UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

Construcción de espacios asociados en análisis de Clifford usando una implementación computacional basada en matrices

Proyecto de investigación

David Adrián Armendáriz Peña

Matemáticas

Trabajo de titulación presentado como requisito para la obtención del título de Licenciado en Matemáticas

Quito, 15 de diciembre de 2018

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

HOJA DE CALIFICACIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Construcción de espacios asociados en análisis de Clifford usando una implementación computacional basada en matrices

David Adrián Armendáriz Peña

Calificación:

Nombre del Profesor, Título académico: Antonio Di Teodoro, Ph.D.

Firma del profesor: ______________________________

Quito, 15 de diciembre de 2018

Derechos de autor

Firma del estudiante:	_______________
Nombres y apellidos:	David Adrián Armendáriz Peña
Código:	00130470
Cédula de identidad:	0922553508
Lugar y fecha:	Quito, 15 de diciembre de 2018

RESUMEN

Dos operadores diferenciales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ están asociados si $\mathcal{F}$ mapea soluciones de la ecuación diferencial $\mathcal{G}u = 0$ en soluciones de la misma ecuación, es decir, $\mathcal{F}$ está asociado a $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}(\mathcal{F}u) = 0$. Un espacio funcional es un espacio vectorial cuyos objetos son funciones. El espacio funcional que contiene las soluciones de $\mathcal{G}u = 0$ se llama espacio asociado al operador $\mathcal{F}$.

En el presente trabajo se hallan las condiciones necesarias y suficientes para que dos operadores diferenciales estén asociados sobre el álgebra de los complejos, cuaterniones y también en dimensiones superiores utilizando álgebras de Clifford clásicas cuyas bases están construidas de forma matricial. Para esto se utiliza un código implementado en el lenguaje de programación de Python.

Plabras clave: álgebras de Clifford, espacios asociados, operadores diferenciales, operadores asociados, representaciones matriciales, algoritmos, Python.

ABSTRACT

Two differential operators $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are associated if $\mathcal{F}$ maps solutions of the differential equation $\mathcal{G}u = 0$ into solutions of the same equation, that is, $\mathcal{F}$ is associated to $\mathcal{G}$ if $\mathcal{G}(\mathcal{F}u) = 0$. A function space is a vector space whose objects are functions. The function space containing the solutions of $\mathcal{G}u = 0$ is called the space associated with the operator $\mathcal{F}$.

In the present work we find the necessary and sufficient conditions for two differential operators to be associated over the complex and quaternionic algebras and in higher dimensions using classic Clifford algebras whose bases are built in a matrix form. For this purpose, a code implemented in the Python programming language is used.

Keywords: Clifford algebras, associated spaces, differential operators, associated operators, matrix representations, algorithms, Python.

Índice

1. Introducción

El análisis de Clifford tiene sus orígenes en el análisis cuaterniónico. Este último a su vez nació cuando en 1843, William Rowan Hamilton intentó introducir algo parecido a un sistema tridimensional pero para los números complejos, es decir, tuplas de la forma (z_1, z_2, z_3) donde z_i para $i = 1, 2, 3$ son números complejos. De esta forma, Hamilton creó los los cuaterniones reales (ver [17]). Luego de comprender que los números complejos eran un par ordenado de números reales, de haber notado de que las operaciones con números complejos son en esencia operaciones con números reales y después de que los matemáticos, en 1930, se dieron cuenta de que el álgebra de los números complejos se simplificaba trabajando con vectores en el plano, Hamilton deseaba probar si un análogo espacial del álgebra de números complejos podría ser elaborado de forma que las operaciones con este fueran simplificadas por vectores. Así, estableció que sus nuevos números (es decir, los cuaterniones) debían poseer cuatro componentes reales y la conmutatividad de la multiplicación debía ser sacrificada (ver [12]).

Un cuaternio se define como

$$\omega = a + bi + cj + dk,$$

donde i, j, k son las "unidades imaginarias" de los cuaterniones (denotados como $\mathbb{H}$) que satisfacen $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $ij = k, jk = i, ki = j$. Hamilton introdujo un operador diferencial de primer orden ∇ definido por:

$$\nabla := i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

Notemos que

$$\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\Delta_3,$$

donde Δ_3 representa el Laplaciano del espacio euclideano $\mathbb{R}^3$. El matemático suizo Rudolf Fueter introdujo en [15] un operador que es una generalización en $\mathbb{R}^4$ del operador clásico de Cauchy-Riemann $\partial := \partial_x + i\partial_y$ en el plano complejo. Este operador está definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial t} + \nabla,$$

donde ∇ está dado por (1). Definiendo $\overline{\mathcal{D}} := \frac{\partial}{\partial t} - \nabla$, se tiene que $\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_4$, donde Δ_4 denota el Laplaciano en $\mathbb{R}^4$. Es decir, Fueter fue capaz de "factorizar" el Laplaciano de $\mathbb{R}^4$ con el operador $\mathcal{D}$ y a las soluciones del operador $\mathcal{D}$ de subconjuntos abiertos $\Omega \in \mathbb{R}^4$, es decir, a las funciones que satisfacen $\mathcal{D}u = 0$ en Ω, las llamó funciones regulares a la izquierda de una variable cuaterniónica, dado que el operator $\mathcal{D}$ era aplicado por la izquierda de u (ver [12]).

Con la idea de descomponer el Laplaciano Δ_{n+1} del espacio euclideano $\mathbb{R}^{n+1}$, los matemáticos rumanos Grigore Moisil y Nicolae Teodorescu en [21] consideraron (sin nombrarlo explícitamente) el álgebra real de Clifford $\mathbb{R}^{0,n}$ construida sobre el espacio vectorial cuadrático $\mathbb{R}_{0,n}$ con base ortonormal $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ cuyos elementos satisfacen:

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= 0, \quad \text{si } i \neq j, \\ e_i^2 &= -1, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

También introdujeron una generalización del operador de Cauchy-Riemann dado por:

$$\mathcal{D} = \partial_{x_0} + e_1 \partial_{x_1} + \cdots + e_m \partial_{x_m}.$$

Con la propiedad de que si $\overline{\mathcal{D}} = \partial_{x_0} - e_1 \partial_{x_1} - \cdots - e_m \partial_{x_m}$, entonces

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D} = \Delta_{m+1}$$

En resumen, las álgebras de Clifford son una extensión de los cuaterniones y el enfoque de Fueter, Moisil y Teodorescu fue retomado en los años 60 y de forma independiente por otros matemáticos que marcaron el inicio de esta nueva disciplina del análisis matemático llamada análisis de Clifford.

Hoy en día, muchos de los resultados del análisis de Clifford tienen aplicaciones importantes en campos como la geometría, la física teórica, el procesamiento de imágenes, el análisis harmónico, entre otros (ver [18]). Muy recientemente, existe una línea de investigación que incluye este tipo de análisis y lo vincula directamente con la resolución de problemas de valores en la frontera o de Dirichlet para funciones monogénicas fraccionarias (ver [11]). Esto implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acoplado, lo cual no es siempre una tarea fácil.

En el presente trabajo se estudian las condiciones necesarias para que operadores diferenciales estén asociados en cualquier álgebra de Clifford. Uno de estos operadores es justamente el operador de Cauchy-Riemann introducido por Moisil y Teodorescu. Para esto, partimos de los resultados dados en [31]. Esto se logró con la ayuda de varios códigos implementados en el lenguaje de programación Python que utilizan la representación matricial de los elementos de la base para un álgebra de Clifford.

2. Preliminares

2.1. Álgebras de Clifford

2.1.1. Los números complejos y sus diferentes representaciones

Si se definen a los números complejos como pares ordenados de la forma (a, b) donde $a, b \in \mathbb{R}$ entonces se puede definir la suma y la multiplicación de la siguiente manera (ver [27]):

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Puesto que:

$$\begin{aligned}(a, b) + (0, 0) &= (a, b),\\ (a, b) \cdot (1, 0) &= (a, b).\end{aligned}$$

Para todo par ordenado, entonces se concluye que $(0, 0)$ es el elemento neutro para la suma y $(1, 0)$ es el elemento neutro para la multiplicación.
De esta forma, se nota que los números reales pueden ser identificados con los pares ordenados de la forma $(a, 0)$. Así, las operaciones de suma y multiplicación corresponden con las operaciones usuales de los números reales.

$$\begin{aligned}(a, 0) + (c, 0) &= (a + c, 0),\\ (a, 0) \cdot (c, 0) &= (ac, 0).\end{aligned}$$

Sin embargo, los números complejos también pueden ser representados de la siguiente forma:

$$(a, b) = a + bi = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Donde $i^2 = -1$. Una forma aún más general de representar a los complejos es mediante polinomios lineales de la forma (2)

$$a + bX. \tag{2}$$

De esta forma, la suma y multiplicación de complejos es parecida a la explicada anteriormente siempre y cuando se exija que $X^2 = -1$

$$(a + bX) + (c + dX) = (a + c) + (b + d)X,$$

$$(a+bX)\cdot(c+dX) = ac + (ad+bc)X + bdX^2 = (ac-bd) + (ad+bc)X.$$

Ahora, supongamos que se tiene un polinomio que contenga un término X^n. Si $n \geq 2$ entonces se puede hacer que $X^n = \pm 1$ ó $\pm X$. Si n es par, entonces $n = 2\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{N}$, y por lo tanto,

$$X^n = \underbrace{X^2X^2X^2\cdots X^2}_{\alpha \text{ veces}} = (-1)(-1)\cdots(-1) = \pm 1.$$

En cambio, si n es impar, entonces $n = 2\alpha + 1$ y por lo tanto,

$$X^n = \underbrace{X^2X^2X^2\cdots X^2}_{\alpha \text{ veces}}X = (-1)(-1)\cdots(-1)X = \pm X.$$

Ejemplo 2.1. Si tenemos X^7, entonces podemos reducir este término a $-X$ ya que:

$$X^7 = X^2X^2X^2X = (-1)(-1)(-1)X = -X$$

Si ahora $P(X)$ es de la forma

$$P(X) = a + bX + \cdots + cX^n.$$

Entonces se puede formar otro polinomio haciendo $X^n = X^2X^{n-2} = -X^{n-2}$. Llámese este nuevo polinomio $Q(X)$:

$$Q(X) = a + bX + \cdots - cX^{n-2}.$$

De esta forma

$$P(X) - Q(X) = cX^{k-2}(X^2+1). \tag{3}$$

Entonces, podemos usar esto para definir una relación de equivalencia entre polinomios.

Definición 2.1. Dos polinomios en X son **equivalentes** si su diferencia es un polinomio que contiene el factor $X^2 + 1$.

Esto define una relación de equivalencia, puesto que cumple las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad (ver [26]). Ya hemos demostrado que si $P(X) = a+bX+\cdots+cX^n$ se lo puede reducir a un polinomio de la forma $Q(X) = a+bX+\cdots-cX^{n-2}$ y puesto que $P(X)-Q(X) = cX^{k-2}(X^2+1)$, $P(X)$ es equivalente a sí mismo. Esto quiere decir que la propiedad de reflexividad se cumple.

Si $P(X)$ es equivalente a $Q(X)$, entonces $P(X) - Q(X) = R(x)(X^2+1)$, donde $R(X)$ es un polinomio en X. Entonces, esto quiere decir que $Q(X) -$

$P(X) = -R(X)(X^2+1)$. Por lo tanto, $Q(X)$ es equivalente a $P(X)$ y la propiedad de simetría se cumple.

Si $P(X)$ es equivalente a $Q(X)$ y $Q(X)$ es equivalente a $S(X)$, entonces $P(X) - Q(X) = R(x)(X^2+1)$ y $Q(X) - S(X) = T(x)(X^2+1)$ donde $R(X)$ y $T(X)$ son polinomios en X. Si sumamos ambas ecuaciones, tenemos que $P(X) - S(X) = (R(x) + T(X))(X^2+1)$ y por lo tanto $P(X)$ es equivalente a $S(X)$. Esto quiere decir que la propiedad de transitividad se cumple y que por ende tenemos una relación de equivalencia.

Por esta razón, los complejos pueden ser vistos como clases de equivalencia de polinomios en X. Además, como todo polinomio (o número complejo) puede ser reducido a un polinomio lineal y la multiplicación de dos de estos polinomios también puede ser reducido a uno lineal, entonces el producto de los complejos queda dentro de los complejos.

2.1.2. El sistema de Cauchy-Riemann y su generalización en dimensiones superiores

Dado un subconjunto S de los complejos $\mathbb{C}$, se llama función compleja de una variable compleja $f(z)$ a una aplicación $f : S \to \mathbb{C}$ tal que a cada $z \in S \subseteq \mathbb{C}$ le corresponde un único número complejo $f(z)$ (ver [23]).
Si $z = x + iy$, entonces la función $f(z)$ se puede expresar de la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones de dos variables reales que son la parte real e imaginaria de $f(z)$ respectivamente.
Recordar que si se tiene una función compleja $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann son (ver [23]):

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v. \end{cases}$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la existencia de la derivada. Por lo tanto, si $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, las condiciones de Cauchy-Riemann se verifican en z_0. Sin embargo, las condiciones de Cauchy-Riemann no son suficientes para asegurar la derivabilidad de una función, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. Considerar la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Esta función es diferenciable para todo $z \neq 0$. En $z = 0$, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son:

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x} = 0,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{y^4}}}{y} = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que $\partial_x u(0,0) = \partial_y u(0,0) = \partial_x v(0,0) = \partial_y (0,0) = 0$ y las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen. Sin embargo, esta función no es continua en $z = 0$, por lo que no puede ser diferenciable en este punto (ver [9]).

Si ahora se define el siguiente operador

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y). \tag{4}$$

Entonces es fácil de comprobar que

$$\partial_{\bar{z}} f = 0, \tag{5}$$

es una forma más sencilla y compacta de escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La ecuación (5) es una condición necesaria para que una función continuamente diferenciable con respecto a x y y sea diferenciable en todo punto, esto es, para que $f(z)$ sea holomorfa. Recordar que una función $f(z)$ es holomorfa en un conjunto abierto Ω si es derivable en todos los puntos de Ω. Generalizando un poco más, se dice que $f(z)$ es holomorfa en un conjunto S si es holomorfa en un abierto Ω que contiene a S. También se puede definir holomorfía en un solo punto $z_0 \in \mathbb{C}$. En este caso, $f(z)$ es holomorfa en z_0 si es derivable en todos los puntos de un entorno de z_0, es decir, si existe un disco $B_r(z_0)$ con centro en z_0 y de radio $r > 0$ tal que $f(z)$ es derivable en todos sus puntos (ver [2]).

Para generalizar el operador complejo dado por (4) para dimensiones superiores, se considera la base $\{e_0 = 1, e_1, e_2, ..., e_n\}$ del espacio euclideano $\mathbb{R}^{n+1}$. De esta forma, el operador de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^{n+1}$ es

$$\mathcal{D} = \sum_{j=0}^{n} e_j \partial_j. \tag{6}$$

Donde las variables de $\mathbb{R}^{n+1}$ se denotan por $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ y por lo tanto ∂_j significa la derivada parcial con respecto a x_j. De esta forma, el sistema de Cauchy-Riemann para dimensiones superiores se puede escribir como (ver [29]):

$$\mathcal{D}f = 0. \tag{7}$$

Donde $f : S \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo 2.3. Si $n = 1$, tenemos que $\mathcal{D} = e_0\partial_0 + e_1\partial_1$. Podemos hacer las siguientes identificaciones: $e_0 = 1$, $e_1 = i$, $x_0 = x$ y $x_1 = y$. De esta forma, tenemos que $\mathcal{D} = e_0\partial_0 + e_1\partial_1 = \partial_x + i\partial_y$ y si $f = e_0u + e_1v = u + iv$, donde $u = u(x_0, x_1) = u(x, y)$ y $v = v(x_0, x_1) = v(x, y)$, entonces $\mathcal{D}f = (\partial_x + i\partial_y)(u + iv)$. Expandiendo este producto tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}f &= \partial_x u + i\partial_x v + i\partial_y u - \partial_y v \\ &= (\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u) = 0.\end{aligned}$$

Para que esta última expresión sea cero, necesitamos que $\partial_x u - \partial_y v = 0$ y que $\partial_x v + \partial_y u = 0$, que son justamente las condiciones de Cauchy-Riemann para las funciones complejas.

2.1.3. Definición de álgebras de Clifford mediante clases de equivalencia

Si f en la ecuación (7) es una función de valores reales, la solución que se obtendrá será trivial. Para no obtener este tipo de soluciones, se debe operar $\mathcal{D}$ sobre funciones con valores vectoriales. Para lograr esto, se debe definir un producto entre vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nuevamente se utiliza la idea de interpretar vectores en este espacio como polinomios lineales en las variables $X_1, X_2, ..., X_n$ donde e_j se identifica con el término X_j. De esta forma, si $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ entonces este vector puede también ser escrito como

$$a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j X_j.$$

Así la suma de dos de estos polinomios lineales es otra vez un polinomio lineal. Sin embargo, para la multiplicación hay que poner en evidencia la siguiente propiedad:

Propiedad 2.1. Los cuadrados de los vectores unitarios X_j deben ser igual a -1, esto es, $X_j^2 = -1$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

La Propiedad 2.1 debe ser preservada para que el producto resultante sea otra vez un polinomio lineal: La segunda propiedad que se necesita para que el producto de vectores esté bien definido surge de la necesidad de construir el operador de Laplace en $\mathbb{R}^{n+1}$. Recordar que el operador de Laplace en este espacio, denotado como Δ_{n+1}, se escribe como (ver [29]):

$$\Delta_{n+1} = \partial_0^2 + \partial_1^2 + ... + \partial_n^2 = \partial_0^2 + \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2. \tag{8}$$

Para poder factorizar el operador de Laplace, primero se define el operador adjunto del operador de Cauchy-Riemann dado por (6) como:

$$\overline{\mathcal{D}} = \partial_0 - \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_j. \tag{9}$$

Entonces se tiene que la multiplicación del operador y su adjunto es

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D} &= \left(\partial_0 - \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_j\right)\left(\partial_0 + \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_j\right), \\ &= \partial_0^2 + \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 - \sum_{j \neq k} e_j e_k \partial_j \partial_k, \\ &= \Delta_{n+1} - \sum_{j<k} (e_j e_k + e_k e_j) \partial_j \partial_k. \end{aligned}$$

Para que $\overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ sea exactamente igual al operador de Laplace Δ_{n+1}, se necesita de la siguiente propiedad

Propiedad 2.2. $e_j e_k + e_k e_j = 0$ para todo $j \neq k$.

Las propiedades 2.1 y 2.2 se pueden obtener de una manera distinta. Considerar n variables $X_1, \ldots, X_n$ en un álgebra libre o un módulo libre $\mathcal{R}$, donde los productos

$$X_{\mu_1} \cdots X_{\mu_m},$$

son distintos si el orden de los factores es diferente (ver [3]). Ahora, la noción de polinomios equivalentes mencionados en la Definición 2.1 se puede generalizar aún más y es de esta forma como se definirá el álgebra de Clifford. En efecto, dos polinomios de este anillo, nombrados P y Q se dice que son equivalentes si su diferencia puede ser representada como un polinomio donde cada sumando contiene al menos uno de estos factores:

$$X_j^2 + 1, \quad j = 1, ..., n, \tag{10}$$

o

$$X_j X_k + X_k X_j, \quad j \neq k. \tag{11}$$

De esta forma, $P \sim Q$.

Definición 2.2. El conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a la relación $\sim$ se denomina **álgebra de Clifford** generada por $X_1, ..., X_n$ y se le denota por $\mathcal{A}_n$ (ver [29]).

En particular si $P \sim Q \sim X_j^2 + 1$ entonces la diferencia de estos polinomios será equivalente con cero:

$$X_j^2 + 1 \sim 0.$$

Y si $P \sim Q \sim X_j X_k + X_k X_j$ con $j \neq k$ entonces:

$$X_j X_k + X_k X_j \sim 0.$$

Que es equivalente a decir que

$$X_j^2 + 1 = 0, \tag{12}$$

$$X_j X_k + X_k X_j = 0. \tag{13}$$

Las relaciones (12) y (13) se llaman las **relaciones de estructura** del álgebra de Clifford. Gracias a (13), las álgebras de Clifford *no son conmutativas*.

Es importante recalcar que estas relaciones no son las más generales que existen y que cuando se satisfacen, entonces al álgebra de Clifford correspondiente se le denomina *álgebra de Clifford clásico* (ver [24]). Se pueden considerar relaciones de equivalencias más generales y esto conlleva a a obtener álgebras de Clifford más generales denominadas *álgebras de Clifford dependiendo de parámetros* (ver [3], [29] y [14]). Si se considera

$$X_j^{k_j} + \alpha_j(p) \sim 0, \tag{14}$$

$$X_i X_j + X_j X_i - 2\gamma_{ij}(p) \sim 0, \tag{15}$$

para $i, j = 1, ..., n$ y $i \neq j$, donde $\alpha_j(p)$ y $\gamma_{ij}(p) = \gamma_{ji}(p)$ son funciones de valores reales dependiendo que pueden o no depender del parámetro p. El álgebra de Clifford generado por estas nuevas relaciones de equivalencia se denota por

$$\mathcal{A}_n(p|k_j, \alpha_j(p), \gamma_{ij}(p)) \;\text{ si } n \geq 2. \tag{16}$$

Sin embargo, este tipo de álgebras no va a ser utilizado en el presente trabajo.

2.1.4. La dimensión de $\mathcal{A}_n$

Las álgebras de Clifford tienen dimensión finita. Para ver esto, notemos que, usando (12) y (13), se pueden eliminar factores cuadráticos y también se puede cambiar el orden de los factores (aunque probablemente habrá algún cambio de signo ya que $X_jX_k = -X_kX_j$). Como resultado de este reordenamiento, todo polinomio en $\mathcal{A}_n$ se puede escribir como

$$\sum_{i_1<i_2<...<i_m} a_{i_1<i_2<...<i_m} X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_m}.$$

Con las siguientes identificaciones $X_1 = e_1, ..., X_n = e_n$, se introducen también estas otras identificaciones:

$$\begin{aligned}
X_1X_2 &= e_1e_2 = e_{12},\\
X_1X_3 &= e_1e_3 = e_{13},\\
&\vdots\\
X_1X_n &= e_1e_n = e_{1n},\\
X_2X_1 = e_2e_1 &= -e_1e_2 = -e_{12},\\
X_2X_3 &= e_2e_3 = e_{23},\\
&\vdots\\
X_2X_n &= e_2e_n = e_{2n},\\
X_1X_2X_3 &= e_1e_2e_3 = e_{123},\\
&\vdots\\
X_1X_2\cdots X_n &= e_1e_2\cdots e_n = e_{12...n}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Por lo tanto, una base para el álgebra de clifford $\mathcal{A}_n$ es:

$$\beta = \{e_1, \ldots, e_n, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{23}, \ldots, e_{2n}, e_{123}, \ldots, e_{12\cdots n}\} \tag{18}$$

Entonces, cada polinomio en $\mathcal{A}_n$ puede ser escrito de manera más compacta como

$$\sum_A a_A e_A, \tag{19}$$

donde a_A son constantes reales y A es una permutación de los m índices $i_1, i_2, ..., i_m$ con la propiedad de que

$$1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n.$$

Así, lo que se ha hecho para conocer el número de elementos de la base del espacio lineal $\mathcal{A}_n$ es tomar las combinaciones de n elementos de m en m. De esta forma,

$$\dim \mathcal{A}_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{20}$$

De lo que se concluye que la dimensión de $\mathcal{A}_n$ es 2^n.

2.1.5. Las álgebras de Clifford y las álgebras de Cayley-Dickson

Los complejos, cuaterniones y octoniones obedecen una construcción llamada *construcción de Caley-Dickson* (ver [6]). Este proceso genera las álgebras de Cayley-Dickson. Por ejemplo, para construir los cuaterniones a partir de los complejos, se toma un par ordenado (z_1, z_2) donde z_1 y z_2 son números complejos. Si (ω_1, ω_2) es otro par ordenado donde ω_1 y ω_2 son nuevamente complejos, entonces el producto de (z_1, z_2) y (ω_1, ω_2) se define como:

$$(z_1, z_2)(\omega_1, \omega_2) = (z_1\omega_1 - \overline{\omega_2}z_2, \omega_2 z_1 + z_2\overline{\omega_1}). \tag{21}$$

Donde la barra indica que se trata del número complejo pero conjugado. La conjugación del par ordenado en sí se define como:

$$\overline{(z_1, z_2)} = (\overline{z_1}, -z_2). \tag{22}$$

Este proceso se puede generalizar. Por ejemplo, para pasar de los cuaterniones a los octoniones, se repite el mismo procedimiento pero ahora el par ordenado (H_1, H_2) debe ser tal que H_1 y H_2 son cuaterniones.
Notar que, por ejemplo, las álgebras de Clifford son asociativas, mientras que los octoniones no lo son [4]. Dado un espacio de producto interno real V, el álgebra de Clifford correspondiente es el álgebra asociativa generada libremente por V módulo

$$v^2 = -||v||^2,$$

para todo $v \in V$. Si $V = \mathbb{R}^n$, entonces el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ es el álgebra asociativa generada libremente por las n raíces no conmutativas de -1. De esto se tiene que $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}$ y $\mathcal{A}_2 = \mathbb{H}$ pero $\mathcal{A}_3 \neq \mathbb{O}$ (octoniones) [4]. La siguiente tabla muestra esto hasta $n = 7$.

n	$\mathcal{A}_n$
0	$\mathbb{R}$
1	$\mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$
3	$\mathbb{H} \bigoplus \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H}[2]$
5	$\mathbb{C}[4]$
6	$\mathbb{R}[8]$
7	$\mathbb{R}[8] \bigoplus \mathbb{R}[8]$

Tabla 1: Relación entre n y $\mathcal{A}_n$

Por la no asociatividad, en el presente trabajo se habla de análisis complejo y cuaterniónico pero no octoniónico.

2.1.6. Funciones monogénicas

La introducción del concepto de funciones monogénicas es importante dado que generalizan el concepto de holomorfía del análisis complejo.

Si Ω es un dominio abierto y conexo en $\mathbb{R}^{n+1}$, $x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \Omega$ y $u(x)$ una función continuamente diferenciable y definida en Ω que toma valores en el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ entonces a esta función $u(x)$ se le llama función monogénica a la izquierda si satisface la ecuación (7). Si $u(x)$ en cambio satisface $u\mathcal{D} = 0$ entonces se le denomina función monogénica a la derecha. Sin embargo, de ahora en adelante solo se utilizarán las funciones monogénicas a la izquierda y, para no invocar su nombre completo, solo se les llamará funciones monogénicas [29].

Ya se ha demostrado que la dimensión de $\mathcal{A}_n$ es 2^n. Es decir, existen 2^n elementos en la base de $\mathcal{A}_n$. Por ende, una función que toma valores en $\mathcal{A}_n$ tiene 2^n componentes con valores reales. El sistema $\mathcal{D}u$ entonces también tendrá 2^n componentes reales, por lo que el sistema de Cauchy-Riemann $\mathcal{D}u = 0$ se puede descomponer en 2^n ecuaciones. Estas ecuacioces serán, entonces, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. [29]

Ejemplo 2.4. Para $\mathcal{A}_2$, una función que toma valores en esta álgebra se puede escribir como $u = u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_{12}e_{12}$. Supongamos que u es monogénica. Entonces $\mathcal{D}u = (\partial_0 + e_1\partial_1 + e_2\partial_2)(u_0 + u_1e_1 + u_2e_2 + u_{12}e_{12}) = 0$. Recordando las relaciones de estructura:

$$\begin{aligned} e_1^2 &= -1, \\ e_1e_{12} &= e_1(e_1e_2) = e_1^2e_2 = -e_2, \\ e_2e_1 &= -e_1e_2, \\ e_2^2 &= -1, \\ e_2e_{12} &= e_2(-e_2e_1) = e_1. \end{aligned}$$

Tenemos que el sistema $\mathcal{D}u = 0$ se puede descomponer en $2^2 = 4$ ecuaciones, que son las siguientes:

$$\begin{aligned} \partial_0u_0 - \partial_1u_1 - \partial_2u_2 = 0, \\ \partial_0u_1 + \partial_1u_0 + \partial_2u_{12} = 0, \\ \partial_0u_2 - \partial_1u_{12} + \partial_2u_0 = 0, \\ \partial_0u_{12} + \partial_1u_2 - \partial_2u_1 = 0. \end{aligned}$$

Como se verá después, este sistema se podrá escribir de manera matricial.

2.2. Espacios asociados en el análisis de Clifford

Ahora definiremos los objetos que dan pie a este trabajo.

Definición 2.3 (Espacio funcional)**.** Un espacio funcional es un espacio (es decir, un conjunto con una estructura dada) hecho con funciones (ver [20]).

Ejemplo 2.5. $C[a,b]$, el conjunto de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[a,b]$ es un espacio funcional [30].

Ejemplo 2.6. $L_1[a,b]$, el conjunto de todas las funciones reales cuyo valor absoluto es integrable en el intervalo $[a,b]$ es un espacio funcional [30].

La noción de espacios asociados viene del análisis complejo. Por ejemplo, el espacio de funciones holomorfas está asociado a la diferenciación compleja que se logra con el operador $\frac{d}{dz}$ ya que la derivada compleja de una función holomorfa es nuevamente holomorfa. Esta idea se puede generalizar mediante la siguiente definición.

Definición 2.4. Un espacio funcional χ se denomina **espacio asociado** a un operador diferencial $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ transforma χ en sí mismo.

La aplicación más importante de los espacios asociados es ayudar a encontrar la solución de ecuaciones de problemas de valores iniciales (PVI) (ver [22]):

$$\partial_t u = \mathcal{F}(t, x, u, \partial_j u), \tag{23}$$

$$u(0, x) = \phi(x). \tag{24}$$

A pesar de que $\mathcal{F}$ depende en la variable espacial x y en el tiempo t, los elementos del espacio asociado son funciones que solo dependen de la variable espacial x y no en el tiempo t. Resolver este PVI se traduce en hallar puntos fijos en un espacio de Banach (ver [31]).

A continuación, se da una definición de operadores asociados

Definición 2.5. Sea $\mathcal{F}$ un operador diferencial de primer orden que depende de t, x, u y $\partial_j u$ para $j = 0, 1, ..., n$ y sea $\mathcal{G}$ un operador diferencial con respecto a las variables espaciales x_i con coeficientes que no dependen en el tiempo t. Se dice que $\mathcal{F}$ es un operador asociado a $\mathcal{G}$ si $\mathcal{F}$ mapea soluciones de la ecuación diferencial $\mathcal{G}u = 0$ en soluciones de la misma ecuación para un t fijo. Es decir, si

$$\mathcal{G}u = 0 \Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}u) = 0. \tag{25}$$

Como se dijo en la definición 2.4, el espacio funcional χ que contiene todas las soluciones de la ecuación $\mathcal{G}u = 0$ se llama el espacio asociado a $\mathcal{F}$

En el presente trabajo, el operador presentado en la ecuación (23) está definido como

$$\mathcal{F}(t, x, u, \partial_i u) = \sum_{i=0}^{n} A^{(i)}(t, x)\partial_i u(t, x) + B(t, x)u(t, x) + C(t, x). \tag{26}$$

Donde $u, A^{(i)}(t, x), B(t, x)$ y $C(t, x)$ son funciones que toman valores en algún álgebra de Clifford. Más específicamente, se tiene que

$$A^{(i)}(t, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(i)}(t, x)e_k, \tag{27}$$

$$B(t, x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(t, x)e_k. \tag{28}$$

En el presente trabajo, se presentan condiciones necesarias para que $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ sea un par de operadores asociados ($\mathcal{D}$ es el operador de Cauchy-Riemann dado por (6)).
La resolución del problema de valor inicial dado por (23) y (24) se puede dar en el espacio de funciones regulares generalizadas que satisfacen $\mathcal{D}u = 0$ por el método de espacios asociados siempre y cuando ciertas condiciones se satisfagan, siendo una de estas, que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{D}$ estén asociados (ver [31]).

2.3. Representación matricial de las álgebras de Clifford

2.3.1. Definición de $p_n(X)$

Esta sección está dedicada a explicar cómo se construyen los elementos de la base del álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ correspondiente. Definimos Γ_n como un conjunto de índices que son todas las combinaciones de $1, 2, ..., n$ donde también está el elemento cero.

Ejemplo 2.7. Si $n = 3$, entonces $\Gamma_3 = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 123\}$.

Recordemos que el conjunto potencia de un conjunto A se define como (ver [16]):

$$P(A) = \{X : X \subseteq E\}$$

Y que $X \in P(A)$ si $X \subseteq A$.

Notemos que el conjunto potencia de $A = \{1, 2, 3\}$ es justamente $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, por lo que es natural construir una biyección de $\mathcal{P}(A)$ a Γ_3 para definir los elementos de este último conjunto. De hecho, si $A = \{1, 2, ..., n\}$ y $S = \{i_1, i_2, ..., i_m\} \in \mathcal{P}(A)$ con $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n$. Entonces se define la biyección $\phi : \mathcal{P}(A) \to \Gamma_n$ como

$$\phi(\varnothing) = 0,$$
$$\phi(S) = i_1 i_2 ... i_m.$$

Una vez definido Γ_n como la imagen de esta función ϕ, la base de un álgebra de Clifford se puede escribir como $\beta_n = \{e_A : A \in \Gamma_n\}$. Esta base se puede definir recursivamente como

$$\beta_n = \beta_{n-1} \cup \beta_{n-1} e_n, \quad n \geq 1, \quad \beta_0 = e_0.$$

Donde

$$\beta_{n-1} e_n = \{e_A e_n : e_A \in \beta_{n-1}\}.$$

Ejemplo 2.8. Retomando el Ejemplo 2.7, la base para $\mathcal{A}_3$ sería:

$$\beta_3 = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}.$$

Ahora, se puede establecer una biyección entre Γ_n y los números naturales con el siguiente mapa. Sea $p_n : \Gamma_n \to \{1, 2, 3, ..., 2^n\}$ una función definida por

$$p_n(X) = \begin{cases} p_{n-1}(X), & \text{si} \;\; X \in \Gamma_{n-1} \\ 2^{n-1} + p_{n-1}(\lfloor X/10 \rfloor) & \text{si} \;\; X \in \Gamma_n - \Gamma_{n-1} \end{cases}$$

Notemos que $p_0 : \Gamma_0 = \{0\} \to \{1\}$ es el mapa

$$p_0(0) = 1.$$

En general, se tendrá que $p_n(0) = 1$. Por otro lado, $p_1 : \Gamma_1 = \{0, 1\} \to \{1, 2\}$ se define como

$$p_1(0) = p_0(0) = 1,$$

dado que $0 \in \Gamma_0$ y

$$p_1(1) = 2^{1-1} + p_0(0) = 2^0 + 1 = 2$$

ya que $1 \in \Gamma_1 - \Gamma_0$

Ejemplo 2.9. Consideremos el caso cuando $n = 2$. Como $\Gamma_2 = \{0, 1, 2, 12\}$ así que $p_2 : \{0, 1, 2, 12\} \to \{1, 2, 3, 4\}$. Los elementos que pertenecen a $\Gamma_{2-1} = \Gamma_1$ son $\{0, 1\}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} p_2(0) = p_1(0) = p_0(0) = 1, \\ p_2(1) = p_1(1) = 2. \end{aligned}$$

Y los elementos que pertenecen a $\Gamma_2 - \Gamma_1$ son $\{2, 12\}$ así que

$$\begin{aligned} p_2(2) = 2^{2-1} + p_1(0) = 2 + 1 = 3, \\ p_2(12) = 2^{2-1} + p_1(1) = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

El mapa p_n tiene como dominio, el conjunto finito Γ_n y como codominio, el conjunto finito $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$. Puesto que la imagen de esta función es todo el codominio, entonces la función es sobreyectiva. Puesto que, tanto el dominio como el codominio son conjuntos finitos, la sobreyectividad implica inyectividad (ver [19] y [7]). Por lo tanto, esta función es biyectiva y entonces existe una función inversa que se denotará como $\hat{p}_n$. Esto quiere decir que si $j \in \mathbb{N}$ entonces $\hat{p}_n(j)$ es el elemento $A \in \Gamma_n$ que ocupa la posición j.

2.3.2. Construcción de las matrices fundamentales

Una vez definido p_n y $\hat{p}_n$, considerar la base canónica de $\mathbb{R}^{2^n}$ dada por $\mathcal{B}_{2^n} = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_{2^n}\}$.
La coordenada j de b_i, denotada por $[b_i]_j$, es δ_{ij}. Ahora, considerar el mapa dado por $e_A \in \beta_n \to b_{p_n(A)} \in \mathcal{B}_{2^n}$, para todo $A \in \Gamma_n$ y el mapa inverso $b_i \to e_{\hat{p}_n(i)}$ para todo $i = 1, 2, ..., 2^n$.
Siempre y cuando este orden se mantenga fijo tanto en $\mathcal{B}_{2^n}$ como en Γ_n, cada $u \in \mathcal{A}_n$ tiene una representación vectorial que vive en $\mathbb{R}^{2^n}$ dado por:

$$u = e(u) = \sum_{i=1}^{2^n} u_{\hat{p}_n(j)} b_i, \tag{29}$$

donde

$$(u) = \begin{pmatrix} u_{\hat{p}_n(1)} \\ u_{\hat{p}_n(2)} \\ u_{\hat{p}_n(3)} \\ \vdots \\ u_{\hat{p}_n(2^n)}, \end{pmatrix}$$

es la matriz $\mathbb{R}^{2^n \times 1}$ y

$$e = \begin{pmatrix} e_{\hat{p}_n(1)} & e_{\hat{p}_n(2)} & e_{\hat{p}_n(3)} & \cdots & e_{\hat{p}_n(2^n)} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.10. Recordemos del Ejemplo 2.9 que $p_2(0) = 1, p_2(1) = 2, p_2(2) = 3$ y $p_2(12) = 4$. Por ende, $\hat{p}_2(1) = 0, \hat{p}_2(2) = 1, \hat{p}_2(3) = 2$ y $\hat{p}_2(4) = 12$. De esta manera, si $\mathcal{B}_4 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ donde $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$u = \sum_{j=1}^{4} u_{\hat{p}_2(j)} b_j = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_{12} \end{pmatrix},$$

Recordando que existe el mapa que asigna cada elemento de la base de $\mathbb{R}^4$ a un elemento de la base del álgebra de Clifford $\mathcal{A}_2$, esto es, $b_i \to e_{\hat{p}_2(i)}$ entonces

$$u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_{12} \end{pmatrix}.$$

Ahora, se construirán las matrices fundamentales $E_{A,n}$.

Definición 2.6. Sea $A \in \Gamma_n$. La matriz $E_{A,n} \in \mathbb{R}^{2^n \times 2^n}$ se define como la matriz cuya $j-$ésima columna está dada por

$$Col_j(E_{A,n}) = e_A e_{\hat{p}_n(j)}, \tag{30}$$

para todo $j = 1, 2, ..., 2^n$

De la Definición 2.6 se tiene que $Col_j(E_{0,n}) = e_0 e_{\hat{p}_n(j)} = e_{\hat{p}_n(j)} = b_j$ donde $b_j \in \mathcal{B}_{2^n}$. Por ende, $E_{0,n}$ siempre será la matriz identidad I_{2^n}.

Ejemplo 2.11. Considérese ahora cómo serán las columnas de la matriz $E_{1,2}$. Con $j = 1$ se tiene:

$$Col_1(E_{1,2}) = e_1 e_{\hat{p}_2(1)} = e_1 e_0 = e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con $j=2$ se tiene:

$$Col_2(E_{1,2}) = e_1 e_{\hat{p}_2(2)} = e_1 e_1 = -e_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con $j=3$ se tiene:

$$Col_3(E_{1,2}) = e_1 e_{\hat{p}_2(3)} = e_1 e_2 = e_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Con $j=4$ se tiene:

$$Col_4(E_{1,2}) = e_1 e_{\hat{p}_2(4)} = e_1 e_{12} = e_1 e_1 e_2 = -e_0 e_2 = -e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $E_{1,2}$ va a ser:

$$E_{1,2} = (Col_1(E_{1,2}), Col_2(E_{1,2}), Col_3(E_{1,2}), Col_4(E_{1,2})) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.12. De manera similar se puede mostrar que:

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{12,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que al trabajar sin matrices, se tiene que $e_1 e_2 = e_{12}$. De manera similar, notar que $E_{12,2}$ se pudo haber obtenido de la misma manera, es decir, multiplicando las matrices $E_{1,2}$ y $E_{2,2}$:

$$E_{1,2} E_{2,2} = E_{12,2}.$$

Por lo tanto, la base β para $\mathcal{A}_2$ es:

$$\beta = \{E_{0,2} = I_4, E_{1,2}, E_{2,2}, E_{12,2}\}$$

Ejemplo 2.13. Es importante notar que esta construcción matricial también sirve cuando se trabaja con álgebras de Clifford dependiendo de parámetros. Para esto, hay que tomar en cuenta las relaciones de estructura dadas por (14) y (15). Por ejemplo, $E_{1,2}, E_{2,2}$ en este caso serían las siguientes matrices:

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma_{12} & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 0 & 2\gamma_{12} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y $E_{12,2}$ es el resultado de la multiplicación de estas dos matrices.

La representación matricial de los elementos de la base de un álgebra de Clifford dada por (18) presenta muchas ventajas ya que se puede utilizar todas las herramientas dadas por el álgebra lineal para atacar problemas relacionados con estas álgebras.

Primero, presentamos una regla de diferenciación para funciones que toman valores en un álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$. El objetivo de presentar esta regla es para hacer hincapié en que se puede prescindir de ella cuando se trabaja con una implementación matricial para las bases de $\mathcal{A}_n$ y que basta usar la regla de Leibniz si se utilizan matrices. Recordemos que la regla de Leibniz o del del producto para funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $h = fg$, entonces:

$$\partial_i h = (\partial_i f)g + (\partial_i g)f, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{31}$$

Donde ∂_i es la derivada parcial con respecto a la $i-$ésima variable [5].

Cuando se tienen dos funciones complejas y diferenciables f y g, la regla de Leibniz o regla del producto es válida con el operador complejo dado por (4), tal cual como en el cálculo de una sola variable. Es decir, se cumple que (ver [2]):

$$\partial_{\bar{z}}(f \cdot g) = (\partial_{\bar{z}} f) \cdot g + f \cdot (\partial_{\bar{z}} g).$$

Sin embargo, cuando se tienen dos funciones u y v que toman valores en algún álgebra de Clifford, esta regla del producto no es válida con el operador de Cauchy-Riemann. Se debe usar una regla diferente dada en el siguiente Teorema (la demostración se puede hallar en [8]).

Teorema 2.1. Sean u y v funciones continuamente diferenciables en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ y que toman valores en el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$. Entonces (ver [31]):

$$\mathcal{D}(u \cdot v) = (\mathcal{D}u) \cdot v + u \cdot (\mathcal{D}v) + 2\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} e_k u_k\right) \cdot \partial_0 v - \sum_{j=1}^{n-1} u_j \cdot \partial_j v\right]. \quad (32)$$

Otra de las ventajas de utilizar la representación matricial de los elementos de la base de un álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ es que las relaciones de estructura dadas por (12) y (13) están contenidas ya en las matrices. Por ende, cuando se opera con estas matrices, no es necesario tomar en cuenta estas relaciones.

3. Objetivos

El objetivo general del trabajo es:

- Hallar las condiciones necesarias para que $(\mathcal{D},\mathcal{F})$ sea un par de operadores diferenciales asociados, donde $\mathcal{D}$ está dado por (6) y $\mathcal{F}$ está dado por (26) utilizando un algoritmo basado en una representación matricial de los elementos de la base de un álgebra de Clifford.

Los objetivos específicos son:

- Implementar un código en Python utilizando la librería SymPy, que permite realizar cálculos simbólicos, para hallar las condiciones necesarias para que $(\mathcal{D},\mathcal{F})$ sea un par de operadores diferenciales asociados sobre un álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

- Hallar las condiciones necesarias para que el operador de Cauchy-Riemann y el operador (26) estén asociados, describirlas para el álgebra de los complejos $\mathcal{A}_1$ y mostrar el procedimiento explícito de cómo se encuentran tales condiciones con el uso de matrices.

- Hallar las condiciones necesarias para que el operador de Cauchy-Riemann y el operador (26) estén asociados y describirlas para el álgebra de los cuaterniones $\mathcal{A}_2$.

- Hallar las condiciones necesarias para que el operador de Cauchy-Riemann y el operador (26) estén asociados y describirlas para el álgebra $\mathcal{A}_3$.

- Exhibir las ventajas y desventajas de utilizar una representación matricial para los elementos de una base para un álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$.

4. Resultados

Para el caso del álgebra de los complejos, es decir para $\mathcal{A}_n$ con $n = 1$, se mostrarán los resultados después de demostrar cómo calcular los coeficientes del operador $\mathcal{F}$ paso por paso. Además, en todos los casos, para simplificar la notación, el término $a_k^{(i)}(t,x)$ se escribirá simplemente como $a_k^{(i)}$. También cabe recalcar que la construcción de las matrices se hizo en el programa MATLAB, y el script de Python dado en anexos simplemente llama a MATLAB para que construya dichas matrices y las recoge para su posterior uso [10]. A continuación, se muestra un pseudocódigo para obtener los resultados de los casos presentados en este trabajo.

Pseudocódigo 1 Pseudocódigo para hallar las condiciones necesarias para que $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ sea un par de operadores asociados

`Input`: La dimensión del álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$
`Output`: Las condiciones necesarias para que $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ sea un par de operadores asociados en $\mathcal{A}_n$.
`Paso 1`: Crear la base $\beta = \{E_{0,n}, E_{1,n}, \ldots, E_{2^n-1,n}\}$ para $\mathcal{A}_n$
`Paso 2`: Crear los operadores $\mathcal{F}$ and $\mathcal{D}$ y la función u con las matrices del `Paso 1`.
`Paso 3`: Formar el producto matricial $\mathcal{D}(\mathcal{L}u)$ y utilizar la regla de Leibniz y la hipótesis $\mathcal{D}u = 0$ para hallar las condiciones.

4.1. El caso complejo

Recordemos que en la Tabla 1 se mostró que los complejos corresponden al álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ donde $n = 1$.
La expresión $\mathcal{F}u$ es la siguiente:

$$\mathcal{F}u = \sum_{i=0}^{1} A^{(i)}(t,x)\partial_i u + B(t,x)u + C(t,x).$$

En este caso, al igual que en los otros, se considera que el valor de la constante $C(t,x)$ es cero. Además,

$$A^{(i)}(t,x) = \sum_{k=0}^{1} a_k^{(i)}(t,x)e_k,$$
$$B^{(i)}(t,x) = \sum_{k=0}^{1} b_k(t,x)e_k.$$

Por ende, una forma explícita de escribir $\mathcal{F}u$ es

$$\mathcal{F}u = (a_0^{(0)}e_0 + a_1^{(0)}e_1)\partial_0 u + (a_0^{(1)}e_0 + a_1^{(1)}e_1)\partial_1 u + (b_0e_0 + b_1e_1)u. \tag{33}$$

Para escribir (33) de manera matricial, hay que recordar que existen dos elementos en la base para el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_1$:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente $E_0 = I_2$ y $E_1^2 = -I_2$. A pesar de que u se puede escribir como $u = u_0E_0 + u_1E_1$ (siendo el resultado una matriz de dimensión 2×2), u también se puede escribir como un vector columna. Es decir:

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, la expresión (33) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}u = (a_0^{(0)}E_0 + a_1^{(0)}E_1)\begin{pmatrix} \partial_0 u_0 \\ \partial_0 u_1 \end{pmatrix} + (a_0^{(1)}E_0 + a_1^{(1)}E_1)\begin{pmatrix} \partial_1 u_0 \\ \partial_1 u_1 \end{pmatrix} + (b_0E_0 + b_1E_1)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

donde E_0 y E_1 son las matrices mencionadas anteriormente. De esta forma,

$$\mathcal{F}u = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & -a_1^{(0)} \\ a_1^{(0)} & a_0^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_0 u_0 \\ \partial_0 u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0^{(1)} & -a_1^{(1)} \\ a_1^{(1)} & a_0^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_1 u_0 \\ \partial_1 u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando estas matrices y sumándolas se obtiene que:

$$\mathcal{F}u = \begin{pmatrix} a_0^{(0)}\partial_0 u_0 - a_1^{(0)}\partial_0 u_1 + a_0^{(1)}\partial_1 u_0 - a_1^{(1)}\partial_1 u_1 + b_0u_0 - b_1u_1 \\ a_1^{(0)}\partial_0 u_0 + a_0^{(0)}\partial_0 u_1 + a_1^{(1)}\partial_1 u_0 + a_0^{(1)}\partial_1 u_1 + b_1u_0 + b_0u_1 \end{pmatrix}.$$

El operador $\mathcal{D}$ se puede escribir de forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathcal{D} = \partial_0 E_0 + \partial_1 E_1 = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\partial_1 \\ \partial_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 & -\partial_1 \\ \partial_1 & \partial_0 \end{pmatrix}.$$

Por ende, $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ escrito de manera matricial es

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}u) = \begin{pmatrix} \partial_0 & -\partial_1 \\ \partial_1 & \partial_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0^{(0)}\partial_0 u_0 - a_1^{(0)}\partial_0 u_1 + a_0^{(1)}\partial_1 u_0 - a_1^{(1)}\partial_1 u_1 + b_0u_0 - b_1u_1 \\ a_1^{(0)}\partial_0 u_0 + a_0^{(0)}\partial_0 u_1 + a_1^{(1)}\partial_1 u_0 + a_0^{(1)}\partial_1 u_1 + b_1u_0 + b_0u_1 \end{pmatrix}.$$

El resultado de esta multiplicación es una matriz cuya dimensión es 2×1:

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}u) = \begin{pmatrix} \partial_0(a_0^{(0)}\partial_0 u_0) - \partial_0(a_1^{(0)}\partial_0 u_1) + \partial_0(a_0^{(1)}\partial_1 u_0) - \partial_0(a_1^{(1)}\partial_1 u_1) \\ +\partial_0(b_0 u_0) - \partial_0(b_1 u_1) - \partial_1(a_0^{(0)}\partial_0 u_1) - \partial_1(a_1^{(0)}\partial_0 u_0) \\ -\partial_1(a_0^{(1)}\partial_1 u_1) - \partial_1(a_1^{(1)}\partial_1 u_0) - \partial_1(b_0 u_1) - \partial_1(b_1 u_0) \\ \\ \partial_0(a_0^{(0)}\partial_0 u_1) + \partial_0(a_1^{(0)}\partial_0 u_0) + \partial_0(a_0^{(1)}\partial_1 u_1) + \partial_0(a_1^{(1)}\partial_1 u_0) \\ +\partial_0(b_0 u_1) + \partial_0(b_1 u_0) + \partial_1(a_0^{(0)}\partial_0 u_0) - \partial_1(a_1^{(0)}\partial_0 u_1) \\ +\partial_1(a_0^{(1)}\partial_1 u_0) - \partial_1(a_1^{(1)}\partial_1 u_1) + \partial_1(b_0 u_0) - \partial_1(b_1 u_1) \end{pmatrix}.$$

Aplicando la regla del producto para derivadas parciales dada por (31), se puede descomponer esta última matriz en siete matrices:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{F}u) = & \begin{pmatrix} \partial_0 a_0^{(0)}\partial_0 u_0 - \partial_0 a_1^{(0)}\partial_0 u_1 + \partial_0 a_0^{(1)}\partial_1 u_0 - \partial_0 a_1^{(1)}\partial_1 u_1 \\ +\partial_0 b_0 u_0 - \partial_0 b_1 u_1 - \partial_1 a_0^{(0)}\partial_0 u_1 - \partial_1 a_1^{(0)}\partial_0 u_0 - \partial_1 a_0^{(1)}\partial_1 u_1 \\ -\partial_1 a_1^{(1)}\partial_1 u_0 - \partial_1 b_0 u_1 - \partial_1 b_1 u_0 \\ \\ \partial_0 a_0^{(0)}\partial_0 u_1 + \partial_0 a_1^{(0)}\partial_0 u_0 + \partial_0 a_0^{(1)}\partial_1 u_1 + \partial_0 a_1^{(1)}\partial_1 u_0 \\ +\partial_0 b_0 u_1 + \partial_0 b_1 u_0 + \partial_1 a_0^{(0)}\partial_0 u_0 - \partial_1 a_1^{(0)}\partial_0 u_1 + \partial_1 a_0^{(1)}\partial_1 u_0 \\ -\partial_1 a_1^{(1)}\partial_1 u_1 + \partial_1 b_0 u_0 - \partial_1 b_1 u_1 \end{pmatrix} \\ & + b_0 \begin{pmatrix} \partial_0 u_0 - \partial_1 u_1 \\ \partial_0 u_1 + \partial_1 u_0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -\partial_0 u_1 - \partial_1 u_0 \\ \partial_0 u_0 - \partial_1 u_1 \end{pmatrix} \\ & + a_0^{(0)} \begin{pmatrix} \partial_0^2 u_0 - \partial_1\partial_0 u_1 \\ \partial_0^2 u_1 + \partial_1\partial_0 u_0 \end{pmatrix} + a_1^{(0)} \begin{pmatrix} -\partial_0^2 u_1 - \partial_1\partial_0 u_0 \\ \partial_0^2 u_0 - \partial_1\partial_0 u_1 \end{pmatrix} \\ & + a_0^{(1)} \begin{pmatrix} \partial_0\partial_1 u_0 - \partial_1^2 u_1 \\ \partial_0\partial_1 u_1 + \partial_1^2 u_0 \end{pmatrix} + a_1^{(1)} \begin{pmatrix} -\partial_0\partial_1 u_1 - \partial_1^2 u_0 \\ \partial_0\partial_1 u_0 - \partial_1^2 u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ahora, el sistema de Cauchy-Riemann $\mathcal{D}u = 0$ en forma matricial se escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}u = \begin{pmatrix} \partial_0 & -\partial_1 \\ \partial_1 & \partial_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 u_0 - \partial_1 u_1 \\ \partial_1 u_0 + \partial_0 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notar también que, dado que $\partial_i 0 = 0$ y $\mathcal{D}u = 0$, entonces $\partial_i \mathcal{D}u = 0$ para $i = 0, 1$. Estas matrices se escriben de forma matricial como:

$$\partial_0 \mathcal{D}u = \begin{pmatrix} \partial_0^2 u_0 - \partial_0\partial_1 u_1 \\ \partial_0\partial_1 u_0 + \partial_0^2 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_1 \mathcal{D}u = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_0 u_0 - \partial_1^2 u_1 \\ \partial_1^2 u_0 + \partial_1\partial_0 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto, se puede ver que las últimas seis matrices de $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ dada por (34) son automáticamente cero. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}u) = \begin{pmatrix} \partial_0 a_0^{(0)}\partial_0 u_0 - \partial_0 a_1^{(0)}\partial_0 u_1 + \partial_0 a_0^{(1)}\partial_1 u_0 - \partial_0 a_1^{(1)}\partial_1 u_1 \\ +\partial_0 b_0 u_0 - \partial_0 b_1 u_1 - \partial_1 a_0^{(0)}\partial_0 u_1 - \partial_1 a_1^{(0)}\partial_0 u_0 - \partial_1 a_0^{(1)}\partial_1 u_1 \\ -\partial_1 a_1^{(1)}\partial_1 u_0 - \partial_1 b_0 u_1 - \partial_1 b_1 u_0 \\ \\ \partial_0 a_0^{(0)}\partial_0 u_1 + \partial_0 a_1^{(0)}\partial_0 u_0 + \partial_0 a_0^{(1)}\partial_1 u_1 + \partial_0 a_1^{(1)}\partial_1 u_0 \\ +\partial_0 b_0 u_1 + \partial_0 b_1 u_0 + \partial_1 a_0^{(0)}\partial_0 u_0 - \partial_1 a_1^{(0)}\partial_0 u_1 + \partial_1 a_0^{(1)}\partial_1 u_0 \\ -\partial_1 a_1^{(1)}\partial_1 u_1 + \partial_1 b_0 u_0 - \partial_1 b_1 u_1 \end{pmatrix}.$$

Para que esta matriz resultante se igual a cero, cada fila debe ser igual a cero. Ahora, la primera entrada de esta matriz corresponde al término que acompaña a e_0 y la segunda entrada corresponde al término que acompaña a e_1 (recordar que una base para $\mathcal{A}_1$ es $\{e_0, e_1\}$). El programa (que se lo puede encontrar en los Anexos) recupera la expresión a partir de las matrices y arroja el siguiente resultado de lo que es la expresión $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ escrita como una ecuación. Después de reagrupar términos se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{F}u) &= [(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1]u_0 + [(-\partial_0 b_1 - \partial_1 b_0)e_0 + (\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_1]u_1 \\ &+[(\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)})e_0 + (-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)})e_1]\partial_1 u_0 \\ &+[(\partial_0 a_0^{(0)} - \partial_0 a_1^{(1)} - \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_0^{(1)})e_0 + (\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)})e_1]\partial_1 u_1. \end{aligned}$$

A partir de aquí se puede notar que hay más información de la que se necesita ya que se ha descompuesto u en sus componentes individuales, es decir, en u_0 y u_1. Por lo tanto, el coeficiente de u_0 y de u_1 proveen la misma información ya que solo habrá algún cambio de signo debido a las identificaciones dadas por (17). El coeficiente de u_0 (y el de $\partial_1 u_0$) no presentan modificaciones ya que al descomponer u en sus componentes individuales se está multiplicando este coeficiente por $e_0 = 1$. Para aclarar esto, se puede considerar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} &[(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1]u \\ &= [(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1]u_0 + [(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1]e_1 u_1 \\ &= [(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1]u_0 + [(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 e_1 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1 e_1]u_1. \end{aligned}$$

Al recordar que $e_1 e_1 = e_1^2 = -1 = -e_0$ se concluye que

$$\begin{aligned}
[(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1]u = [(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1]u_0 \\
+[(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_1 + (-\partial_0 b_1 - \partial_1 b_0)e_0]u_1.
\end{aligned}$$

Que es justamente los dos primeros términos de $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ que arroja el programa. El mismo análisis aplica para el caso de $\partial_1 u_0$ y $\partial_1 u_1$, es decir, para conocer qué condiciones debe satisfacer el operador $\mathcal{F}$, solo se necesita saber el coeficiente de $\partial_1 u_0$ e igualarlo a cero. De esta forma se necesita en una primera instancia que:

$$\begin{cases}
(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0)e_1 = 0 \\
(\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)})e_0 + (-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)})e_1 = 0
\end{cases}$$

Ambas ecuaciones pueden ser cero si y solo si el coeficiente de cada elemento de la base (e_0 y e_1) es cero. Por ende, de aquí se desprenden cuatro condiciones:

$$\begin{cases}
\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1 = 0, \\
\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0 = 0, \\
\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)} = 0.
\end{cases}$$

Estas condiciones son necesarias para que el operador $\mathcal{F}$ esté asociado al operador de Cauchy-Riemann $\mathcal{D}$ en el caso complejo. Notar que son condiciones sobre las derivadas de las $a_k^{(i)}$ y b_k. En el siguiente caso, con $n = 2$ se verá que esto no siempre es así.

4.2. El caso cuaterniónico

Recordemos que en la Tabla 1 se mostró que los cuaterniones corresponden al álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ donde $n = 2$.
Para este caso, la expresión $\mathcal{F}u$ toma la siguiente forma:

$$\mathcal{F}u = \sum_{i=0}^{3} A^{(i)}(t,x)\partial_i u + B(t,x)u, \tag{35}$$

donde

$$A^{(i)}(t,x) = \sum_{k=0}^{3} a_k^{(i)}(t,x)e_k, \tag{36}$$

$$B(t,x) = \sum_{i=0}^{3}(t,x)e_k. \tag{37}$$

El operador de Cauchy-Riemann para $\mathcal{A}_2$ está definido como:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=0}^{3} e_i \partial_i. \tag{38}$$

En el programa se usan las matrices descritas en los preliminares. La ventaja de usar matrices, como se ha visto en el caso complejo, es que se puede descomponer la matriz resultante $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ de tal forma que se puede utilizar la hipótesis $\mathcal{D}u = 0$ directamente sin incurrrir en ningún tipo de cálculos adicionales.
Por ende, en vez de e_1 y e_2, se utilizan las matrices E_1 y E_2 respectivamente definidas como

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y lo mismo para $E_0 = \mathbf{I_4}$ (la matriz identidad de dimensión 4×4) y $E_3 = E_1 E_2$, es decir:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices satisfacen:

$$E_i E_j = -E_j E_i, \quad \text{para } i,j = 1,2,3, \quad i \neq j$$
$$E_i^2 = -I_4, \quad i = 1,2,3.$$

El procedimiento para hallar $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ es el mismo para el caso complejo. Primero se hace la multiplicación matricial de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{F}u$, se utiliza la regla del producto dada por (31) y se descompone la matriz en una suma de matrices de tal forma que la hipótesis $\mathcal{D}u = 0$ pueda ser utilizada. Para este caso, el programa arroja la expresión $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ como una ecuación, que es la siguiente (después de haber reagrupado los términos):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\mathcal{F}u) = [(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1 - \partial_2 b_2 - \partial_3 b_3)e_0 + (\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0 + \partial_2 b_3 - \partial_3 b_2)e_1 \\
&+(\partial_0 b_2 - \partial_1 b_3 + \partial_2 b_0 + \partial_3 b_1)e_2 + (\partial_0 b_3 + \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 + \partial_3 b_0)e_3]u \\
&+[(\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)} + \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_2^{(1)} + \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_3^{(1)})e_0 \\
&+(\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_3^{(1)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_2^{(1)})e_1 \\
&+(-2b_3 - \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_2^{(1)} - \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_3^{(1)} + \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_0^{(1)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_1^{(1)})e_2 \\
&+(2b_2 + \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_3^{(1)} - \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_2^{(1)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_1^{(1)} + \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_0^{(1)})e_3]\partial_1 u \\
&+2[(-a_2^{(0)} - a_3^{(1)})e_2 + (-a_3^{(0)} + a_2^{(1)})e_3]\partial_1^2 u \\
&+[(\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_0^{(2)} - \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_1^{(2)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_2^{(2)} + \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_3^{(2)})e_0 \\
&+(2b_3 + \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_1^{(2)} + \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_0^{(2)} - \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_3^{(2)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_2^{(2)})e_1 \\
&+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_2^{(2)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_3^{(2)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_0^{(2)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_1^{(2)})e_2 \\
&+(-2b_1 - \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_3^{(2)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_2^{(2)} - \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_1^{(2)} + \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_0^{(2)})e_3]\partial_2 u \\
&+2[(-a_1^{(0)} + a_3^{(2)})e_1 + (-a_3^{(0)} - a_1^{(2)})e_3]\partial_2^2 u \\
&+[(\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_0^{(3)} + \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_1^{(3)} - \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_2^{(3)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_3^{(3)})e_0 \\
&+(-2b_2 - \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_1^{(3)} + \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_0^{(3)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_3^{(3)} - \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_2^{(3)})e_1 \\
&+(2b_1 + \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_2^{(3)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_3^{(3)} + \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_0^{(3)} - \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_1^{(3)})e_2 \\
&+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_3^{(3)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_2^{(3)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_1^{(3)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_0^{(3)})e_3]\partial_3 u \\
&+2[(-a_1^{(0)} - a_2^{(3)})e_1 + (-a_2^{(0)} + a_1^{(3)})e_2]\partial_3^2 u \\
&+2[(a_2^{(0)} + a_3^{(1)})e_1 + (a_1^{(0)} - a_3^{(2)})e_2 + (-a_1^{(1)} + a_2^{(2)})e_3]\partial_1\partial_2 u \\
&+2[(a_3^{(0)} - a_2^{(1)})e_1 + (a_1^{(1)} - a_3^{(3)})e_2 + (a_1^{(0)} + a_2^{(3)})e_3]\partial_1\partial_3 u \\
&+2[(-a_2^{(2)} + a_3^{(3)})e_1 + (a_3^{(0)} + a_1^{(2)})e_2 + (a_2^{(0)} - a_1^{(3)})e_3]\partial_2\partial_3 u
\end{aligned}
$$

Por ende, las condiciones para que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{D}$ estén asociados son las siguientes:

$$\begin{cases}
\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1 - \partial_2 b_2 - \partial_3 b_3 = 0, \\
\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0 + \partial_2 b_3 - \partial_3 b_2 = 0, \\
\partial_0 b_2 - \partial_1 b_3 + \partial_2 b_0 + \partial_3 b_1 = 0, \\
\partial_0 b_3 + \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 + \partial_3 b_0 = 0, \\
\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)} + \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_2^{(1)} + \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_3^{(1)} = 0, \\
\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_3^{(1)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_2^{(1)} = 0, \\
-2b_3 - \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_2^{(1)} - \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_3^{(1)} + \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_0^{(1)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_1^{(1)} = 0, \\
2b_2 + \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_3^{(1)} - \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_2^{(1)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_1^{(1)} + \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_0^{(1)} = 0, \\
\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_0^{(2)} - \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_1^{(2)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_2^{(2)} + \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_3^{(2)} = 0, \\
2b_3 + \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_1^{(2)} + \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_0^{(2)} - \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_3^{(2)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_2^{(2)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_2^{(2)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_3^{(2)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_0^{(2)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_1^{(2)} = 0, \\
-2b_1 - \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_3^{(2)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_2^{(2)} - \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_1^{(2)} + \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_0^{(2)} = 0, \\
\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_0^{(3)} + \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_1^{(3)} - \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_2^{(3)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_3^{(3)} = 0, \\
-2b_2 - \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_1^{(3)} + \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_0^{(3)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_3^{(3)} - \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_2^{(3)} = 0, \\
2b_1 + \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_2^{(3)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_3^{(3)} + \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_0^{(3)} - \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_1^{(3)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_3^{(3)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_2^{(3)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_1^{(3)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_0^{(3)} = 0, \\
-a_2^{(0)} - a_3^{(1)} = 0, \\
-a_3^{(0)} + a_2^{(1)} = 0, \\
-a_1^{(0)} + a_3^{(2)} = 0, \\
-a_3^{(0)} - a_1^{(2)} = 0, \\
-a_1^{(0)} - a_2^{(3)} = 0, \\
-a_2^{(0)} + a_1^{(3)} = 0, \\
a_2^{(0)} + a_3^{(1)} = 0, \\
a_1^{(0)} - a_3^{(2)} = 0, \\
-a_1^{(1)} + a_2^{(2)} = 0, \\
a_3^{(0)} - a_2^{(1)} = 0, \\
a_1^{(1)} - a_3^{(3)} = 0, \\
a_1^{(0)} + a_2^{(3)} = 0, \\
-a_2^{(2)} + a_3^{(3)} = 0, \\
a_3^{(0)} + a_1^{(2)} = 0, \\
a_2^{(0)} - a_1^{(3)} = 0.
\end{cases}$$

Existen entonces 31 condiciones. Sin embargo, en este caso existen condiciones repetidas. Por ejemplo, la condición número 31 que es $a_2^{(0)} - a_1^{(3)} = 0$ es exactamente igual a la condición número 22, que es $-a_2^{(0)}+a_1^{(3)}=0$. Entonces, obviando estas condiciones repetidas, el listado queda con 25 condiciones:

$$
\begin{cases}
\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1 - \partial_2 b_2 - \partial_3 b_3 = 0,\\
\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0 + \partial_2 b_3 - \partial_3 b_2 = 0,\\
\partial_0 b_2 - \partial_1 b_3 + \partial_2 b_0 + \partial_3 b_1 = 0,\\
\partial_0 b_3 + \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 + \partial_3 b_0 = 0,\\
\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)} + \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_2^{(1)} + \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_3^{(1)} = 0,\\
\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_3^{(1)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_2^{(1)} = 0,\\
-2b_3 - \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_2^{(1)} - \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_3^{(1)} + \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_0^{(1)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_1^{(1)} = 0,\\
2b_2 + \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_3^{(1)} - \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_2^{(1)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_1^{(1)} + \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_0^{(1)} = 0,\\
\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_0^{(2)} - \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_1^{(2)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_2^{(2)} + \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_3^{(2)} = 0,\\
2b_3 + \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_1^{(2)} + \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_0^{(2)} - \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_3^{(2)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_2^{(2)} = 0,\\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_2^{(2)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_3^{(2)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_0^{(2)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_1^{(2)} = 0,\\
-2b_1 - \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_3^{(2)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_2^{(2)} - \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_1^{(2)} + \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_0^{(2)} = 0,\\
\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_0^{(3)} + \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_1^{(3)} - \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_2^{(3)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_3^{(3)} = 0,\\
-2b_2 - \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_1^{(3)} + \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_0^{(3)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_3^{(3)} - \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_2^{(3)} = 0,\\
2b_1 + \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_2^{(3)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_3^{(3)} + \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_0^{(3)} - \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_1^{(3)} = 0,\\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_3^{(3)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_2^{(3)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_1^{(3)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_0^{(3)} = 0,\\
-a_1^{(0)} + a_3^{(2)} = 0,\\
-a_3^{(0)} - a_1^{(2)} = 0,\\
-a_2^{(0)} - a_3^{(1)} = 0,\\
-a_3^{(0)} + a_2^{(1)} = 0,\\
-a_1^{(0)} - a_2^{(3)} = 0,\\
-a_2^{(0)} + a_1^{(3)} = 0,\\
-a_1^{(1)} + a_2^{(2)} = 0,\\
a_1^{(1)} - a_3^{(3)} = 0,\\
-a_2^{(2)} + a_3^{(3)} = 0.
\end{cases}
$$

Se puede compactar aún más estas condiciones, como en [31], que es el artículo que motivó la realización del presente trabajo. A continuación se presentarán las condiciones que en [31] se presentan de manera más compacta. Sin embargo, hay que aclarar dos cosas. En el artículo, en vez de utilizar el operador de Cauchy-Riemann, ellos utilizan el operador de Dirac $\mathcal{D}_\lambda$, definido en este caso como

$$\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D} + \lambda \tag{39}$$

donde λ es un número real. Evidentemente, el operador de Dirac se reduce al de Cauchy-Riemann haciendo $\lambda = 0$.
Por lo tanto, con $\lambda = 0$, las condiciones presentadas en [31] son:

$$\begin{cases} a_1^{(3)} = -a_3^{(1)} = a_2^{(0)}, \\ a_2^{(1)} = -a_1^{(2)} = a_3^{(0)}, \\ a_3^{(2)} = -a_2^{(3)} = a_1^{(0)}, \\ a_1^{(1)} = a_2^{(2)} = a_3^{(3)}, \\ \mathcal{D}(A^{(1)} - A^{(0)}e_1) + 2[(-b_3)e_2 - (-b_2)e_3] = 0, \\ \mathcal{D}(A^{(2)} - A^{(0)}e_2) + 2[(-b_1)e_3 - (-b_3)e_1] = 0, \\ \mathcal{D}(A^{(3)} - A^{(0)}e_3) + 2[(-b_2)e_1 - (-b_1)e_2] = 0, \\ \mathcal{D}(B) = 0. \end{cases}$$

Si quisiéramos descomponer estas 8 condiciones en las 25 condiciones que hemos encontrado, deberíamos primero escribir $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}$ y $A^{(3)}$ de forma explícita y luego utilizar la regla del producto dada por (32). Desafortunadamente, el programa no tiene la capacidad de arrojar las condiciones de esta forma tan compacta ya que el programa trabaja con las componentes de u mientras que en [31] no se hace esto.
Entonces, al trabajar con matrices y con las componentes de u se evita utilizar la regla del producto (32), pero esto tiene como desventaja que no se podrán hallar las condiciones de manera compacta.

4.3. El caso $\mathcal{A}_3$

Recordemos que en la Tabla 1 se mostró que $\mathcal{A}_3$ no corresponde a los octoniones, sino a $\mathbb{H}\bigoplus\mathbb{H}$.
Para este caso, la expresión $\mathcal{F}u$ es la siguiente:

$$\mathcal{F}u = \sum_{i=0}^{7} A^{(i)}(t,x)\partial_i u + B(t,x)u. \tag{40}$$

Donde

$$A^{(i)}(t,x) = \sum_{k=0}^{7} a_k^{(i)}(t,x)e_k, \tag{41}$$

$$B(t,x) = \sum_{i=0}^{7}(t,x)e_k. \tag{42}$$

El operador de Cauchy-Riemann de igual forma está definido como:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=0}^{7} e_i \partial_i. \tag{43}$$

Nuevamente,se utilizan las matrices E_i para $i = 0, 1, \ldots, 7$. La matriz E_0 es la matriz identidad I_8 y E_1, E_2 y E_3 son las siguientes matrices:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

También, las siguientes identificaciones se hacen:

$$\begin{aligned} E_4 &= E_1 E_2, \\ E_5 &= E_1 E_3, \\ E_6 &= E_2 E_3, \\ E_7 &= E_1 E_2 E_3 \end{aligned}$$

De esta forma estas relaciones de estructura se satisfacen automáticamente.

$$E_i E_j = -E_j E_i, \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \quad i \neq j,$$

$$E_i^2 = -I_8, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Para este caso, la expresión $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ es mucho más complicada y se la puede hallar en el Apéndice.
Las condiciones para que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{D}$ estén asociados son:

$$
\begin{cases}
\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0 + \partial_2 b_4 + \partial_3 b_5 - \partial_4 b_2 - \partial_5 b_3 - \partial_6 b_7 - \partial_7 b_6 = 0, \\
\partial_0 b_2 - \partial_1 b_4 + \partial_2 b_0 + \partial_3 b_6 + \partial_4 b_1 + \partial_5 b_7 - \partial_6 b_3 + \partial_7 b_5 = 0, \\
\partial_0 b_4 + \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 - \partial_3 b_7 + \partial_4 b_0 + \partial_5 b_6 - \partial_6 b_5 - \partial_7 b_3 = 0, \\
\partial_0 b_3 - \partial_1 b_5 - \partial_2 b_6 + \partial_3 b_0 - \partial_4 b_7 + \partial_5 b_1 + \partial_6 b_2 - \partial_7 b_4 = 0, \\
\partial_0 b_5 + \partial_1 b_3 + \partial_2 b_7 - \partial_3 b_1 - \partial_4 b_6 + \partial_5 b_0 + \partial_6 b_4 + \partial_7 b_2 = 0, \\
\partial_0 b_6 - \partial_1 b_7 + \partial_2 b_3 - \partial_3 b_2 + \partial_4 b_5 - \partial_5 b_4 + \partial_6 b_0 - \partial_7 b_1 = 0, \\
\partial_0 b_7 + \partial_1 b_6 - \partial_2 b_5 + \partial_3 b_4 + \partial_4 b_3 - \partial_5 b_2 + \partial_6 b_1 + \partial_7 b_0 = 0, \\
\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)} + \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_2^{(1)} + \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_3^{(1)} - \partial_4 a_2^{(0)} - \partial_4 a_4^{(1)} - \partial_5 a_3^{(0)} \\
-\partial_5 a_5^{(1)} - \partial_6 a_7^{(0)} - \partial_6 a_6^{(1)} - \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_7^{(1)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_4^{(1)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_5^{(1)} + \partial_4 a_4^{(0)} - \partial_4 a_2^{(1)} \\
+\partial_5 a_5^{(0)} - \partial_5 a_3^{(1)} + \partial_6 a_6^{(0)} - \partial_6 a_7^{(1)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_6^{(1)} = 0, \\
-2b_4 - \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_2^{(1)} - \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_4^{(1)} + \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_0^{(1)} + \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_6^{(1)} - \partial_4 a_0^{(0)} + \partial_4 a_1^{(1)} \\
-\partial_5 a_6^{(0)} + \partial_5 a_7^{(1)} + \partial_6 a_5^{(0)} - \partial_6 a_3^{(1)} + \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_5^{(1)} = 0, \\
2b_2 + \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_4^{(1)} - \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_2^{(1)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_1^{(1)} + \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_7^{(1)} + \partial_4 a_1^{(0)} + \partial_4 a_0^{(1)} \\
+\partial_5 a_7^{(0)} + \partial_5 a_6^{(1)} - \partial_6 a_3^{(0)} - \partial_6 a_5^{(1)} + \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_3^{(1)} = 0, \\
-2b_5 - \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_3^{(1)} - \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_5^{(1)} - \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_6^{(1)} + \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_0^{(1)} + \partial_4 a_6^{(0)} - \partial_4 a_7^{(1)} \\
-\partial_5 a_0^{(0)} + \partial_5 a_1^{(1)} - \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_2^{(1)} - \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_4^{(1)} = 0, \\
2b_3 + \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_5^{(1)} - \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_3^{(1)} - \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_7^{(1)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_1^{(1)} - \partial_4 a_7^{(0)} - \partial_4 a_6^{(1)} \\
+\partial_5 a_1^{(0)} + \partial_5 a_0^{(1)} + \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_4^{(1)} - \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_2^{(1)} = 0, \\
\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_6^{(1)} + \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_7^{(1)} - \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_3^{(1)} + \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_2^{(1)} + \partial_4 a_3^{(0)} + \partial_4 a_5^{(1)} \\
-\partial_5 a_2^{(0)} - \partial_5 a_4^{(1)} + \partial_6 a_1^{(0)} + \partial_6 a_0^{(1)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_1^{(1)} = 0, \\
-\partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_7^{(1)} + \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_6^{(1)} - \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_5^{(1)} + \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_4^{(1)} - \partial_4 a_5^{(0)} + \partial_4 a_3^{(1)} \\
+\partial_5 a_4^{(0)} - \partial_5 a_2^{(1)} - \partial_6 a_0^{(0)} + \partial_6 a_1^{(1)} + \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_0^{(1)} = 0, \\
\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_0^{(2)} - \partial_1 a_4^{(0)} - \partial_1 a_1^{(2)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_2^{(2)} + \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_3^{(2)} + \partial_4 a_1^{(0)} - \partial_4 a_4^{(2)} \\
+\partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_5^{(2)} - \partial_6 a_3^{(0)} - \partial_6 a_6^{(2)} + \partial_7 a_5^{(0)} + \partial_7 a_7^{(2)} = 0, \\
2b_4 + \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_1^{(2)} + \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_0^{(2)} - \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_4^{(2)} - \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_5^{(2)} + \partial_4 a_0^{(0)} - \partial_4 a_2^{(2)} \\
+\partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_3^{(2)} - \partial_6 a_5^{(0)} - \partial_6 a_7^{(2)} - \partial_7 a_3^{(0)} - \partial_7 a_6^{(2)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_2^{(2)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_4^{(2)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_0^{(2)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_6^{(2)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_1^{(2)} \\
+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_7^{(2)} + \partial_6 a_6^{(0)} - \partial_6 a_3^{(2)} - \partial_7 a_7^{(0)} + \partial_7 a_5^{(2)} = 0, \\
-2b_1 - \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_4^{(2)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_2^{(2)} - \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_1^{(2)} - \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_7^{(2)} + \partial_4 a_2^{(0)} + \partial_4 a_0^{(2)} \\
+\partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_6^{(2)} + \partial_6 a_7^{(0)} - \partial_6 a_5^{(2)} + \partial_7 a_6^{(0)} - \partial_7 a_3^{(2)} = 0, \\
-2b_6 - \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_3^{(2)} + \partial_1 a_7^{(0)} - \partial_1 a_5^{(2)} - \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_6^{(2)} + \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_0^{(2)} - \partial_4 a_5^{(0)} - \partial_4 a_7^{(2)} \\
+\partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_1^{(2)} - \partial_6 a_0^{(0)} + \partial_6 a_2^{(2)} + \partial_7 a_1^{(0)} - \partial_7 a_4^{(2)} = 0, \\
-\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_5^{(2)} - \partial_1 a_6^{(0)} + \partial_1 a_3^{(2)} + \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_7^{(2)} - \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_1^{(2)} - \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_6^{(2)} \\
+\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_0^{(2)} - \partial_6 a_1^{(0)} + \partial_6 a_4^{(2)} - \partial_7 a_0^{(0)} + \partial_7 a_2^{(2)} = 0, \\
2b_3 + \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_6^{(2)} - \partial_1 a_5^{(0)} - \partial_1 a_7^{(2)} - \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_3^{(2)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_2^{(2)} - \partial_4 a_7^{(0)} + \partial_4 a_5^{(2)} \\
+\partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_4^{(2)} + \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_0^{(2)} - \partial_7 a_4^{(0)} - \partial_7 a_1^{(2)} = 0,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_7^{(2)} + \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_6^{(2)} + \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_5^{(2)} - \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_4^{(2)} - \partial_4 a_6^{(0)} + \partial_4 a_3^{(2)} \\
+\partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_2^{(2)} + \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_1^{(2)} + \partial_7 a_2^{(0)} + \partial_7 a_0^{(2)} = 0, \\
\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_0^{(3)} - \partial_1 a_5^{(0)} - \partial_1 a_1^{(3)} - \partial_2 a_6^{(0)} - \partial_2 a_2^{(3)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_3^{(3)} - \partial_4 a_7^{(0)} - \partial_4 a_4^{(3)} \\
+\partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_5^{(3)} + \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_6^{(3)} - \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_7^{(3)} = 0, \\
2b_5 + \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_1^{(3)} + \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_0^{(3)} + \partial_2 a_7^{(0)} + \partial_2 a_4^{(3)} - \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_5^{(3)} - \partial_4 a_6^{(0)} - \partial_4 a_2^{(3)} \\
+\partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_3^{(3)} + \partial_6 a_4^{(0)} - \partial_6 a_7^{(3)} + \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_6^{(3)} = 0, \\
2b_6 + \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_2^{(3)} - \partial_1 a_7^{(0)} - \partial_1 a_4^{(3)} + \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_0^{(3)} - \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_6^{(3)} + \partial_4 a_5^{(0)} + \partial_4 a_1^{(3)} \\
-\partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_7^{(3)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_3^{(3)} - \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_5^{(3)} = 0, \\
\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_4^{(3)} + \partial_1 a_6^{(0)} + \partial_1 a_2^{(3)} - \partial_2 a_5^{(0)} - \partial_2 a_1^{(3)} + \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_7^{(3)} + \partial_4 a_3^{(0)} + \partial_4 a_0^{(3)} \\
-\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_6^{(3)} + \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_5^{(3)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_3^{(3)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_3^{(3)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_5^{(3)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_6^{(3)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_0^{(3)} + \partial_4 a_4^{(0)} - \partial_4 a_7^{(3)} \\
+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_1^{(3)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_2^{(3)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_4^{(3)} = 0, \\
-2b_1 - \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_5^{(3)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_3^{(3)} - \partial_2 a_4^{(0)} + \partial_2 a_7^{(3)} - \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_1^{(3)} + \partial_4 a_2^{(0)} - \partial_4 a_6^{(3)} \\
+\partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_0^{(3)} + \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_4^{(3)} + \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_2^{(3)} = 0, \\
-2b_2 - \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_6^{(3)} + \partial_1 a_4^{(0)} - \partial_1 a_7^{(3)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_3^{(3)} - \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_2^{(3)} - \partial_4 a_1^{(0)} + \partial_4 a_5^{(3)} \\
-\partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_4^{(3)} + \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_0^{(3)} - \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_1^{(3)} = 0, \\
-\partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_7^{(3)} - \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_6^{(3)} + \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_5^{(3)} + \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_4^{(3)} - \partial_4 a_0^{(0)} + \partial_4 a_3^{(3)} \\
-\partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_2^{(3)} + \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_1^{(3)} + \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_0^{(3)} = 0, \\
\partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_0^{(4)} + \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_1^{(4)} - \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_2^{(4)} - \partial_3 a_7^{(0)} - \partial_3 a_3^{(4)} + \partial_4 a_0^{(0)} - \partial_4 a_4^{(4)} \\
+\partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_5^{(4)} - \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_6^{(4)} - \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_7^{(4)} = 0, \\
-2b_2 - \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_1^{(4)} + \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_0^{(4)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_4^{(4)} - \partial_3 a_6^{(0)} + \partial_3 a_5^{(4)} - \partial_4 a_1^{(0)} - \partial_4 a_2^{(4)} \\
-\partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_3^{(4)} + \partial_6 a_3^{(0)} - \partial_6 a_7^{(4)} - \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_6^{(4)} = 0, \\
2b_1 + \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_2^{(4)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_4^{(4)} + \partial_2 a_4^{(0)} + \partial_2 a_0^{(4)} + \partial_3 a_5^{(0)} + \partial_3 a_5^{(4)} - \partial_4 a_2^{(0)} + \partial_4 a_1^{(4)} \\
-\partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_7^{(4)} - \partial_6 a_7^{(0)} - \partial_6 a_3^{(4)} - \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_5^{(4)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_4^{(4)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_2^{(4)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_1^{(4)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_7^{(4)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_0^{(4)} \\
+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_6^{(4)} + \partial_6 a_6^{(0)} - \partial_6 a_5^{(4)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_3^{(4)} = 0, \\
\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_3^{(4)} + \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_5^{(4)} - \partial_2 a_5^{(0)} - \partial_2 a_6^{(4)} + \partial_3 a_4^{(0)} + \partial_3 a_0^{(4)} + \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_7^{(4)} \\
-\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_1^{(4)} + \partial_6 a_1^{(0)} + \partial_6 a_2^{(4)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_4^{(4)} = 0, \\
-2b_6 - \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_5^{(4)} + \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_3^{(4)} - \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_7^{(4)} + \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_1^{(4)} - \partial_4 a_5^{(0)} - \partial_4 a_6^{(4)} \\
+\partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_0^{(4)} - \partial_6 a_0^{(0)} + \partial_6 a_4^{(4)} + \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_2^{(4)} = 0, \\
2b_5 + \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_6^{(4)} + \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_7^{(4)} + \partial_2 a_7^{(0)} + \partial_2 a_3^{(4)} - \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_2^{(4)} - \partial_4 a_6^{(0)} + \partial_4 a_5^{(4)} \\
+\partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_4^{(4)} + \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_0^{(4)} + \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_1^{(4)} = 0, \\
-\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_7^{(4)} + \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_6^{(4)} + \partial_2 a_6^{(0)} - \partial_2 a_5^{(4)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_4^{(4)} + \partial_4 a_7^{(0)} + \partial_4 a_3^{(4)} \\
-\partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_2^{(4)} - \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_1^{(4)} + \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_0^{(4)} = 0, \\
\partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_0^{(5)} + \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_1^{(5)} + \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_2^{(5)} - \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_3^{(5)} - \partial_4 a_6^{(0)} - \partial_4 a_4^{(5)} \\
+\partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_5^{(5)} + \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_6^{(5)} + \partial_7 a_2^{(0)} + \partial_7 a_7^{(5)} = 0, \\
-2b_3 - \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_1^{(5)} + \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_0^{(5)} + \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_4^{(5)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_5^{(5)} + \partial_4 a_7^{(0)} - \partial_4 a_2^{(5)} \\
-\partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_3^{(5)} - \partial_6 a_2^{(0)} - \partial_6 a_7^{(5)} + \partial_7 a_4^{(0)} - \partial_7 a_6^{(5)} = 0,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_2^{(5)} - \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_4^{(5)} + \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_0^{(5)} - \partial_3 a_4^{(0)} + \partial_3 a_6^{(5)} - \partial_4 a_3^{(0)} + \partial_4 a_1^{(5)} \\
+\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_7^{(5)} - \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_3^{(5)} - \partial_7 a_0^{(0)} + \partial_7 a_5^{(5)} = 0, \\
2b_6 + \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_4^{(5)} - \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_2^{(5)} + \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_1^{(5)} - \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_7^{(5)} + \partial_4 a_5^{(0)} + \partial_4 a_0^{(5)} \\
-\partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_6^{(5)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_5^{(5)} - \partial_7 a_1^{(0)} - \partial_7 a_3^{(5)} = 0, \\
2b_1 + \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_3^{(5)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_5^{(5)} + \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_6^{(5)} + \partial_3 a_5^{(0)} + \partial_3 a_0^{(5)} - \partial_4 a_2^{(0)} - \partial_4 a_7^{(5)} \\
-\partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_1^{(5)} - \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_2^{(5)} - \partial_7 a_6^{(0)} - \partial_7 a_4^{(5)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_5^{(5)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_3^{(5)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_7^{(5)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_1^{(5)} + \partial_4 a_4^{(0)} - \partial_4 a_6^{(5)} \\
+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_0^{(5)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_4^{(5)} - \partial_7 a_7^{(0)} + \partial_7 a_2^{(5)} = 0, \\
-2b_4 - \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_6^{(5)} - \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_7^{(5)} + \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_3^{(5)} + \partial_3 a_7^{(0)} - \partial_3 a_2^{(5)} - \partial_4 a_0^{(0)} + \partial_4 a_5^{(5)} \\
-\partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_4^{(5)} + \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_0^{(5)} + \partial_7 a_3^{(0)} - \partial_7 a_1^{(5)} = 0, \\
-\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_7^{(5)} - \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_6^{(5)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_5^{(5)} + \partial_3 a_6^{(0)} + \partial_3 a_4^{(5)} + \partial_4 a_1^{(0)} + \partial_4 a_3^{(5)} \\
+\partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_2^{(5)} - \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_1^{(5)} + \partial_7 a_5^{(0)} + \partial_7 a_0^{(5)} = 0, \\
\partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_0^{(6)} - \partial_1 a_7^{(0)} - \partial_1 a_1^{(6)} + \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_2^{(6)} - \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_3^{(6)} + \partial_4 a_5^{(0)} - \partial_4 a_4^{(6)} \\
-\partial_5 a_4^{(0)} - \partial_5 a_5^{(6)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_6^{(6)} - \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_7^{(6)} = 0, \\
\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_1^{(6)} + \partial_1 a_6^{(0)} + \partial_1 a_0^{(6)} - \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_4^{(6)} + \partial_3 a_4^{(0)} + \partial_3 a_5^{(6)} + \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_2^{(6)} \\
-\partial_5 a_2^{(0)} - \partial_5 a_3^{(6)} + \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_7^{(6)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_6^{(6)} = 0, \\
-2b_3 - \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_2^{(6)} + \partial_1 a_5^{(0)} - \partial_1 a_4^{(6)} + \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_0^{(6)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_6^{(6)} + \partial_4 a_7^{(0)} + \partial_4 a_1^{(6)} \\
-\partial_5 a_1^{(0)} + \partial_5 a_7^{(6)} - \partial_6 a_2^{(0)} - \partial_6 a_3^{(6)} + \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_5^{(6)} = 0, \\
-2b_5 - \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_4^{(6)} - \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_2^{(6)} - \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_1^{(6)} + \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_7^{(6)} + \partial_4 a_6^{(0)} + \partial_4 a_0^{(6)} \\
-\partial_5 a_0^{(0)} + \partial_5 a_6^{(6)} - \partial_6 a_4^{(0)} - \partial_6 a_5^{(6)} - \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_3^{(6)} = 0, \\
2b_2 + \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_3^{(6)} - \partial_1 a_4^{(0)} - \partial_1 a_5^{(6)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_6^{(6)} + \partial_3 a_6^{(0)} + \partial_3 a_0^{(6)} + \partial_4 a_1^{(0)} - \partial_4 a_7^{(6)} \\
+\partial_5 a_7^{(0)} + \partial_5 a_1^{(6)} - \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_2^{(6)} + \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_4^{(6)} = 0, \\
2b_4 + \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_5^{(6)} + \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_3^{(6)} - \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_7^{(6)} - \partial_3 a_7^{(0)} - \partial_3 a_1^{(6)} + \partial_4 a_0^{(0)} - \partial_4 a_6^{(6)} \\
+\partial_5 a_6^{(0)} + \partial_5 a_0^{(6)} - \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_4^{(6)} - \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_2^{(6)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_6^{(6)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_7^{(6)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_3^{(6)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_2^{(6)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_5^{(6)} \\
+\partial_5 a_5^{(0)} - \partial_5 a_4^{(6)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_0^{(6)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_1^{(6)} = 0, \\
-\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_7^{(6)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_6^{(6)} - \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_5^{(6)} - \partial_3 a_5^{(0)} + \partial_3 a_4^{(6)} + \partial_4 a_2^{(0)} + \partial_4 a_3^{(6)} \\
+\partial_5 a_3^{(0)} - \partial_5 a_2^{(6)} + \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_1^{(6)} + \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_0^{(6)} = 0, \\
-\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_0^{(7)} - \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_1^{(7)} + \partial_2 a_5^{(0)} - \partial_2 a_2^{(7)} - \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_3^{(7)} - \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_4^{(7)} \\
+\partial_5 a_2^{(0)} - \partial_5 a_5^{(7)} - \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_6^{(7)} - \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_7^{(7)} = 0, \\
\partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_1^{(7)} - \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_0^{(7)} + \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_4^{(7)} - \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_5^{(7)} + \partial_4 a_5^{(0)} - \partial_4 a_2^{(7)} \\
-\partial_5 a_4^{(0)} - \partial_5 a_3^{(7)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_7^{(7)} - \partial_7 a_1^{(0)} - \partial_7 a_6^{(7)} = 0, \\
-\partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_2^{(7)} - \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_4^{(7)} - \partial_2 a_7^{(0)} + \partial_2 a_0^{(7)} + \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_6^{(7)} + \partial_4 a_6^{(0)} + \partial_4 a_1^{(7)} \\
-\partial_5 a_0^{(0)} + \partial_5 a_7^{(7)} - \partial_6 a_4^{(0)} - \partial_6 a_3^{(7)} - \partial_7 a_2^{(0)} + \partial_7 a_5^{(7)} = 0, \\
\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_4^{(7)} - \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_2^{(7)} - \partial_2 a_6^{(0)} - \partial_2 a_1^{(7)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_7^{(7)} - \partial_4 a_7^{(0)} + \partial_4 a_0^{(7)} \\
+\partial_5 a_1^{(0)} + \partial_5 a_6^{(7)} + \partial_6 a_2^{(0)} - \partial_6 a_5^{(7)} - \partial_7 a_4^{(0)} - \partial_7 a_3^{(7)} = 0,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_3^{(7)} + \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_5^{(7)} - \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_6^{(7)} - \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_0^{(7)} + \partial_4 a_0^{(0)} - \partial_4 a_7^{(7)} \\
+\partial_5 a_6^{(0)} + \partial_5 a_1^{(7)} - \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_2^{(7)} - \partial_7 a_3^{(0)} - \partial_7 a_4^{(7)} = 0, \\
-\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_5^{(7)} + \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_3^{(7)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_7^{(7)} - \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_1^{(7)} - \partial_4 a_1^{(0)} - \partial_4 a_6^{(7)} \\
-\partial_5 a_7^{(0)} + \partial_5 a_0^{(7)} + \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_4^{(7)} - \partial_7 a_5^{(0)} + \partial_7 a_2^{(7)} = 0, \\
\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_6^{(7)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_7^{(7)} + \partial_2 a_4^{(0)} + \partial_2 a_3^{(7)} + \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_2^{(7)} - \partial_4 a_2^{(0)} + \partial_4 a_5^{(7)} \\
-\partial_5 a_3^{(0)} - \partial_5 a_4^{(7)} - \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_0^{(7)} - \partial_7 a_6^{(0)} - \partial_7 a_1^{(7)} = 0, \\
-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_7^{(7)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_6^{(7)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_5^{(7)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_4^{(7)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_3^{(7)} \\
+\partial_5 a_5^{(0)} - \partial_5 a_2^{(7)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_1^{(7)} - \partial_7 a_7^{(0)} + \partial_7 a_0^{(7)} = 0, \\
a_6^{(0)} - a_6^{(6)} = 0, \\
a_7^{(0)} - a_7^{(6)} = 0, \\
-a_3^{(0)} - a_3^{(6)} = 0, \\
-a_5^{(0)} - a_5^{(6)} = 0, \\
a_2^{(0)} + a_2^{(6)} = 0, \\
a_4^{(0)} + a_4^{(6)} = 0, \\
-a_0^{(0)} + a_0^{(6)} = 0, \\
-a_1^{(0)} + a_1^{(6)} = 0, \\
-a_7^{(0)} + a_7^{(7)} = 0, \\
a_6^{(0)} - a_6^{(7)} = 0, \\
-a_5^{(0)} + a_5^{(7)} = 0, \\
a_3^{(0)} - a_3^{(7)} = 0, \\
a_4^{(0)} - a_4^{(7)} = 0, \\
a_5^{(0)} - a_5^{(5)} = 0,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-a_3^{(0)} - a_3^{(5)} = 0, \\
-a_2^{(0)} + a_2^{(7)} = 0, \\
a_1^{(0)} - a_1^{(7)} = 0, \\
-a_0^{(0)} + a_0^{(7)} = 0, \\
-a_2^{(1)} - a_1^{(2)} = 0, \\
a_4^{(1)} + a_0^{(2)} = 0, \\
a_0^{(1)} - a_4^{(2)} = 0, \\
-a_1^{(1)} + a_2^{(2)} = 0, \\
-a_6^{(1)} - a_5^{(2)} = 0, \\
a_7^{(1)} + a_3^{(2)} = 0, \\
a_3^{(1)} - a_7^{(2)} = 0, \\
-a_5^{(1)} + a_6^{(2)} = 0, \\
-a_3^{(1)} - a_1^{(3)} = 0, \\
a_5^{(1)} + a_0^{(3)} = 0, \\
a_6^{(1)} - a_4^{(3)} = 0, \\
-a_7^{(1)} + a_2^{(3)} = 0, \\
a_0^{(1)} - a_5^{(3)} = 0, \\
-a_1^{(1)} + a_3^{(3)} = 0, \\
-a_2^{(1)} - a_7^{(3)} = 0, \\
a_4^{(1)} + a_6^{(3)} = 0, \\
-a_4^{(1)} - a_1^{(4)} = 0, \\
-a_2^{(1)} + a_0^{(4)} = 0, \\
a_1^{(1)} - a_4^{(4)} = 0, \\
a_0^{(1)} + a_2^{(4)} = 0, \\
-a_7^{(1)} - a_5^{(4)} = 0, \\
-a_6^{(1)} + a_3^{(4)} = 0, \\
a_5^{(1)} - a_7^{(4)} = 0, \\
a_3^{(1)} + a_6^{(4)} = 0, \\
-a_5^{(1)} - a_1^{(5)} = 0, \\
-a_3^{(1)} + a_0^{(5)} = 0, \\
a_7^{(1)} - a_4^{(5)} = 0, \\
a_6^{(1)} + a_2^{(5)} = 0, \\
a_1^{(1)} - a_5^{(5)} = 0, \\
a_0^{(1)} + a_3^{(5)} = 0, \\
-a_4^{(1)} - a_7^{(5)} = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
-a_2^{(1)} + a_6^{(5)} = 0, \\
-a_6^{(1)} - a_1^{(6)} = 0, \\
-a_7^{(1)} + a_0^{(6)} = 0, \\
-a_3^{(1)} - a_4^{(6)} = 0, \\
a_2^{(6)} - a_5^{(1)} = 0, \\
a_2^{(1)} - a_5^{(6)} = 0, \\
a_4^{(1)} + a_3^{(6)} = 0, \\
a_0^{(1)} - a_7^{(6)} = 0, \\
a_1^{(1)} + a_6^{(6)} = 0, \\
a_7^{(1)} - a_1^{(7)} = 0, \\
-a_6^{(1)} + a_0^{(7)} = 0, \\
a_5^{(1)} - a_4^{(7)} = 0, \\
-a_3^{(1)} + a_2^{(7)} = 0, \\
-a_4^{(1)} - a_5^{(7)} = 0, \\
a_2^{(1)} + a_3^{(7)} = 0, \\
-a_1^{(1)} - a_7^{(7)} = 0, \\
a_0^{(1)} + a_6^{(7)} = 0, \\
-a_3^{(2)} - a_2^{(3)} = 0, \\
a_5^{(2)} + a_4^{(3)} = 0, \\
a_6^{(2)} + a_0^{(3)} = 0, \\
-a_7^{(2)} - a_1^{(3)} = 0, \\
a_0^{(2)} - a_6^{(3)} = 0, \\
-a_1^{(2)} + a_7^{(3)} = 0, \\
-a_2^{(2)} + a_3^{(3)} = 0, \\
a_4^{(2)} - a_5^{(3)} = 0, \\
-a_4^{(2)} - a_2^{(4)} = 0, \\
-a_2^{(2)} + a_4^{(4)} = 0, \\
a_1^{(2)} + a_0^{(4)} = 0, \\
a_0^{(2)} - a_1^{(4)} = 0, \\
-a_7^{(2)} - a_6^{(4)} = 0, \\
-a_6^{(2)} + a_7^{(4)} = 0, \\
a_5^{(2)} + a_3^{(4)} = 0, \\
a_3^{(2)} - a_5^{(4)} = 0, \\
-a_5^{(2)} - a_2^{(5)} = 0, \\
-a_3^{(2)} + a_4^{(5)} = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
a_7^{(2)} + a_0^{(5)} = 0, \\
a_6^{(2)} - a_1^{(5)} = 0, \\
a_1^{(2)} - a_6^{(5)} = 0, \\
a_0^{(2)} + a_7^{(5)} = 0, \\
a_4^{(2)} + a_3^{(5)} = 0, \\
-a_2^{(2)} - a_5^{(5)} = 0, \\
-a_6^{(2)} - a_2^{(6)} = 0, \\
-a_7^{(2)} + a_4^{(6)} = 0, \\
-a_3^{(2)} + a_0^{(6)} = 0, \\
-a_5^{(2)} - a_1^{(6)} = 0, \\
a_2^{(2)} - a_6^{(6)} = 0, \\
a_4^{(2)} + a_7^{(6)} = 0, \\
a_0^{(2)} + a_3^{(6)} = 0, \\
a_1^{(2)} - a_5^{(6)} = 0, \\
a_7^{(2)} - a_2^{(7)} = 0, \\
-a_6^{(2)} + a_4^{(7)} = 0, \\
a_5^{(2)} + a_0^{(7)} = 0, \\
-a_3^{(2)} - a_1^{(7)} = 0, \\
-a_4^{(2)} - a_6^{(7)} = 0, \\
a_2^{(2)} + a_7^{(7)} = 0, \\
-a_1^{(2)} + a_3^{(7)} = 0, \\
a_0^{(2)} - a_5^{(7)} = 0, \\
-a_4^{(3)} - a_3^{(4)} = 0, \\
-a_2^{(3)} + a_5^{(4)} = 0, \\
a_1^{(3)} + a_6^{(4)} = 0, \\
a_0^{(3)} - a_7^{(4)} = 0, \\
-a_7^{(3)} + a_0^{(4)} = 0, \\
-a_6^{(3)} - a_1^{(4)} = 0, \\
a_5^{(3)} - a_2^{(4)} = 0, \\
a_3^{(3)} + a_4^{(4)} = 0, \\
-a_5^{(3)} - a_3^{(5)} = 0, \\
-a_3^{(3)} + a_5^{(5)} = 0, \\
a_7^{(3)} + a_6^{(5)} = 0, \\
a_6^{(3)} - a_7^{(5)} = 0, \\
a_1^{(3)} + a_0^{(5)} = 0,
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} a_0^{(3)} - a_1^{(5)} = 0, \\ -a_4^{(3)} - a_2^{(5)} = 0, \\ -a_2^{(3)} + a_4^{(5)} = 0, \\ -a_6^{(3)} - a_3^{(6)} = 0, \\ -a_7^{(3)} + a_5^{(6)} = 0, \\ -a_3^{(3)} + a_6^{(6)} = 0, \\ -a_5^{(3)} - a_7^{(6)} = 0, \\ a_2^{(3)} + a_0^{(6)} = 0, \\ a_4^{(3)} - a_1^{(6)} = 0, \\ a_0^{(3)} - a_2^{(6)} = 0, \\ a_1^{(3)} + a_4^{(6)} = 0, \\ a_7^{(3)} - a_3^{(7)} = 0, \\ -a_6^{(3)} + a_5^{(7)} = 0, \\ a_5^{(3)} + a_6^{(7)} = 0, \\ -a_3^{(3)} - a_7^{(7)} = 0, \\ -a_4^{(3)} + a_0^{(7)} = 0, \\ a_2^{(3)} - a_1^{(7)} = 0, \\ -a_1^{(3)} - a_2^{(7)} = 0, \\ a_0^{(3)} + a_4^{(7)} = 0, \\ -a_5^{(4)} - a_4^{(5)} = 0, \\ -a_3^{(4)} - a_2^{(5)} = 0, \\ a_7^{(4)} + a_1^{(5)} = 0, \\ a_6^{(4)} + a_0^{(5)} = 0, \\ a_1^{(4)} - a_7^{(5)} = 0, \\ a_0^{(4)} - a_6^{(5)} = 0, \\ -a_4^{(4)} + a_5^{(5)} = 0, \\ -a_2^{(4)} + a_3^{(5)} = 0, \\ -a_6^{(4)} - a_4^{(6)} = 0, \\ -a_7^{(4)} - a_2^{(6)} = 0, \\ -a_3^{(4)} + a_1^{(6)} = 0, \\ -a_5^{(4)} + a_0^{(6)} = 0, \\ a_2^{(4)} - a_7^{(6)} = 0, \\ a_4^{(4)} - a_6^{(6)} = 0, \\ a_0^{(4)} + a_5^{(6)} = 0, \\ a_1^{(4)} + a_3^{(6)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7^{(4)} - a_4^{(7)} = 0, \\ -a_6^{(4)} - a_2^{(7)} = 0, \\ a_5^{(4)} + a_1^{(7)} = 0, \\ -a_3^{(4)} + a_0^{(7)} = 0, \\ -a_4^{(4)} - a_7^{(7)} = 0, \\ a_2^{(4)} - a_6^{(7)} = 0, \\ -a_1^{(4)} + a_5^{(7)} = 0, \\ a_0^{(4)} + a_3^{(7)} = 0, \\ -a_6^{(5)} - a_5^{(6)} = 0, \\ -a_7^{(5)} - a_3^{(6)} = 0, \\ -a_3^{(5)} + a_7^{(6)} = 0, \\ -a_5^{(5)} + a_6^{(6)} = 0, \\ a_2^{(5)} + a_1^{(6)} = 0, \\ a_4^{(5)} + a_0^{(6)} = 0, \\ a_0^{(5)} - a_4^{(6)} = 0, \\ a_1^{(5)} - a_2^{(6)} = 0, \\ a_7^{(5)} - a_5^{(7)} = 0, \\ -a_6^{(5)} - a_3^{(7)} = 0, \\ a_5^{(5)} + a_7^{(7)} = 0, \\ -a_3^{(5)} + a_6^{(7)} = 0, \\ -a_4^{(5)} + a_1^{(7)} = 0, \\ a_2^{(5)} + a_0^{(7)} = 0, \\ -a_1^{(5)} - a_4^{(7)} = 0, \\ a_0^{(5)} - a_2^{(7)} = 0, \\ a_7^{(6)} - a_6^{(7)} = 0, \\ -a_6^{(6)} - a_7^{(7)} = 0, \\ a_5^{(6)} - a_3^{(7)} = 0, \\ -a_3^{(6)} - a_5^{(7)} = 0, \\ -a_4^{(6)} + a_2^{(7)} = 0, \\ a_2^{(6)} + a_4^{(7)} = 0, \\ -a_1^{(6)} + a_0^{(7)} = 0, \\ a_0^{(6)} + a_1^{(7)} = 0, \\ a_1^{(0)} + a_1^{(5)} = 0, \\ -a_0^{(0)} + a_0^{(5)} = 0, \\ a_6^{(0)} + a_6^{(5)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_7^{(0)} + a_7^{(5)} = 0, \\ a_1^{(0)} - a_1^{(1)} = 0, \\ a_0^{(0)} + a_0^{(1)} = 0, \\ -a_4^{(0)} - a_4^{(1)} = 0, \\ a_2^{(0)} + a_2^{(1)} = 0, \\ -a_5^{(0)} - a_5^{(1)} = 0, \\ a_3^{(0)} + a_3^{(1)} = 0, \\ a_7^{(0)} - a_7^{(1)} = 0, \\ -a_6^{(0)} + a_6^{(1)} = 0, \\ a_2^{(0)} - a_2^{(2)} = 0, \\ a_4^{(0)} + a_4^{(2)} = 0, \\ -a_0^{(0)} + a_0^{(2)} = 0, \\ -a_1^{(0)} - a_1^{(2)} = 0, \\ -a_6^{(0)} - a_6^{(2)} = 0, \\ -a_7^{(0)} + a_7^{(2)} = 0, \\ a_3^{(0)} + a_3^{(2)} = 0, \\ a_5^{(0)} - a_5^{(2)} = 0, \\ a_3^{(0)} - a_3^{(3)} = 0, \\ a_5^{(0)} + a_5^{(3)} = 0, \\ a_6^{(0)} + a_6^{(3)} = 0, \\ a_7^{(0)} - a_7^{(3)} = 0, \\ -a_0^{(0)} + a_0^{(3)} = 0, \\ -a_1^{(0)} - a_1^{(3)} = 0, \\ -a_2^{(0)} - a_2^{(3)} = 0, \\ -a_4^{(0)} + a_4^{(3)} = 0, \\ a_4^{(0)} - a_4^{(4)} = 0, \\ -a_2^{(0)} - a_2^{(4)} = 0, \\ a_1^{(0)} + a_1^{(4)} = 0, \\ -a_0^{(0)} + a_0^{(4)} = 0, \\ a_7^{(0)} - a_7^{(4)} = 0, \\ -a_6^{(0)} - a_6^{(4)} = 0, \\ a_5^{(0)} + a_5^{(4)} = 0, \\ -a_3^{(0)} + a_3^{(4)} = 0, \\ -a_4^{(0)} - a_4^{(5)} = 0, \\ a_2^{(0)} - a_2^{(5)} = 0. \end{cases}$$

4.4. Dimensiones superiores

El problema de hallar condiciones necesarias para asociar dos operadores diferenciales puede ser resuelto si se consideran álgebras de Clifford $\mathcal{A}_n$ con $n \geq 4$. Si se toma en cuenta el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ cuya dimensión es 2^n, entonces considerando el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$ cuya base matricial es $E = \{E_0, E_1, \ldots, E_{2^n-1}\}$ y satisface:

$$\begin{aligned} E_0 &= I_{2^n}. \\ E_iE_j &= -E_jE_i, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1. \\ E_i^2 &= -I_{2^n}, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1. \end{aligned}$$

Entonces el operador diferencial $\mathcal{D}$ definido como:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=0}^{n-1} \partial_i E_i,$$

está asociado con el operador diferencial de primer orden $\mathcal{F}$ definido como

$$\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{n-1} A^{(i)}(t,x)\partial_i + B(t,x),$$

donde $A^{(i)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(i)}(t,x)E_k$ y $B(t,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k(t,x)E_k$; es decir, si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^{2^n} \to \mathcal{A}_n$ es cualquier solución de $\mathcal{D}u = 0$, entonces $\mathcal{F}$ transforma estas soluciones en soluciones de la misma ecuación para un t fijo.

Para hallar las condiciones, se puede utilizar el procedimiento dado por el Pseudocódigo 1.

5. Conclusiones

En las siguientes conclusiones, cuando hablamos del código, nos referimos al que está en el Apéndice y que fue implementado con la ayuda del seudocódigo dado por el Pseudocódigo 1 de la sección de Resultados.

- El código ayudó a hallar las condiciones necesarias para que el operador diferencial de primer orden $\mathcal{F}$ definido por (26) esté asociado al operador de Cauchy-Riemann $\mathcal{D}$ definido por (6) según la Definición 2.5 para cualquier álgebra de Clifford clásica $\mathcal{A}_n$ con $n \in \mathbb{N}$.

- En este código (implementado con la ayuda del Pseudocódigo 1) se ha utilizado la representación matricial de las álgebras de Clifford, pudiendo hacer uso del conocimiento de álgebra lineal para el fin deseado. Puesto que se ha logrado representar los elementos de las bases de las álgebras de Clifford como matrices, todas las funciones y operadores dentro de este álgebra de igual forma se han podido representar como matrices y consecuencia de esto, el trabajar con estos objetos ha sido mucho más fácil, porque no existe la preocupación de referirse a las relaciones de estructura dadas por la definición de lo que es un álgebra de Clifford (Definición 2.2) puesto que dichas matrices ya las contienen.

- Dado que al utilizar estas matrices, se deben trabajar obligatoriamente con las componentes reales de las funciones que viven dentro de un álgebra de Clifford, el Teorema 2.1 no es necesario, ya que al derivar funciones reales solo se necesita la regla del producto o también llamada regla de Leibniz para derivadas parciales.

- Con la ayuda del código, se han hallado las condiciones necesarias para que en el álgebra de los complejos, ($\mathcal{D}$,$\mathcal{F}$) sea un par de operadores asociados. Las 4 condiciones halladas dependen solo de la derivada de los coeficientes de $\mathcal{F}$. Se ha puesto en manifiesto que utilizar la hipótesis $\mathcal{D}u = 0$ es mucho más fácil, puesto que la matriz $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ se puede descomponer de tal manera que ciertos sumandos sean cero.

- Con la ayuda del código, se han hallado las condiciones necesarias para que en el álgebra de los cuaterniones, ($\mathcal{D}$,$\mathcal{F}$) sea un par de operadores asociados. En este caso se halló en principio 31 condiciones, pero se vio que 6 de ellas eran repetidas, por lo que nos quedamos con 25 condiciones donde esta vez están involucrados los coeficientes y las derivadas de los coeficientes de $\mathcal{F}$. Se comparó los resultados con los de [31] y se concluye que la desventaja de usar las matrices es que no podemos escribir las condiciones de manera compacta como se lo hace en el artículo [31].

- Con la ayuda del código, se han hallado las condiciones necesarias para que en el álgebra de Clifford $\mathcal{A}_3$, ($\mathcal{D}$,$\mathcal{F}$) sea un par de operadores asociados. Se evidencia que existen muchas más condiciones que para el caso $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$. Esto nos lleva al siguiente punto.

- El código generaliza el procedimiento descrito detalladamente para el caso de los complejos y los resultados dados en [31]. Sin embargo, la eficiencia de este código no es tan buena por dos razones. La primera, es que Sympy, el paquete de Python utilizado que juega un rol fundamental en este trabajo, es un paquete relativamente nuevo, puesto que la última versión estable recién salió el 22 de julio de 2017. Sin duda alguna, los desarrolladores han hecho un gran trabajo al crear esta librería, pero aún deben optimizar ciertas funciones. La segunda razón es la naturaleza en sí del cálculo simbólico. Históricamente, el álgebra computacional ha sido altamente ineficiente, pero con el pasar de los años se ha tratado de desarrollar algoritmos más eficientes para enfrentar esta problemática. No obstante, es posible hallar las condiciones para que $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ sea un par asociado en $\mathcal{A}_n$ para cualquier $n \in N$ siempre y cuando se tenga una computadora con mucha capacidad de procesamiento.

6. Bibliografía

[1] Abbas, U., & Yüksel, U. (2014). Necessary and Sufficient Conditions for First Order Differential Operators to be Associated with a Disturbed Dirac Operator in Quaternionic Analysis. Advances In Applied Clifford Algebras, 25(1), 1-12. doi: 10.1007/s00006-014-0464-2

[2] Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis*. 3ra ed. McGraw-HIill.

[3] Armendáriz, D., Di Teodoro, A., & Ceballos, J. (2018). About the Dirichlet Boundary Value Problem using Clifford Algebras. Journal of advances in mathematics, 15, 8030-8050. Recuperado de `https://cirworld.com/index.php/jam/article/view/7795`

[4] Baez, J. (2001). *Clifford Algebras*. [online]. University of California Riverside. Recuperado de `http://math.ucr.edu/home/baez/octonions/node6.html`

[5] Baxandall, P., & Liebeck, H. (1986). *Vector calculus*. 1ra ed. Oxford: Oxford University Press.

[6] Biss, D., Christensen, D., Dugger, D. and Isaksen, D. (s.f.). Eigentheory of Cayley-Dickson Algebras. University of Oregon. Recuperado de: `https://pages.uoregon.edu/ddugger/eigen.pdf`

[7] Blyth, T. (1975). *Set Theory and Abstract Algebra*. Longman Mathematical Texts.

[8] Bolívar, Y., Lezama, L., Mármol, L., & Vanegas, J. (2015). Associated Spaces in Clifford Analysis. Advances In Applied Clifford Algebras, 25(3), 539-551. doi: 10.1007/s00006-015-0528-y

[9] Brown, J. y Churchill, R. (2018). *Complex variable and applications*. 8va ed. McGraw-Hill.

[10] Ceballos, J., Di Teodoro, A., Armendáriz, D. (2018). A matrix representation for Clifford algebra and application to construct associated spaces.

[11] Ceballos, J., Di Teodoro, A., Armendáriz, D. (2018). Dirichlet boundary value problem for fractional monogenic functions.

[12] Delanghe, R. & Bory-Reyes, J. (2003). Una invitación al análisis de Clifford. Revista Ciencias Matemáticas, 21(2).

[13] Di Teodoro, A., & Sapian, M. (2014). Solution of the Initial Value Problem for a Linear Evolution Equation in a Clifford Type Algebra. Advances In Applied Clifford Algebras, 25(2), 283-301. doi: 10.1007/s00006-014-0492-y

[14] Di Teodoro, A., Franquiz, R. and López, A. (2014). A Modified Dirac Operator in Parameter–Dependent Clifford Algebra: A Physical Realization. Advances in Applied Clifford Algebras, 25(2), pp.303-320.

[15] Fueter, R. (1934). *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit Vier Reallen Variablen.* Commentarii Mathematici Helvetici 7, 307-330.

[16] Halmos, P. (1960). *Naive Set Theory.* 1ra ed. D. Van Nostrand Company.

[17] Hamilton, W. (1866). *Elements of quaternions.* Londrés: Longmans Green.

[18] Hitzer, E., Nitta, T., & Kuroe, Y. (2013). Applications of Clifford's Geometric Algebra. Advances in Applied Clifford Algebras, 23(2), 377-404. https://doi.org/10.1007/s00006-013-0378-4

[19] Johnsonbaugh, R. (2009). *Discrete Mathematics.* 7th ed. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson.

[20] Kufner, A. (2013). *Function spaces.* 2da ed. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.

[21] Moisil, G., & Theodorescu, N (1931). *Fonctions holomorphes dans l'espace.* Mathematica (Cluj) 5, 142-159.

[22] Sapiain, M. (2014). Problemas de Valores Iniciales para Ecuaciones Diferenciales con Lados Derechos q-Antimonogénicos en el Análisis de Clifford Generalizado. Caracas. Recuperado de: `http://saber.ucv.ve/bitstream/123456789/13771/1/tesis-lic.pdf`

[23] Sarason, D. (1994). Notes on complex function theory. Berkeley: Department of mathematics of the University of California.

[24] Sommen, F., Brackx, F., & Delanghe, R. (1982). *Clifford Analysis.* Pitman Research Notes in Mathematics, London.

[25] Son, L., & Tutschke W. (2003). First Order Differential Operators Associated to the Cauchy-Riemann Operator in the Plane. Complex Variables 48(9) pp. 797-801. doi: 10.1080/02781070310001599368

[26] Smith, D., Eggen, M. and St. Andre, R. (2011). *A transition to advanced mathematics*. 7th ed.

[27] Spivak, M. (1967). *Calculus*. New York: Benjamin.

[28] SymPy Development Team. (2018). SymPy 1.2 documentation. Recuperado 13 agosto, 2018, de http://docs.sympy.org/latest/index.html

[29] Tutschke, W., & Vanegas, C. (2008). *Métodos del análisis complejo en dimensiones superiores*. Mérida, Venezuela: Ediciones IVIC.

[30] Wawrzynczyk, A. (1993). *Introducción al análisis funcional*. 1ra ed. Iztapalapa: Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa.

[31] Yüksel, U. (2013). Necessary and Sufficient Conditions for Associated Differential Operators in Quaternionic Analysis and Applications to Initial Value Problems. Advances In Applied Clifford Algebras, 23(4), 981-990. doi: 10.1007/s00006-013-0400-x

7. Anexos

7.1. Expresión $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ para $\mathcal{A}_3$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{F}u) = &[(\partial_0 b_0 - \partial_1 b_1 - \partial_2 b_2 - \partial_3 b_3 - \partial_4 b_4 - \partial_5 b_5 - \partial_6 b_6 + \partial_7 b_7)e_0\\
&+(\partial_0 b_1 + \partial_1 b_0 + \partial_2 b_4 + \partial_3 b_5 - \partial_4 b_2 - \partial_5 b_3 - \partial_6 b_7 - \partial_7 b_6)e_1\\
&+(\partial_0 b_2 - \partial_1 b_4 + \partial_2 b_0 + \partial_3 b_6 + \partial_4 b_1 + \partial_5 b_7 - \partial_6 b_3 + \partial_7 b_5)e_2\\
&+(\partial_0 b_4 + \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 - \partial_3 b_7 + \partial_4 b_0 + \partial_5 b_6 - \partial_6 b_5 - \partial_7 b_3)e_3\\
&+(\partial_0 b_3 - \partial_1 b_5 - \partial_2 b_6 + \partial_3 b_0 - \partial_4 b_7 + \partial_5 b_1 + \partial_6 b_2 - \partial_7 b_4)e_4\\
&+(\partial_0 b_5 + \partial_1 b_3 + \partial_2 b_7 - \partial_3 b_1 - \partial_4 b_6 + \partial_5 b_0 + \partial_6 b_4 + \partial_7 b_2)e_5\\
&+(\partial_0 b_6 - \partial_1 b_7 + \partial_2 b_3 - \partial_3 b_2 + \partial_4 b_5 - \partial_5 b_4 + \partial_6 b_0 - \partial_7 b_1)e_6\\
&+(\partial_0 b_7 + \partial_1 b_6 - \partial_2 b_5 + \partial_3 b_4 + \partial_4 b_3 - \partial_5 b_2 + \partial_6 b_1 + \partial_7 b_0)e_7]u\\
&+[(\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_0^{(1)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_1^{(1)} + \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_2^{(1)} + \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_3^{(1)} - \partial_4 a_2^{(0)} - \partial_4 a_4^{(1)}\\
&-\partial_5 a_3^{(0)} - \partial_5 a_5^{(1)} - \partial_6 a_7^{(0)} - \partial_6 a_6^{(1)} - \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_7^{(1)})e_0\\
&+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_1^{(1)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_0^{(1)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_4^{(1)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_5^{(1)} + \partial_4 a_4^{(0)} - \partial_4 a_2^{(1)}\\
&+\partial_5 a_5^{(0)} - \partial_5 a_3^{(1)} + \partial_6 a_6^{(0)} - \partial_6 a_7^{(1)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_6^{(1)})e_1\\
&+(-2b_4 - \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_2^{(1)} - \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_4^{(1)} + \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_0^{(1)} + \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_6^{(1)} - \partial_4 a_0^{(0)}\\
&+\partial_4 a_1^{(1)} - \partial_5 a_6^{(0)} + \partial_5 a_7^{(1)} + \partial_6 a_5^{(0)} - \partial_6 a_3^{(1)} + \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_5^{(1)})e_2\\
&+(2b_2 + \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_4^{(1)} - \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_2^{(1)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_1^{(1)} + \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_7^{(1)} + \partial_4 a_1^{(0)}\\
&+\partial_4 a_0^{(1)} + \partial_5 a_7^{(0)} + \partial_5 a_6^{(1)} - \partial_6 a_3^{(0)} - \partial_6 a_5^{(1)} + \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_3^{(1)})e_3\\
&+(-2b_5 - \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_3^{(1)} - \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_5^{(1)} - \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_6^{(1)} + \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_0^{(1)} + \partial_4 a_6^{(0)}\\
&-\partial_4 a_7^{(1)} - \partial_5 a_0^{(0)} + \partial_5 a_1^{(1)} - \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_2^{(1)} - \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_4^{(1)})e_4\\
&+(2b_3 + \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_5^{(1)} - \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_3^{(1)} - \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_7^{(1)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_1^{(1)} - \partial_4 a_7^{(0)}\\
&-\partial_4 a_6^{(1)} + \partial_5 a_1^{(0)} + \partial_5 a_0^{(1)} + \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_4^{(1)} - \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_2^{(1)})e_5\\
&+(\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_6^{(1)} + \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_7^{(1)} - \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_3^{(1)} + \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_2^{(1)} + \partial_4 a_3^{(0)} + \partial_4 a_5^{(1)}\\
&-\partial_5 a_2^{(0)} - \partial_5 a_4^{(1)} + \partial_6 a_1^{(0)} + \partial_6 a_0^{(1)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_1^{(1)})e_6\\
&+(-\partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_7^{(1)} + \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_6^{(1)} - \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_5^{(1)} + \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_4^{(1)} - \partial_4 a_5^{(0)} + \partial_4 a_3^{(1)}\\
&+\partial_5 a_4^{(0)} - \partial_5 a_2^{(1)} - \partial_6 a_0^{(0)} + \partial_6 a_1^{(1)} + \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_0^{(1)})e_7]\partial_1 u\\
&+[(a_1^{(0)} - a_1^{(1)})e_0 + (a_0^{(0)} + a_0^{(1)})e_1 + (-a_4^{(0)} - a_4^{(1)})e_2 + (a_2^{(0)} + a_2^{(1)})e_3 + (-a_5^{(0)} - a_5^{(1)})e_4\\
&+(a_3^{(0)} + a_3^{(1)})e_5 + (a_7^{(0)} - a_7^{(1)})e_6 + (-a_6^{(0)} + a_6^{(1)})e_7]\partial_1^2 u
\end{aligned}
$$

$$+[(\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_0^{(2)} - \partial_1 a_4^{(0)} - \partial_1 a_1^{(2)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_2^{(2)} + \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_3^{(2)} + \partial_4 a_1^{(0)} - \partial_4 a_4^{(2)}$$
$$+\partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_5^{(2)} - \partial_6 a_3^{(0)} - \partial_6 a_6^{(2)} + \partial_7 a_5^{(0)} + \partial_7 a_7^{(2)})e_0$$
$$+(2b_4 + \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_1^{(2)} + \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_0^{(2)} - \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_4^{(2)} - \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_5^{(2)} + \partial_4 a_0^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_2^{(2)} + \partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_3^{(2)} - \partial_6 a_5^{(0)} - \partial_6 a_7^{(2)} - \partial_7 a_3^{(0)} - \partial_7 a_6^{(2)})e_1$$
$$+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_2^{(2)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_4^{(2)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_0^{(2)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_6^{(2)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_1^{(2)}$$
$$+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_7^{(2)} + \partial_6 a_6^{(0)} - \partial_6 a_3^{(2)} - \partial_7 a_7^{(0)} + \partial_7 a_5^{(2)})e_2$$
$$+(-2b_1 - \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_4^{(2)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_2^{(2)} - \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_1^{(2)} - \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_7^{(2)} + \partial_4 a_2^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_0^{(2)} + \partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_6^{(2)} + \partial_6 a_7^{(0)} - \partial_6 a_5^{(2)} + \partial_7 a_6^{(0)} - \partial_7 a_3^{(2)})e_3$$
$$+(-2b_6 - \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_3^{(2)} + \partial_1 a_7^{(0)} - \partial_1 a_5^{(2)} - \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_6^{(2)} + \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_0^{(2)} - \partial_4 a_5^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_7^{(2)} + \partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_1^{(2)} - \partial_6 a_0^{(0)} + \partial_6 a_2^{(2)} + \partial_7 a_1^{(0)} - \partial_7 a_4^{(2)})e_4$$
$$+(-\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_5^{(2)} - \partial_1 a_6^{(0)} + \partial_1 a_3^{(2)} + \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_7^{(2)} - \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_1^{(2)} - \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_6^{(2)}$$
$$+\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_0^{(2)} - \partial_6 a_1^{(0)} + \partial_6 a_4^{(2)} - \partial_7 a_0^{(0)} + \partial_7 a_2^{(2)})e_5$$
$$+(2b_3 + \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_6^{(2)} - \partial_1 a_5^{(0)} - \partial_1 a_7^{(2)} - \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_3^{(2)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_2^{(2)} - \partial_4 a_7^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_5^{(2)} + \partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_4^{(2)} + \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_0^{(2)} - \partial_7 a_4^{(0)} - \partial_7 a_1^{(2)})e_6$$
$$+(\partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_7^{(2)} + \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_6^{(2)} + \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_5^{(2)} - \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_4^{(2)} - \partial_4 a_6^{(0)} + \partial_4 a_3^{(2)}$$
$$+\partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_2^{(2)} + \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_1^{(2)} + \partial_7 a_2^{(0)} + \partial_7 a_0^{(2)})e_7]\partial_2 u$$
$$+[(a_2^{(0)} - a_2^{(2)})e_0 + (a_4^{(0)} + a_4^{(2)})e_1 + (-a_0^{(0)} + a_0^{(2)})e_2 + (-a_1^{(0)} - a_1^{(2)})e_3 + (-a_6^{(0)} - a_6^{(2)})e_4$$
$$+(-a_7^{(0)} + a_7^{(2)})e_5 + (a_3^{(0)} + a_3^{(2)})e_6 + (a_5^{(0)} - a_5^{(2)})e_7]\partial_2^2 u$$
$$+[(\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_0^{(3)} - \partial_1 a_5^{(0)} - \partial_1 a_1^{(3)} - \partial_2 a_6^{(0)} - \partial_2 a_2^{(3)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_3^{(3)} - \partial_4 a_7^{(0)} - \partial_4 a_4^{(3)}$$
$$+\partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_5^{(3)} + \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_6^{(3)} - \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_7^{(3)})e_0$$
$$+(2b_5 + \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_1^{(3)} + \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_0^{(3)} + \partial_2 a_7^{(0)} + \partial_2 a_4^{(3)} - \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_5^{(3)} - \partial_4 a_6^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_2^{(3)} + \partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_3^{(3)} + \partial_6 a_4^{(0)} - \partial_6 a_7^{(3)} + \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_6^{(3)})e_1$$
$$+(2b_6 + \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_2^{(3)} - \partial_1 a_7^{(0)} - \partial_1 a_4^{(3)} + \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_0^{(3)} - \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_6^{(3)} + \partial_4 a_5^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_1^{(3)} - \partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_7^{(3)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_3^{(3)} - \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_5^{(3)})e_2$$
$$+(\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_4^{(3)} + \partial_1 a_6^{(0)} + \partial_1 a_2^{(3)} - \partial_2 a_5^{(0)} - \partial_2 a_1^{(3)} + \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_7^{(3)} + \partial_4 a_3^{(0)} + \partial_4 a_0^{(3)}$$
$$-\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_6^{(3)} + \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_5^{(3)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_3^{(3)})e_3$$
$$+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_3^{(3)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_5^{(3)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_6^{(3)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_0^{(3)} + \partial_4 a_4^{(0)} - \partial_4 a_7^{(3)}$$
$$+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_1^{(3)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_2^{(3)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_4^{(3)})e_4$$
$$+(-2b_1 - \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_5^{(3)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_3^{(3)} - \partial_2 a_4^{(0)} + \partial_2 a_7^{(3)} - \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_1^{(3)} + \partial_4 a_2^{(0)}$$

$$-\partial_4 a_6^{(3)} + \partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_0^{(3)} + \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_4^{(3)} + \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_2^{(3)})e_5$$
$$+(-2b_2 - \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_6^{(3)} + \partial_1 a_4^{(0)} - \partial_1 a_7^{(3)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_3^{(3)} - \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_2^{(3)} - \partial_4 a_1^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_5^{(3)} - \partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_4^{(3)} + \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_0^{(3)} - \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_1^{(3)})e_6$$
$$+(-\partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_7^{(3)} - \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_6^{(3)} + \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_5^{(3)} + \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_4^{(3)} - \partial_4 a_0^{(0)} + \partial_4 a_3^{(3)}$$
$$-\partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_2^{(3)} + \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_1^{(3)} + \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_0^{(3)})e_7]\partial_3 u$$
$$+[(a_3^{(0)} - a_3^{(3)})e_0 + (a_5^{(0)} + a_5^{(3)})e_1 + (a_6^{(0)} + a_6^{(3)})e_2 + (a_7^{(0)} - a_7^{(3)})e_3 + (-a_0^{(0)} + a_0^{(3)})e_4$$
$$+(-a_1^{(0)} - a_1^{(3)})e_5 + (-a_2^{(0)} - a_2^{(3)})e_6 + (-a_4^{(0)} + a_4^{(3)})e_7]\partial_3^2 u$$
$$+[(\partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_0^{(4)} + \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_1^{(4)} - \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_2^{(4)} - \partial_3 a_7^{(0)} - \partial_3 a_3^{(4)} + \partial_4 a_0^{(0)} - \partial_4 a_4^{(4)}$$
$$+\partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_5^{(4)} - \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_6^{(4)} - \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_7^{(4)})e_0$$
$$+(-2b_2 - \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_1^{(4)} + \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_0^{(4)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_4^{(4)} - \partial_3 a_6^{(0)} + \partial_3 a_5^{(4)} - \partial_4 a_1^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_2^{(4)} - \partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_3^{(4)} + \partial_6 a_3^{(0)} - \partial_6 a_7^{(4)} - \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_6^{(4)})e_1$$
$$+(2b_1 + \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_2^{(4)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_4^{(4)} + \partial_2 a_4^{(0)} + \partial_2 a_0^{(4)} + \partial_3 a_5^{(0)} + \partial_3 a_5^{(4)} - \partial_4 a_2^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_1^{(4)} - \partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_7^{(4)} - \partial_6 a_7^{(0)} - \partial_6 a_3^{(4)} - \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_5^{(4)})e_2$$
$$+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_4^{(4)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_2^{(4)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_1^{(4)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_7^{(4)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_0^{(4)}$$
$$+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_6^{(4)} + \partial_6 a_6^{(0)} - \partial_6 a_5^{(4)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_3^{(4)})e_3$$
$$+(\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_3^{(4)} + \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_5^{(4)} - \partial_2 a_5^{(0)} - \partial_2 a_6^{(4)} + \partial_3 a_4^{(0)} + \partial_3 a_0^{(4)} + \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_7^{(4)}$$
$$-\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_1^{(4)} + \partial_6 a_1^{(0)} + \partial_6 a_2^{(4)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_4^{(4)})e_4$$
$$+(-2b_6 - \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_5^{(4)} + \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_3^{(4)} - \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_7^{(4)} + \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_1^{(4)} - \partial_4 a_5^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_6^{(4)} + \partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_0^{(4)} - \partial_6 a_0^{(0)} + \partial_6 a_4^{(4)} + \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_2^{(4)})e_5$$
$$+(2b_5 + \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_6^{(4)} + \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_7^{(4)} + \partial_2 a_7^{(0)} + \partial_2 a_3^{(4)} - \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_2^{(4)} - \partial_4 a_6^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_5^{(4)} + \partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_4^{(4)} + \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_0^{(4)} + \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_1^{(4)})e_6$$
$$+(-\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_7^{(4)} + \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_6^{(4)} + \partial_2 a_6^{(0)} - \partial_2 a_5^{(4)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_4^{(4)} + \partial_4 a_7^{(0)} + \partial_4 a_3^{(4)}$$
$$-\partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_2^{(4)} - \partial_6 a_2^{(0)} + \partial_6 a_1^{(4)} + \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_0^{(4)})e_7]\partial_4 u$$
$$+[(a_4^{(0)} - a_4^{(4)})e_0 + (-a_2^{(0)} - a_2^{(4)})e_1 + (a_1^{(0)} + a_1^{(4)})e_2 + (-a_0^{(0)} + a_0^{(4)})e_3 + (a_7^{(0)} - a_7^{(4)})e_4$$
$$+(-a_6^{(0)} - a_6^{(4)})e_5 + (a_5^{(0)} + a_5^{(4)})e_6 + (-a_3^{(0)} + a_3^{(4)})e_7]\partial_4^2 u$$
$$+[(\partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_0^{(5)} + \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_1^{(5)} + \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_2^{(5)} - \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_3^{(5)} - \partial_4 a_6^{(0)} - \partial_4 a_4^{(5)}$$
$$+\partial_5 a_0^{(0)} - \partial_5 a_5^{(5)} + \partial_6 a_4^{(0)} + \partial_6 a_6^{(5)} + \partial_7 a_2^{(0)} + \partial_7 a_7^{(5)})e_0$$
$$+(-2b_3 - \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_1^{(5)} + \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_0^{(5)} + \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_4^{(5)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_5^{(5)} + \partial_4 a_7^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_2^{(5)} - \partial_5 a_1^{(0)} - \partial_5 a_3^{(5)} - \partial_6 a_2^{(0)} - \partial_6 a_7^{(5)} + \partial_7 a_4^{(0)} - \partial_7 a_6^{(5)})e_1$$

$$+(-\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_2^{(5)} - \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_4^{(5)} + \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_0^{(5)} - \partial_3 a_4^{(0)} + \partial_3 a_6^{(5)} - \partial_4 a_3^{(0)} + \partial_4 a_1^{(5)}$$
$$+\partial_5 a_2^{(0)} + \partial_5 a_7^{(5)} - \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_3^{(5)} - \partial_7 a_0^{(0)} + \partial_7 a_5^{(5)})e_2$$
$$+(2b_6 + \partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_4^{(5)} - \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_2^{(5)} + \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_1^{(5)} - \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_7^{(5)} + \partial_4 a_5^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_0^{(5)} - \partial_5 a_4^{(0)} + \partial_5 a_6^{(5)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_5^{(5)} - \partial_7 a_1^{(0)} - \partial_7 a_3^{(5)})e_3$$
$$+(2b_1 + \partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_3^{(5)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_5^{(5)} + \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_6^{(5)} + \partial_3 a_5^{(0)} + \partial_3 a_0^{(5)} - \partial_4 a_2^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_7^{(5)} - \partial_5 a_3^{(0)} + \partial_5 a_1^{(5)} - \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_2^{(5)} - \partial_7 a_6^{(0)} - \partial_7 a_4^{(5)})e_4$$
$$+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_5^{(5)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_3^{(5)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_7^{(5)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_1^{(5)} + \partial_4 a_4^{(0)} - \partial_4 a_6^{(5)}$$
$$+\partial_5 a_5^{(0)} + \partial_5 a_0^{(5)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_4^{(5)} - \partial_7 a_7^{(0)} + \partial_7 a_2^{(5)})e_5$$
$$+(-2b_4 - \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_6^{(5)} - \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_7^{(5)} + \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_3^{(5)} + \partial_3 a_7^{(0)} - \partial_3 a_2^{(5)} - \partial_4 a_0^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_5^{(5)} - \partial_5 a_6^{(0)} - \partial_5 a_4^{(5)} + \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_0^{(5)} + \partial_7 a_3^{(0)} - \partial_7 a_1^{(5)})e_6$$
$$+(-\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_7^{(5)} - \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_6^{(5)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_5^{(5)} + \partial_3 a_6^{(0)} + \partial_3 a_4^{(5)} + \partial_4 a_1^{(0)} + \partial_4 a_3^{(5)}$$
$$+\partial_5 a_7^{(0)} - \partial_5 a_2^{(5)} - \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_1^{(5)} + \partial_7 a_5^{(0)} + \partial_7 a_0^{(5)})e_7]\partial_5 u$$
$$+[(a_5^{(0)} - a_5^{(5)})e_0 + (-a_3^{(0)} - a_3^{(5)})e_1 + (-a_7^{(0)} + a_7^{(5)})e_2 + (a_6^{(0)} + a_6^{(5)})e_3 + (a_1^{(0)} + a_1^{(5)})e_4$$
$$+(-a_0^{(0)} + a_0^{(5)})e_5 + (-a_4^{(0)} - a_4^{(5)})e_6 + (a_2^{(0)} - a_2^{(5)})e_7]\partial_5^2 u$$
$$+[(\partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_0^{(6)} - \partial_1 a_7^{(0)} - \partial_1 a_1^{(6)} + \partial_2 a_3^{(0)} - \partial_2 a_2^{(6)} - \partial_3 a_2^{(0)} - \partial_3 a_3^{(6)} + \partial_4 a_5^{(0)} - \partial_4 a_4^{(6)}$$
$$-\partial_5 a_4^{(0)} - \partial_5 a_5^{(6)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_6^{(6)} - \partial_7 a_1^{(0)} + \partial_7 a_7^{(6)})e_0$$
$$+(\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_1^{(6)} + \partial_1 a_6^{(0)} + \partial_1 a_0^{(6)} - \partial_2 a_5^{(0)} + \partial_2 a_4^{(6)} + \partial_3 a_4^{(0)} + \partial_3 a_5^{(6)} + \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_2^{(6)}$$
$$-\partial_5 a_2^{(0)} - \partial_5 a_3^{(6)} + \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_7^{(6)} + \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_6^{(6)})e_1$$
$$+(-2b_3 - \partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_2^{(6)} + \partial_1 a_5^{(0)} - \partial_1 a_4^{(6)} + \partial_2 a_6^{(0)} + \partial_2 a_0^{(6)} - \partial_3 a_0^{(0)} + \partial_3 a_6^{(6)} + \partial_4 a_7^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_1^{(6)} - \partial_5 a_1^{(0)} + \partial_5 a_7^{(6)} - \partial_6 a_2^{(0)} - \partial_6 a_3^{(6)} + \partial_7 a_4^{(0)} + \partial_7 a_5^{(6)})e_2$$
$$+(-2b_5 - \partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_4^{(6)} - \partial_1 a_3^{(0)} + \partial_1 a_2^{(6)} - \partial_2 a_7^{(0)} - \partial_2 a_1^{(6)} + \partial_3 a_1^{(0)} - \partial_3 a_7^{(6)} + \partial_4 a_6^{(0)}$$
$$+\partial_4 a_0^{(6)} - \partial_5 a_0^{(0)} + \partial_5 a_6^{(6)} - \partial_6 a_4^{(0)} - \partial_6 a_5^{(6)} - \partial_7 a_2^{(0)} - \partial_7 a_3^{(6)})e_3$$
$$+(2b_2 + \partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_3^{(6)} - \partial_1 a_4^{(0)} - \partial_1 a_5^{(6)} + \partial_2 a_0^{(0)} - \partial_2 a_6^{(6)} + \partial_3 a_6^{(0)} + \partial_3 a_0^{(6)} + \partial_4 a_1^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_7^{(6)} + \partial_5 a_7^{(0)} + \partial_5 a_1^{(6)} - \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_2^{(6)} + \partial_7 a_5^{(0)} - \partial_7 a_4^{(6)})e_4$$
$$+(2b_4 + \partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_5^{(6)} + \partial_1 a_2^{(0)} + \partial_1 a_3^{(6)} - \partial_2 a_1^{(0)} + \partial_2 a_7^{(6)} - \partial_3 a_7^{(0)} - \partial_3 a_1^{(6)} + \partial_4 a_0^{(0)}$$
$$-\partial_4 a_6^{(6)} + \partial_5 a_6^{(0)} + \partial_5 a_0^{(6)} - \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_4^{(6)} - \partial_7 a_3^{(0)} + \partial_7 a_2^{(6)})e_5$$
$$+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_6^{(6)} + \partial_1 a_1^{(0)} - \partial_1 a_7^{(6)} + \partial_2 a_2^{(0)} + \partial_2 a_3^{(6)} + \partial_3 a_3^{(0)} - \partial_3 a_2^{(6)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_5^{(6)}$$
$$+\partial_5 a_5^{(0)} - \partial_5 a_4^{(6)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_0^{(6)} - \partial_7 a_7^{(0)} - \partial_7 a_1^{(6)})e_6$$
$$+(-\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_7^{(6)} - \partial_1 a_0^{(0)} + \partial_1 a_6^{(6)} - \partial_2 a_4^{(0)} - \partial_2 a_5^{(6)} - \partial_3 a_5^{(0)} + \partial_3 a_4^{(6)} + \partial_4 a_2^{(0)} + \partial_4 a_3^{(6)}$$

$$+\partial_5 a_3^{(0)} - \partial_5 a_2^{(6)} + \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_1^{(6)} + \partial_7 a_6^{(0)} + \partial_7 a_0^{(6)})e_7]\partial_6 u$$
$$+[(a_6^{(0)} - a_6^{(6)})e_0 + (a_7^{(0)} - a_7^{(6)})e_1 + (-a_3^{(0)} - a_3^{(6)})e_2 + (-a_5^{(0)} - a_5^{(6)})e_3 + (a_2^{(0)} + a_2^{(6)})e_4$$
$$+(a_4^{(0)} + a_4^{(6)})e_5 + (-a_0^{(0)} + a_0^{(6)})e_6 + (-a_1^{(0)} + a_1^{(6)})e_7]\partial_6^2 u$$
$$+[(-\partial_0 a_7^{(0)} + \partial_0 a_0^{(7)} - \partial_1 a_6^{(0)} - \partial_1 a_1^{(7)} + \partial_2 a_5^{(0)} - \partial_2 a_2^{(7)} - \partial_3 a_4^{(0)} - \partial_3 a_3^{(7)} - \partial_4 a_3^{(0)} - \partial_4 a_4^{(7)}$$
$$+\partial_5 a_2^{(0)} - \partial_5 a_5^{(7)} - \partial_6 a_1^{(0)} - \partial_6 a_6^{(7)} - \partial_7 a_0^{(0)} - \partial_7 a_7^{(7)})e_0$$
$$+(\partial_0 a_6^{(0)} + \partial_0 a_1^{(7)} - \partial_1 a_7^{(0)} + \partial_1 a_0^{(7)} + \partial_2 a_3^{(0)} + \partial_2 a_4^{(7)} - \partial_3 a_2^{(0)} + \partial_3 a_5^{(7)} + \partial_4 a_5^{(0)} - \partial_4 a_2^{(7)}$$
$$-\partial_5 a_4^{(0)} - \partial_5 a_3^{(7)} + \partial_6 a_0^{(0)} - \partial_6 a_7^{(7)} - \partial_7 a_1^{(0)} - \partial_7 a_6^{(7)})e_1$$
$$+(-\partial_0 a_5^{(0)} + \partial_0 a_2^{(7)} - \partial_1 a_3^{(0)} - \partial_1 a_4^{(7)} - \partial_2 a_7^{(0)} + \partial_2 a_0^{(7)} + \partial_3 a_1^{(0)} + \partial_3 a_6^{(7)} + \partial_4 a_6^{(0)} + \partial_4 a_1^{(7)}$$
$$-\partial_5 a_0^{(0)} + \partial_5 a_7^{(7)} - \partial_6 a_4^{(0)} - \partial_6 a_3^{(7)} - \partial_7 a_2^{(0)} + \partial_7 a_5^{(7)})e_2$$
$$+(\partial_0 a_3^{(0)} + \partial_0 a_4^{(7)} - \partial_1 a_5^{(0)} + \partial_1 a_2^{(7)} - \partial_2 a_6^{(0)} - \partial_2 a_1^{(7)} + \partial_3 a_0^{(0)} - \partial_3 a_7^{(7)} - \partial_4 a_7^{(0)} + \partial_4 a_0^{(7)}$$
$$+\partial_5 a_1^{(0)} + \partial_5 a_6^{(7)} + \partial_6 a_2^{(0)} - \partial_6 a_5^{(7)} - \partial_7 a_4^{(0)} - \partial_7 a_3^{(7)})e_3$$
$$+(\partial_0 a_4^{(0)} + \partial_0 a_3^{(7)} + \partial_1 a_2^{(0)} - \partial_1 a_5^{(7)} - \partial_2 a_1^{(0)} - \partial_2 a_6^{(7)} - \partial_3 a_7^{(0)} + \partial_3 a_0^{(7)} + \partial_4 a_0^{(0)} - \partial_4 a_7^{(7)}$$
$$+\partial_5 a_6^{(0)} + \partial_5 a_1^{(7)} - \partial_6 a_5^{(0)} + \partial_6 a_2^{(7)} - \partial_7 a_3^{(0)} - \partial_7 a_4^{(7)})e_4$$
$$+(-\partial_0 a_2^{(0)} + \partial_0 a_5^{(7)} + \partial_1 a_4^{(0)} + \partial_1 a_3^{(7)} - \partial_2 a_0^{(0)} + \partial_2 a_7^{(7)} - \partial_3 a_6^{(0)} - \partial_3 a_1^{(7)} - \partial_4 a_1^{(0)} - \partial_4 a_6^{(7)}$$
$$-\partial_5 a_7^{(0)} + \partial_5 a_0^{(7)} + \partial_6 a_3^{(0)} + \partial_6 a_4^{(7)} - \partial_7 a_5^{(0)} + \partial_7 a_2^{(7)})e_5$$
$$+(\partial_0 a_1^{(0)} + \partial_0 a_6^{(7)} + \partial_1 a_0^{(0)} - \partial_1 a_7^{(7)} + \partial_2 a_4^{(0)} + \partial_2 a_3^{(7)} + \partial_3 a_5^{(0)} - \partial_3 a_2^{(7)} - \partial_4 a_2^{(0)} + \partial_4 a_5^{(7)}$$
$$-\partial_5 a_3^{(0)} - \partial_5 a_4^{(7)} - \partial_6 a_7^{(0)} + \partial_6 a_0^{(7)} - \partial_7 a_6^{(0)} - \partial_7 a_1^{(7)})e_6$$
$$+(-\partial_0 a_0^{(0)} + \partial_0 a_7^{(7)} + \partial_1 a_1^{(0)} + \partial_1 a_6^{(7)} + \partial_2 a_2^{(0)} - \partial_2 a_5^{(7)} + \partial_3 a_3^{(0)} + \partial_3 a_4^{(7)} + \partial_4 a_4^{(0)} + \partial_4 a_3^{(7)}$$
$$+\partial_5 a_5^{(0)} - \partial_5 a_2^{(7)} + \partial_6 a_6^{(0)} + \partial_6 a_1^{(7)} - \partial_7 a_7^{(0)} + \partial_7 a_0^{(7)})e_7]\partial_7 u$$
$$+[(-a_7^{(0)} + a_7^{(7)})e_0 + (a_6^{(0)} - a_6^{(7)})e_1 + (-a_5^{(0)} + a_5^{(7)})e_2 + (a_3^{(0)} - a_3^{(7)})e_3 + (a_4^{(0)} - a_4^{(7)})e_4$$
$$+(-a_2^{(0)} + a_2^{(7)})e_5 + (a_1^{(0)} - a_1^{(7)})e_6 + (-a_0^{(0)} + a_0^{(7)})e_7]\partial_7^2 u$$
$$+[(-a_2^{(1)} - a_1^{(2)})e_0 + (a_4^{(1)} + a_0^{(2)})e_1 + (a_0^{(1)} - a_4^{(2)})e_2 + (-a_1^{(1)} + a_2^{(2)})e_3 + (-a_6^{(1)} - a_5^{(2)})e_4$$
$$+(a_7^{(1)} + a_3^{(2)})e_5 + (a_3^{(1)} - a_7^{(2)})e_6 + (-a_5^{(1)} + a_6^{(2)})e_7]\partial_1\partial_2 u$$
$$+[(-a_3^{(1)} - a_1^{(3)})e_0 + (a_5^{(1)} + a_0^{(3)})e_1 + (a_6^{(1)} - a_4^{(3)})e_2 + (-a_7^{(1)} + a_2^{(3)})e_3 + (a_0^{(1)} - a_5^{(3)})e_4$$
$$+(-a_1^{(1)} + a_3^{(3)})e_5 + (-a_2^{(1)} - a_7^{(3)})e_6 + (a_4^{(1)} + a_6^{(3)})e_7]\partial_1\partial_3 u$$
$$+[(-a_4^{(1)} - a_1^{(4)})e_0 + (-a_2^{(1)} + a_0^{(4)})e_1 + (a_1^{(1)} - a_4^{(4)})e_2 + (a_0^{(1)} + a_2^{(4)})e_3 + (-a_7^{(1)} - a_5^{(4)})e_4$$
$$+(-a_6^{(1)} + a_3^{(4)})e_5 + (a_5^{(1)} - a_7^{(4)})e_6 + (a_3^{(1)} + a_6^{(4)})e_7]\partial_1\partial_4 u$$
$$+[(-a_5^{(1)} - a_1^{(5)})e_0 + (-a_3^{(1)} + a_0^{(5)})e_1 + (a_7^{(1)} - a_4^{(5)})e_2 + (a_6^{(1)} + a_2^{(5)})e_3 + (a_1^{(1)} - a_5^{(5)})e_4$$
$$+(a_0^{(1)} + a_3^{(5)})e_5 + (-a_4^{(1)} - a_7^{(5)})e_6 + (-a_2^{(1)} + a_6^{(5)})e_7]\partial_1\partial_5 u$$

$$+[(-a_6^{(1)}-a_1^{(6)})e_0+(-a_7^{(1)}+a_0^{(6)})e_1+(-a_3^{(1)}-a_4^{(6)})e_2+(a_2^{(6)}-a_5^{(1)})e_3+(a_2^{(1)}-a_5^{(6)})e_4$$
$$+(a_4^{(1)}+a_3^{(6)})e_5+(a_0^{(1)}-a_7^{(6)})e_6+(a_1^{(1)}+a_6^{(6)})e_7]\partial_1\partial_6 u$$
$$+[(a_7^{(1)}-a_1^{(7)})e_0+(-a_6^{(1)}+a_0^{(7)})e_1+(a_5^{(1)}-a_4^{(7)})e_2+(-a_3^{(1)}+a_2^{(7)})e_3+(-a_4^{(1)}-a_5^{(7)})e_4$$
$$+(a_2^{(1)}+a_3^{(7)})e_5+(-a_1^{(1)}-a_7^{(7)})e_6+(a_0^{(1)}+a_6^{(7)})e_7]\partial_1\partial_7 u$$
$$+[(-a_3^{(2)}-a_2^{(3)})e_0+(a_5^{(2)}+a_4^{(3)})e_1+(a_6^{(2)}+a_0^{(3)})e_2+(-a_7^{(2)}-a_1^{(3)})e_3+(a_0^{(2)}-a_6^{(3)})e_4$$
$$+(-a_1^{(2)}+a_7^{(3)})e_5+(-a_2^{(2)}+a_3^{(3)})e_6+(a_4^{(2)}-a_5^{(3)})e_7]\partial_2\partial_3 u$$
$$+[(-a_4^{(2)}-a_2^{(4)})e_0+(-a_2^{(2)}+a_4^{(4)})e_1+(a_1^{(2)}+a_0^{(4)})e_2+(a_0^{(2)}-a_1^{(4)})e_3+(-a_7^{(2)}-a_6^{(4)})e_4$$
$$+(-a_6^{(2)}+a_7^{(4)})e_5+(a_5^{(2)}+a_3^{(4)})e_6+(a_3^{(2)}-a_5^{(4)})e_7]\partial_2\partial_4 u$$
$$+[(-a_5^{(2)}-a_2^{(5)})e_0+(-a_3^{(2)}+a_4^{(5)})e_1+(a_7^{(2)}+a_0^{(5)})e_2+(a_6^{(2)}-a_1^{(5)})e_3+(a_1^{(2)}-a_6^{(5)})e_4$$
$$+(a_0^{(2)}+a_7^{(5)})e_5+(a_4^{(2)}+a_3^{(5)})e_6+(-a_2^{(2)}-a_5^{(5)})e_7]\partial_2\partial_5 u$$
$$+[(-a_6^{(2)}-a_2^{(6)})e_0+(-a_7^{(2)}+a_4^{(6)})e_1+(-a_3^{(2)}+a_0^{(6)})e_2+(-a_5^{(2)}-a_1^{(6)})e_3+(a_2^{(2)}-a_6^{(6)})e_4$$
$$+(a_4^{(2)}+a_7^{(6)})e_5+(a_0^{(2)}+a_3^{(6)})e_6+(a_1^{(2)}-a_5^{(6)})e_7]\partial_2\partial_6 u$$
$$+[(a_7^{(2)}-a_2^{(7)})e_0+(-a_6^{(2)}+a_4^{(7)})e_1+(a_5^{(2)}+a_0^{(7)})e_2+(-a_3^{(2)}-a_1^{(7)})e_3+(-a_4^{(2)}-a_6^{(7)})e_4$$
$$+(a_2^{(2)}+a_7^{(7)})e_5+(-a_1^{(2)}+a_3^{(7)})e_6+(a_0^{(2)}-a_5^{(7)})e_7]\partial_2\partial_7 u$$
$$+[(-a_4^{(3)}-a_3^{(4)})e_0+(-a_2^{(3)}+a_5^{(4)})e_1+(a_1^{(3)}+a_6^{(4)})e_2+(a_0^{(3)}-a_7^{(4)})e_3+(-a_7^{(3)}+a_0^{(4)})e_4$$
$$+(-a_6^{(3)}-a_1^{(4)})e_5+(a_5^{(3)}-a_2^{(4)})e_6+(a_3^{(3)}+a_4^{(4)})e_7]\partial_3\partial_4 u$$
$$+[(-a_5^{(3)}-a_3^{(5)})e_0+(-a_3^{(3)}+a_5^{(5)})e_1+(a_7^{(3)}+a_6^{(5)})e_2+(a_6^{(3)}-a_7^{(5)})e_3+(a_1^{(3)}+a_0^{(5)})e_4$$
$$+(a_0^{(3)}-a_1^{(5)})e_5+(-a_4^{(3)}-a_2^{(5)})e_6+(-a_2^{(3)}+a_4^{(5)})e_7]\partial_3\partial_5 u$$
$$+[(-a_6^{(3)}-a_3^{(6)})e_0+(-a_7^{(3)}+a_5^{(6)})e_1+(-a_3^{(3)}+a_6^{(6)})e_2+(-a_5^{(3)}-a_7^{(6)})e_3+(a_2^{(3)}+a_0^{(6)})e_4$$
$$+(a_4^{(3)}-a_1^{(6)})e_5+(a_0^{(3)}-a_2^{(6)})e_6+(a_1^{(3)}+a_4^{(6)})e_7]\partial_3\partial_6 u$$
$$+[(a_7^{(3)}-a_3^{(7)})e_0+(-a_6^{(3)}+a_5^{(7)})e_1+(a_5^{(3)}+a_6^{(7)})e_2+(-a_3^{(3)}-a_7^{(7)})e_3+(-a_4^{(3)}+a_0^{(7)})e_4$$
$$+(a_2^{(3)}-a_1^{(7)})e_5+(-a_1^{(3)}-a_2^{(7)})e_6+(a_0^{(3)}+a_4^{(7)})e_7]\partial_3\partial_7 u$$
$$+[(-a_5^{(4)}-a_4^{(5)})e_0+(-a_3^{(4)}-a_2^{(5)})e_1+(a_7^{(4)}+a_1^{(5)})e_2+(a_6^{(4)}+a_0^{(5)})e_3+(a_1^{(4)}-a_7^{(5)})e_4$$
$$+(a_0^{(4)}-a_6^{(5)})e_5+(-a_4^{(4)}+a_5^{(5)})e_6+(-a_2^{(4)}+a_3^{(5)})e_7]\partial_4\partial_5 u$$
$$+[(-a_6^{(4)}-a_4^{(6)})e_0+(-a_7^{(4)}-a_2^{(6)})e_1+(-a_3^{(4)}+a_1^{(6)})e_2+(-a_5^{(4)}+a_0^{(6)})e_3+(a_2^{(4)}-a_7^{(6)})e_4$$
$$+(a_4^{(4)}-a_6^{(6)})e_5+(a_0^{(4)}+a_5^{(6)})e_6+(a_1^{(4)}+a_3^{(6)})e_7]\partial_4\partial_6 u$$
$$+[(a_7^{(4)}-a_4^{(7)})e_0+(-a_6^{(4)}-a_2^{(7)})e_1+(a_5^{(4)}+a_1^{(7)})e_2+(-a_3^{(4)}+a_0^{(7)})e_3+(-a_4^{(4)}-a_7^{(7)})e_4$$
$$+(a_2^{(4)}-a_6^{(7)})e_5+(-a_1^{(4)}+a_5^{(7)})e_6+(a_0^{(4)}+a_3^{(7)})e_7]\partial_4\partial_7 u$$
$$+[(-a_6^{(5)}-a_5^{(6)})e_0+(-a_7^{(5)}-a_3^{(6)})e_1+(-a_3^{(5)}+a_7^{(6)})e_2+(-a_5^{(5)}+a_6^{(6)})e_3+(a_2^{(5)}+a_1^{(6)})e_4$$

$$+(a_4^{(5)} + a_0^{(6)})e_5 + (a_0^{(5)} - a_4^{(6)})e_6 + (a_1^{(5)} - a_2^{(6)})e_7]\partial_5\partial_6 u$$
$$+[(a_7^{(5)} - a_5^{(7)})e_0 + (-a_6^{(5)} - a_3^{(7)})e_1 + (a_5^{(5)} + a_7^{(7)})e_2 + (-a_3^{(5)} + a_6^{(7)})e_3 + (-a_4^{(5)} + a_1^{(7)})e_4$$
$$+(a_2^{(5)} + a_0^{(7)})e_5 + (-a_1^{(5)} - a_4^{(7)})e_6 + (a_0^{(5)} - a_2^{(7)})e_7]\partial_5\partial_7 u$$
$$+[(a_7^{(6)} - a_6^{(7)})e_0 + (-a_6^{(6)} - a_7^{(7)})e_1 + (a_5^{(6)} - a_3^{(7)})e_2 + (-a_3^{(6)} - a_5^{(7)})e_3 + (-a_4^{(6)} + a_2^{(7)})e_4$$
$$+(a_2^{(6)} + a_4^{(7)})e_5 + (-a_1^{(6)} + a_0^{(7)})e_6 + (a_0^{(6)} + a_1^{(7)})e_7]\partial_6\partial_7 u$$

7.2. Códigos utilizados

A continuación se muestran los códigos utilizados que hicieron posible la presentación de los resultados. Puesto que las bases del álgebra de Clifford en este trabajo se construyeron de una manera matricial en MATLAB, se utilizó un código externo no presentado aquí, pero sí en [10] para generarlas. El código está dividido en varios scripts en Python, donde cada uno realiza una tarea diferente. El código principal, o sea, el Código 1, mostrado a continuación, es el que se encarga de pasar $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ de una matriz a una ecuación.

```
execfile('writer.py')
import time
import sys
start_time = time.time()
from sympy import *
from terms import *
from b_term import Mb
from a_term import Ma

coefficients = {}

def mult_base(M):
        expr = sympify(0)
        for i in range(0,M.shape[0]):
                expr = expr + (e['e'+str(i)]*M[i]).expand()
        return expr

def collect(expr):
        terms = []
        for i in range(1,N):
                for j in range(1,N):
                        for k in range(0,N):
```

```
                s = 'd'+str(i)+'*d'+str(j)+'*u'+str(k)
                s = sympify(s,locals=T)
                terms.append(str(s))
    for i in range(1,N):
        for j in range(0,N):
            terms.append('d'+str(i)+'*u'+str(j))
    for i in range(0,N):
        terms.append('u'+str(i))

    for i in expr.args:
        for t in terms:
            if t in str(i):
                coef = (str(i)).replace('*'+t,'')
                if sympify(t) in coefficients:
                    coefficients[sympify(t)] = coefficients[sympify(t)] + sympify(coef,locals=T)
                else:
                    coefficients[sympify(t)] = sympify(coef,locals=T)
                break


A=Ma
B=Mb
DLu = A+B
print('\n----------------------------------------------\n')
print "Matriz DLu=0\n"
print('\n----------------------------------------------\n')
pprint(DLu)
print('\n----------------------------------------------\n')
q=mult_base(DLu)
print('Expresion recuperada\n')
print('\n----------------------------------------------\n')
```

```
pprint(q)
print('\n----------------------------------------------\n')
collect(q)
print('Diccionario con los coeficientes respectivos\n')
print('\n----------------------------------------------\n')
for u,coef in coefficients.items():
        if "u0" in str(u):
                pprint(u)
                print('\n')
                pprint(coef)
                print('\n')

print('\n')
print('\n---------------------------------------------\n')
print('Tiempo de ejecucion:')
print("%s segundos" % (time.time() - start_time))
```

Código 1: Código principal

El proceso de realizar la regla del producto para derivadas parciales dentro de la matriz, se lo hace independientemente para el término $A^{(i)}(t,x)$ y para el término $B(t,x)$. El Algoritmo 2, calcula la regla del producto para $A^{(i)}(t,x)$ y el Algoritmo 3, lo hace para el término $B(t,x)$. Hay que aclarar que el código no “descompone” la matriz $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$ como se hace en la parte de Resultados. Más bien, utiliza las ecuaciones de las filas de la hipótesis $\mathcal{D}u = 0$ y las reemplaza en los términos resultantes.

```
from sympy import *
from terms import *
import sys
result = (D*LuA).expand()

def do_Leibniz(expr):
        return_expr = ''
        for addends in expr.args:
                r = str(addends)
                t1,t2,t3,t4 = r.split('*')
                return_expr = return_expr + r + '+' + t2 + '*' + t1 + '*' +t3 + '*' + t4 + '+'
        return_expr = return_expr[:-1]
```

```
        return_expr = sympify(return_expr,locals=T)
        return return_expr

def invert_d(expr):
        for i in range(1,N):
                s = 'd0*d'+str(i)
                s = sympify(s,locals=T)
                dummy = Dummy()
                if (expr.subs(s,dummy).has(dummy)):
                        t = 'd'+str(i)+'*d0'
                        t = sympify(t,locals=T)
                        expr = expr.subs(s,t)
        return expr


def replace_derivatives(expr):
        return_expr = ''
        found1 = True
        found2 = True
        for addends in expr.args:
                r = str(addends)
                found1 = False
                found2 = False
                for i,j in mixed_d.items():
                        if i in r:
                                return_expr = return_expr + r.replace(i,'('+str(j)+')')+'+'
                                found1 = True
                                break
                if found1 == False:
                        for i,j in single_d.items():
                                if i in r:
                                        return_expr = return_expr + r.replace(i,'('+str(j)+')') + '+'
                                        found2 = True
                                        break
                if found1 == False and found2 == False:
```

```
                        return_expr = return_expr + r + '+'


        return_expr = return_expr[:-1]
        return_expr_final = sympify(0)
        return_expr = sympify(return_expr,locals=T)
        for addends in return_expr.args:
                expand_result = sympify(addends.expand())
                return_expr_final = return_expr_final +
                 ↪  expand_result
        return return_expr_final

f=[]
for i in range(0,N):
        f = f+[[replace_derivatives(invert_d(do_Leibniz(result⌋
         ↪  [i]))))]]

Ma = Matrix(f)
```

Código 2: Código para calcular y procesar el término $\sum_{i=0}^{n-1} A^{(i)}(t,x)\partial_i u(t,x)$ de $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$

```
from sympy import *
from terms import *

result = (D*LuB).expand()

def do_Leibniz_b(expr):
        return_expr = ''
        for addends in expr.args:
                r = str(addends)
                t1,t2,t3 = r.split('*')
                return_expr = return_expr + r + '+' + t2 + '*'
                 ↪  + t1 + '*' +t3 + '+'
        return_expr = return_expr[:-1]
        return_expr = sympify(return_expr,locals=T)
        return return_expr

def replace_derivatives_b(expr):
```

```
        return_expr = ''
        found1 = True
        for addends in expr.args:
            r = str(addends)
            found1 = False
            for i,j in single_d.items():
                if i in r:
                    return_expr = return_expr + r.replace(i,'('+str(j)+')') + '+'
                    found1 = True
                    break
            if found1 == False:
                return_expr = return_expr + r + '+'


        return_expr = return_expr[:-1]
        return_expr_final = sympify(0)
        return_expr = sympify(return_expr,locals=T)
        for addends in return_expr.args:
            expand_result = sympify(addends.expand())
            return_expr_final = return_expr_final + expand_result
        return return_expr_final


f = []
for i in range(0,N):
    f = f+[[replace_derivatives_b(do_Leibniz_b(result[i]))]]

Mb = Matrix(f)
```

Código 3: Código para calcular el término $B(t,x)$ de $\mathcal{D}(\mathcal{F}u)$

Puesto que el presente trabajo utiliza cálculo simbólico, las variables simbólicas deben ser creadas dependiendo del álgebra $\mathcal{A}_n$ que es haya escogido. El Algoritmo 4 crea dinámicamente variables simbólicas (como por ejemplo, los coeficientes de $\mathcal{F}$) para su posterior uso en los demás algoritmos.

```
from matlab_to_python import *


n=2**n1


f = open('terms.py','w')

f.write('from sympy import *\n\n')

for i in Comb_list_gamma:
        s='gamma'+i+'=Symbol("gamma'+i+'")'
        f.write(s+'\n')

for i in range(1,n1+1):
        s='alpha'+str(i)+'=Symbol("alpha'+str(i)+'")'
        f.write(s+'\n')

if clasico == True:
        s=''
        for i in Comb_list_gamma:
                s=s+'gamma'+i+'='
        if len(Comb_list_gamma) != 0:
                s=s+'0'
        f.write(s+'\n')
        s=''
        for i in range(1,n1+1):
                s=s+'alpha'+str(i)+'='
        s=s+'1'
        f.write(s+'\n')

for i in range(0,n1+1):
        Ms = str(Mlist[i])
        f.write('E'+str(i)+'=Matrix('+Ms+')\n')

for i in range(0,len(Comb_list)):
        f.write('E'+str(n1+1+i)+'=')
        sm = ''
        for j in Comb_list[i]:
                sm = sm + 'E' + j +'*'
        sm = sm[:-1]
```

```
        f.write(sm+'\n')

f.write('N='+str(n)+'\n')


for i in range(0,n):
        s='e'+str(i)+'=Symbol("e'+str(i)+'",commutative=False)'
        f.write(s+'\n')

for i in range(0,n):
        s='d'+str(i)+'=Symbol("d'+str(i)+'",commutative=False)'
        f.write(s+'\n')

for i in range(0,n):
        s='x'+str(i)+'=Symbol("x'+str(i)+'",commutative=False)'
        f.write(s+'\n')

for i in range(0,n):
        s='u'+str(i)+'=Symbol("u'+str(i)+'",commutative=False)'
        f.write(s+'\n')

for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
                s='a'+str(i)+str(j)+'=Symbol("a'+str(i)+str(j)+'",commutative=False)'
                f.write(s+'\n')

for i in range(0,n):
        s='b'+str(i)+'=Symbol("b'+str(i)+'",commutative=False)'
        f.write(s+'\n')


s = 'A={'
for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
                s = s+'"a'+str(i)+str(j)+'":a'+str(i)+str(j)+','
s = s[:-1]
s = s+'}'
f.write(s+'\n')
```

```
s = 'B={'
for i in range(0,n):
        s = s+'"b'+str(i)+'":b'+str(i)+','
s = s[:-1]
s = s+'}'
f.write(s+'\n')


s = 'd={'
for i in range(0,n):
        s = s+'"d'+str(i)+'":d'+str(i)+','
s = s[:-1]
s = s+'}'
f.write(s+'\n')

s = 'U={'
for i in range(0,n):
        s = s+'"u'+str(i)+'":u'+str(i)+','
s = s[:-1]
s = s+'}'
f.write(s+'\n')

s = 'e={'
for i in range(0,n):
        s = s+'"e'+str(i)+'":e'+str(i)+','
s = s[:-1]
s = s+'}'
f.write(s+'\n')


s = 'D='
for i in range(0,n):
        s = s+'E'+str(i)+'*d'+str(i)+'+'
s = s[:-1]
f.write(s+'\n')

s = 'u=Matrix(['
for i in range(0,n):
        s = s+'[u'+str(i)+'],'
s = s[:-1]
```

```
s = s + '])'
f.write(s+'\n')

f.write('T =
↪  dict(A.items()+B.items()+d.items()+U.items()+e.items())\n')
f.write('Du=D*u\n')

for i in range(0,n):
        a = 'eq'+str(i)+'=Du.row('+str(i)+')'
        b = 'w'+str(i)+'=d0*u'+str(i)
        c = 'w'+str(i)+'=solve(eq'+str(i)+',w'+str(i)+')[0][w'
        ↪  +str(i)+']'
        f.write(a+'\n')
        f.write(b+'\n')
        f.write(c+'\n')

s = 'single_d={'
for i in range(0,n):
        s = s+'"d0*u'+str(i)+'":w'+str(i)+','
s = s[:-1]
s = s + '}'
f.write(s+'\n')

f.write('#Derivadas de tipo d0*d0\n')
for i in range(0,n):
        a = ''
        for j in range(1,n):
                a = a+'-d'+str(j)+'*d'+str(j)+'*u'+str(i)
        b = 'v'+str(i)+'='+a
        f.write(b+'\n')

s = 'V={'
for i in range(0,n):
        s = s+'"d0**2*u'+str(i)+'":v'+str(i)+','
s = s[:-1]
s = s+'}'
f.write(s+'\n')

c = 0
for i in range(0,n):
        for j in range(1,n):
```

```
                a = 'z'+str(c)+'=d'+str(j)+'*d0*u'+str(i)
                b = 'z'+str(c)+'=solve((d'+str(j)+'*Du.row('+str(i)+')[0]).expand(),z'+str(c)+')[0]'
                f.write(a+'\n')
                f.write(b+'\n')
                c = c+1

s = 'Z={'
c = 0
for i in range(0,n):
        for j in range(1,n):
                s = s+'"d'+str(j)+'*d0*u'+str(i)+'":z'+str(c)+','
                c = c+1
s = s[:-1]
s = s+'}'
f.write(s+'\n')
f.write('mixed_d = dict(V.items()+Z.items())\n')

s = 'LuB=('
for i in range(0,n):
        s=s+'b'+str(i)+'*E'+str(i)+'+'
s = s[:-1]
s = s+')*u'
f.write(s+'\n')

s = 'LuA='
for i in range(0,n):
        s = s+'('
        for j in range(0,n):
                s=s+'a'+str(i)+str(j)+'*E'+str(j)+'+'
        s = s[:-1]
        s = s+')*(u*d'+str(i)+')+'
s = s[:-1]
f.write(s+'\n')

f.close()
```

Código 4: Código para la creación de variables simbólicas como $a_k^{(i)}$ y b_k de forma dinámica

Por último, el Algoritmo 5 es el que crea las matrices fundamentales como arreglos en Python a partir de una conexión que se puede hacer entre Python y Matlab, ya que las matrices se crean en este último programa, gracias al código proporcionado en [10].

```
from itertools import *
import matlab.engine
from numpy import *
from sympy import *
eng = matlab.engine.start_matlab()

n1=input("Entrar dimension de An: " )
clasico=True


s=''
for i in range(1,n1+1):
        s = s + str(i)

Mlist = []
Comb_list = []
Comb_list_gamma = []
from numpy import *
M = eye(2**n1)
M = array(M).astype(int).tolist()
Mlist.append(M)

for i in range(2,n1+1):
        comb = list(combinations(s,i))
        for j in range(0,len(comb)):
                t = ''
                for k in range(0,i):
                        t=t+comb[j][k]
                if i == 2:
                        Comb_list_gamma.append(t)
                Comb_list.append(t)


Gamma_list_symbols = [Symbol('gamma'+index) for index in
 ↪  Comb_list_gamma]
```

```python
Alpha_list_symbols = [Symbol('alpha'+str(index)) for index in range(1,n1+1)]

Alpha_list_num = [i for i in range(2,len(Alpha_list_symbols)+2)]
lastnum = Alpha_list_num[-1]+1
num_gamma_list = [lastnum+i for i in range(0,len(Gamma_list_symbols))]
Gamma_list_num = dict(zip(Comb_list_gamma,num_gamma_list))
Gamma_list_symbols_dict = dict(zip(Gamma_list_symbols,num_gamma_list))
Alpha_list_symbols_dict = dict(zip(Alpha_list_symbols,Alpha_list_num))
alpha_matlab = matlab.double(Alpha_list_num)
from sympy import *
gamma_matlab = zeros(n1,n1)

for i in range(0,len(Comb_list_gamma)):
    gamma_matlab[int(Comb_list_gamma[i][0])-1,int(Comb_list_gamma[i][1])-1] = Gamma_list_num[Comb_list_gamma[i][0]+Comb_list_gamma[i][1]]
    gamma_matlab[int(Comb_list_gamma[i][1])-1,int(Comb_list_gamma[i][0])-1] = Gamma_list_num[Comb_list_gamma[i][0]+Comb_list_gamma[i][1]]

gamma_matlab = gamma_matlab.tolist()
gamma_matlab = matlab.double(gamma_matlab)

from numpy import *

for i in range(1,n1):
    Mfund = eng.MrecEin(i,n1,gamma_matlab,alpha_matlab)
    Mfund = array(Mfund).astype(int).tolist()
    Mlist.append(Mfund)

Mfund = eng.MrecEnn(n1,n1,gamma_matlab,alpha_matlab)
Mfund = array(Mfund).astype(int).tolist()
Mlist.append(Mfund)
```

```
Alpha_list_num = dict(zip(list(range(1,n1+1)),Alpha_list_num))

for i in range(0,len(Mlist)):
        for j in range(0,len(Mlist[i])):
                for k in range(0,len(Mlist[i][j])):
                        value = Mlist[i][j][k]
                        if value == 0 or value == 1 or value == -1:
                                continue
                        for l,m in Alpha_list_symbols_dict.items():
                                if abs(value) == m:
                                        if value < 0:
                                                new_val = -l
                                        else:
                                                new_val = l
                                        Mlist[i][j][k] = new_val


for i in range(0,len(Mlist)):
        for j in range(0,len(Mlist[i])):
                for k in range(0,len(Mlist[i][j])):
                        value = Mlist[i][j][k]
                        if value == 0 or value == 1 or value == -1 or type(value) == type(''):
                                continue
                        for l,m in Gamma_list_symbols_dict.items():
                                if abs(value/2) == m:
                                        if value < 0:
                                                new_val = -2*l
                                        else:
                                                new_val = 2*l
                                        Mlist[i][j][k] = new_val
```

Código 5: Código para generar la base matricial para un álgebra de Clifford $\mathcal{A}_n$.