

**UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ**

**Colegio de Ciencias e Ingenierías**

**Desarrollo de método de Análisis Aproximado para verificación de resultados para pórticos indeterminados bajo cargas laterales.**

Proyecto de investigación

**Alexis Carrera Zuñiga**

Ingeniería Civil

Trabajo de titulación presentado como requisito  
para la obtención del título de  
Ingeniero Civil

Quito, 15 de mayo de 2018

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ  
COLEGIO DE CIENCIAS E INGENIERIAS

**HOJA DE CALIFICACIÓN  
DE TRABAJO DE TITULACIÓN**

**Desarrollo de método de Análisis Aproximado para verificación de resultados para pórticos indeterminados bajo cargas laterales.**

**ALEXIS CARRERA ZUÑIGA**

Calificación:

Nombre del profesor, Título académico

Víctor Viteri Breedy, Ph.D.

Firma del profesor

•

---

Quito, 15 de mayo de 2018

## Derechos de Autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito (USFQ), incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante:

---

Nombres y apellidos:

Alexis Nicolás Carrera Zúñiga

Código:

00109933

Cédula de Identidad:

1722296694

Lugar y fecha:

Quito, 15 de mayo de 2018

## RESUMEN

El trabajo de titulación se centra en métodos elementales y tradicionales de análisis estructural. La experiencia en el uso de estos métodos proporciona una base sólida para la comprensión de las funciones de códigos de computadora y para darle al estudiante una sensación de ingeniería al mismo tiempo. Al determinar la ubicación aproximada de las articulaciones virtuales (puntos inflexión) en los elementos estructurales causadas por cargas laterales, se puede lograr resolver pórticos estáticamente indeterminados. El trabajo práctico parte de los conceptos de Slope Deflection Method, así mismo partiendo de la teoría del Método del Portal para comprobación y obtención de resultados.

**Palabras claves:** Articulación virtual - Cargas laterales - Estructura indeterminada - Método del portal - Slope deflection method

## ABSTRACT

The following practical work contains focuses on elementary and traditional methods of structural analysis. Using these methods provides a solid foundation of understanding the algorithms of computer codes for analysis and for giving the student an engineering feel at the same time. By determining the approximate location of the virtual hinge in the structural elements, it is possible to solve statically indeterminate frames. The practical work take as a start point the concepts of Slope Deflection Method, also is based in the theory of Portal Method for verification and obtention of results.

**Key words:** Virtual articulation - Lateral loads - Indeterminate structure - Portal method

## TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN .....	10
1.1 Descripción .....	10
1.2 Justificación .....	12
1.3 Objetivos .....	13
1.3.1 Objetivo General .....	13
1.3.2 Objetivos Específicos .....	13
1.4 Notacion, simbolos y convensiones de graficas .....	13
CAPÍTULO 2: DESARROLLO DEL TEMA .....	15
2.1 Metodo del Portal .....	15
2.1.1 Limitaciones del Metodo del Portal .....	16
2.2 Slope Deflection Method .....	17
2.3 Articuciones .....	18
2.4 Suposiciones para el desarrollo del metodo .....	18
CAPÍTULO 3: MARCOS DE UN PISO Y EN SUCESIÓN .....	20
3.1 Introduccion al metodo y planteamiento de ecuaciones .....	20
3.2 Condiciones de equilibrio .....	23
3.3 Evaluación .....	23
3.4 Ubicación de la articulacion virtual .....	25
3.5 Comprobacion para un vano .....	27
3.6 Comprobacion para porticos en sucesiónn .....	29
CAPÍTULO 4: MARCOS EN ELEVACION .....	33
4.1 Introduccion al metodo y planteamiento de ecuaciones .....	33
4.2 Condiciones de equilibrio .....	36
4.3 Evaluación .....	36
4.4 Ubicación de la articulacion virtual .....	39
4.5 Comprobacion .....	43
CAPÍTULO 5: MARCOS INTERMEDIOS .....	46
5.1 Introduccion .....	46
5.2 Suposicion .....	46
5.3 Comprobacion .....	47
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES .....	49

Anexos.....	51
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	53

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ubicación de la articulación columna de la base.....	41
Tabla 2. Ubicación de la articulación columna de superior.....	42

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Método del Portal.....	16
Figura 2. Método del Slope Deflection Method.....	17
Figura 3. Pórtico simple empotrado con cargas laterales.....	20
Figura 4. Geometría y rigideces del pórtico.....	20
Figura 5. Momentos para cada elemento del pórtico.....	22
Figura 6. Ubicación de la articulación de la luz.....	24
Figura 7. Ubicación de la articulación en la columna a partir de momentos.....	25
Figura 8. Ubicación de las articulaciones virtuales.....	27
Figura 9. Pórtico de comprobación.....	27
Figura 10. Rigidez del pórtico de comprobación.....	28
Figura 11. Momentos del Pórtico.....	29
Figura 12. Pórticos en sucesión de comprobación.....	30
Figura 13. Rigidez del pórtico en sucesión.....	30
Figura 14. Momentos del pórtico en sucesión.....	31
Figura 15. Pórtico empotrado con cargas laterales.....	33
Figura 16. Geometría y Rigideces.....	34
Figura 17. Pórtico con sus desplazamientos y giros.....	34
Figura 18. Momentos para cada elemento del pórtico.....	35
Figura 19. Ubicación de las articulaciones virtuales de la luz.....	38
Figura 20. Ubicación de la articulación en la columna a partir de momentos.....	39
Figura 21. Ubicación de la articulación columna de la base.....	41
Figura 22. Ubicación de la articulación columna nivel superior.....	42
Figura 23. Pórtico elevación con cargas laterales.....	43
Figura 24. Pórtico de comprobación.....	43
Figura 25. Comprobación columna de la Base.....	44
Figura 26. Comprobación columna nivel superior.....	45
Figura 27. Suposición pórticos intermedios.....	46
Figura 28. Pórtico 5 pisos cargas laterales.....	47
Figura 29. Resultados de los momentos de columnas intermedias.....	48

# CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

## 1.1 Descripción

Hasta inicios de la década de los setenta, el cálculo estructural primordialmente se realizaba mediante métodos “manuales”, muchos de los cuales incorporaban aproximaciones. Sin embargo, su utilización para resolución de problemas complejos era limitado debido a la gran cantidad de cálculos requeridos para la solución. Todo esto cambió con el desarrollo de las computadoras, las cuales permitieron realizar estas operaciones de manera exacta en milésimas de segundos, eliminando así la limitación de la cantidad de cálculos, gracias a la utilización de aplicaciones informáticas especializadas. De hecho, ya en 1958 con el uso de la IBM 704 se podían resolver matrices simples para las deformaciones de una viga de sección rectangular en relativamente poco tiempo (Kurrer, 2008). En los años 60, el cálculo para estructuras de poca altura, era realizado generalmente a través del método de Cross, mientras que para estructuras de mayor altura se usaban métodos aproximados, como el método del Portal y Voladizo (Romero, 2005). Los primeros programas fueron utilizados únicamente para investigación y creación de nuevos conceptos. La utilización de matrices para la solución y cálculo de estructuras hasta las primeras aplicaciones prácticas en la ingeniería abarca un poco más de 70 años. (Kurrer, 2008).

Uno de los principales beneficios alcanzados a través del uso de computadoras para el cálculo estructural, es la posibilidad de calcular con mayor exactitud y construir edificaciones cada vez con mayor altura y con mayor certeza de su comportamiento estructural, de esta manera también se ha logrado aumentar la eficiencia en la utilización de materiales gracias a que el mejor entendimiento de los esfuerzos a los que va a estar sometida la estructura permite diseñar la estructura de una manera más eficaz.

La posterior incorporación de métodos de análisis con elementos finitos permitió al diseñador tener ventajas significativas al momento del diseño al permitirle conocer la localización de fuerzas en cada área de la sección, sin embargo, el uso de estos no libra la posibilidad de errores.

Errores de concepto al momento de diseñar y modelar la estructura en programas computacionales, han llevado a muchas edificaciones a presentar problemas estructurales e incluso en algunos casos el fallo de la misma. Conceptos básicos que se pueden pasar por alto debido a la mala utilización de las aplicaciones de computadoras para el cálculo y posterior diseño. El uso de programas no justifica incurrir en deficiencias, ya que dichos programas están concebidos para introducir los valores correctamente. (Romero, 2005).

Es por ello que existe la necesidad de un método de verificación rápido, que cuente tanto con la precisión para el pre diseño así como para la verificación en las diferentes etapas de la construcción. La importancia de contar con un método que cumpla estas características, radica en el hecho que además sirva como herramienta para comprender mejor el comportamiento de las estructuras de una manera más sencilla y rápida, lo cual puede ser ampliamente utilizado tanto en ingeniería como en arquitectura. Para algunos ingenieros y estudiantes el objetivo del diseño es el cálculo, dimensionamiento de secciones y detallado de los elementos estructurales. Es correcto afirmar que estos pasos son esenciales, estas son el resultado de un análisis previo que si no es realizado de manera adecuada, terminará en resultados erróneos y alejados de los requerimientos reales de la estructura.. El Pre dimensionamiento, verificaciones y las decisiones importantes son llevadas acabo en las primeras etapas. (Fraser, 1981)

El estudio de todas las estructuras es aproximado, pues es necesario realizar ciertas hipótesis para llegar a una solución. (Benson,1982). El desarrollo del modelo

aproximado de verificación del comportamiento de los elementos estructurales de pórticos sometidos a cargas laterales presentado toma en cuenta el impacto de la variabilidad de la rigidez en los elementos estructurales, tanto en vigas como en columnas, este provee una solución para las limitaciones que presenta el Método del Portal. El trabajo busca determinar la ubicación de articulaciones virtuales, ya que, conociendo su posición, es factible resolver pórticos indeterminados de varios niveles sometidos a cargas laterales. La articulación virtual proporciona ecuaciones adicionales lo cual permite “transformar” al marco indeterminado en un marco con soluciones conocidas, ahí radica la importancia de entender su comportamiento.

## **1.2 Justificación**

En una oficina de diseño, los ingenieros difícilmente tendrán que resolver manualmente una estructura estáticamente indeterminada, gracias a la disponibilidad y el fácil uso de los programas informáticos, pero a su vez estos no están exentos de incurrir en errores de concepto y modelaje.

Al mismo tiempo, los estudiantes deben tener una base teórica sólida poder utilizar los códigos con confianza, teniendo la capacidad crítica de comprender y analizar los resultados arrojados por el programa. La experiencia adquirida con en el uso de métodos aproximados proporciona una base sólida para la comprensión de las funciones de códigos de computadora y para darle al estudiante una sensación de ingeniería al mismo tiempo.

La mayoría de códigos informáticos manejados para el análisis de estructuras en forma de celosía (marcos espaciales y cerchas) todavía se basan en los métodos clásicos de desplazamiento para estructuras indeterminadas. “...en una estructura estáticamente indeterminada, el análisis dependerá de las propiedades elásticas de los elementos” (Benson,1982)

## **1.2 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo General**

El objetivo principal del trabajo consiste en desarrollar un método de verificación aproximado de uso tanto para ingenieros como arquitectos, tomando como punto de partida el Método del Portal para estructuras indeterminadas. Se analizarán sus limitaciones y se propondrán soluciones para marcos estructurales con rigidez variable en vigas y columnas. Se examinará el comportamiento de las articulaciones virtuales para llegar a soluciones aproximadas para marcos sometidos a cargas horizontales.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- Recopilar y formular los conceptos necesarios para implementar los resultados del Método del Portal.
- Desarrollar un modelo óptimo, teniendo en cuenta el impacto de las rigideces de los elementos estructurales.
- Proponer nuevas técnicas sustentadas de verificación para el análisis estructural.
- Encontrar la ubicación de la articulación en los elementos estructurales, con un rango de error bajo.
- Justificar matemáticamente estos cálculos para pórticos estáticamente indeterminados.

## **1.4 Notación, símbolos y convecciones gráficas, unidades**

A lo largo del trabajo, se utilizan convenciones simplificadas. El sistema de coordenadas predeterminado es el plano cartesiano “x” “y”. Las flechas indican el sentido positivo de una cantidad (fuerza o desplazamiento) en la mayoría de

casos. Las unidades predeterminadas son Toneladas (T) para fuerza y Metros (m) para distancias, las mismas que son utilizadas ampliamente.

## CAPÍTULO 2: DESARROLLO DEL TEMA

### 2.1 Método del Portal

Este método fue introducido por primera vez por Albert Smith en la revista "Western Society of Engineers" en 1915.

Los métodos aproximados para cargas laterales como el Método del Portal y de Voladizo fueron la principal herramienta para la construcción de rascacielos en Chicago y en general, en todo Estados Unidos en los años 30. (Kurrer, 2008).

El Método del Portal es un análisis aproximado utilizado para analizar los marcos de edificios sometidos a cargas laterales, siendo su uso más apropiado para marcos de edificios de poca altura. Al mismo tiempo, el Método del Portal es adecuado para edificios que probablemente se deformen en modo de cortante. Este se basa en la distribución de los cortantes en la base, los cuales son proporcionales a las áreas de influencia. (Parikh, 1966).

En el análisis, se hacen las siguientes suposiciones:

- Un punto de inflexión (articulación virtual) está ubicado en la mitad de la altura de cada columna.
- Un punto de inflexión (articulación virtual) se encuentra en el centro de cada luz del pórtico.
- Las fuerzas horizontales actuantes se dividen entre todas las columnas sobre la base, asumiendo que las columnas interiores son el doble de rígidas que las exteriores. Por lo cual, cada columna interior tiene un cortante 2 veces más grande que la columna exterior

Estas suposiciones son derivadas considerando que la viga es mucho mas rígida en comparación a la rigidez de las columnas. Al mismo tiempo, se considera que cada piso

esta conformado por una serie de portales, por lo cual, una columna interna representa la unión de 2 columnas. Además, está sustentado en el principio de simetría y anti simetría para pórticos.

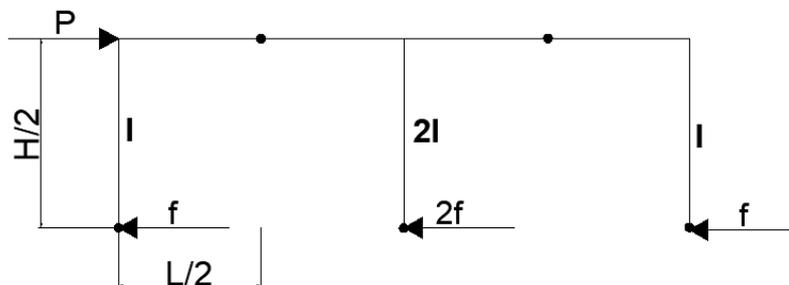


Figura 2 Método del Portal

### 2.1.1 Limitaciones Método del Portal

A pesar de las ventajas dadas por sus conceptos fáciles de entender y metodología sencilla, el Método del Portal posee algunas limitaciones en su exactitud que lo convierten en la actualidad en un método de verificación, más que un método final de cálculo estructural ingenieril. Su primera limitación radica en la suposición de que la viga es infinitamente rígida, lo cual si bien, desde el punto de vista conceptual ayuda a entender el comportamiento de la estructura, en la práctica esta suposición no es real. A más de ello, para el comportamiento sísmico y cargas se busca una menor resistencia de la viga en relación a la columna (NEC, 2015). Esta menor resistencia puede verse reflejada en una menor rigidez. En este trabajo de titulación no se trata de la diferencia entre resistencia y rigidez.

Otra limitación de este método es el uso de los pórticos que se encuentran en sucesión y llevan el doble de rigidez para sus columnas internas en relación a las externas. En la práctica la rigidez de las columnas varía, en muy pocas ocasiones se puede estandarizar de esta manera.

Por estas razones el presente trabajo busca de solucionar esta problemática, dando valores variables de rigidez tanto para vigas como para columnas.

## 2.2 Slope Deflection Method

El Slope Deflection Method fue propuesto originalmente por Mohr para calcular tensiones secundarias en armaduras. G. A. Maney lo presentó como un método en sí mismo en 1915. (Castillo, 1973) Su algoritmo relativamente simple siempre atrajo a ingenieros, aunque el desplazamiento horizontal lo volvía mas complicado. La era de la computadora eliminó este inconveniente dado que el número de incógnitas primarias dejó de ser un problema, el desplazamiento de cada uno de los nodos podía ser incluido y el método fue adoptado para la práctica. La popularidad y simplicidad algorítmica del método inspiró intentos de extenderlo a problemas continuos bidimensionales, lo cual dio origen al nacimiento del método de elementos finitos.

Los Software de computadora han permitido la utilización de métodos de cálculo más completos, dejando así al método slope deflection method obsoleto para la práctica de ingeniería. A pesar de ello, sigue siendo una parte importante de los cursos de mecánica estructural debido a su valor didáctico.

La suposición básica del método se basa en que la deformación axial elástica de la viga es insignificante. (Hirschfeld, 1975)

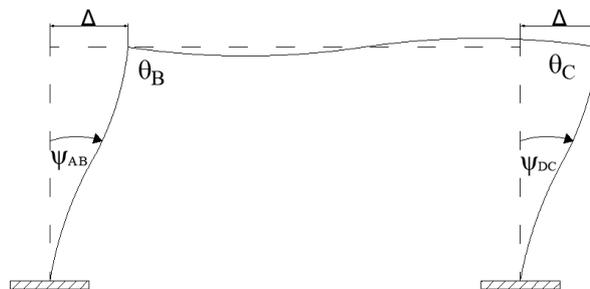


Figura 2 Método del Slope Deflection Method

Para el cálculo del momento en cualquier elemento estructural por definición se usa la siguiente ecuación

$$M_{ij} = 2 \left( \frac{EI}{L} \right) (2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) + FEM_{ij} \quad (1)$$

### 2.3 Articulación Virtual

Las articulaciones virtuales se forman en los puntos de inflexión. En el lugar donde existe una articulación ya sea interna o externa, las rotaciones de las partes conectadas por la articulación son independientes. La rotación adicional se puede eliminar ya que el momento flector en este punto desaparece.

Su ubicación dependerá de las distribuciones de carga y secciones transversales de los elementos estructurales.

Para el propósito de este trabajo el conocer la ubicación de la articulación ayudará a resolver sistemas indeterminados para los pórticos expuestos, transformado en problemas estáticamente determinados.

### 2.4 Suposiciones para el desarrollo del método

Este método se basa en las siguientes suposiciones simplificadas.

- Todos los nodos del marco son rígidos, es decir, el ángulo entre los miembros en los nodos no cambia cuando los miembros del marco están sometidos a cargas laterales.
- Las deformaciones debido a tensiones axiales y de corte, son muy pequeñas, por lo cual es posible despreciarlas
- El número de rotaciones de nodos y el desplazamiento de estos en una estructura dan como resultado los grados de libertad, en otras palabras, las ecuaciones necesarias para poder resolver.

- Se basa en los conceptos principales presentados previamente sobre el Método del Portal y el Slope Deflection Method, siendo estos el punto de partida.

## CAPÍTULO 3: MARCOS DE UN PISO Y EN SUCESION

En este capítulo se buscará una solución para pórticos de un piso y en sucesión, proponiendo así una solución comprobable de manera rápida y con la precisión necesaria para cubrir todos los casos de pórticos concernientes a este tipo. Se analizará el pórtico de la figura 3, el cual está sometido a cargas horizontales y consta de la geometría detallada en la figura 4. A partir de este primer pórtico se evalúan los resultados y se realizará un método para hallar las articulaciones virtuales. Posteriormente, se interpretarán los resultados comprobando con el Software Sap2000. Se toma como punto de partida las ecuaciones del Slope Deflection Method.

### 3.1 Introducción al método y planteamiento de ecuaciones



Figura 3 Pórtico simple empotrado con cargas laterales

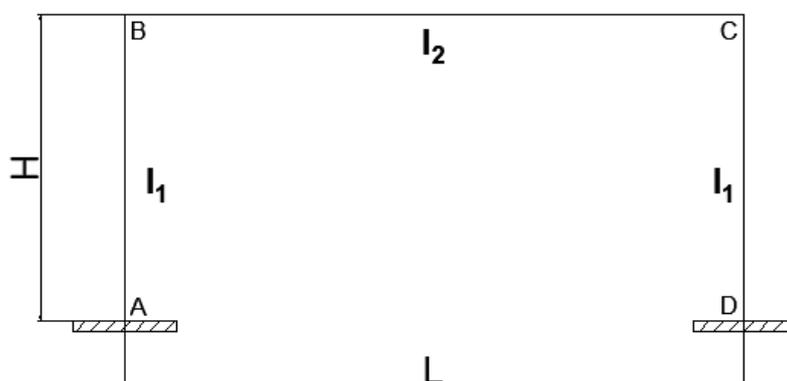


Figura 4 Geometría y rigideces del pórtico

Partimos con nuestro pórtico de la figura (3) y con la ecuación fundamental de Slope Deflection Method (1) se evalúan los giros y desplazamientos de la estructura para cada uno de los elementos. El valor de FEMs (Fix End Moments) será igual a cero para todos los elementos, debido a que no existe una fuerza actuante que los produzca, por lo tanto, no se toman en cuenta para el desarrollo y se trabaja únicamente con la siguiente ecuación .

$$M_{ij} = 2 \left( \frac{EI}{L} \right) (2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij})$$

A continuación, se procede a evaluar para cada uno de los elementos, basándose en los giros y desplazamiento de la figura (2)

Elemento AB

$$M_{AB} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB})$$

$$M_{BA} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{BA})$$

Puesto a que esta empotrado en A no existe valor para " $\theta_A$ "

$$M_{AB} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (\theta_B - 3\psi_{AB})$$

$$M_{BA} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_B - 3\psi_{AB})$$

Elemento DC

$$M_{DC} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_D + \theta_C - 3\psi_{DC})$$

$$M_{CD} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_C + \theta_D - 3\psi_{DC})$$

Al igual que en A no tenemos giro en D;  $\theta_D = 0$

$$M_{DC} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (\theta_C - 3\psi_{DC})$$

$$M_{CD} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_C - 3\psi_{DC})$$

Para el elemento BC el valor de la rotación  $\psi_{BC} = 0$ , lo cual sucede debido a que únicamente existe desplazamiento horizontal del elemento

$$M_{BC} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_C + \theta_B)$$

El valor de la rotación para los elementos AB y DC será el mismo por efectos de simetría, entonces  $\psi_{DC} = \psi_{AB} = \psi$ . Además, se considera el uso del mismo material (Módulo de Elasticidad) por lo cual las ecuaciones de momentos para cada uno de los elementos, finalmente quedan de la siguiente manera:



Figura 5 Momentos para cada elemento del pórtico

$$M_{AB} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (\theta_B - 3\psi) \quad (2)$$

$$M_{BA} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_B - 3\psi) \quad (3)$$

$$M_{DC} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (\theta_C - 3\psi) \quad (4)$$

$$M_{CD} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_C - 3\psi) \quad (5)$$

$$M_{BC} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_B + \theta_C) \quad (6)$$

$$M_{CB} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_C + \theta_B) \quad (7)$$

### 3.2 Condiciones de Equilibrio

En lo que respecta a las condiciones de equilibrio, estas se evalúan en los nodos de la estructura para determinar los valores de momento que son iguales para varios de los miembros, así como el equilibrio de fuerzas. En el nodo  $B$  obtenemos la ecuación (8), mientras que en  $C$  la ecuación (9)

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (8)$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (9)$$

De la sumatoria de fuerzas en  $x$  se obtiene que

$$P + A_x + D_x = 0$$

$$P - \left( \frac{M_{AB} + M_{BA}}{H} \right) - \left( \frac{M_{CD} + M_{DC}}{H} \right) = 0 \quad (10)$$

### 3.3 Evaluación

Reemplazamos las ecuaciones de momento en la primera condición, ecuación (8)

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_B - 3\psi) + 2 \left( \frac{I_2}{L} \right) (2\theta_B + \theta_C) = 0$$

$$\left( \frac{I_2}{L} \right) \theta_C + \left[ 2 \left( \frac{I_2}{L} \right) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) \right] \theta_B - 3 \left( \frac{I_1}{H} \right) \psi = 0 \quad (11)$$

De la segunda condición, ecuación (9) se obtiene

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$2 \left( \frac{I_2}{L} \right) (2\theta_C + \theta_B) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_C - 3\psi) = 0$$

$$\left[ 2 \left( \frac{I_2}{L} \right) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) \right] \theta_C + \left( \frac{I_2}{L} \right) \theta_B - 3 \left( \frac{I_1}{H} \right) \psi = 0 \quad (12)$$

Igualamos la ecuación (11) y (12)

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_2}{L}\right) \theta_C + \left[2\left(\frac{I_2}{L}\right) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)\right] \theta_B &= \left[2\left(\frac{I_2}{L}\right) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)\right] \theta_C + \left(\frac{I_2}{L}\right) \theta_B \\ \left[\left(\frac{I_2}{L}\right) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)\right] \theta_B &= \left[\left(\frac{I_2}{L}\right) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)\right] \theta_C \\ \theta_B &= \theta_C \end{aligned} \quad (13)$$

El giro  $\theta_B = \theta_C$  lo cual garantiza que la articulación virtual se ubica en la mitad de la longitud “L” para el marco.

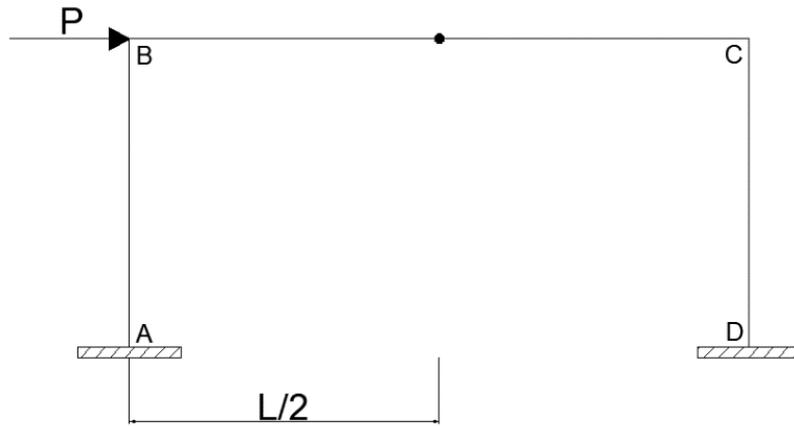


Figura 6 Ubicación de la articulación de la luz

Reescribimos la ecuación (11) y reemplazando lo obtenido en (13)

$$\begin{aligned} \left(\frac{I_2}{L}\right) \theta_C + \left[2\left(\frac{I_2}{L}\right) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)\right] \theta_C - 3\left(\frac{I_1}{H}\right) \psi &= 0 \\ \left[3\left(\frac{I_2}{L}\right) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)\right] \theta_C - 3\left(\frac{I_1}{H}\right) \psi &= 0 \\ \left[3\left(\frac{I_2}{L}\right) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)\right] \theta_C &= 3\left(\frac{I_1}{H}\right) \psi \\ \psi &= \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{I_2 H}{I_1 L}\right)\right] \theta_C \end{aligned} \quad (14)$$

De la tercera condición, ecuación (10), tenemos que

$$P - \left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{H}\right) - \left(\frac{M_{CD} + M_{DC}}{H}\right) = 0$$

$$\left( \frac{2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (\theta_B - 3\psi) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_B - 3\psi)}{H} \right) + \left( \frac{2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_c - 3\psi) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (\theta_c - 3\psi)}{H} \right) = P$$

$$PH = 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (6\theta_c - 12\psi) \quad (15)$$

Sustituimos (14) en (15)

$$PH = 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) \left( 6\theta_c - 12 \left[ \frac{2}{3} + \left( \frac{I_2 H}{I_1 L} \right) \right] \theta_c \right)$$

$$PH = 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) \left( 6\theta_c - 8\theta_c - 12 \left( \frac{I_2 H}{I_1 L} \right) \theta_c \right)$$

$$PH = -4 \left( \frac{I_1}{H} \right) \theta_c - 24 \left( \frac{I_2}{L} \right) \theta_c$$

$$\theta_c = - \left( \frac{PH^2}{4I_1} \right) - \left( \frac{PHL}{24I_2} \right) \quad (16)$$

Con el valor del giro  $\theta_c$ , se reemplaza el resultado (16) en la ecuación (14)

$$\psi = \left[ \frac{2}{3} + \left( \frac{I_2 H}{I_1 L} \right) \right] \theta_c$$

$$\psi = \left[ \frac{2}{3} + \left( \frac{I_2 H}{I_1 L} \right) \right] \left[ - \left( \frac{PH^2}{4I_1} \right) - \left( \frac{PHL}{24I_2} \right) \right] \quad (17)$$

### 3.4 Ubicación de la Articulación

Para determinar la ubicación de la articulación en la columna se utiliza la relación de los momentos en la base y en el nodo, como se observa en la figura 7

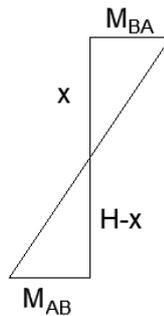


Figura 7 Ubicación de la articulación en la columna a partir de momentos

$$\frac{M_{BA}}{x} = \frac{M_{AB}}{(H-x)}$$

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H-x)} \quad (18)$$

Se reemplaza los valores de momento para encontrar la relación existente entre ambos

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{2 \left(\frac{I_1}{H}\right) (2\theta_B - 3\psi_{AB})}{2 \left(\frac{I_1}{H}\right) (\theta_B - 3\psi)}$$

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{\left(2 \left[-\left(\frac{PH^2}{4I_1}\right) - \left(\frac{PHL}{24I_2}\right)\right] - 3 \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{I_2H}{I_1L}\right)\right] \left[-\left(\frac{PH^2}{4I_1}\right) - \left(\frac{PHL}{24I_2}\right)\right]\right)}{\left(\left[-\left(\frac{PH^2}{4I_1}\right) - \left(\frac{PHL}{24I_2}\right)\right] - 3 \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{I_2H}{I_1L}\right)\right] \left[-\left(\frac{PH^2}{4I_1}\right) - \left(\frac{PHL}{24I_2}\right)\right]\right)}$$

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{\left(2 - 3 \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{I_2H}{I_1L}\right)\right]\right)}{\left(1 - 3 \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{I_2H}{I_1L}\right)\right]\right)}$$

Si  $K = \frac{I_2H}{I_1L}$ , entonces se obtiene:

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{\left(2 - 3 \left[\frac{2}{3} + K\right]\right)}{\left(1 - 3 \left[\frac{2}{3} + K\right]\right)}$$

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{3K}{3K + 1} \quad (19)$$

Por último, se igualan las ecuaciones (19) y (18)

$$\frac{3K}{3K + 1} = \frac{x}{(H-x)}$$

$$3K(H-x) = (3K+1)x$$

$$3KH - 3Kx = 3Kx + x$$

$$6Kx + x = 3KH$$

Finalmente se encuentra la relación para poder determinar la ubicación de articulación virtual en la columna para rigideces variables de viga y columna, como lo muestra la ecuación (20)

$$x = \frac{3K}{6K + 1}H \quad (20)$$

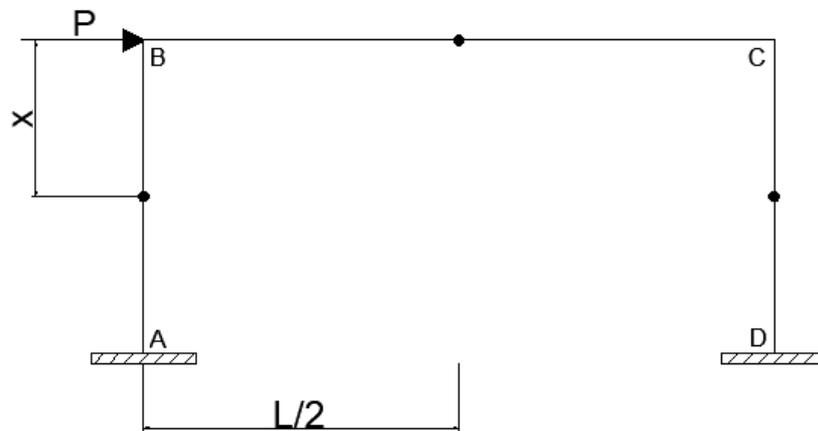


Figura 8 Ubicación de la articulaciones virtuales

### 3.5 Comprobación para un vano

Para la comprobación se realizó la modelación del pórtico en el Software SAP2000, en el cual se tomó como altura del pórtico  $H=3$  metros, y longitud  $L= 6$  metros. Al mismo tiempo se le aplicaron distintos valores de rigidez para la comprobación la ecuación (20).

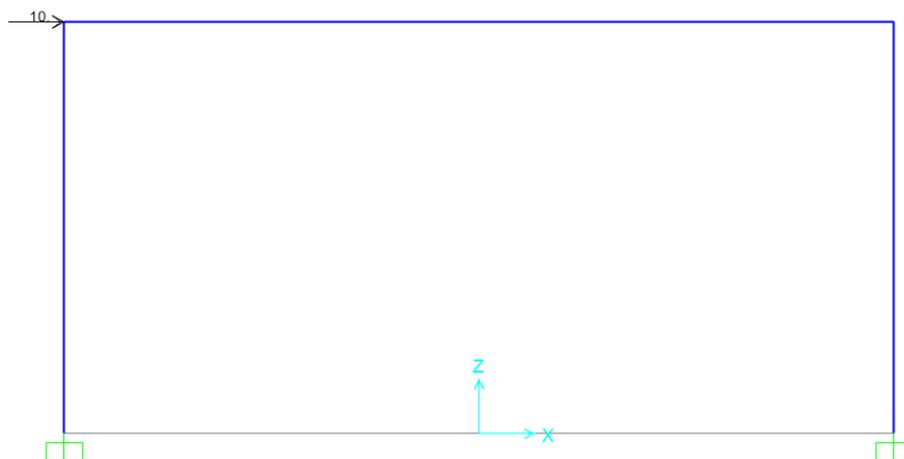


Figura 9 Pórtico de comprobación Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

Para la variación de Inercias en el modelado, se usan las propiedades de secciones con distintos valores con se muestra en los Anexos1, Anexos2 y Anexos3. A

partir de estas se designan las secciones con Inercia de 1, 2 y 3 para así verificar los resultados obtenidos. En la grafica 10 se observan las distintas inercias usadas.

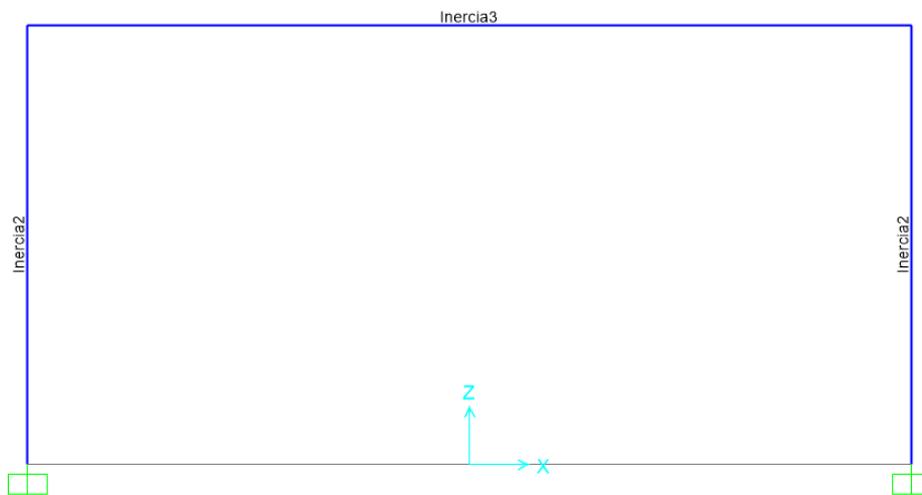


Figura 10 Rigidez del pórtico de comprobación Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

Para el calculo teórico de la ubicación de nuestra articulación, se utiliza los siguientes datos:

$$H = 1 \text{ metros}$$

$$L = 2 \text{ metros}$$

$$2I_1 = 3I_2$$

$$K = \frac{I_2 H}{I_1 L} = \frac{3(3)}{2(6)} = 0.75$$

$$x = \frac{3K}{6K + 1} H = \frac{3(0.75)}{6(0.75) + 1} 3 = 1.227 \text{ m}$$

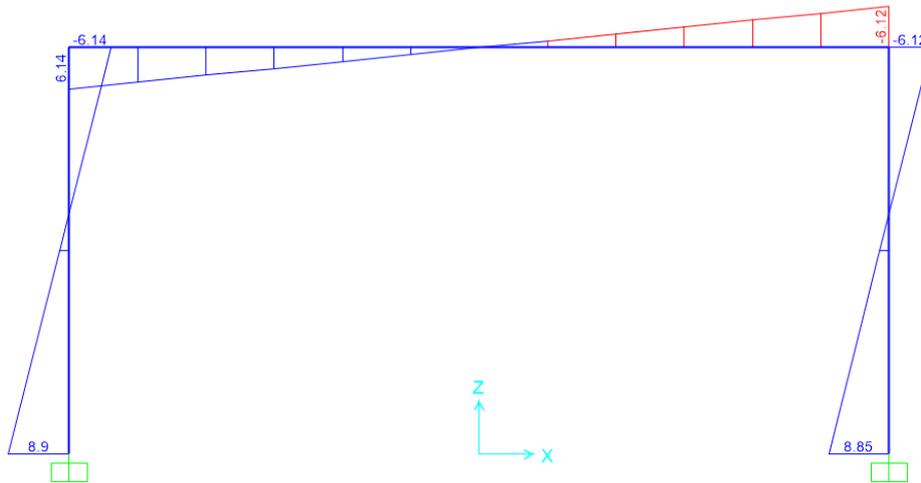


Figura 11 Momentos del Pórtico Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

La ubicación de la articulación esta dada por la ecuación (18) donde:

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H - x)}$$

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{6.14}{8.9} = 0.689$$

$$0.689(3 - x) = x$$

$$x = 1.225 \text{ m}$$

Como se observa, el resultado de la ecuación teórica para encontrar la articulación virtual en la columna es igual a la encontrada con el modelado del programa SAP2000. Así mismo se comprobó que la articulación en la viga ocurre a la mitad de la longitud L. La ubicación de nuestra articulación no depende de la magnitud de la fuerza para estos casos.

### 3.6 Comprobación para pórticos en sucesión

Para la comprobación de los pórticos en sucesión se realizó la modelación del pórtico de 2 vanos en el Software SAP2000. En el mismo se tomó como altura H=3 metros y longitud L= 6 metros, al cual se le aplicaron distintos valores de rigidez para la comprobación la ecuación (20).

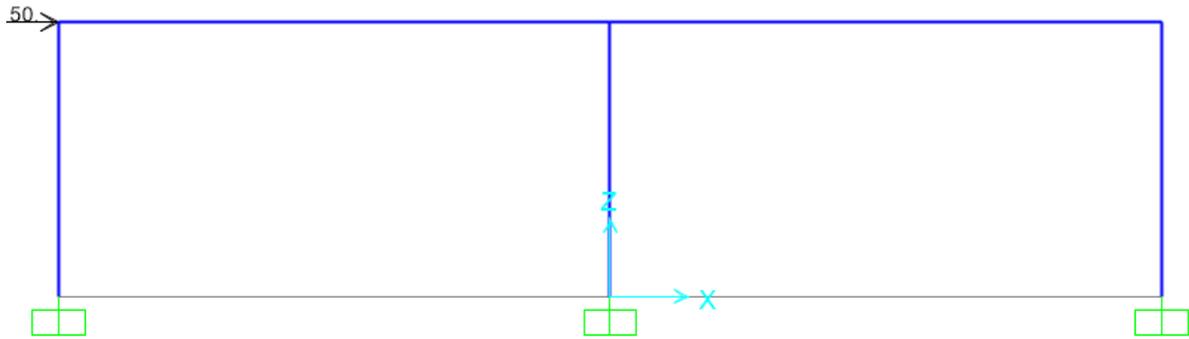


Figura 12 Pórticos en sucesión de comprobación Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

Para la variación de Inercias en el modelado, se usan las propiedades de secciones con distintos valores con se muestra en los Anexos1, Anexos2 y Anexos3. A partir de estas se designan las secciones con Inercia de 1, 2 y 3 para así verificar los resultados obtenidos. En la grafica 13 se observan las distintas inercias usadas.

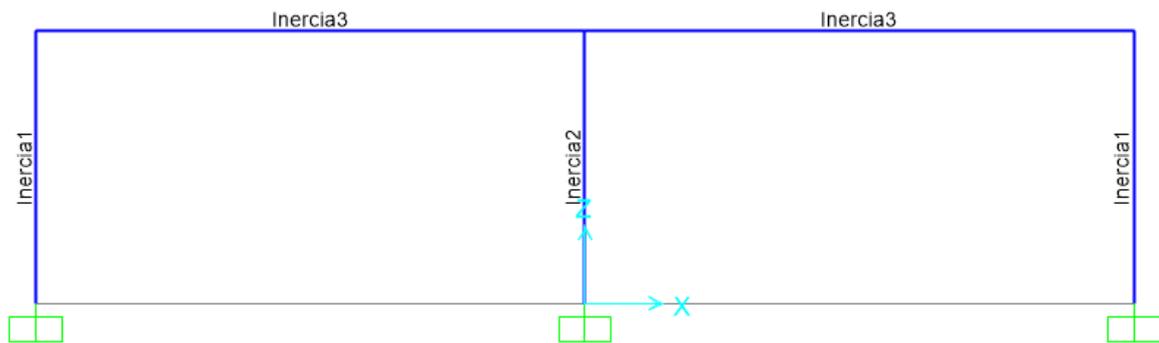


Figura 13 Rigidez del pórtico en sucesión Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

Para el calculo teórico de la ubicación de nuestra articulación, se utiliza los siguientes datos:

$$H = 3 \text{ metros}$$

$$L = 6 \text{ metros}$$

$$I_1 = 3I_2$$

$$K = \frac{I_2 H}{I_1 L} = \frac{3(3)}{1(6)} = 1.5$$

$$x = \frac{3K}{6K + 1} H = \frac{3(1.5)}{6(1.5) + 1} 3 = 1.35 \text{ m}$$

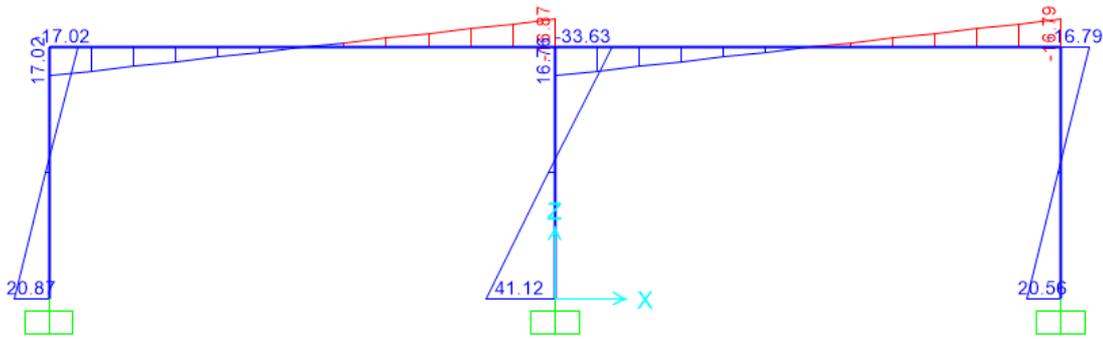


Figura 14 Momentos del pórtico en sucesión Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

La ubicación de la articulación esta dada por la ecuación (18) donde:

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H - x)}$$

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{17.02}{20.87} = 0.815$$

$$0.815(3 - x) = x$$

$$x = 1.348 \text{ m}$$

Para la columna intermedia el valor de x será el mismo 1.35m. Con ello se realiza la comprobación con los resultados de momento arrojados por el Software.

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H - x)}$$

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{33.63}{41.12} = 0.817$$

$$0.817(3 - x) = x$$

$$x = 1.350 \text{ m}$$

Como se observa, el resultado de la ecuación teórica para encontrar la ubicación de la articulación tanto en las columnas externas como para las internas es igual a la encontrada con el modelado del programa SAP2000. Así mismo se comprobó que la articulación en la viga ocurre a mitad de la longitud L. La ubicación de nuestra

articulación no depende de la magnitud de la fuerza para estos casos. La ecuación (20) para este tipo de pórticos funciona con precisión y sin error.

## CAPÍTULO 4: PORTICOS EN ELEVACION

En el capítulo anterior se encontró los valores para la ubicación de articulación virtual de los pórticos de un piso y en sucesión. En este capítulo se busca resolver para pórticos de 2 pisos, los cuales dan las pautas del comportamiento de las columnas de la base, así como las columnas del nivel superior. A partir de esto proponer una solución comprobable de manera rápida y con la precisión necesaria, para así poder cubrir todos los casos de pórticos de este tipo. Se analiza el pórtico de la figura 15, el cual es sometido a cargas horizontales y con geometrías que se detallan en la figura 16. A partir de este primer pórtico se evalúan los resultados y se realiza un método para hallar las articulaciones virtuales. Posteriormente se realiza la comprobación del método con el uso del Software Sap2000. Se toma como punto de partida las ecuaciones del Slope Deflection Method.

### 4.1 Introducción al método y planteamiento de ecuaciones

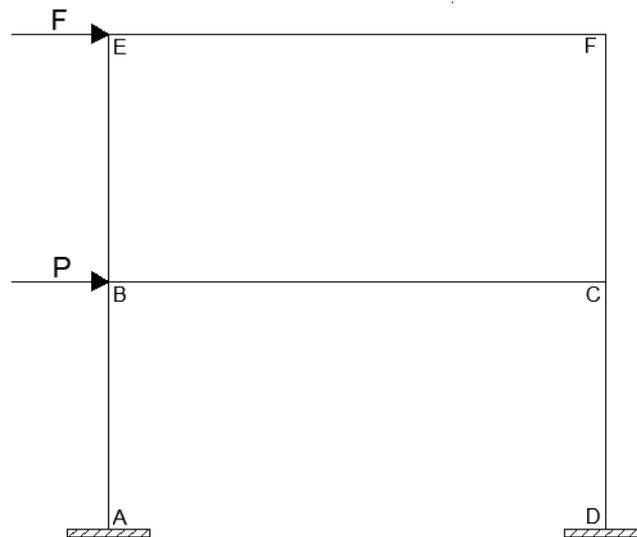


Figura 15 Pórtico empotrado con cargas laterales

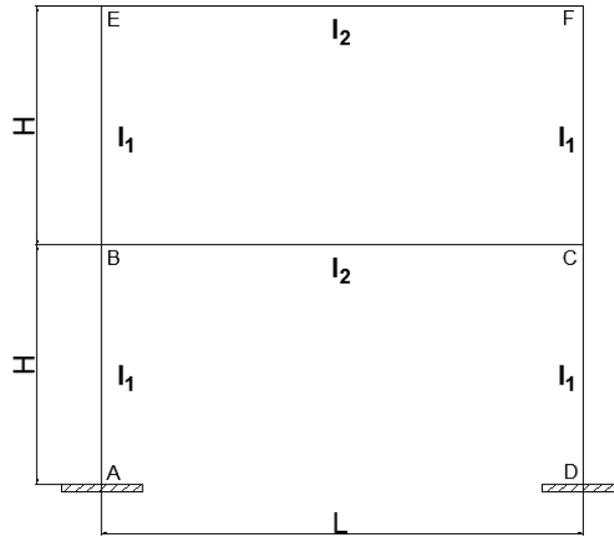


Figura 16 Geometría y Rigideces

$$M_{ij} = 2 \left( \frac{EI}{L} \right) (2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij})$$

Gracias a los resultados obtenidos en el capítulo 3 se conoce que

- El giro  $\theta_A, \theta_D = 0$ .
- La rotación  $\psi_{DC} = \psi_{AB} = \psi_1$
- La rotación  $\psi_{CE} = \psi_{DF} = \psi_2$

Por lo que las ecuaciones de momento para cada elemento estructural quedan de la siguiente manera

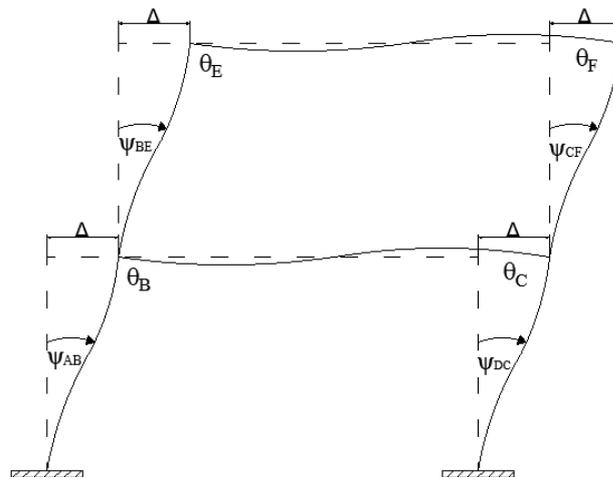


Figura 17 Pórtico con sus desplazamientos y giros

$$M_{AB} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (\theta_B - 3\psi_1) \quad (21)$$

$$M_{BA} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_B - 3\psi_1) \quad (22)$$

$$M_{DC} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (\theta_C - 3\psi_1) \quad (23)$$

$$M_{CD} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_C - 3\psi_1) \quad (24)$$

$$M_{BC} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_B + \theta_C) \quad (25)$$

$$M_{CB} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_C + \theta_B) \quad (26)$$

$$M_{EF} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_E + \theta_F) \quad (27)$$

$$M_{FE} = 2 \left( \frac{EI_2}{L} \right) (2\theta_F + \theta_E) \quad (28)$$

$$M_{BE} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_B + \theta_E - 3\psi_2) \quad (29)$$

$$M_{EB} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_E + \theta_B - 3\psi_2) \quad (30)$$

$$M_{CF} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_C + \theta_F - 3\psi_2) \quad (31)$$

$$M_{FC} = 2 \left( \frac{EI_1}{H} \right) (2\theta_F + \theta_C - 3\psi_2) \quad (32)$$

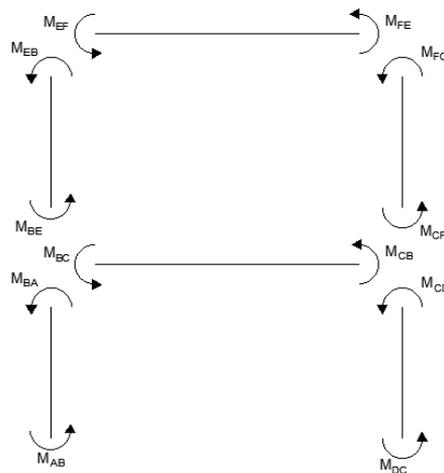


Figura 18 Momentos para cada elemento del pórtico

## 4.2 Condiciones de Equilibrio

Para las condiciones de equilibrio se evalúa en los nodos de la estructura, determinando tanto los valores de momento que son iguales para varios de los miembros como el equilibrio de fuerzas. En el nodo  $B, C, E, F$  se tiene que la sumatoria de los momentos debe ser igual a cero, por lo tanto:

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0 \quad (33)$$

$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CF} = 0 \quad (34)$$

$$M_{EB} + M_{EF} = 0 \quad (35)$$

$$M_{FE} + M_{FC} = 0 \quad (36)$$

De la sumatoria de fuerzas en  $x$  se tiene que

$$P + F + A_x + D_x = 0$$

$$P + F - \left( \frac{M_{AB} + M_{BA}}{H} \right) - \left( \frac{M_{CD} + M_{DC}}{H} \right) = 0 \quad (37)$$

$$F + E_x + F_x = 0$$

$$F - \left( \frac{M_{BE} + M_{EB}}{H} \right) - \left( \frac{M_{CF} + M_{FC}}{H} \right) = 0 \quad (38)$$

## 4.3 Evaluación

Se reemplazan los valores de momento en la tercera condición, ecuación (35)

$$M_{EC} + M_{EF} = 0$$

$$2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_E + \theta_B - 3\psi_2) + 2 \left( \frac{I_2}{L} \right) (2\theta_E + \theta_F) = 0$$

Por facilidad de calculo, se denominará  $N$  a la rigidez relativa de las columnas, mientras que  $M$  será la rigidez relativa de las vigas. Reescribimos las ecuaciones en función de estas rigideces relativas.

$$N = \frac{I_1}{H} \quad M = \frac{I_2}{L}$$

$$N(2\theta_E + \theta_B - 3\psi_2) + M(2\theta_E + \theta_F) = 0$$

$$2(N + 2M)\theta_E + N\theta_B + M\theta_F - 3N\psi_2 = 0 \quad (39)$$

Se sustituyen los valores de momento para la cuarta condición, ecuación (36)

$$M_{FE} + M_{FC} = 0$$

$$2\left(\frac{I_2}{L}\right)(2\theta_F + \theta_E) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)(2\theta_F + \theta_C - 3\psi_2) = 0$$

$$M(2\theta_F + \theta_E) + N(2\theta_F + \theta_C - 3\psi_2) = 0$$

$$(2M + 2N)\theta_F + N\theta_C + M\theta_E - 3N\psi_2 = 0 \quad (40)$$

De la primera condición, ecuación (33)

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0$$

$$2\left(\frac{I_1}{H}\right)(2\theta_B - 3\psi_1) + 2\left(\frac{I_2}{L}\right)(2\theta_B + \theta_C) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)(2\theta_B + \theta_E - 3\psi_2) = 0$$

$$N(2\theta_B - 3\psi_1) + M(2\theta_B + \theta_C) + N(2\theta_B + \theta_E - 3\psi_2) = 0$$

$$(4N + 2M)\theta_B + M\theta_C + N\theta_E - 3N\psi_1 - 3N\psi_2 = 0 \quad (41)$$

Se reemplazan los valores de momento para la segunda condición, ecuación (34)

$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CF} = 0$$

$$2\left(\frac{I_2}{L}\right)(2\theta_C + \theta_B) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)(2\theta_C - 3\psi_1) + 2\left(\frac{I_1}{H}\right)(2\theta_C + \theta_F - 3\psi_2) = 0$$

$$M(2\theta_C + \theta_B) + 2N(2\theta_C - 3\psi_1) + N(2\theta_C + \theta_F - 3\psi_2) = 0$$

$$(4N + 2M)\theta_C + M\theta_B + N\theta_F - 3N\psi_1 - 3N\psi_2 = 0 \quad (42)$$

Resolviendo las ecuaciones (39), (40), (41), (42) se obtiene que

$$\theta_B = \theta_C \quad (43)$$

$$\theta_E = \theta_F \quad (44)$$

**El giro  $\theta_B = \theta_C$ ,  $\theta_E = \theta_F$  lo cual garantiza que la articulación virtual se ubica en la mitad de la longitud “L” para todos los niveles**

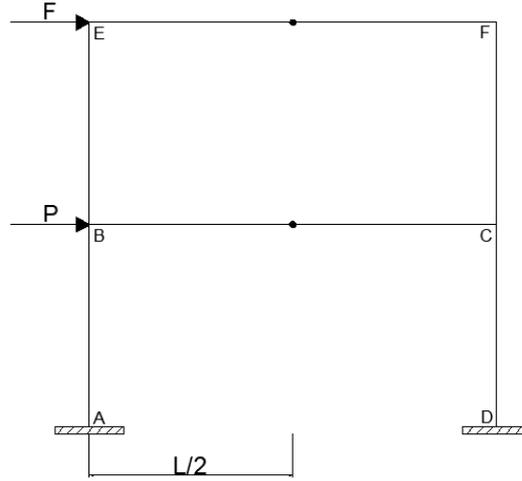


Figura 19 Ubicación de las articulaciones virtuales de la luz

Reescribimos la ecuación (40) y (42) reemplazando lo obtenido en (43) y (44)

obteniendo así:

$$(3M + 2N)\theta_E + N\theta_C - 3N\psi_2 = 0 \quad (45)$$

$$(4N+3M)\theta_C + N\theta_E - 3N\psi_1 - 3N\psi_2 = 0 \quad (46)$$

Se reemplazan los valores de momento para la quinta condición, ecuación (37)

$$P + F - \left( \frac{M_{AB} + M_{BA}}{H} \right) - \left( \frac{M_{CD} + M_{DC}}{H} \right) = 0$$

$$2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (\theta_B - 3\psi_1) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_B - 3\psi_1) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_C - 3\psi_1) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (\theta_C - 3\psi_1) = (P + F)H$$

$$2N(\theta_C - 3\psi_1) + 2N(2\theta_C - 3\psi_1) + 2N(2\theta_C - 3\psi_1) + 2N(\theta_C - 3\psi_1) = (P + F)H$$

$$2N(6\theta_C - 12\psi_1) = (P + F)H$$

$$12N\theta_C - 24N\psi_1 = (P + F)H \quad (47)$$

De la sexta condición, ecuación (38), tenemos que

$$F - \left( \frac{M_{BE} + M_{EB}}{H} \right) - \left( \frac{M_{CF} + M_{FC}}{H} \right) = 0$$

$$2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_B + \theta_E - 3\psi_2) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_E + \theta_B - 3\psi_2) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_C + \theta_F - 3\psi_2) + 2 \left( \frac{I_1}{H} \right) (2\theta_F + \theta_C - 3\psi_2) = FH$$

$$2N(2\theta_B + \theta_E - 3\psi_2) + 2N(2\theta_E + \theta_B - 3\psi_2) + 2N(2\theta_C + \theta_F - 3\psi_2) + 2N(2\theta_F + \theta_C - 3\psi_2) = FH$$

$$12N\theta_C + 12N\theta_E - 24N\psi_2 = FH \quad (48)$$

$$\theta_B = -\frac{Nv + 2Nw + 6Mv + 6Mw}{4N^2 + 72NM + 144M^2} \quad (49)$$

$$\theta_E = -\frac{3N^2w + N^2v + 24NMw + 6NMv + 36M^2w}{4(N + 6M)(N^2 + 18NM + 36M^2)} \quad (50)$$

$$\psi_1 = -\frac{3N^3w + 2N^3v + 27N^2Mw + 30N^2Mv + 54M^2Nw + 126M^2Nv + 108M^3v}{12N(N + 6M)(N^2 + 18NM + 36M^2)} \quad (51)$$

$$\psi_2 = -\frac{8N^3w + 3N^3v + 75N^2Mw + 27N^2Mv + 180M^2Nw + 54M^2Nv + 108M^3v}{12N(N + 6M)(N^2 + 18NM + 36M^2)} \quad (52)$$

Resolvemos los sistemas de ecuaciones (49), (50), (51), (52), agregando la condición de que los valores de la fuerzas son iguales para poder llegar a una solución aproximada.

$$P = F$$

$$\theta_B = -\frac{3N + 12M}{4N^2 + 72NM + 144M^2}$$

$$\theta_E = -\frac{4N^2 + 30NM + 36M^2}{4(N + 6M)(N^2 + 18NM + 36M^2)}$$

$$\psi_1 = -\frac{5N^3 + 57N^2M + 180M^2N + 108M^3}{12N(N + 6M)(N^2 + 18NM + 36M^2)}$$

$$\psi_2 = -\frac{12N^3 + 102N^2M + 234M^2N + 108M^3}{12N(N + 6M)(N^2 + 18NM + 36M^2)}$$

#### 4.4 Ubicación de la Articulación

Para determinar la ubicación de la articulación en la columna se utiliza la relación de los momentos en la base y en el nodo, como se observa en la figura 20

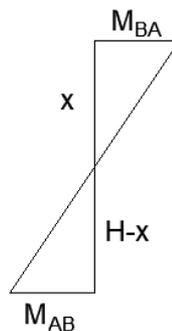


Figura 20 Ubicación de la articulación en la columna a partir de momentos

De la ecuación (18) se tiene que

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H - x)}$$

Se reemplazan los valores y simplificando queda de la siguiente manera

$$R = \frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{108M^3 + 36M^2N - 3N^2M - N^3}{108M^3 + 108M^2N + 27N^2M + 2N^3} \quad (53)$$

Se sustituyen los valores de la ecuación (53) en la ecuación (18) y se obtiene

$$RH - Rx = x$$

$$x = \frac{R}{R + 1}H \quad (54)$$

Finalmente se encuentra la relación para determinar la ubicación de articulación virtual en la columna para rigideces variables, como lo muestra la ecuación (54).

Se observa que la ecuación (53) tiene términos cuadráticos y cúbicos, lo cual para propósitos prácticos y de comprobación requieren mucho tiempo. Se presenta la siguiente alternativa para poder encontrar la ubicación de las articulaciones de una manera más rápida y eficaz.

Si

$$K = \frac{I_2H}{I_1L} = \frac{M}{N} \quad (55)$$

Esta rigidez relativa se representa por K. Para cada uno de los elementos se obtiene dividiendo el momento de inercia por su longitud. A partir de la rigidez K podemos determinar el porcentaje al que se encuentra nuestra articulación virtual representado por las siguiente graficas.

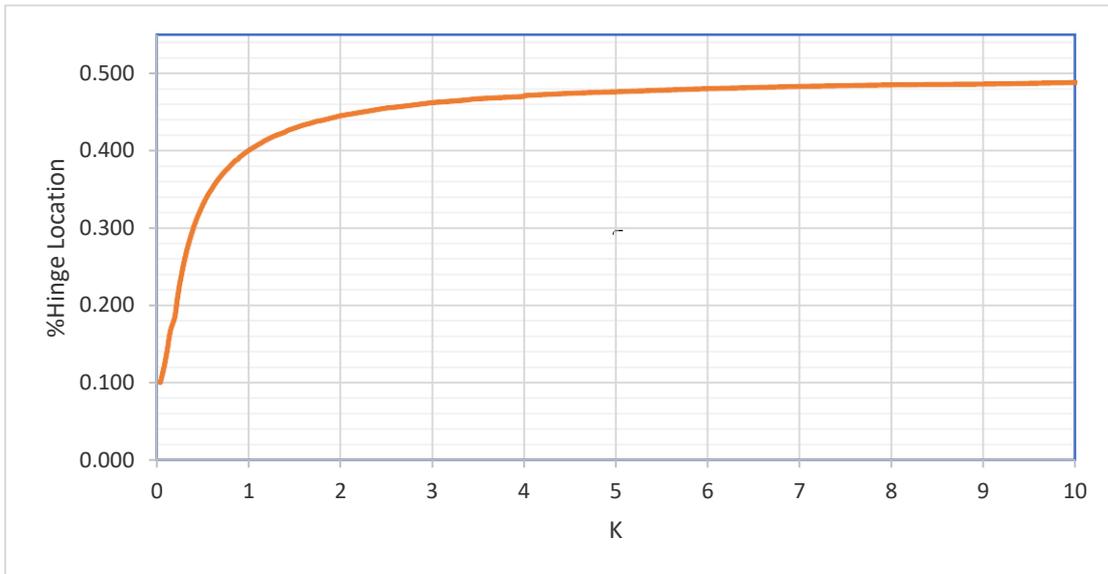


Tabla 1 Ubicación de la articulación columna de la base

Para determinar la ubicación de la articulación virtual en la base de la columna, se calcula el valor de la rigidez relativa  $K$ . Con este valor se procede a la Tabla 1 la cual nos muestra el porcentaje al que se encuentra la articulación virtual para los valores de rigidez del marco. La distancia será  $x$ , la misma que se puede observar en la figura 21.

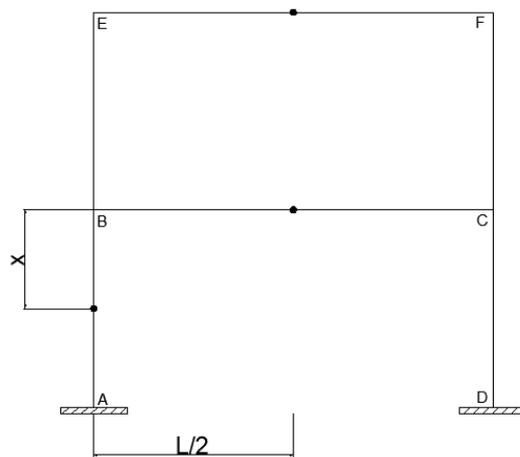


Figura 21 Ubicación de la articulación columna de la base

Además, observando la curva de la tabla 1 se puede concluir que mientras más rígido es  $K$ , el valor va convergiendo a la mitad de la longitud, lo cual comprueba una de las suposiciones del Método del Portal, el cual dice que mientras la viga sea muy rígida la ubicación de la articulación será a la mitad de su distancia.

Para las columnas superiores se usa la siguiente tabla

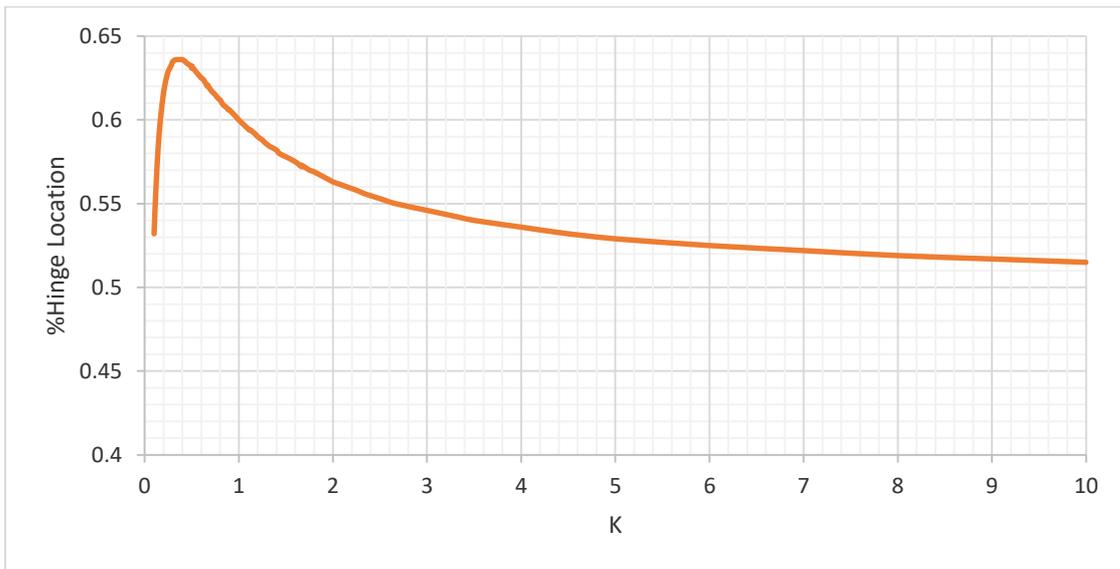


Tabla 2 Ubicación de la articulación columna de superior

Para determinar la ubicación de la articulación virtual en la base de la columna, se calcula el valor de la rigidez relativa  $K$ . Con este valor se procede a la Tabla 2 la cual nos muestra el porcentaje al que se encuentra la articulación virtual para los valores de rigidez del marco. La distancia será  $x$ , la misma que se puede observar en la figura 22.

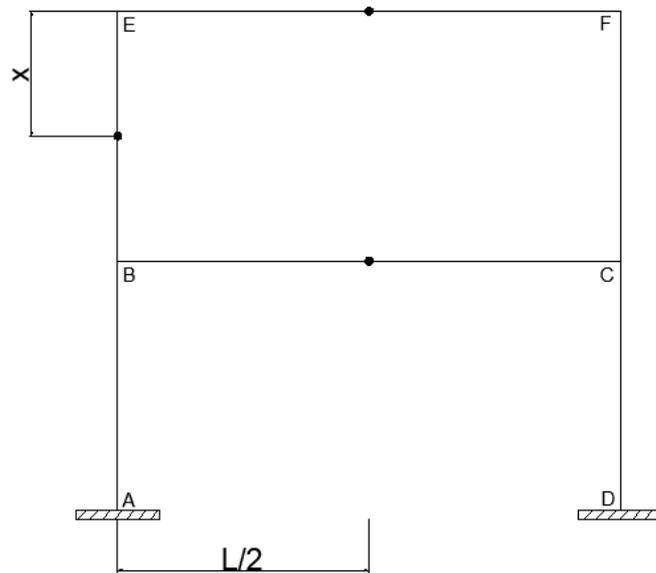


Figura 22 Ubicación de la articulación columna nivel superior

Al igual que en la Tabla 1, se puede observar que mientras mas rígido es la relación K, el valor va convergiendo a la mitad de la longitud, lo cual comprueba una de las suposiciones del Método del Portal.

## 4.5 Comprobación

Para la comprobación se realizó la modelación del pórtico que consta de 2 pisos y 2 vanos, en el Software SAP2000. Se tomó como altura H=3 metros y longitud L= 6 metros, al cual se le aplicaron distintos valores de rigidez para las vigas y columnas, siendo la Inercia de 2 para vigas y 1 para columnas.

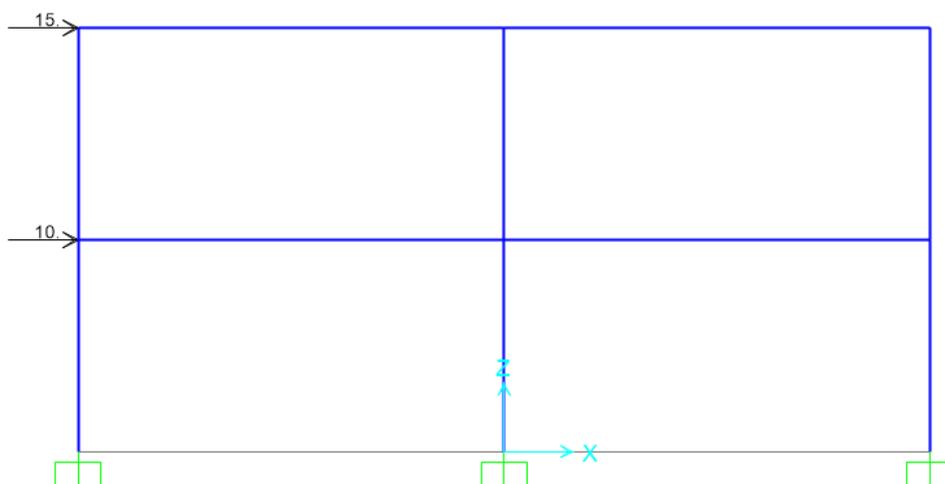


Figura 23 Pórtico elevación con cargas laterales Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

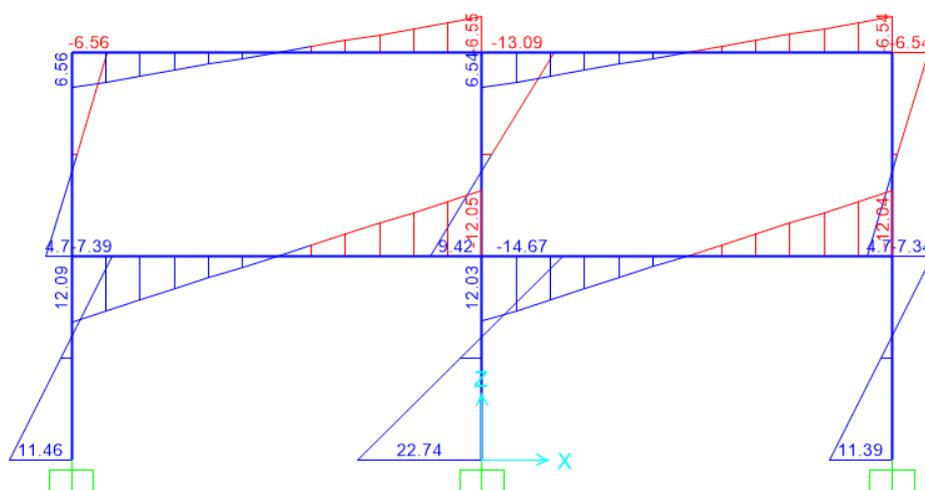


Figura 24 Pórtico de comprobación Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

Para proceder con la comprobación, lo primero que vamos a realizar es encontrar la ubicación de la articulación con la ayuda de los resultados arrojados por el programa SAP2000, donde aplicamos la ecuación (18)

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H - x)}$$

Comenzamos comprobando para las columnas de la base

$$\frac{7.39}{11.46} = \frac{x}{(3 - x)}$$

$$x = 0.392$$

Con los valores “x” que representa la ubicación de la articulación se procede a encontrar el valor de la rigidez relativa con la ecuación (55)

$$K = \frac{M}{N} = \frac{I_2 H}{I_1 L}$$

$$K = \frac{2 * 3}{1 * 6} = 1$$

El valor de la rigidez relativa para la estructura es 1. Con este valor vamos a la tabla 1, como se observa en la Figura 21 para comprobar el resultado a

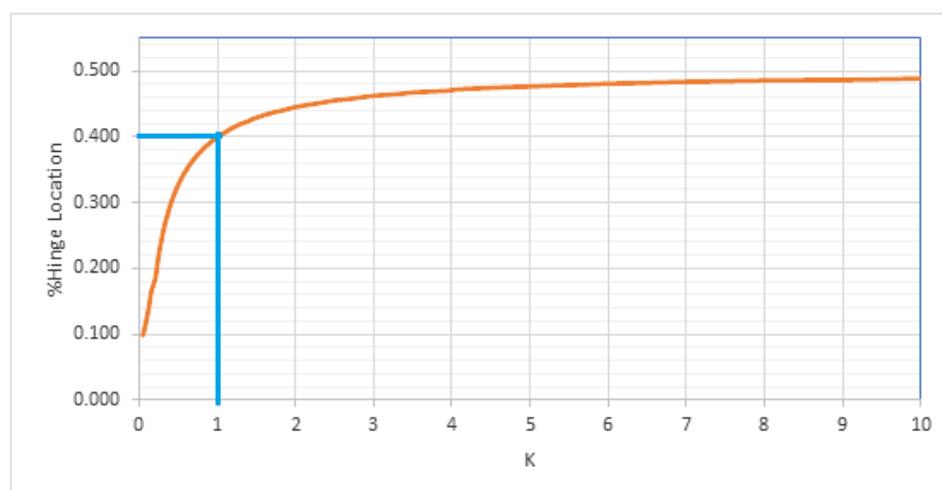


Figura 25 Comprobación columna de la Base

El resultado que se obtuvo para la ubicación de la articulación y la predicción de la Tabla 1 son el mismo como los muestra la Figura 25, con la Tabla 1 que se obtuvo un valor de aproximadamente **0.4**, mientras que la ubicación mostrada programa SAP200 es de **0.392**.

Ahora procedemos a comprobar para las columnas de nivel superior con la ecuación (18) y los resultados de la Figura 23

$$\frac{4.7}{6.56} = \frac{x}{(3 - x)}$$

$$x = 0.583$$

El valor de la rigidez relativa de la estructura es 1, al igual que para las columnas de la base, por lo tanto, procedemos a la verificación con la ayuda de la Tabla 2.

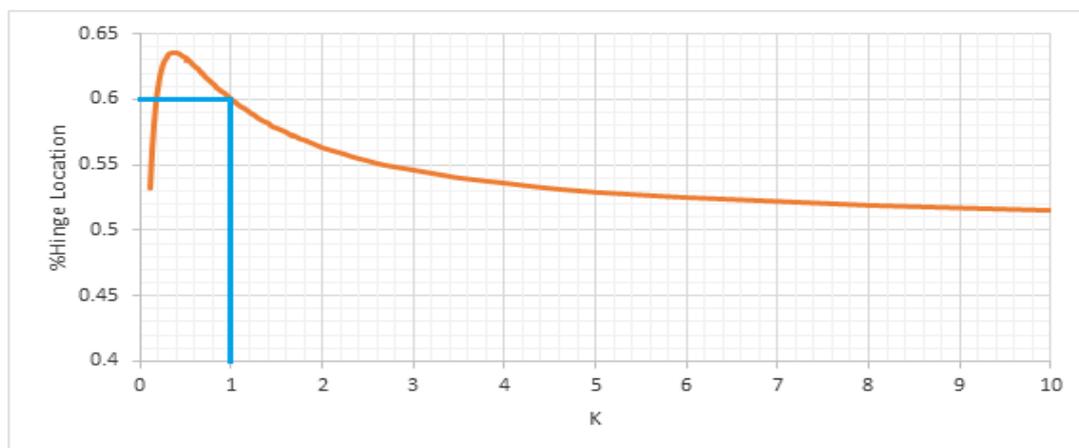


Figura 26 Comprobación columna nivel superior

El resultado que se obtuvo para la ubicación de la articulación y la predicción de la Tabla 2 son el mismo como los muestra la Figura 26, con la Tabla 2 que se obtuvo un valor de aproximadamente **0.6**, mientras que la ubicación mostrada programa SAP200 es de **0.583**. Se pudieron comprobar los resultados para el pórtico con 2 niveles, estos resultados con la ayuda de la Tabla 1 y Tabla 2 se los realiza en poco tiempo, con una excelente precisión, lo cual convierte a este método de verificación, rápido, practico y eficaz.

## CAPÍTULO 5: MARCOS INTERMEDIOS

### 5.1 Introducción

Como pudimos observar en el capítulo anterior se encontró los valores para la ubicación de articulación virtual de los pórticos del nivel superior y los pórticos de la base. En este capítulo se busca resolver para los pórticos intermedios y proponer una solución comprobable de manera rápida y con la precisión necesaria para así poder cubrir todos los casos de pórticos que se puedan presentar. Al referirnos a pórticos intermedios decimos todos aquellos que se encuentran entre la base y el nivel superior de la edificación.

### 5.2 Suposición

La principal suposición para poder resolver esta problemática es proponer que al ser las fuerzas horizontales proporcionales entre si y manteniendo la misma rigidez a lo largo de la columna de la base, así como la columna del nivel superior, los giros que presentan la misma van a ser prácticamente los mismo. Por esta razón la articulación virtual se encontrará en la mitad de las columnas.

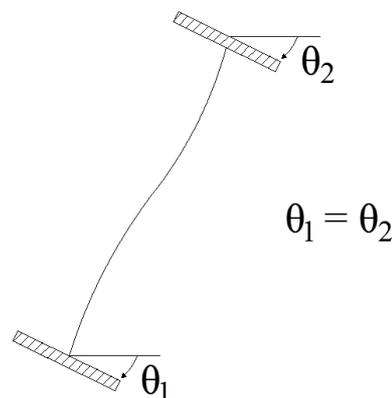


Figura 27 Suposición pórticos intermedios

### 5.3 Comprobación

Para la comprobación se realizó la modelación del pórtico que tiene 5 pisos y 2 vanos, en el Software SAP2000, en el cual se tomó como la altura de cada piso como  $H=3$  metros, el claro de  $L= 6$  metros al cual se le aplicaron distintos valores de rigidez. Para las vigas se uso el valor de Inercia de 2 y para las columnas el valor de la Inercia es 1. Los valores de las fuerzas horizontales son los mostrados en la figura 28

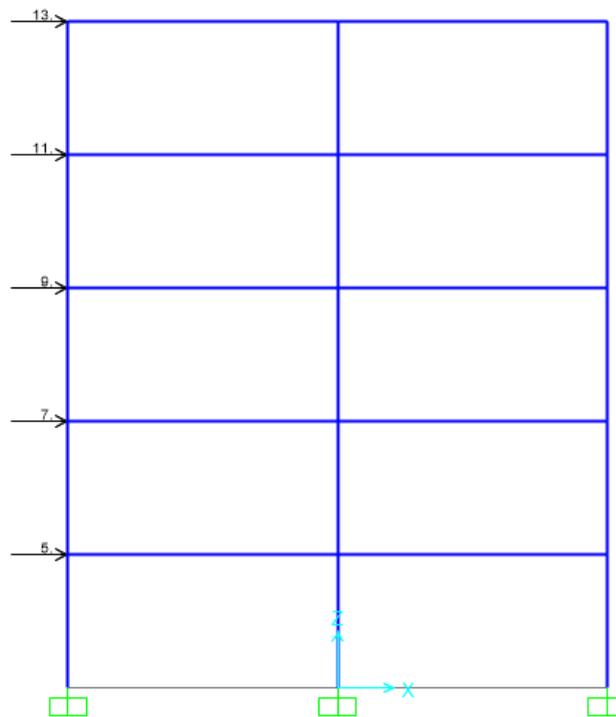


Figura 28 Pórtico 5 pisos cargas laterales Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

Para la comprobación de la suposición presentada en la sección 5.2, aislamos los elementos de interés que son las columnas intermedias. Obtenemos los valores de la figura 29, los cuales con la ayuda de la ecuación (18) se puede hallar la ubicación de la articulación virtual con los momentos.

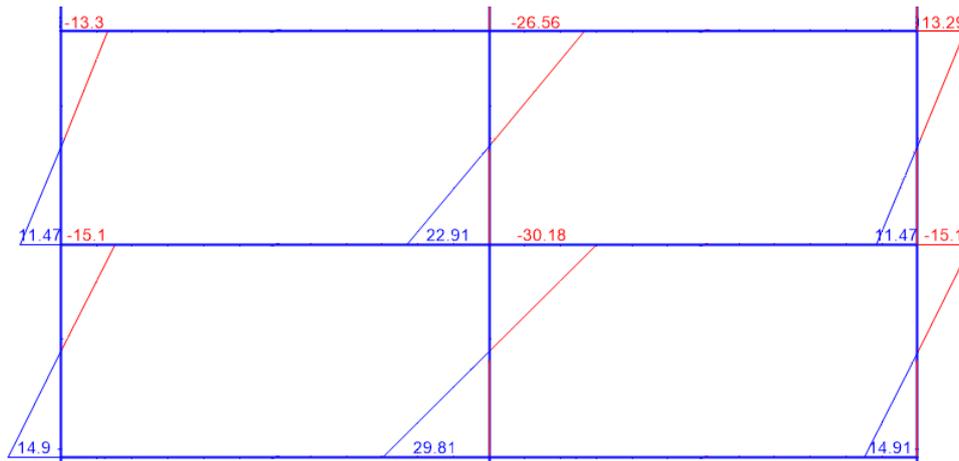


Figura 29 Resultados de los momentos de columnas intermedias Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

Calculo para la columna del eje A, Nivel 2

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H - x)}$$

$$\frac{15.1}{14.9} = \frac{x}{(3 - x)}$$

$$x = 0.503$$

Calculo para la columna del eje A, Nivel 3

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{x}{(H - x)}$$

$$\frac{11.47}{13.3} = \frac{x}{(3 - x)}$$

$$x = 0.536$$

Se puede observar claramente que los valores de la ubicación de la articulación virtual están a prácticamente la mitad de la altura de la columna como lo demuestran los resultados anteriores. Además, para las otras columnas de los mismos niveles se aprecia que también el punto de inflexión se encuentra cerca a mitad de distancia. Por esta razón podemos asegurar que nuestra suposición es acertada una vez siendo comprobada.

## CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

El trabajo de titulación tomo como punto de partida los métodos elementales y tradicionales de análisis estructural. A partir del Método del Portal y Slope Deflection Method se pudo llegar a desarrollo de un método de verificación aproximado de uso tanto para ingenieros como arquitectos.

La experiencia con en el uso y conocimiento de este trabajo de titulación proporciona una base sólida para la comprensión del comportamiento de las estructuras sometidas a cargas horizontales y para darle al estudiante una sensación de ingeniería al mismo tiempo.

El Objetivo general se basa en poder determinar la ubicación aproximada de las articulaciones virtuales (puntos inflexión) de una manera rápida, fácil y sencilla, en los elementos estructurales para lograr resolver pórticos estáticamente indeterminados bajo cargas laterales. Las limitaciones que presenta el Método del Portal se lograron resolver ya que se proponen alternativas de un modelo óptimo para distintos pórticos con rigidez variable en las vigas y columnas.

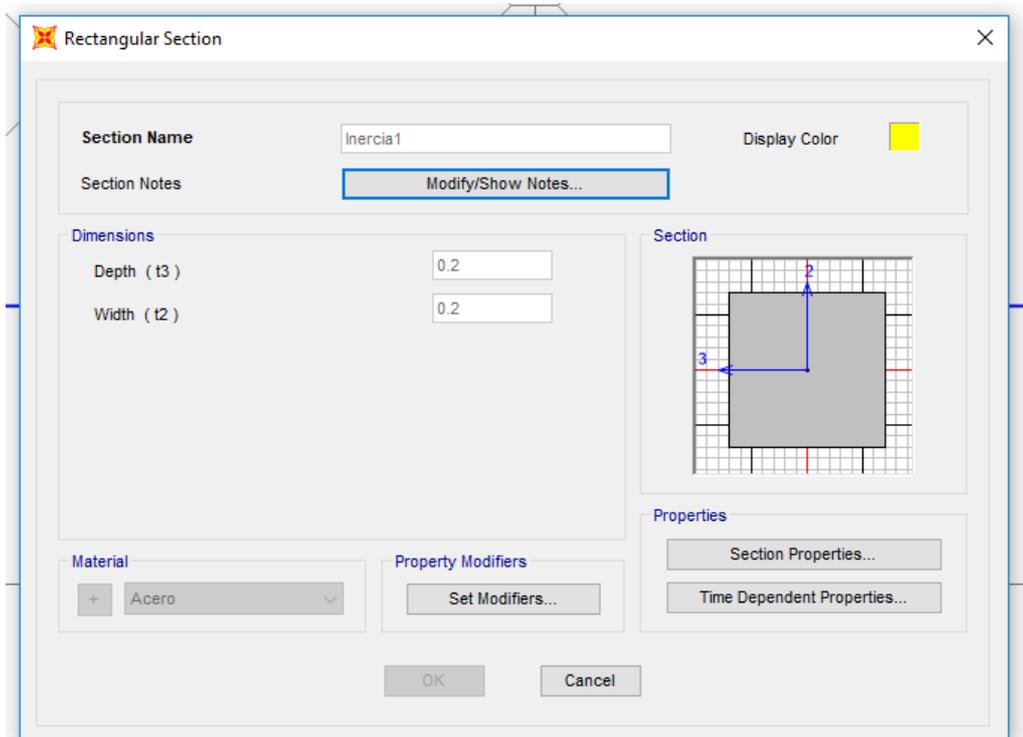
Todos nuestros resultados fueron comprobados con el uso de las ecuaciones de Slope Deflection Method y posteriormente con la utilización de aplicaciones informáticas especializadas (SAP2000). El momento de la verificación de resultados no se obtienen errores considerables, por lo tanto, el método propuesto es una buena herramienta sustentable de verificación para el análisis estructural.

Se puede observar en las Tablas 1 y Tabla 2 como la articulación se acerca a la a la mitad conforme aumenta la rigidez relativa del sistema, esto comprueba la hipótesis del Método del Portal el cual usa vigas muy rígidas.

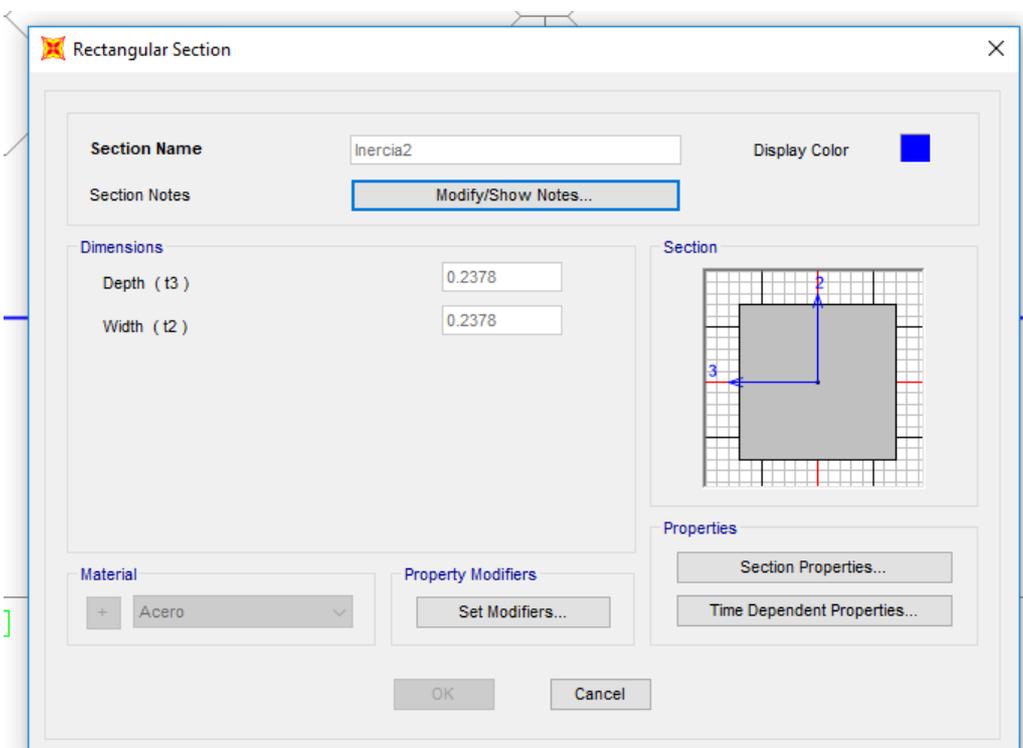
La única suposición necesaria para este Método de verificación es que las fuerzas horizontales aplicadas en el pórtico deben ser proporcional y crecer progresivamente. El Método propuesto presenta errores considerables, al momento de aplicar cargas excesivas y cambios bruscos de la fuerza de un nivel a otro. Este tema debería tratarse para cubrir todos los casos que se puedan presentar en este tipo de estructuras y así entender de mejor manera el comportamiento de las articulaciones virtuales en los elementos.

Puesto que esta es una primera etapa y el enfoque del trabajo de titulación era proponer un método para rigideces variables en los elementos estructurales. Se ha cumplido con lo planteado en los objetivos.

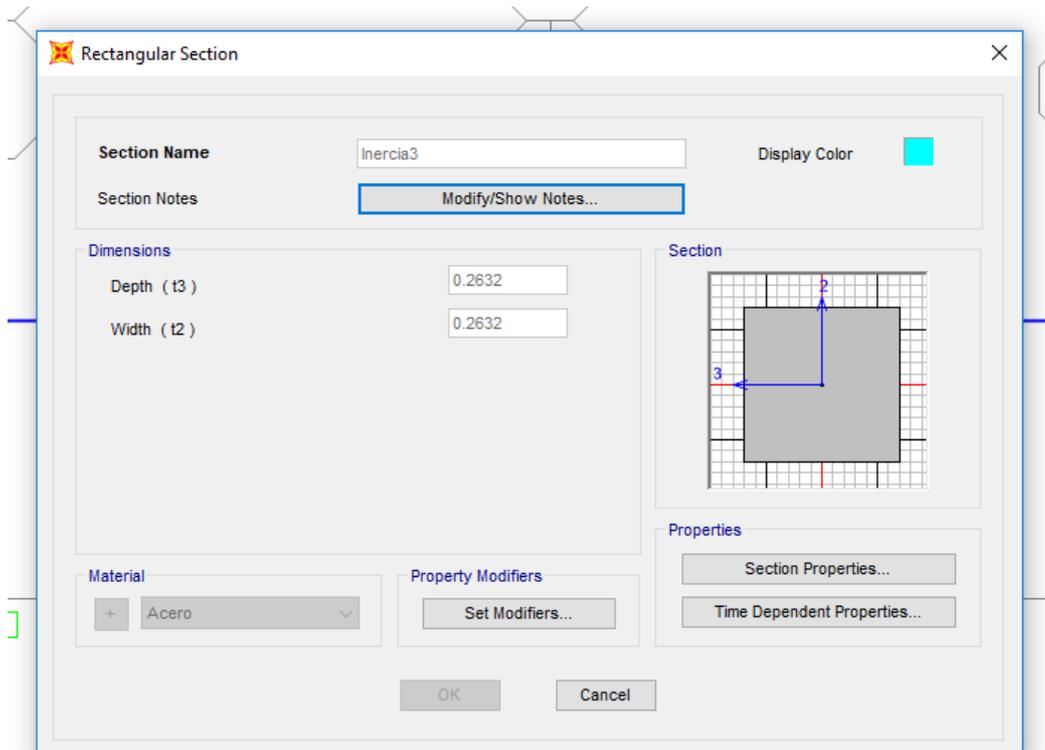
# ANEXOS



Anexo 1 Sección usada para modelado de Inercia con valor de 1 Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)



Anexo 2 Sección usada para modelado de Inercia con valor de 2 Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)



Anexo 3 Sección usada para modelado de Inercia con valor de 3 Fuente: Programa Sap2000 (SCI, 2018)

## REFERENCIAS

Head, Benson, Utku. (1982). *Analisis elemental de estrucutrtras*. McGraw Hill segunda edición

Fraser. (1981). *Conceptual design and preliminary analysis of structures*. Pitman Publishing first edition

AA.VV.(1976) *Manual AJ de estructuras*. Hermann Blume Ediciones

Catillo (1999) *Analisis y diseño estructural*. AlfaOmega, Tomo 2

K. Hirschfeld. (1975) *Estatica en la Construcccion*. Editorial reverté

MARTÍNEZ A. (2002). *Evolución de los Métodos de Cálculo en las Estructuras diseñadas con Pórticos de Concreto Armado para Edificios en el Área Norte de Latinoamérica*, Tesis Doctoral, Departamento de Construcción Arquitectónica, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España. Universidad Tecnica Checa, SM3E Notes, recuperado de, <https://mech.fsv.cvut.cz/homeworks/student/SM3E/notes.pdf>

Parikh(1966) *Elastic-plastic analysis and design of unbraced multi-story steel frames*, Lehigh University, recuperado de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.892.500&rep=rep1&type=pdf>

Kassimali.(2011). *Structural Analysis*. Cengage Learning. Fourth Edition, SI