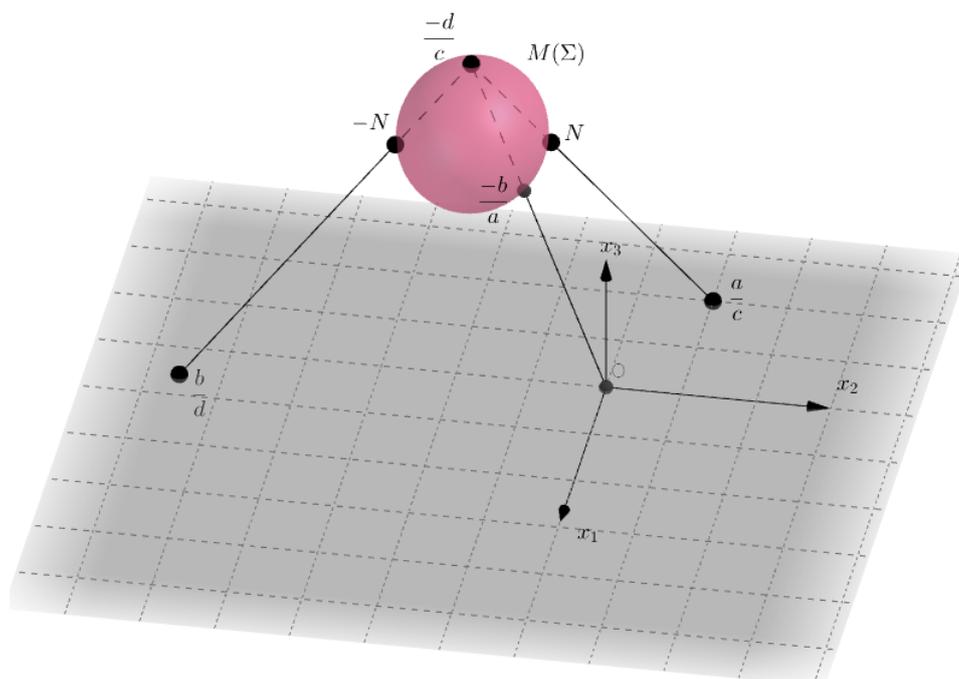


Figura 2.6: Imagen de  $\Sigma$  mediante una transformación bilineal  $M$

Finalmente, en base a esta idea visual de una transformación de Möbius es posible adquirir una idea geométrica de los teoremas 2.2.3 y 2.2.4. A más de ello, debido a que  $\frac{-d}{c}$  y  $\frac{-b}{a}$  son puntos arbitrarios de  $\Sigma$ , con  $\frac{-d}{c} \neq \frac{-b}{a}$  se concluye que las transformaciones de Möbius corresponden a movimientos rígidos de la esfera  $S^2$  en  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.2.3. Representación Matricial del Grupo $M_o(\Sigma)$

Una de las ventajas de las transformaciones bilineales es que cada una puede ser identificada como una matriz invertible  $2 \times 2$  de entradas complejas [5]. Sea  $M(z) \in M_o(\Sigma)$ , entonces

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es identificada con la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es  $ad - bc \neq 0$ , y por ende invertible. El conjunto de todas las matrices  $2 \times 2$  invertibles con entradas complejas es un grupo cuya operación binaria es la multiplicación de matrices, este grupo se denota por  $GL_2(\mathbb{C})$  y su nombre es grupo general lineal [9]. Al hacer la identificación de cada  $M(z) \in M_o(\Sigma)$  con un elemento  $M \in GL_2(\mathbb{C})$ , es posible permitirse un abuso de notación, así que cada que se haga referencia a un elemento  $M(z)$  de  $M_o(\Sigma)$  este puede ser entendido al mismo tiempo como el elemento  $M$  de  $GL_2(\mathbb{C})$ . Con esta aclaración en mente, si  $N(z)$  es una transformación bilineal tal que

$$N(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

se tiene que  $N \circ M(z)$ , corresponde a la multiplicación de las matrices  $N$ , y  $M$  de la siguiente forma que

$$NM = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{bmatrix}$$

por lo tanto, si a esta identificación entre elementos de  $GL_2(\mathbb{C})$  y de  $M_o(\Sigma)$  se la llama  $\phi$ , lo que se acaba de mostrar es que  $\phi : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_o(\Sigma)$  es un homomorfismo entre grupos, pues  $\phi(NM) = N \circ M(z) = \phi(N) \circ \phi(M)$  [5]. La consecuencia principal de este resultado es una definición más rigurosa de las Transformaciones de Möbius, la cual se irá desarrollando progresivamente en esta sección. En [5] se detalla que las transformaciones bilineales no son determinadas por coeficientes únicos, pues si  $M(z) \in M_o(\Sigma)$ , y  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ , entonces

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

esto no supone un problema en si mismo, pero como se verá es posible redefinir a las transformaciones bilineales mediante coeficientes únicos.

Para ello se recuerda que la identidad de  $M_o(\Sigma)$  es  $I(z) = z$  y se obtiene cuando en  $M(z)$   $a = d$ , y  $c = b = 0$ , por lo tanto el kernel de  $\phi$ ,  $ker(\phi) = K$ , serán todas las matrices de la forma  $\lambda I$ , donde  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ , e  $I_2$  es la matriz identidad  $2 \times 2$  [5]. Luego, el primer teorema de isomorfismos, presente en [6], asegura que  $K$  es un grupo normal de  $GL_2(\mathbb{C})$ , y debido a que  $\phi$  es sobreyectivo, entonces el grupo cociente  $GL_2(\mathbb{C})/K$  es isomorfo a  $M_o(\Sigma)$  ( $GL_2(\mathbb{C}) \cong M_o(\Sigma)$ ).

El subgrupo  $SL_2(\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C})$  es conocido como grupo especial lineal, y corresponde a todas las matrices  $2 \times 2$  con entradas complejas cuyo determinante es 1 [9]. A partir de esto se define el mapa  $\varphi : GL_2(\mathbb{C}) \mapsto SL_2(\mathbb{C})$  de tal forma que para  $M \in GL_2(\mathbb{C})$  se tiene que

$$\varphi(M) = \frac{1}{\sqrt{\det(M)}} M$$

que claramente se encuentra bien definido debido a que  $\det(M) \neq 0$ . Además si  $N \in GL_2(\mathbb{C})$ , se observa que

$$\varphi(MN) = \frac{1}{\sqrt{\det(MN)}} MN = \frac{1}{\sqrt{\det(M)}} M \frac{1}{\sqrt{\det(N)}} N = \varphi(M)\varphi(N)$$

mostrando así que  $\varphi$  es también un homomorfismo de grupos sobreyectivo. Se observa que  $\ker(\varphi) = K$  pues la identidad de  $SL_2(\mathbb{C})$  es  $I_2$ , y nuevamente haciendo uso del primer teorema de isomorfismo se obtiene que  $GL_2(\mathbb{C})/K \cong SL_2(\mathbb{C})$ , de lo cual se puede concluir que  $SL_2(\mathbb{C}) \cong M_o(\Sigma)$ . Como consecuencia de este resultado se tiene que es posible reescribir el teorema 2.2.1 de la siguiente manera

**Teorema 2.2.5.** *Los automorfismos de  $\Sigma$  son transformaciones  $M : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , de la forma*

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

con  $ad - bc = 1$ .

el cual a diferencia de su antecesor requiere que los coeficientes de  $M(z)$  sean únicos, excepto por la multiplicación  $\pm 1$ , es decir que  $M(z) = -M(z)$ .

## 2.2.4. El Teorema Fundamental de las Transformaciones de Möbius

Hasta ahora la naturaleza geométrica de las transformaciones de Möbius nos ha dado como resultado principal que este tipo de transformaciones conservan ángulos y clines en  $\Sigma$ . Sin embargo, estos resultados no son tan claros en el procedimiento que se deberá seguir para transformar un cline  $C_1$  en un cline  $C_2$ . Es por eso que en esta sección se prueban tres teoremas, de los cuales el último permitirá transformar cualquier cline  $C_1$  en cualquier cline  $C_2$  revelando nuevamente el potencial geométrico de las transformaciones de Möbius, y por tanto recibirá el nombre de El Teorema Fundamental de las Transformaciones de Möbius (TFM) como se describe en [2].

EL esquema que se sigue para probar el TFM tiene un enfoque constructivista que parte de observaciones fundamentales a la forma algebraica de las transformaciones de Möbius. La primera observación se centra en los puntos fijos de cualquier elemento de  $Mo(\Sigma)$ , y se detalla en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.6.** *Sea  $T(z)$  una transformación de Möbius, entonces  $T$  fija 1, 2 o todos los puntos de  $\Sigma$  [2].*

*Demostración.* Sea  $T(z) \in Mo(\Sigma)$  de tal forma que  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Para encontrar los puntos fijos de  $T$ , lo que hacemos es buscar todos los  $w \in \Sigma$  tal que  $T(w) = w$ . Es decir, resolvemos la siguiente ecuación

$$w = \frac{wa + b}{wc + d} \rightarrow cw^2 + (d - a)w - b = 0^*$$

si  $c \neq 0$ , entonces el teorema fundamental del álgebra garantiza que existirán solo uno o dos elementos  $w \in \Sigma$  tal  $T(w) = w$ . Si  $c = 0$  entonces  $T(z) = \frac{az + b}{d}$  es una transformación que claramente fija  $\infty$ , y por \* también fijará a  $w = \frac{b}{d - a}$  si  $a \neq d$ . Si por el contrario  $a = d$ , entonces \* quedaría de la forma  $-b = 0$  lo cual nos muestra que  $T(z) = \frac{az}{d} \rightarrow T(z) = z$  pues  $a = d$ , con lo cual se tiene que  $T(z)$  es la identidad.  $\square$

El teorema 2.2.6 toma mayor importancia en su interpretación, pues nos dice que cada transformación de Möbius tiene a lo sumo 2 puntos fijos, por lo tanto si una transformación de Möbius fija 3 puntos o más ésta será claramente la identidad. A partir de este resultado podremos construir el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.7.** *Existe una única transformación de Möbius  $T(z)$  que transforma tres puntos distintos  $z_1, z_2$  y  $z_3 \in \Sigma$  en  $0, 1$  y  $\infty$  respectivamente [2].*

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2, z_3$  tres puntos distintos en  $\Sigma$ , y consideremos la función  $T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$ . Reemplazando  $z$  por cada  $z_j$   $j = 1, 2, 3$  se obtiene que  $T(z_1) = 0$ ,  $T(z_2) = 1$ , y  $T(z_3) = \infty$  respectivamente. Pero esto funciona siempre y cuando ningún  $z_j$  sea igual a  $\infty$ . Cuando uno de los  $z_j = \infty$  se trabaja con el límite de  $T$  cuando  $z_j \rightarrow \infty$ , es decir,  $T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$  si  $z_1 = \infty$ ,  $T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$  si  $z_2 = \infty$ , y  $T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$  si  $z_3 = \infty$ , nuevamente es claro que en cualquiera de estos casos  $T(z_1) = 0$ ,  $T(z_2) = 1$ , y  $T(z_3) = \infty$  respectivamente. Además como los  $z_j$  son distintos entonces  $T$  es una transformación de Möbius, por lo tanto la existencia de la transformación requerida ha sido probada. Para mostrar que  $T$  es única basta considerar otra

transformación de Möbius  $U(z)$ , tal que  $U(z_1) = 0$ ,  $U(z_2) = 1$ , y  $U(z_3) = \infty$ . En base esto tenemos que  $T(z_j) = U(z_j)$  para  $j = 1, 2, 3$  y por lo tanto  $U^{-1} \circ T(z_j) = z_j$ , es decir que  $U^{-1} \circ T$  fija 3 puntos de  $\Sigma$ , y por el teorema 2.2.6 se tiene que  $U^{-1} \circ T$  es la transformación identidad de lo que se obtiene que  $T = U$ , por lo tanto  $T$  es única.  $\square$

El teorema 2.2.7 es la base sobre la cual se fundamenta el llamado teorema fundamental de las transformaciones de Möbius presente en [2]. De manera general dicho teorema garantiza la existencia de una transformación bilineal única que nos faculta transformar cualquier cline en  $\Sigma$  en cualquier cline de  $\Sigma$  como se verá a continuación.

**Teorema 2.2.8.** *Existe una única transformación de Möbius  $T(z)$  que transforma tres puntos distintos  $z_1, z_2$  y  $z_3 \in \Sigma$  en tres puntos distintos  $w_1, w_2$  y  $w_3 \in \Sigma$  respectivamente.*

*Demostración.* Por el teorema 2.2.7 sabemos que existen transformaciones de Möbius  $S(z)$  y  $U(z)$  únicas tal que  $U(z_1) = 0$ ,  $U(z_2) = 1$ , y  $U(z_3) = \infty$ , y  $S(w_1) = 0$ ,  $S(w_2) = 1$ , y  $S(w_3) = \infty$ , por lo tanto si se define la transformación  $T(z) = S^{-1} \circ U(z)$  se tiene que  $T(z_1) = w_1$ ,  $T(z_2) = w_2$ , y  $T(z_3) = w_3$ , y por la unicidad de  $U$ , y  $S$  se tiene que  $T$  es única.  $\square$

El teorema 2.2.8, cómo habíamos anticipado, se lo conoce como el teorema fundamental de las transformaciones de Möbius (TFM). Pero como puede apreciarse, es una consecuencia natural del teorema 2.2.7. Sin embargo, su importancia radica en el hecho de que cualquier cline en  $\Sigma$  puede ser determinado por 3 puntos distintos en el plano. Si dichos 3 puntos son colineales nuestro cline es una recta, si no lo son entonces nuestro cline es una circunferencia en el plano que circunscribe al triángulo formado por dichos 3 puntos. Es decir, que basta conocer 3 puntos del cline que se desea transformar y 3 puntos del cline al cual se desea llegar para construir una transformación de Möbius que convierta el primer cline en el segundo.

A partir de las demostraciones de los teoremas 2.2.7 y 2.2.8 se ve que para construir dicha transformación se debe considerar la siguiente ecuación

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)} [2] \quad (2.2)$$

donde  $z_j$  y  $w_j$   $j = 1, 2, 3$  son puntos distintos y no iguales a  $\infty$  en  $\Sigma$  de tal manera que al resolver la ecuación 2.2 para  $w$  se tiene la transformación de Möbius  $w = T(z)$  tal que  $T(z_j) = w_j$ . Si se

da el caso de que un  $z_j$ , o un  $w_j$  es igual a  $\infty$  entonces lo que se hará es sustituir los factores que involucren a dicho punto por un 1.

Es importante recalcar que en estas últimas observaciones no se ha requerido que la transformada de Möbius que se contruye para convertir un cline  $C_1$  a un cline  $C_2$  sea única. La razón fundamental es que pese a que con 3 puntos podemos definir un cline, estos gozan de un orden particular y debido a que cada transformación de Möbius es inyectiva por cada tres puntos en  $C_1$  y cada 3 puntos en  $C_2$  podemos contruir 6 transformaciones de Möbius diferentes que transformen  $C_1$  en  $C_2$ .

## Capítulo 3

### Problemas de Dirichlet

Las ideas y resultados presentados hasta ahora han tenido un enfoque geométrico, y por lo tanto más global en lo que se refiere a las transformaciones de Möbius. Uno de nuestros resultados principales fue que cada transformación de Möbius es conforme, y junto con el teorema TFM se desarrollaron ideas que nos permiten construir un mapa conforme que relacione dos dominios  $U$  y  $V$  en  $\mathbb{C}$  delimitados por clines en  $\Sigma$ . Esta relación nos permite transferir preguntas sobre  $U$  que pueden tener una estructura geométrica muy simple a un dominio  $V$  cuya estructura geométrica sea mucho más útil y por lo tanto se pueda realizar un mejor trabajo al tratar de responder dichas preguntas.

En este trabajo, la pregunta que se va a responder es el problema de Dirichlet en dos dimensiones y asociado a la ecuación de Laplace. Nuestro objetivo principal es conectar el problema de Dirichlet con la propiedad conforme de las transformaciones de Möbius de tal manera que esta conexión nos permita extender las respuestas de dicho problema a dominios cuya estructura geométrica es más compleja y por lo tanto el trabajo de buscar una solución al problema de Dirichlet de forma analítica resulte en extremo complejo. Para esto lo que se hará es definir de manera formal el problema de Dirichlet y luego presentar dos respuestas al problema correspondientes a dominios que denominaremos sencillos, luego mediante la exposición de un lema que conecta las funciones armónicas y los mapas conformes se demostrará que el problema de Dirichlet que aquí se plantea es independiente de la geometría en su dominio de definición.

#### 3.1. El problema de Dirichlet

Se supone que  $D$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ , i.e.  $D$  es abierto y conexo por caminos, y que  $f$  es una función definida para cada uno de los puntos de la frontera  $\partial D$  de  $D$ . El problema de Dirichlet en dos dimensiones asociado a la ecuación de Laplace, o simplemente problema de Dirichlet se define como

el problema de encontrar una función  $\phi(x, y)$  de valor real tal que  $\nabla^2\phi = 0$  en  $D$ , y  $\phi(x, y) = f$  en  $\partial D$ , donde  $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$  se conoce como la ecuación de Laplace [10]. Esta formulación es equivalente a decir que  $\phi$  es una función armónica en  $D$  [8].

El problema de Dirichlet presentado se conoce como un problema con valores en la frontera de la ecuación de Laplace, y su solución considera un número importante de problemas físicos [10]. Es por ello que se requiere tener tener una base de soluciones que nos permitan extender la respuesta a dicho problema a dominios más complejos. A continuación se muestra las soluciones a los problemas de Dirichlet en una franja infinita y en un anillo.

### 3.1.1. El problema de Dirichlet en una Franja Infinita

En esta parte solucionaremos el problema de Dirichlet en una franja infinita  $D$  paralela al eje  $x$  del plano delimitada por las rectas  $y = 0$ ,  $y = h$ , donde  $h$  es una constante real distinta de cero. De tal manera que  $\phi(x, 0) = m_1$  y  $\phi(x, h) = m_2$  donde  $x \in \mathbb{R}$ , y  $m_1, m_2$  son constantes reales, y  $\nabla^2\phi(x, y) = 0$  en  $D$  como se muestra en la figura 3.1.

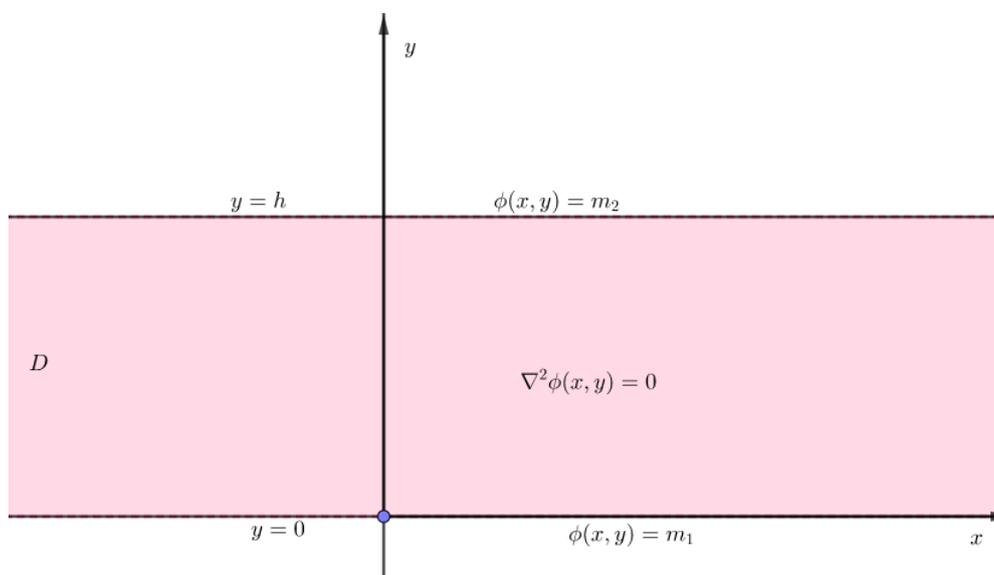


Figura 3.1: Problema de Dirichlet en una franja infinita horizontal

Para empezar al resolver el problema de Dirichlet en el dominio  $D$  primero observamos que  $\phi$  es constante en los bordes de  $D$ , y ya que los bordes de  $D$  son paralelos a  $x$  se tiene que  $\phi(x, y) = U(y)$  donde  $U$  es una función real independiente de  $x$  [3]. A partir de esto, en  $D$  se tiene que  $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$  por hipótesis, por lo que al integrar dos veces respecto a  $y$  esta última ecuación obtenemos que

$U(y) = ry + s = \phi(x, y)$  donde  $r, s \in \mathbb{R}$  son constantes. Finalmente, al tomar en cuenta las condiciones de frontera se tiene que  $U(0) = \phi(x, 0) = m_1 = s$ , y que  $U(h) = \phi(x, h) = m_2 = rh + s$  por lo tanto

$$\phi(x, y) = \left( \frac{m_2 - m_1}{h} \right) y + m_1 \quad [3] \quad (3.1)$$

es la única función que resuelve el problema de Dirichlet en  $D$  [3]. El caso para una franja vertical análogo y lo único que se hace es trabajar con la función  $U(x)$  en lugar de  $U(y)$ .

### 3.1.2. El problema de Dirichlet en un Anillo

Ahora resolveremos el problema de Dirichlet para un dominio encerrado entre dos círculos concéntricos centrados en el origen. Es decir,  $D = \{(x, y) | 0 < R_1 < x^2 + y^2 < R_2\}$ , de tal forma que la función de valor real buscada  $\phi(x, y)$  cumpla con  $\nabla^2 \phi(x, y) = 0$  en  $D$ ,  $\phi(x, y) = m_1$  si  $x^2 + y^2 = R_1$ , y  $\phi(x, y) = m_2$  si  $x^2 + y^2 = R_2$  donde  $m_1, m_2$  son constantes reales. Este problema se ilustra en la figura 3.2 donde se ha llamado al círculo  $x^2 + y^2 = R_1$  como  $C_1$  y  $x^2 + y^2 = R_2$  como  $C_2$ .

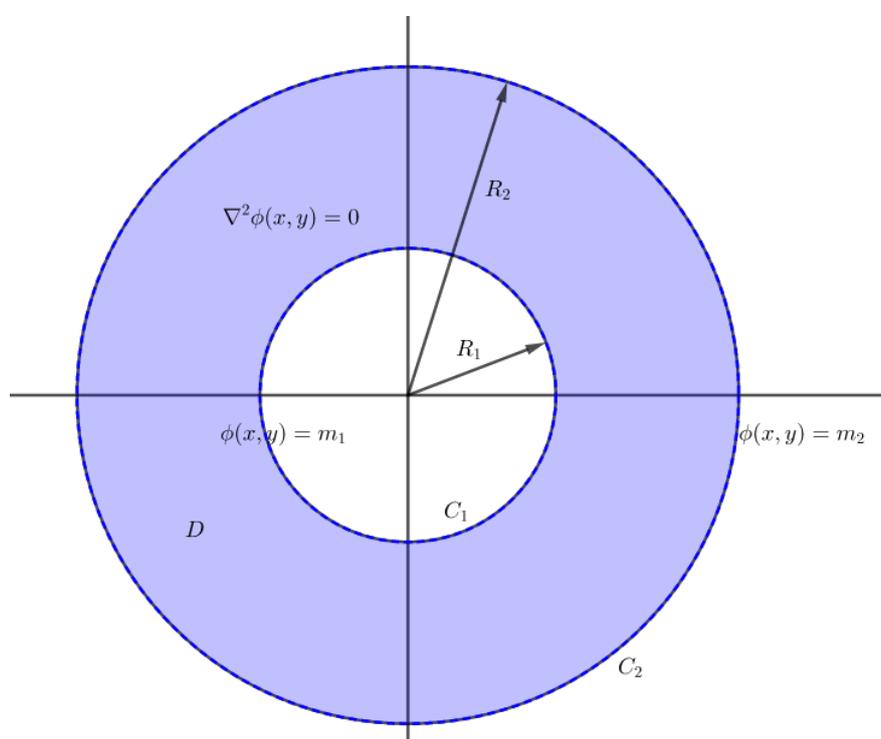


Figura 3.2: Problema de Dirichlet en un anillo delimitado por dos círculos concéntricos

Para empezar a resolverlo se nota que  $\phi$  es constante en los bordes de  $D$ , por lo tanto las

curvas de nivel de  $\phi$  deberían ser círculos concéntricos [3]. En consecuencia es mucho más natural buscar la función  $\phi(r, \theta)$ , que es la función  $\phi(x, y)$  en coordenadas polares planas de tal forma que  $r = x^2 + y^2$ . En base a estas observaciones y siguiendo el esquema para una franja infinita se tiene que  $\phi(r, \theta) = U(r)$ , donde  $U$  es una función real independiente de  $\theta$ . En [3], se muestra que  $\nabla^2 \phi$  en coordenadas polares planas es de la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

por lo tanto en este caso se tiene que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

Al resolver esta ecuación diferencial ordinaria junto con las condiciones de frontera  $U(R_1) = m_1$ , y  $U(R_2) = m_2$  se obtiene la siguiente solución

$$\phi(r, \theta) = m_1 + \left( \frac{m_1 - m_2}{\ln(R_2/R_1)} \right) \ln(R_1) + \left( \frac{m_1 - m_2}{\ln(R_2/R_1)} \right) \ln(r) \quad [3]$$

sin embargo, si se requiere que  $\phi$  se exprese en coordenadas cartesianas se usa el hecho de que  $r = x^2 + y^2$ , y por lo tanto

$$\phi(x, y) = m_1 + \left( \frac{m_1 - m_2}{\ln(R_2/R_1)} \right) \ln(R_1) + \left( \frac{m_1 - m_2}{\ln(R_2/R_1)} \right) \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad [3] \quad (3.2)$$

Hasta ahora ya sabemos reconocer un problema de Dirichlet y resolverlo en dominios como franjas horizontales infinitas y anillos centrados en el origen. Sin embargo, los dominios donde se requiere resolver el problema de Dirichlet no siempre son tan sencillos, por lo tanto es necesario desarrollar una técnica que nos permita resolver el mismo problema en dominios más complejos pero que guarden relación con una franja infinita o un anillo. En [8] se presenta una definición equivalente de conformalidad y se define una función  $f : U \rightarrow V$  como conforme si es holomorfa y biyectiva, donde  $D$  y  $V$  son conjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$ , y se dirán que son equivalentes de manera conforme. Además en [8] también se detalla un lema que conecta las funciones conformes con las funciones armónicas, i.e. que cumplen la ecuación de Laplace. Este lema se lo cita de manera textual a continuación

**Lema 3.1.1.** Sean  $U$  y  $V$  conjuntos abiertos en  $\mathbb{C}$  y  $F : U \rightarrow V$  una función holomorfa. Si

$u : V \rightarrow \mathbb{C}$  es una función armónica, entonces la composición  $u \circ F$  es armónica en  $U$ .

El lema 3.1.1 de forma esencial lo que nos permite es resolver el problema de Dirichlet en el dominio  $U$  siempre y cuando podamos transformarlo en el dominio  $V$  mediante una función holomorfa, donde  $V$  será siempre una franja infinita o un anillo centrado en el origen en el presente trabajo. En [3] se detalla que el valor fundamental del lema 3.1.1 no radica solamente en la transformación del dominio  $U$ , sino también que conserva los valores de la frontera de  $U$  bajo  $F$ , es decir, que si  $u \circ F = k$  en el borde  $C_u$  de  $U$ , entonces  $u = k$  en  $F(C_u)$ .

En el capítulo anterior se obtuvo que las transformaciones de Möbius son conformes, y aquí se ha definido que las funciones conformes son aquellas que son holomorfas y biyectivas. Por lo tanto las transformaciones de Möbius son holomorfas. A más de eso se probó que una transformación de Möbius siempre transforma clines en clines. En consecuencia el lema 3.1.1 permite resolver el problema de Dirichlet en dominios limitados por clines mediante la construcción de una transformación de Möbius que transforme dichos dominios en franjas infinitas o en anillos concéntricos, para luego componer dicha transformación con las funciones  $\phi(x, y)$  encontradas para cada caso en las secciones anteriores.

## 3.2. Solución al problema de Dirichlet en dominios complejos

En esta sección se resolverán problemas de Dirichlet en dominios complejos, i. e. dominios diferentes a un franja infinita horizontal o vertical, y anillos concéntricos. Para esto lo que se hará es seguir el esquema detallado en la sección anterior para resolver el problema de Dirichlet, y se usará la teoría desarrollada para el teorema TFM para construir la transformación de Möbius que transforme el dominio complejo propio del problema en uno donde conozcamos la solución al problema. Los problemas resueltos fueron planteados en [10] como problemas con valores en la frontera.

### Franjas Infinitas

1. Considere el problema de Dirichlet en el dominio  $D$  de color verde como se muestra en la figura 3.3, donde  $D$  se encuentra limitado por  $l_1 : x = 0$ , y por  $C : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  de tal forma que  $\phi(x, y) = 2$  en  $l_1$ , y  $\phi(x, y) = 0$  en  $C$ .

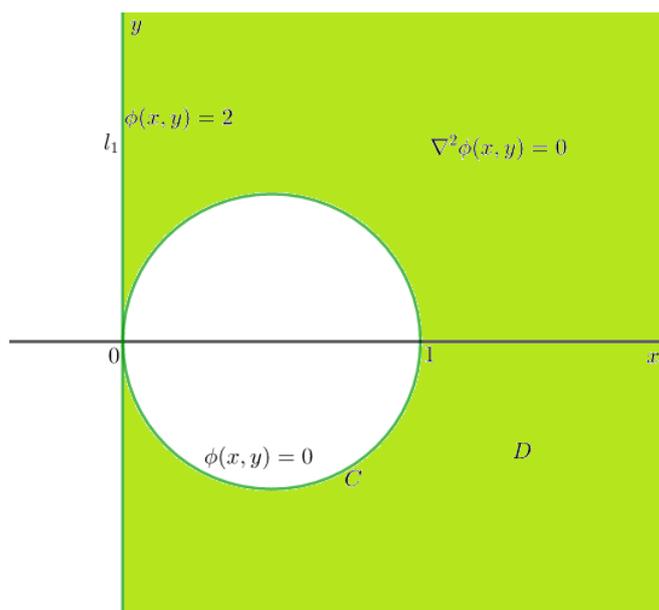


Figura 3.3: Problema de Dirichlet en el dominio  $D$  limitado por  $l_1$  y  $C$

Como se puede observar, la geometría de  $D$  no nos permite tener las mismas consideraciones que se hizo para encontrar la función  $\phi$  en una franja infinita o en un anillo, por lo que encontrar  $\phi$  en  $D$  de manera analítica resulta bastante complejo. Sin embargo,  $l_1$  y  $C$  son clines en  $\Sigma$  por lo tanto, la teoría de la sección anterior nos permite encontrar una transformación de Möbius que transforme  $D$  en  $D'$ , de tal manera que  $D'$  sea una franja infinita donde conozcamos la solución al problema de Dirichlet. Para ello, se nota que  $l_1$  ya es una recta horizontal que pasa por el cero, por lo tanto sería óptimo que  $T(l_1) = l_1$ , y que  $T(C) = l_2$  donde  $l_2$  es una recta vertical. Como se puede observar  $l_1$  y  $C$  se intersectan en  $(0, 0)$ , y por la definición de clines sabemos que  $\infty$  pertenece a un cline si y solo si este es una recta. Por lo tanto la única solución que nos conduce a que  $T(l_1)$ ,  $T(C)$  sean rectas es que  $T(0) = \infty$ . Luego, como  $\infty \in l_1$  y se requiere que  $T(l_1) = l_1$  entonces  $T(\infty)$  debe pertenecer a  $l_1$ , entonces para simplificar el cálculo nuestra mejor opción es  $T(\infty) = 0$ . Finalmente, se requiere que  $l_2$  sea una recta vertical por lo tanto es necesario que  $T(1) = 1$ . Estos requerimientos los trasladamos a la ecuación 2.2 y obtenemos que

$$\frac{(w - \infty)(1 - 0)}{(1 - \infty)(w - 0)} = \frac{(z - 0)(1 - \infty)}{(1 - 0)(z - \infty)}$$

$$\frac{(w - \infty)}{(1 - \infty)w} = \frac{z(1 - \infty)}{(z - \infty)}$$

$$\therefore \frac{1}{w} = z \Rightarrow w = \frac{1}{z}$$

por lo tanto nuestra transformación de Möbius buscada es  $T(z) = \frac{1}{z}$ . En la figura 3.4 se muestra  $T(D) = D'$  en color azul,  $l_1$ , y  $l_2$  y el problema de Dirichlet equivalente. A esta figura la llamaremos el plano  $w$  donde sus coordenadas serán  $(u, v)$ .

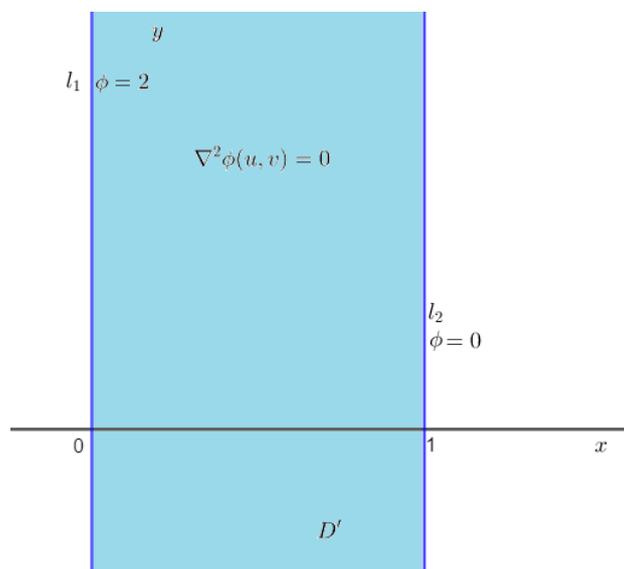


Figura 3.4: Plano  $w$ . Problema de Dirichlet equivalente en el dominio  $D'$

De la ecuación 3.1 se obtiene que la función  $\phi(u, v)$  que resuelve el problema de Dirichlet en el dominio  $D'$  en el plano  $w$  es de la forma

$$\phi(u, v) = \left( \frac{m_2 - m_1}{h} \right) u + m_1$$

en este caso  $m_2 = 0$ ,  $h = 1$ , y  $m_1 = 2$ , por lo que  $\phi(u, v) = -2u + 2$ . Finalmente, el lema 3.1.1 nos dice que  $\phi(T(x + yi)) = \phi(x, y)$  resolverá al problema de Dirichlet en  $D$ . Entonces lo único que nos resta es hacer la composición de función correspondientes, para esto notemos que  $T(z) = T(x + yi) = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i = u + vi$  de lo que se obtiene que

$$\phi(x, y) = \frac{-2x}{x^2 + y^2} + 2$$

es la única solución al problema de Dirichlet en  $D$ .

- Ahora consideremos el problema de Dirichlet en un nuevo dominio  $D$  delimitado por dos circunferencia en el plano  $C_1 : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , y  $C_2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$  como se

muestra en la figura 3.5 donde  $D$  es la zona de color rosa. De forma equivalente al problema anterior la estructura geométrica de  $D$  hace que encontrar  $\phi(x, y)$  sea mucho más complejo. Sin embargo, ya que  $C_1$  y  $C_2$  se chocan en un punto es posible encontrar una transformación de Möbius de tal forma que  $T(D) = D'$  sea una franja infinita.

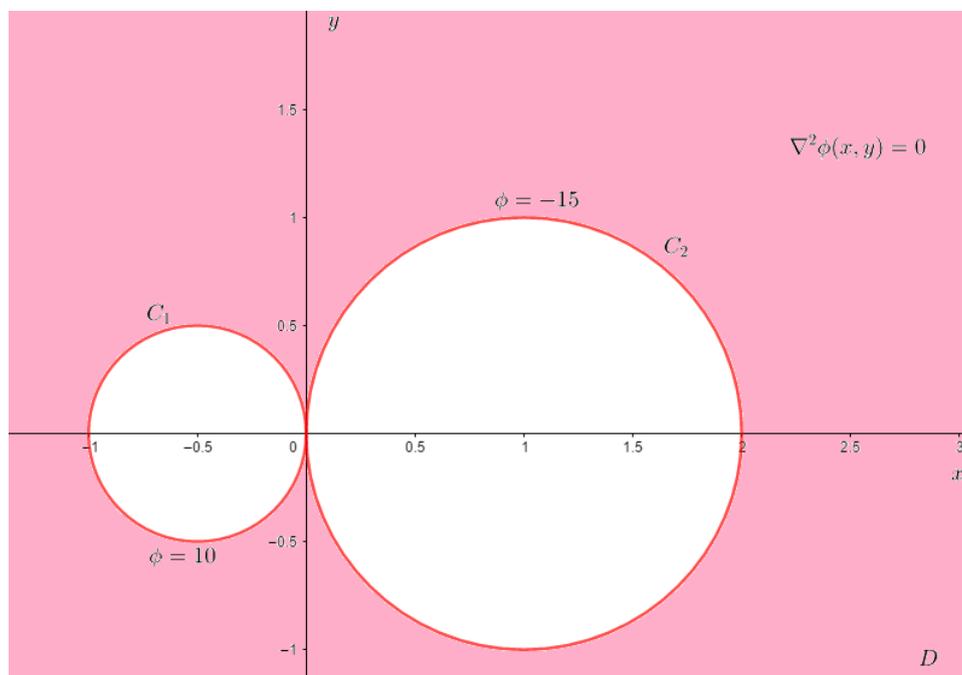


Figura 3.5: Problema de Dirichlet en el dominio  $D$  con borde  $C_1$  y  $C_2$ .

Siguiendo el esquema del problema 1 notamos que la transformación de Möbius  $T$  para este problema debe cumplir que  $T(0) = \infty$  ya que requerimos que  $T(C_1) = l_1$ , y  $T(C_2) = l_2$  sean rectas. Como además deben ser rectas verticales entonces  $T(-1) = -1$  y  $T(2) = 2$ . Estos requerimientos se reemplazan en la ecuación 2.2 y se obtiene que

$$\frac{(w - \infty)(2 + 1)}{(2 - \infty)(w + 1)} = \frac{(z - 0)(2 + 1)}{(2 - 0)(z + 1)}$$

$$\frac{(w - \infty)}{(2 - \infty)(w + 1)} = \frac{z}{2(z + 1)}$$

$$\therefore w = \frac{z + 2}{z}$$

por lo que  $T(z) = \frac{z + 2}{z}$ . Sin embargo, ninguna de las rectas  $l_1, l_2$  pasan por el origen, así que para poder aplicar la solución del problema de Dirichlet en una franja infinita vamos a tener que trabajar con la transformación de Möbius  $S(z) = T(z) + 1 = 2 + \frac{2}{z}$ . En la figura

3.6 se muestra el dominio  $D_1 = S(D)$  delimitado por las rectas  $k_1 = S(C_1)$  y  $k_2 = S(C_2)$  y el problema equivalente de Dirichlet en este dominio. A este plano lo llamaremos de nuevo el plano  $w$  de los puntos  $(u, v)$ .

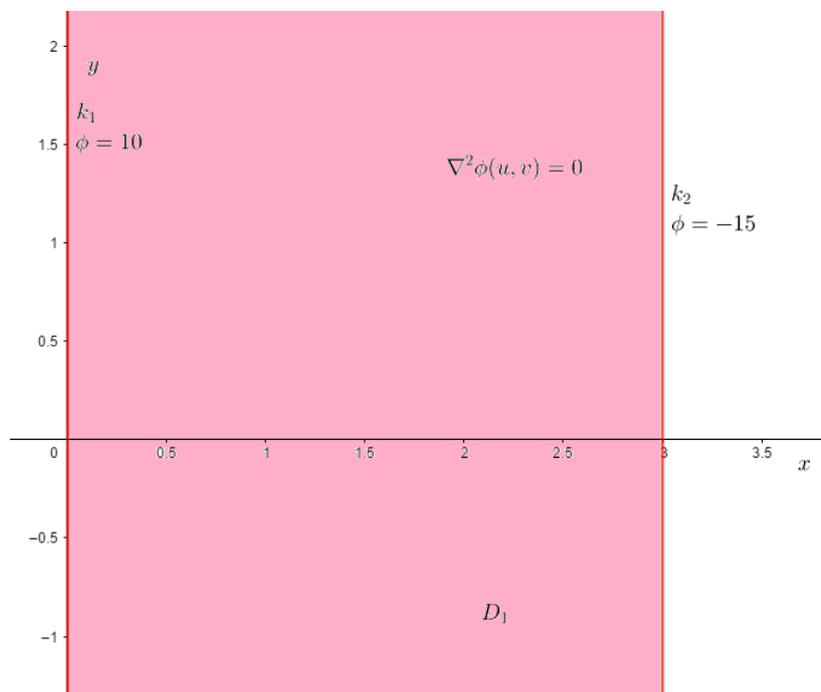


Figura 3.6: Plano  $w$ . Problema de Dirichlet equivalente en el dominio  $D_1$  bajo la transformación  $S(z)$

En  $D_1$  sabemos que la función  $\phi(u, v)$  que resuelve el problema de Dirichlet es

$$\phi(u, v) = \left( \frac{m_2 - m_1}{h} \right) u + m_1$$

en este caso  $m_2 = -15$ ,  $m_1 = 10$ , y  $h = 3$  por lo tanto

$$\phi(u, v) = \left( \frac{-15 - 10}{3} \right) u + 10 = \frac{-25u}{3} + 10$$

finalmente haciendo uso del lema 3.1.1 obtenemos que  $\phi(x, y) = \phi(S(x + yi))$  es la función que resuelve el problema de Dirichlet en  $D$ . Entonces notemos que  $S(z) = S(x + yi) = 2 + \frac{2}{x + yi} = 2 + \frac{2(x - yi)}{x^2 + y^2} = \left( 2 + \frac{2x}{x^2 + y^2} \right) - \left( \frac{2y}{x^2 + y^2} \right) i = u + vi$ , por lo tanto

$$\phi(x, y) = \frac{-50x}{3(x^2 + y^2)} - \frac{20}{3}$$

es la única función que resuelve el problema de Dirichlet en  $D$ .

## Anillos

En esta sección resolveremos el problema de Dirichlet en dominios que pueden ser transformados a una región delimitada por círculos concéntricos centrados en el origen.

1. En este caso el dominio  $D$  donde se requiere resolver el problema de Dirichlet está delimitado por las circunferencias  $C_1 : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , y  $C_2 : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , que en la figura 3.7 se muestra de color amarillo. Como  $C_1$  y  $C_2$  no se intersecan en ningún punto entonces no es posible transformar  $D$  en una franja infinita, pero podemos transformar  $D$  en un anillo delimitado por círculos concéntricos centrados en el origen.

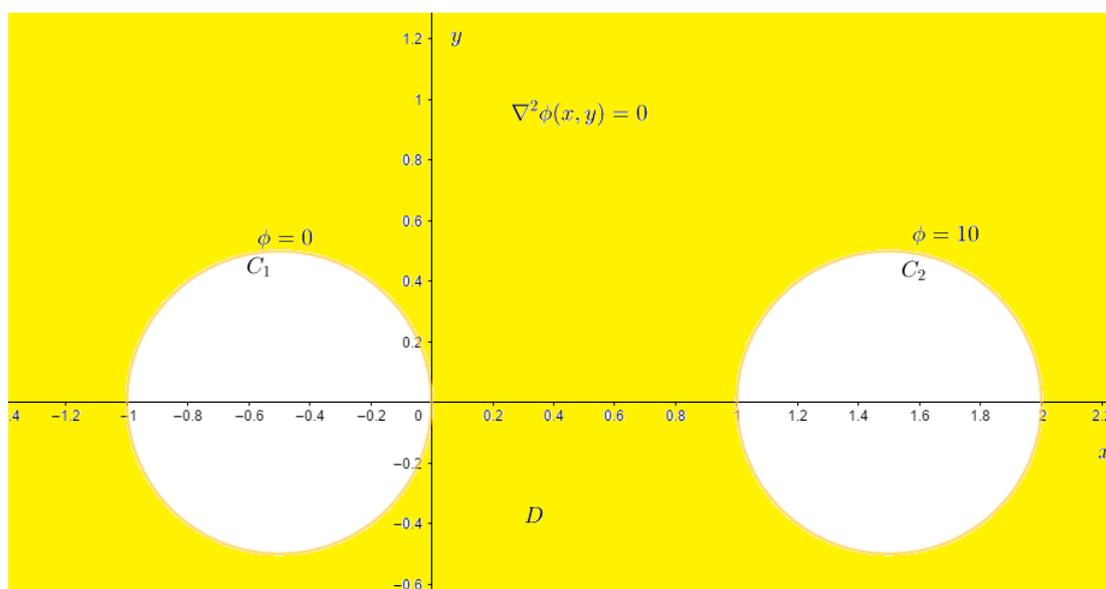


Figura 3.7: Problema de Dirichlet en el dominio  $D$  delimitado por  $C_1$  y  $C_2$

Para encontrar la transformación de Möbius  $T$  que logre convertir  $D$  en un anillo  $D_1$  notamos que tenemos dos opciones, la primera es que  $T(C_1)$  encierre a  $T(C_2)$ , o en su defecto que  $T(C_2)$  encierre a  $T(C_1)$ . En ambos casos  $T(D) = D_1$  es la zona entre  $T(C_1)$  y  $T(C_2)$ . En este caso lo que haremos será encerrar  $T(C_1)$  en  $T(C_2)$  porque podemos mantener un punto fijo de esta manera. Para esto hacemos que  $T(1) = 1$  y que  $T(2) = -1$ . Por la conformalidad de  $T$ , esta elección implica que  $T(C_2)$  es una circunferencia centrada en el origen, y que  $T(C_1)$  será una circunferencia. Ahora lo que necesitamos es tomar un punto de  $C_1$  y calcular su imagen de tal manera que  $T(C_1)$  quede centrada en el origen. Nuevamente, debido a que

$T$  es conforme sabemos que  $T(0)$  y  $T(-1)$  se ubicarán sobre el eje  $x$ , y ya que queremos que  $T(C_1)$  se centre en el origen entonces  $T(0) = \frac{|T(0) - T(-1)|}{2} = r$  donde  $r$  será el radio de  $T(C_1)$ . Para poder calcular  $r$  vamos a usar la ecuación 2.2, entonces

$$\frac{(w-1)(1-r)}{(-1-1)(w-r)} = \frac{(z-1)(2-0)}{(2-1)(z-0)}$$

$$\frac{(w-1)(1+r)}{2(w-r)} = \frac{2(z-1)}{z}$$

$$z(w+wr-1-r) = 4(zw-zr-w+r)$$

$$w = \frac{z(1-3r)+4r}{z(1+r-4)+4}$$

entonces nuestra transformación buscada es  $T(z) = w$ . Además porque requerimos que  $T(C_1)$  esté centrada en el origen y que  $T(0) = \frac{|T(0) - T(-1)|}{2} = r$ , se tiene que  $T(-1) = -T(0)$ , luego

$$\frac{-1+3r+4r}{-1-r+4+4} = -r \Rightarrow \frac{7r-1}{7-r} = -r \Rightarrow 7r-1 = -7r+r^2$$

$$r^2 - 14r + 1 = 0 \tag{3.3}$$

al resolver la ecuación 3.1 se obtiene que  $r = 7 \pm 4\sqrt{3}$ . Ya que queremos que  $T(C_1)$  esté encerrada en  $T(C_2)$  entonces descartamos el valor de  $r$  mayor a uno y por lo tanto se fija  $r = 7 - 4\sqrt{3}$ . Este último valor para  $r$  lo reemplazamos en la ecuación para  $T(z)$ , y obtenemos que

$$T(z) = \frac{z(1-3(7-4\sqrt{3}))+4(7-4\sqrt{3})}{z(7-4\sqrt{3}-3)+4} = \frac{z(-5+3\sqrt{3})+7-4\sqrt{3}}{z(1-\sqrt{3})+1}$$

En la figura 3.8 se muestra el dominio  $T(D) = D_1$  de color amarillo limitado por los clines  $T(C_1) = C_3$  y  $T(C_2) = C_4$ , y el problema de Dirichlet equivalente en este dominio. Al plano de la figura 3.8 lo llamamos el plano  $w$ , y sus coordenadas son  $(u, v)$ .

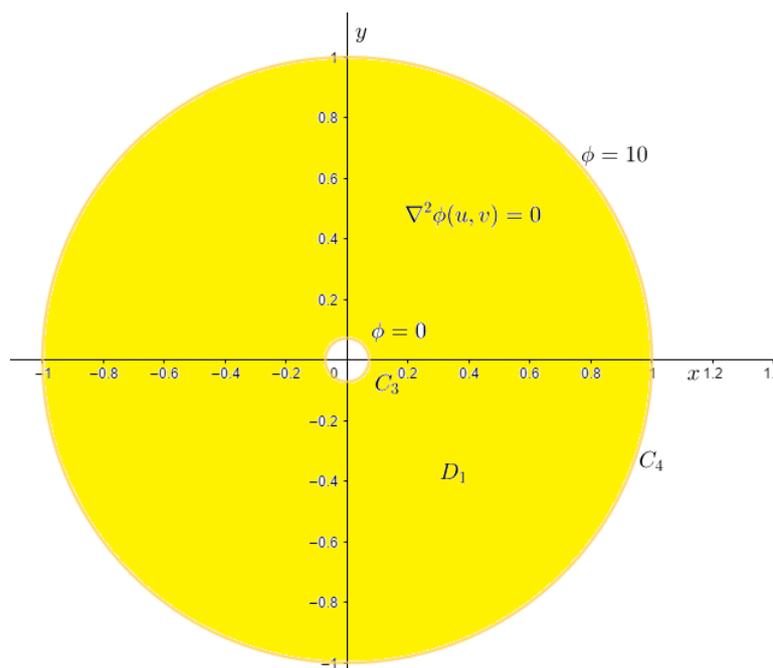


Figura 3.8: Plano  $w$ . Problema de Dirichlet equivalente en el dominio  $D_1$  delimitado por  $C_3$  y  $C_4$

De la ecuación 3.2 obtenemos que la función  $\phi(u, v)$  que resuelve el problema de Dirichlet en  $D_1$  es de la forma

$$\phi(u, v) = m_1 + \left( \frac{m_1 - m_2}{\ln(R_2/R_1)} \right) \ln(R_1) + \left( \frac{m_1 - m_2}{\ln(R_2/R_1)} \right) \ln(\sqrt{u^2 + v^2})$$

en este caso se tiene que  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 10$ ,  $R_2 = 1$ , y  $R_1 = 7 - 4\sqrt{3}$ , por lo tanto

$$\phi(u, v) = \left( \frac{-10}{\ln(1/7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln(7 - 4\sqrt{3}) + \left( \frac{-10}{\ln(1/7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln(\sqrt{u^2 + v^2})$$

$$\phi(u, v) = \left( \frac{10}{\ln(7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln(7 - 4\sqrt{3}) + \left( \frac{10}{\ln(7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln(\sqrt{u^2 + v^2})$$

$$\phi(u, v) = 10 + \left( \frac{10}{\ln(7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln(\sqrt{u^2 + v^2})$$

finalmente, el lema 3.1.1 nos dice que la función  $\phi(x, y)$  que resuelve el problema de Dirichlet en  $D$  es la composición  $\phi(u, v) \circ T(z)$ , y debido a que  $\sqrt{u^2 + v^2} = |T(z)|$ , donde  $|\cdot|$  es la

norma de un número complejo, entonces

$$\phi(x, y) = 10 + \left( \frac{10}{\ln(7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln(|T(z)|)$$

$$\phi(x, y) = 10 + \left( \frac{10}{\ln(7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln \left( \left| \frac{z(-5 + 3\sqrt{3}) + 7 - 4\sqrt{3}}{z(1 - \sqrt{3}) + 1} \right| \right)$$

$$\phi(x, y) = 10 + \left( \frac{10}{\ln(7 - 4\sqrt{3})} \right) \ln \left( \left| \frac{(x + yi)(-5 + 3\sqrt{3}) + 7 - 4\sqrt{3}}{(x + yi)(1 - \sqrt{3}) + 1} \right| \right); \quad i = \sqrt{-1}$$

es la única función que resuelve el problema de Dirichlet en  $D$ .

## Conclusiones

Con todo el trabajo realizado hasta ahora es posible concluir que la transformada de Möbius es una función versátil que permite tener una visión geométrica y algebraica de su dominio de definición y por lo tanto un mayor entendimiento del mismo. Esta naturaleza hizo posible resolver el problema de Dirichlet de una forma más simple en ciertos dominios con características determinadas. Por lo tanto las transformaciones de Möbius llegan a ser una herramienta importante cuando la dificultad de un problema matemático radica en su geometría.

Adicionalmente, es importante recalcar que gran parte de los resultados obtenidos para las transformaciones de Möbius se deben a que su dominio de definición es  $\Sigma$ . Extender el conjunto  $\mathbb{C}$  a  $\Sigma$  permitió eliminar ciertas limitaciones en la definición de las transformaciones bilineales, y por lo tanto éstas adquirieron nuevas características que simplicaron ciertas pruebas, pero sobre todo permitió tener una visión completa de la naturaleza geométrica de las transformaciones de Möbius.

## Bibliografía

- [1] F, W. H. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (Spanish Edition)*. Editorial Reverté, 2011, ch. Funciones analíticas de una variable compleja, pp. 2261–269.
- [2] HITCHMAN, M. P. *Geometry with an Introduction to Cosmic Topology*. Michael P. Hitchman, 2017, ch. Transformations, pp. 20–43.
- [3] JEFFREY, A. *Complex Analysis and Applications, Second Edition*. CRC Press, 1991.
- [4] JONES, G. A., AND SINGERMAN, D. *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*. Cambridge University Press, 1987, ch. The Riemann Sphere, pp. 1–16.
- [5] JONES, G. A., AND SINGERMAN, D. *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*. Cambridge University Press, 1987, ch. Möbius transformations, pp. 1–16.
- [6] JUDSON, T. W. *Abstract Algebra: Theory and Applications*. 2016, ch. Homomorphisms, pp. 127–134.
- [7] MORRIS, S. A. *Topology without Tears*. Sidney A. Morris, Sept. 2016, ch. 4: Continuous Mappings, pp. 106–119.
- [8] STEIN, E. M., AND SHAKARCHI, R. *Complex Analysis (Princeton Lectures in Analysis, No. 2)*, vol. II of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, 2003.
- [9] TAPP, K. *Matrix Groups for Undergraduates*. American Mathematical Society, 2005.
- [10] ZILL, D. G. *Introducción al Análisis Complejo con Aplicaciones (Spanish Edition)*. Cengage Learning Editores S.A. de C.V., 2011.