

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

Caracterización de órbitas de partículas masivas en las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström

Proyecto de investigación

Pablo Martín Ruales Guerra

Director de tesis: Carlos Marín, Ph.D.

Física

Trabajo de titulación presentado como requisito
para la obtención del título de Licenciado en Física

Quito, 13 de mayo de 2019

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO USFQ

Colegio de Ciencias e Ingenierías

Hoja de calificación de trabajo de titulación

Caracterización de órbitas de partículas masivas en las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström

Pablo Martín Ruales Guerra

Nombre del director de tesis, Título académico:

Carlos Marín, Ph.D.

Calificación:

Firma:

Quito, 13 de mayo de 2019

Derechos de autor

Por medio del presente documento certifico que he leído todas las Políticas y Manuales de la Universidad San Francisco de Quito USFQ, incluyendo la Política de Propiedad Intelectual USFQ, y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo quedan sujetos a lo dispuesto en esas Políticas.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma del estudiante:

Nombres y apellidos:

Pablo Martín Ruales Guerra

Código:

00116177

Cédula de identidad:

17150049618

Lugar y fecha:

Quito, 13 de mayo de 2019

AGRADECIMIENTOS

A mis papis, mis guardianes, siempre llenaron mi corazón
y me formaron en la persona que soy.

A mi hermano, el mejor amigo que puedo tener.

A mis abuelitos, que siempre me han cuidado.

A toda la familia, que formó el hogar más cálido.

A los que se convirtieron en mis hermanos.

A la que me enseñó a sentir la música.

A los amigos que me han acompañado en todo momento
y me han impulsado a mejorar.

A los maestros que me ayudaron a descubrir mi potencial
y me regalaron el gusto por aprender.

Al niño que siempre está conmigo y no me deja olvidar que
la sensibilidad nos hace más felices.

Resumen

En este trabajo se analiza en detalle el movimiento de objetos masivos alrededor de agujeros negros masivos, estáticos, con simetría esférica desprovistos de movimiento de rotación, descargados o cargados. Las ecuaciones que se utilizaron para describir el movimiento de cuerpos alrededor de agujeros negros se deducen a partir de la ecuación de la métrica y de las geodésicas. Se emplean las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström, derivadas de las ecuaciones de campo de Einstein. Dichas métricas describen la curvatura del espacio-tiempo en relación a la distribución de materia y energía en cuestión. Primero se deducen las ecuaciones de movimiento para el caso de la métrica de Schwarzschild y en el siguiente capítulo se realiza el mismo procedimiento para la métrica de Reissner-Nordström. En cada caso se consideran las características correspondientes a cada métrica, por ejemplo, para el caso de Schwarzschild el espacio-tiempo es el de un campo gravitacional estático, con simetría esférica y desprovisto de carga eléctrica; en el caso de Reissner-Nordström se considera además una carga eléctrica. Para ambas métricas se exhibe una variedad de ejemplos que ilustran la forma de las órbitas.

Abstract

This dissertation analyzes in detail the motion of massive objects around massive black holes, which are static, with spherical symmetry, absent of rotation, and charged or uncharged. As it will be shown, all the equations employed to describe the motion of particles around black holes are derived from the equation of the geodesics and the metric. The Schwarzschild and Reissner-Nordström metrics are used, which are derived from Einstein's field equations. Said metrics describe the curvature of space-time, in relation to the distribution of matter and energy in question. Firstly, said equations of motion are derived for Schwarzschild's metric, and in the succeeding chapter the same procedure is followed for Reissner-Nordström's metric. In each case, the corresponding characteristics to each metric are considered, for instance, for Schwarzschild's metric space-time is the one of a static, spherically symmetric and uncharged gravitational field; conversely in the Reissner-Nordström metric a net electric charge is considered alongside the source of gravity. For both metrics, a variety of examples that illustrate the shape of the orbits are shown.

ÍNDICE

Resumen	5
Abstract	6
I Introducción	8
II Métrica de Schwarzschild	11
2.1 Ecuaciones del movimiento	13
2.2 Ejemplos	21
2.2.1 Sistema binario OJ287	21
2.2.2 Otros ejemplos con masa del agujero negro de Sagitario A*	22
III Métrica de Reissner-Nordström	28
3.1 Ecuaciones del movimiento	30
3.1.1 Ecuación para el momento angular	37
3.2 Ejemplos	41
Anexos	50
A Código en Wolfram Language para la simulación de las órbitas	51
1.1 Para la métrica de Schwarzschild	51
1.2 Para la métrica de Reissner-Nordström	54

Capítulo I

Introducción

En 1915, Albert Einstein publicó la Teoría General de la Relatividad (TGR), con el objetivo de generalizar la teoría gravitacional de Newton a un ámbito relativista [1]. Esta es una elegante y poderosa formulación que describe al campo gravitacional y sus ecuaciones. Entre las predicciones más notables tenemos el corrimiento hacia el rojo gravitacional, el avance del periastro, la dilatación del tiempo gravitacional, la desviación de la luz y lentes gravitacionales. Fundamentalmente, la TGR obedece el principio de covarianza, el cual dicta que todo observador, inercial o no, experimenta las leyes de la física de la misma manera; también generaliza las leyes de la física a un espacio-tiempo curvo, dado que éstas funcionan de la misma manera que en un espacio-tiempo plano, llamado principio de mínimo acoplamiento gravitacional. También se considera que existe una equivalencia entre la masa gravitacional y la masa inercial, referido como el principio de equivalencia, lo cual impide diferenciar entre aceleración y gravedad. Por ejemplo, una persona cayendo en el vacío no puede saber si está en reposo dentro de un campo gravitacional o siendo acelerado por una fuerza externa. En 1885, Loránd Eötvös demostró este principio con gran precisión utilizando una balanza de torsión, inicialmente obtuvo un er-

ror del orden de 10^{-9} , a partir de este momento se siguieron realizando experimentos cada vez con mayor precisión [2]. En la TGR se estudia la topología del espacio-tiempo, relacionándola con la interacción entre cuerpos masivos, entonces, la atracción gravitacional se explica con la curvatura del espacio-tiempo generada por la densidad de materia y energía existentes en cada punto del universo. Esta curvatura del espacio-tiempo, determina la trayectoria de un cuerpo al entrar en un campo gravitacional, el cual tomará el camino más corto entre 2 puntos, y en el caso de un espacio-tiempo curvo, este camino se denomina geodésica y es equivalente a una recta en un espacio-tiempo plano. Por ejemplo, para una órbita elíptica de un cuerpo celeste alrededor de una estrella, la geodésica describe una elipse en el espacio-tiempo curvado por la masa y energía de dicha estrella, pero si fuéramos a “extender” al espacio-tiempo como si fuera un papel con semejante geometría, veríamos a la trayectoria elíptica como una línea recta. Entonces, con la TGR hemos dejado de lado el concepto de fuerza para la gravitación, y la reemplazamos con un fenómeno topológico del espacio-tiempo.

La Teoría General de la Relatividad está descrita con catorce ecuaciones, diez de las cuales son las ecuaciones de campo de Einstein y las cuatro restantes son las geodésicas. Estas ecuaciones describen la curvatura del espacio tiempo, sus propiedades geométricas, y la interacción de la materia y energía. Las ecuaciones de campo de Einstein se pueden utilizar para encontrar la métrica del espacio-tiempo para una distribución de materia y energía, y se resumen en notación tensorial de la siguiente manera [3]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, determina la curvatura del espacio-tiempo, R es el escalar de Ricci: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico. λ es la constante cosmológica, un factor relacionado con la expansión del universo y una explicación para la energía oscura, y $T_{\mu\nu}$ es el

tensor momento-energía. A continuación, se muestran las ecuaciones de las geodésicas, éstas ecuaciones describen el movimiento de una partícula que se encuentra sometido a un campo gravitacional:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0$$

Donde Γ son los símbolos de Christoffel, y están dados por [4]:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \{ \partial_\sigma g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho\sigma} \},$$

τ es el tiempo propio (tiempo medido por un observador inmerso en la región del campo gravitacional), y x^μ es el cuadvivector que describe la posición del cuerpo. El tiempo propio es proporcional a la longitud de arco en el espacio-tiempo:

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \frac{1}{\gamma}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

donde r, θ, ϕ son las coordenadas de un punto en el espacio, t es el tiempo coordenado (tiempo medido por un observador distante).

Como se mencionó anteriormente, la métrica determina la deformación del espacio-tiempo, dada una distribución de materia y energía. En este trabajo se estudiarán 2 métricas, utilizamos la métrica de Schwarzschild para describir las órbitas de partículas alrededor de agujeros negros de Schwarzschild, es decir, agujeros negros masivos estáticos, con simetría esférica y desprovistos de carga eléctrica y movimiento de rotación. También estudiaremos las órbitas de partículas alrededor de agujeros negros con masa y carga eléctrica, en la métrica de Reissner-Nordström.

Capítulo II

Métrica de Schwarzschild

Karl Schwarzschild, físico y astrónomo alemán, encontró la primera solución analítica a las ecuaciones de campo de Einstein para el caso de una distribución de masa estática en 1915. Entonces podemos escribir el intervalo invariante $(ds)^2$ con dicha solución [2]:

$$(ds)^2 = \gamma (cdt)^2 - \gamma^{-1} (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (2.1)$$

donde $\gamma = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$, M es la masa que genera el campo gravitacional, $G = 6.67408 * 10^{-11}[m^3kg^{-1}s^{-2}]$ es la constante de gravitación universal, por simplicidad escribimos al radio de Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ (radio del horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild) y ponemos $(d\Omega)^2 = (d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2$.

$$\implies (dS)^2 = \gamma (cdt)^2 - \gamma^{-1} (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2(d\Omega)^2$$

con $\gamma = 1 - \frac{r_s}{r}$.

Ahora, la forma covariante del tensor métrico está dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

y la contravariante:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

donde r , θ , y ϕ son las coordenadas esféricas de un punto alrededor de la masa M , ds se denomina intervalo invariante y t es el tiempo coordenado.

Es importante notar que en (2.1) existen dos singularidades, una en $r = \frac{2GM}{c^2} = r_s$ y otra en $r = 0$. Eddington y Finkelstein en 1958 demostraron que $r = r_s$ es una singularidad que se puede remover mediante un cambio de variable. $r = 0$ es una singularidad física, la cual no puede ser removida, ya que en este caso las leyes de la física ya no se pueden aplicar y la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita [3]. El cambio de variable es [5]:

$$\tilde{t} = t \pm \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (2.4)$$

Al reemplazarlo en la ecuación de la métrica (2.1) se obtiene:

$$(ds)^2 = c^2 \gamma (d\tilde{t})^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) (dr)^2 \mp 2c \frac{r_s}{c} d\tilde{t} dr - r^2 (d\Omega)^2$$

Como podemos observar, si $r = r_s$ ya no tenemos una singularidad.

En el cambio de coordenadas (2.4) hay dos posibles igualdades, con $\tilde{t} = t + \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|$ obtenemos la descripción de un agujero negro, y con $\tilde{t} = t - \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|$ tenemos la formación de un "agujero blanco". Este último se comporta al inverso de un agujero negro, emite materia y energía a partir de la singularidad $r = 0$, pero es una solución matemática que la métrica permite, no se ha observado ningún evento con dichas características.

2.1 Ecuaciones del movimiento

Supongamos una partícula moviéndose en la métrica de Schwarzschild. Primero, recordemos la ecuación de la geodésica [3]:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0$$

Para encontrar una relación de conservación de la energía, analizaremos el componente $\mu = 0$, el cual describe la coordenada respectiva al tiempo:

$$c \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right) + \Gamma_{\nu\rho}^0 \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0$$

$$c \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right) + 2\Gamma_{01}^0 \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^1}{d\tau} \right) = 0$$

$$c \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right) + 2 \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{d\gamma}{dr} \right) c \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2t}{d\tau^2}\right) + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

$$\gamma \left(\frac{d^2t}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\gamma \frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{dt}{d\tau} = \text{cte.}$$

$$\gamma m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} = \text{cte.} = E \quad (2.5)$$

Donde E es la energía total de la partícula.

Ahora, buscamos la ecuación del momentum angular con $\mu = 3$, ésta componente describe al movimiento sobre el plano ecuatorial (rotación en ϕ):

$$\frac{d^2x^3}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^3 \left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau}\right) = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^3 \left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau}\right) = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\Gamma_{13}^3 \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right) + 2\Gamma_{23}^3 \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right) = 0$$

Suponemos que la partícula se mueve en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$):

$$\implies \Gamma_{23}^3 = \cot(\theta) = \cot(\pi/2) = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2r \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$\implies r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \text{cte.}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = J \tag{2.6}$$

Donde J es el momentum angular por unidad de masa.

Ahora que hemos obtenido una ecuación para la energía y para el momentum angular, podemos encontrar la ecuación de la trayectoria. Partiendo de la métrica de Schwarzschild (2.1), y si la partícula se mueve en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$):

$$\implies \sin(\theta) = \sin(\pi/2) = 1; d\theta = 0$$

$$c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \frac{1}{\gamma}(dr)^2 - r^2(d\phi)^2$$

$$c^2 = \gamma c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{m_0}{\gamma} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

Según la ecuación (2.5):

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{E}{\gamma m_0 c^2} \right)^2 = \frac{E^2}{\gamma^2 m_0^2 c^4}$$

$$\implies m_0 c^2 = \frac{E^2}{\gamma m_0 c^2} - \frac{m_0}{\gamma} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} \gamma m_0 c^2 = \frac{E^2}{2 m_0 c^2} - \frac{m_0}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{\gamma m_0 r^2}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) m_0 c^2 = \frac{E^2}{2 m_0 c^2} - \frac{m_0}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{\gamma m_0 r^2}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} m_0 c^2 - \frac{2GMm_0}{r} = \frac{E^2}{2 m_0 c^2} - \frac{m_0}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{\gamma m_0 r^2}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\implies \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 - \frac{GMm_0}{r} = T \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{m_0 c^2} - m_0 c^2 \right) = \text{cte.} \quad (2.7)$$

Ésta es la ecuación de la trayectoria (donde T es la energía cinética total). Si derivamos dicha ecuación con respecto al tiempo propio:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \gamma m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 - \frac{GMm_0}{r} \right) = \frac{dT}{d\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d^2 r}{d\tau^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{d\tau} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \gamma r \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \\ + \gamma r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} \right) + \frac{GM}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

Necesitamos sustituir la primera derivada de γ y la segunda derivada de ϕ que sacaremos de la ecuación (2.6):

$$\left\{ \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) = \frac{2GM}{r^2 c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \right\}$$

$$\left\{ \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2} \longrightarrow \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{2J}{r^3} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d^2 r}{d\tau^2} \right) + \frac{GM}{r^2 c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \gamma r \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \\ + \gamma r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(-\frac{2J}{r^3} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \right) + \frac{GM}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left[\left(\frac{d^2 r}{d\tau^2} \right) + \frac{GM}{r^2 c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \gamma r \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \gamma r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(-\frac{2J}{r^3} \right) + \frac{GM}{r^2} \right] = 0$$

Entonces obtenemos 2 ecuaciones, la primera:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = 0,$$

describe un movimiento en dirección radial hacia el punto donde $r = 0$, es decir, la partícula cae radialmente hacia el agujero negro. Mientras que la otra ecuación se obtiene al simplificar el factor $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{GM}{c^2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) r \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \\ + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(-\frac{2J}{r}\right) + \frac{GM}{r^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{GM}{c^2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \left(r - \frac{2GM}{c^2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \\ + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(-\frac{2J}{r}\right) + \frac{GM}{r^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(r - \frac{GM}{c^2}\right) \left(\frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(-\frac{2J}{r}\right) \left(\frac{J}{r^2}\right) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(r - \frac{GM}{c^2}\right) \left(\frac{J^2}{r^4}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(\frac{2J^2}{r^3}\right) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{J^2}{r^3} - \frac{GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4}\right) - \left(\frac{2J^2}{r^3} - \frac{4GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4}\right) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) - \left(\frac{J^2}{r^3} - \frac{3GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4}\right) + \frac{GM}{r^2} &= 0 \\ \implies \left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) &= -\frac{GM}{r^2} + \frac{J^2}{r^3} - \frac{3GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4} \end{aligned} \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8), nos da la aceleración de la partícula a lo largo de la trayectoria. Ésta es una de las ecuaciones que se utilizan en el programa que nos grafica las órbitas.

Ahora, para encontrar la ecuación para la dilatación del tiempo gravitacional, nuevamente partimos de la métrica y encontramos $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)$ simplemente manipulando las diferenciales de la ecuación:

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \gamma c^2(dt)^2 - \frac{1}{\gamma}(dr)^2 - r^2(d\phi)^2$$

$$1 = \gamma \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2\gamma} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{c^2\gamma^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{r^2}{c^2\gamma} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2,$$

de donde,

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} + \frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^2} + \frac{r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} \right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \left(\frac{rc^2}{rc^2 - 2GM} + \frac{r^2 c^2}{(rc^2 - 2GM)^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{r^3}{rc^2 - 2GM} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau} \right) = \sqrt{\frac{rc^2}{rc^2 - 2GM} + \frac{r^2c^2}{(rc^2 - 2GM)^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{r^3}{rc^2 - 2GM} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9), nos da la variación del tiempo con respecto al tiempo propio en cualquier punto del espacio.

Esta es otra de las ecuaciones que se utilizan en el programa para simular las órbitas en esta métrica.

Por último, para realizar una simulación de un sistema real, es necesario calcular el momento angular del cuerpo que orbita al agujero negro. La expresión es la siguiente [6]:

$$J^2 = \frac{GM (1 - e^2) a}{1 - \frac{r_s (3+e^2)}{2a(1-e^2)}} \quad (2.10)$$

Esta ecuación representa al momento angular por unidad de masa, y se deduce de la métrica de Schwarzschild; en la cual se asume una trayectoria elíptica y se obtiene al sumar las ecuaciones correspondientes para 2 puntos de la órbita, el afelio y el perihelio.

Por último, en esta métrica se puede fácilmente deducir una ecuación para el avance del perihelio en el caso de órbitas elípticas. Esta expresión, nuevamente, se extrae de la ecuación de la métrica [4].

$$\varepsilon = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} \quad (2.11)$$

Como veremos en la siguiente sección, las simulaciones de las órbitas contienen el avance del perihelio en la solución numérica de las ecuaciones expuestas anteriormente, por lo tanto no es necesario tomar en cuenta la ecuación (2.11).

2.2 Ejemplos

2.2.1 Sistema binario OJ287

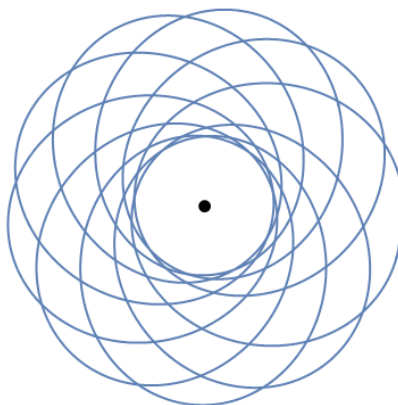


Figura 2.1: Simulación de órbita para el sistema OJ287 (órbita elíptica)

Parámetro	Valor
M	$1.88 \times 10^{10} M_{\odot}$
m	$1.40 \times 10^8 M_{\odot}$
J	$4.8856 \times 10^{22} [m^2/s]$
e	0.658
a	11500 UA

Tabla 2.1: Información sobre el sistema binario OJ287. [6]

2.2.2 Otros ejemplos con masa del agujero negro de Sagitario A*



Figura 2.2: Ejemplo de órbita abierta

Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
J	$2 \times 10^{20} [m^2/s]$
Δt	$4 \times 10^6 [s]$
a	$10^{13} [m]$

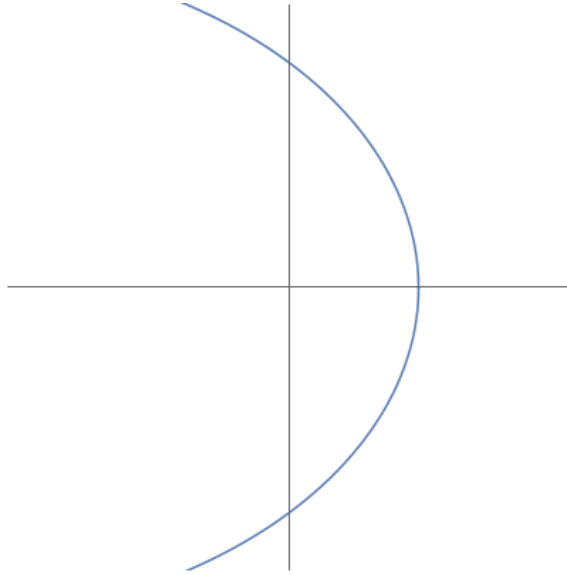


Figura 2.3: Otro ejemplo de órbita abierta

Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
J	$10^{20} [m^2/s]$
Δt	$4 \times 10^6 [s]$
a	$10^{13} [m]$

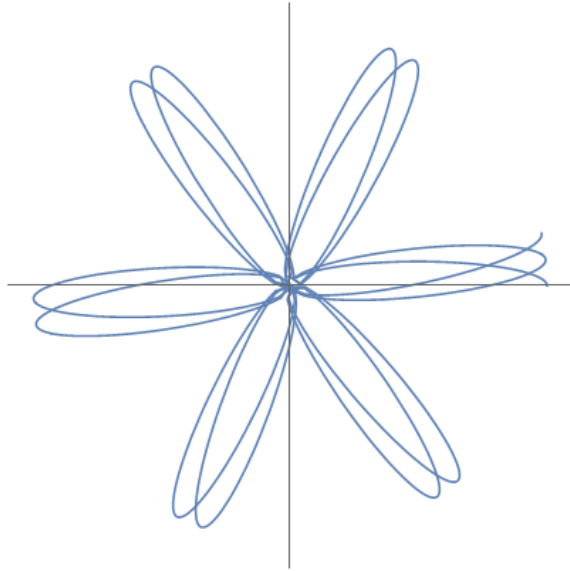
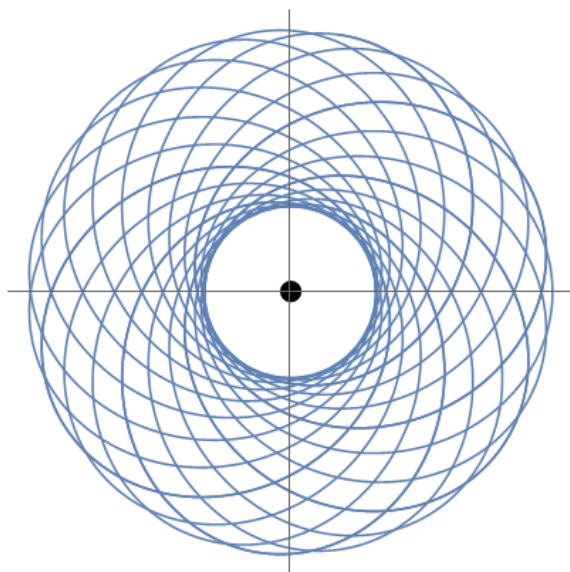
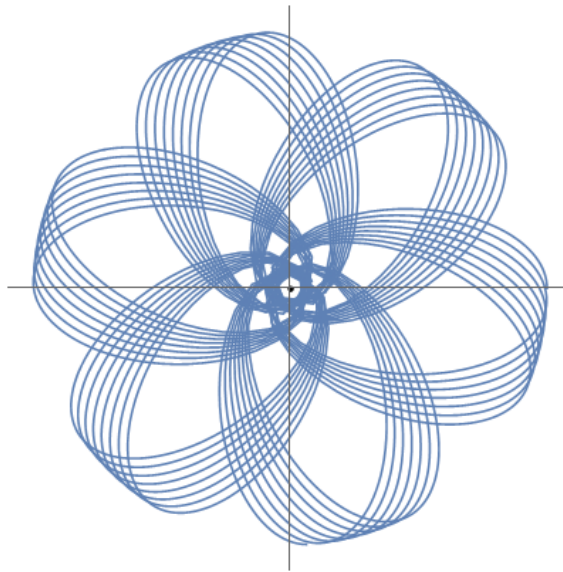


Figura 2.4: Ejemplo de órbita elíptica

Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
J	$10^{19} [m^2/s]$
Δt	$3.5 \times 10^7 [s]$
a	$10^{13} [m]$



Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
J	$10^{19} [m^2/s]$
Δt	$6 \times 10^5 [s]$
a	$10^{11} [m]$



Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
J	$10^{19} [m^2/s]$
Δt	$5 \times 10^6 [s]$
a	$10^{12} [m]$

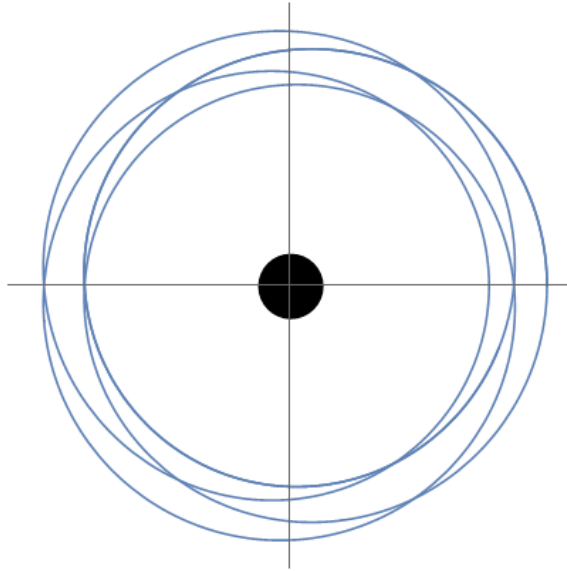


Figura 2.5: Ejemplo de órbita circular

Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
J	$8 \times 10^{18} [m^2/s]$
Δt	$3 \times 10^4 [s]$
a	$10^{11} [m]$

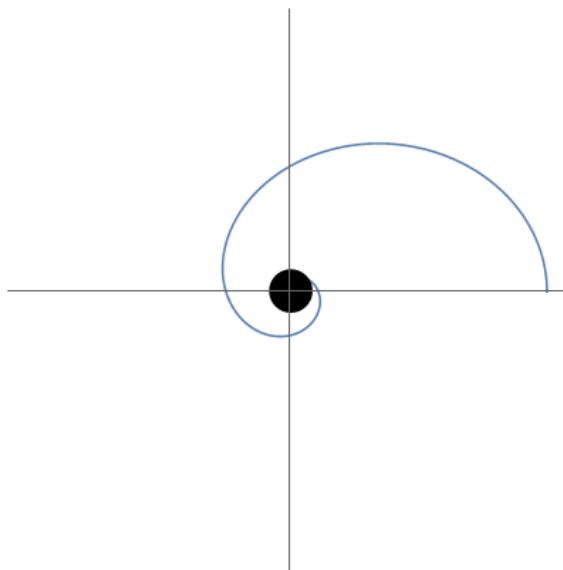


Figura 2.6: Ejemplo de una partícula cayendo al agujero negro

Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
J	$6.8 \times 10^{18} [m^2/s]$
Δt	$5 \times 10^3 [s]$
a	$1.5 \times 10^{11} [m]$

Capítulo III

Métrica de Reissner-Nordström

En 1921, Hans Reissner, Hermann Weyl, Gunnar Nordström y George Barker Jeffery derivaron la métrica de Reissner-Nordström. Esta es una solución para las ecuaciones de campo de Einstein para una masa simétricamente esférica con carga eléctrica. El intervalo invariante (ds) se escribe con dicha solución de la siguiente manera [7]:

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \Delta c^2(dt)^2 - \frac{1}{\Delta}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta) (d\phi)^2 \quad (3.1)$$

donde $\Delta = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right) = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q}{r^2}\right)$, Q es la carga eléctrica del cuerpo con masa M que genera el campo gravitacional, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío; $r_Q = \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$.

La forma covariante del tensor métrico es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

y la contravariante:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Para encontrar el horizonte de sucesos para un agujero negro de Reissner-Nordström, resolvemos $\Delta = 0$, que también nos da el radio de la superficie de corrimiento al rojo infinito:

$$\Delta = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4} \right) = 0$$

$$r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4} = 0$$

$$r = \frac{GM}{c^2} \pm \left(\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Como se puede ver, esta métrica permite 2 horizontes de sucesos,

$$r_1 = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4}} \text{ y } r_2 = \frac{GM}{c^2} - \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4}}, \quad r_1 > r_2.$$

En el caso en que $\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 < \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$, no hay horizonte de sucesos.

Cuando $\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 > \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$, existen 2 horizontes de sucesos (r_1 y r_2).

Finalmente, si $\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$, sólomente existe 1 horizonte de sucesos igual a 1/2 del radio de Schwarzschild ($r = \frac{1}{2}r_s = \frac{GM}{c^2} = \left(\frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$).

3.1 Ecuaciones del movimiento

Supongamos una partícula moviéndose en la métrica de Reissner-Nordström. Nuevamente partimos de la ecuación de la geodésica.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau}\right) = 0$$

Para $\mu = 0$, se obtiene la geodésica temporal:

$$c \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right) + \Gamma_{\nu\rho}^0 \left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau}\right) = 0$$

$$c \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right) + 2\Gamma_{01}^0 \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right) = 0$$

$$c \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right) + 2\frac{1}{2\Delta} \left(\frac{d\Delta}{dr}\right) c \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \left(\frac{dr}{d\tau}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right) + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{d\Delta}{d\tau}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

$$\Delta \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{d\Delta}{d\tau}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\Delta \frac{dt}{d\tau} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{dt}{d\tau} = \text{cte.}$$

$$\Delta m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau} = \text{cte.} = E \quad (3.4)$$

Donde E es la energía total de la partícula. Como podemos ver, la ecuación (3.4) es similar a la ecuación (2.5), sólo cambia el factor γ por Δ , esto se da porque la métrica es diagonal en ambos casos. Suponemos que la partícula de masa m_0 no tiene carga eléctrica.

Ahora, buscamos la ecuación del momentum angular con $\mu=3$:

$$\frac{d^2 x^3}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^3 \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^3 \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + 2\Gamma_{13}^3 \left(\frac{dx^1}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^3}{d\tau} \right) + 2\Gamma_{23}^3 \left(\frac{dx^2}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^3}{d\tau} \right) = 0$$

Suponemos que la partícula se mueve en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$):

$$\Rightarrow \Gamma_{23}^3 = \cot(\theta) = \cot(\pi/2) = 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2r \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right) = 0$$

$$\implies r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \text{cte.}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = J \tag{3.5}$$

Donde J es el momentum angular por unidad de masa, y nuevamente se obtiene la ecuación (2.6). Entonces, en las dos métricas la ecuación para la rotación sobre el plano ecuatorial tiene la misma forma, pero como veremos más adelante, J cambia para cada caso, lo cual cambia la energía de la partícula y su órbita en sí.

Ahora que hemos obtenido una ecuación para la energía y para el momentum angular, podemos encontrar la ecuación de la trayectoria. Partimos de la métrica de Reissner-Nordström:

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \Delta c^2(dt)^2 - \frac{1}{\Delta}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2(\theta) (d\phi)^2$$

La partícula se mueve en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$):

$$\implies \sin(\theta) = \sin(\pi/2) = 1; d\theta = 0$$

$$c^2(d\tau)^2 = \Delta c^2(dt)^2 - \frac{1}{\Delta}(dr)^2 - r^2 (d\phi)^2$$

$$c^2 = \Delta c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$m_0 c^2 = \Delta m_0 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{m_0}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

Según la ecuación (3.4):

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{E}{\Delta m_0 c^2} \right)^2 = \frac{E^2}{\Delta^2 m_0^2 c^4}$$

$$\implies m_0 c^2 = \frac{E^2}{\Delta m_0 c^2} - \frac{m_0}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} \Delta m_0 c^2 = \frac{E^2}{2 m_0 c^2} - \frac{m_0}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{\Delta m_0 r^2}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\frac{E^2}{2 m_0 c^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4} \right) m_0 c^2 = \frac{m_0}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{\Delta m_0 r^2}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\frac{E^2}{2 m_0 c^2} - \frac{1}{2} m_0 c^2 + \frac{GM m_0}{r} - \frac{Q^2 G m_0}{8\pi\epsilon_0 r^2 c^2} = \frac{m_0}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{\Delta m_0 r^2}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM m_0}{r} + \frac{Q^2 G m_0}{8\pi\epsilon_0 r^2 c^2} &= T \\ &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{m_0 c^2} - m_0 c^2 \right) = \text{cte.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.6) es la ecuación de la trayectoria para la métrica de Reissner-Nordström, la cual añade

la contribución de la carga, pero mantiene una forma similar a la ecuación que se derivó para el caso de la solución de Schwarzschild. De la misma manera, derivamos con respecto al tiempo propio para obtener la ecuación de la aceleración en este caso:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \Delta m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 - \frac{GMm_0}{r} + \frac{Q^2 G m_0}{8\pi\epsilon_0 r^2 c^2} \right) = \frac{dT}{d\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} m_0 \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d^2 r}{d\tau^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d\Delta}{d\tau} m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \Delta m_0 r \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \\ + \Delta m_0 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} \right) + \frac{GMm_0}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) - \frac{Q^2 G m_0}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ahora necesitamos la segunda derivada de la ecuación (3.5) y la primera del factor Δ :

$$\left\{ \frac{d\Delta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4} \right) = \frac{2GM}{r^2 c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) - \frac{Q^2 G}{2\pi\epsilon_0 r^3 c^4} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \right\}$$

$$\left\{ \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2} \longrightarrow \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{2J}{r^3} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d^2 r}{d\tau^2} \right) + \left(\frac{GM}{r^2 c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) - \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^4} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \right) r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \\ + \Delta r \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \Delta r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right) \left(-\frac{2J}{r^3} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \right) + \frac{GM}{r^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) - \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right) \left[\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{GM}{r^2c^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3c^4}\right) r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \Delta r \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \Delta r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(-\frac{2J}{r^3}\right) + \frac{GM}{r^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3c^2} \right] = 0$$

De donde obtenemos 2 ecuaciones, la primera: $\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = 0$ describe a una partícula que cae en dirección radial hacia el agujero negro, mientras que la segunda ecuación se obtiene al simplificar el término $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)$:

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{GM}{r^2c^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3c^4}\right) r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2c^4}\right) r \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2c^4}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(-\frac{2J}{r}\right) + \frac{GM}{r^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3c^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{GM}{c^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 rc^4}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \left(r - \frac{2GM}{c^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 rc^4}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2c^4}\right) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \left(-\frac{2J}{r}\right) + \frac{GM}{r^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3c^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(r - \frac{GM}{c^2}\right) \left(\frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2c^4}\right) \left(-\frac{2J}{r}\right) \left(\frac{J}{r^2}\right) + \frac{GM}{r^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3c^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(r - \frac{GM}{c^2}\right) \left(\frac{J^2}{r^4}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right) \left(\frac{2J^2}{r^3}\right) + \frac{GM}{r^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) + \left(\frac{J^2}{r^3} - \frac{GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4}\right) - \left(\frac{2J^2}{r^3} - \frac{4GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4} + \frac{Q^2G}{2\pi\epsilon_0 c^4} \frac{J^2}{r^5}\right) + \frac{GM}{r^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) - \left(\frac{J^2}{r^3} - \frac{3GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4} + \frac{Q^2G}{2\pi\epsilon_0 c^4} \frac{J^2}{r^5}\right) + \frac{GM}{r^2} - \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^2} = 0$$

$$\implies \left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^3 c^2} + \frac{J^2}{r^3} - \frac{3GM}{c^2} \frac{J^2}{r^4} + \frac{Q^2G}{2\pi\epsilon_0 c^4} \frac{J^2}{r^5} \quad (3.7)$$

Entonces obtenemos la ecuación (3.7) que describe la aceleración de la partícula en la métrica de Reissner-Nordström.

Para encontrar la ecuación para la dilatación del tiempo gravitacional en este caso, nuevamente partimos de la métrica, y seguimos un procedimiento igual al que se hizo en el capítulo anterior:

$$(ds)^2 = c^2(d\tau)^2 = \Delta c^2(dt)^2 - \frac{1}{\Delta}(dr)^2 - r^2(d\phi)^2$$

$$1 = \Delta \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{c^2\Delta^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{r^2}{c^2\Delta} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)^{-1} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)^{-2} + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right) \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)^{-2} \\ \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right) \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4}\right)} \quad (3.8) \end{aligned}$$

La ecuación (3.8) describe la dilatación del tiempo gravitacional en función de r y el tiempo propio τ , la utilizaremos para realizar la simulación de las órbitas en este caso.

3.1.1 Ecuación para el momento angular

En esta sección buscaremos una ecuación para el momento angular de una partícula orbitando un agujero negro cargado, para esto partiremos de la métrica de Reissner-Nordström. Sacaremos el momento angular para órbitas elípticas, es importante notar que la ecuación que derivaremos sirve para el caso en el cual las órbitas son cerradas. Para el caso en que las órbitas son abiertas, utilizaremos la misma ecuación para determinar una energía inicial de la partícula.

$$(dS)^2 = c^2(d\tau)^2 = \Delta c^2(dt)^2 - \frac{1}{\Delta}(dr)^2 - r^2(d\phi)^2$$

$$1 = \Delta \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2$$

Recordemos las ecuaciones (3.5) y (3.4), las cuales sustituiremos en la ecuación anterior:

$$\left\{ \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2}; \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{\Delta m_0 c^2} \right\}$$

$$\Delta \left(\frac{E}{\Delta m_0 c^2} \right)^2 - \frac{1}{c^2\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{J}{r^2} \right)^2 = 1$$

$$\frac{E^2}{\Delta m_0^2 c^4} - \frac{1}{c^2\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{J^2}{r^2 c^2} = 1$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{E^2}{m_0^2 c^2} - \frac{\Delta J^2}{r^2} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4} \right) c^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{E^2}{m_0^2 c^2} - \frac{\Delta J^2}{r^2} - \left(c^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2} \right)$$

En el afelio ($\frac{dr}{d\tau} = 0, r \rightarrow R_A, \Delta \rightarrow \Delta_A$):

$$\left\{ \Delta_A = 1 - \frac{2GM}{R_A c^2} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 R_A^2 c^4} = 1 - \frac{r_s}{R_A} + \frac{r_Q}{R_A^2} \right\}$$

$$\frac{E^2}{m_0^2 c^2} - c^2 + \frac{2GM}{R_A} - \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 R_A^2 c^2} - \frac{J^2}{R_A^2} \Delta_A = 0 \quad (3.9)$$

En el perihelio ($\frac{dr}{d\tau} = 0, r \rightarrow R_P, \Delta \rightarrow \Delta_P$):

$$\left\{ \Delta_P = 1 - \frac{2GM}{R_P c^2} + \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 R_P^2 c^4} = 1 - \frac{r_s}{R_P} + \frac{r_Q}{R_P^2} \right\}$$

$$\frac{E^2}{m_0^2 c^2} - c^2 + \frac{2GM}{R_P} - \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 R_P^2 c^2} - \frac{J^2}{R_P^2} \Delta_P = 0 \quad (3.10)$$

Entonces reescribimos las ecuaciones (3.9) y (3.10):

$$\implies \frac{E^2}{m_0^2 c^2} - c^2 + \frac{2GM}{R_A} - \frac{r_Q c^2}{R_A^2} - \frac{J^2}{R_A^2} + \frac{J^2}{R_A^3} - \frac{J^2 r_Q}{R_A^4} = 0 \quad (3.11)$$

$$\implies \frac{E^2}{m_0^2 c^2} - c^2 + \frac{2GM}{R_P} - \frac{r_Q c^2}{R_P^2} - \frac{J^2}{R_P^2} + \frac{J^2}{R_P^3} - \frac{J^2 r_Q}{R_P^4} = 0 \quad (3.12)$$

Restamos las ecuaciones (3.11) y (3.12):

$$2GM \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_P} \right) - r_Q c^2 \left(\frac{1}{R_A^2} - \frac{1}{R_P^2} \right)$$

$$= J^2 \left(\frac{1}{R_A^2} - \frac{1}{R_P^2} - \frac{r_s}{R_A^3} + \frac{r_s}{R_P^3} \right) + r_Q J^2 \left(\frac{1}{R_A^4} - \frac{1}{R_P^4} \right)$$

$$2GM \left(\frac{R_P - R_A}{R_A R_P} \right) - r_Q c^2 \left(\frac{R_P^2 - R_A^2}{R_A^2 R_P^2} \right)$$

$$= J^2 \left(\frac{R_P^2 - R_A^2}{R_A^2 R_P^2} - r_s \left(\frac{R_P^3 - R_A^3}{R_A^3 R_P^3} \right) + r_Q \left(\frac{R_P^4 - R_A^4}{R_A^4 R_P^4} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& 2GM (R_P - R_A) R_A R_P - r_Q c^2 (R_P^2 - R_A^2) \\
&= J^2 \left(R_P^2 - R_A^2 - r_s \left(\frac{R_P^3 - R_A^3}{R_A R_P} \right) + r_Q \left(\frac{(R_P^2 - R_A^2)(R_P^2 + R_A^2)}{R_A^2 R_P^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2GM R_A R_P - r_Q c^2 (R_P + R_A) \\
&= J^2 \left(R_P + R_A - r_s \left(\frac{R_P^2 + R_A R_P + R_A^2}{R_A R_P} \right) + r_Q \left(\frac{(R_P + R_A)(R_P^2 + R_A^2)}{R_A^2 R_P^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\{R_A = (1 + e)a \longrightarrow R_A^2 = a^2 + 2ea^2 + e^2 a^2\}$$

$$\{R_P = (1 - e)a \longrightarrow R_P^2 = a^2 - 2ea^2 + e^2 a^2\}$$

$$\{R_A R_P = (1 - e^2) a^2\}$$

$$\begin{aligned}
& \implies 2GM (1 - e^2) a^2 - r_Q c^2 (2a) \\
&= J^2 \left(2a - r_s \left(\frac{2a^2 (1 + e^2) + (1 - e^2) a^2}{(1 - e^2) a^2} \right) + r_Q \left(\frac{2a (2a^2 (1 + e^2))}{a^4 (1 + e^2)^2 (1 - e^2)^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$2GM (1 - e^2) a^2 - r_Q c^2 (2a) = J^2 \left(2a - r_s \frac{(3 + e^2)}{(1 - e^2)} + r_Q \frac{4(1 + e^2)}{a(1 + e^2)^2 (1 - e^2)^2} \right)$$

$$GM (1 - e^2) a - r_Q c^2 = J^2 \left(1 - \frac{r_s (3 + e^2)}{2a (1 - e^2)} + r_Q \frac{2 (1 + e^2)}{a^2 (1 + e^2)^2 (1 - e^2)^2} \right)$$

$$\implies J^2 = \frac{GM (1 - e^2) a - r_Q c^2}{1 - \frac{r_s (3 + e^2)}{2a (1 - e^2)} + \frac{2r_Q (1 + e^2)}{a^2 (1 + e^2)^2 (1 - e^2)^2}} \quad (3.13)$$

Tras el álgebra necesaria para obtener la ecuación (3.13), obtenemos una expresión para el momento angular en la métrica de Reissner-Nordström, la cual, como podemos ver se reduce a la ecuación utilizada en el caso de Schwarzschild si ponemos $Q = 0$. Esta ecuación será utilizada en la simulación de las órbitas para este caso.

3.2 Ejemplos

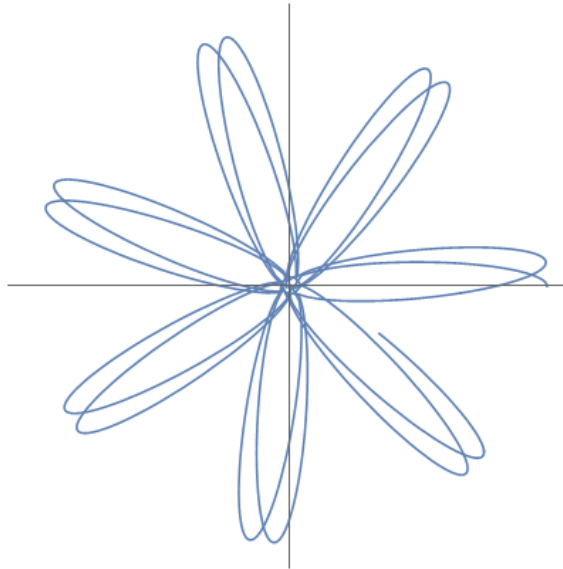
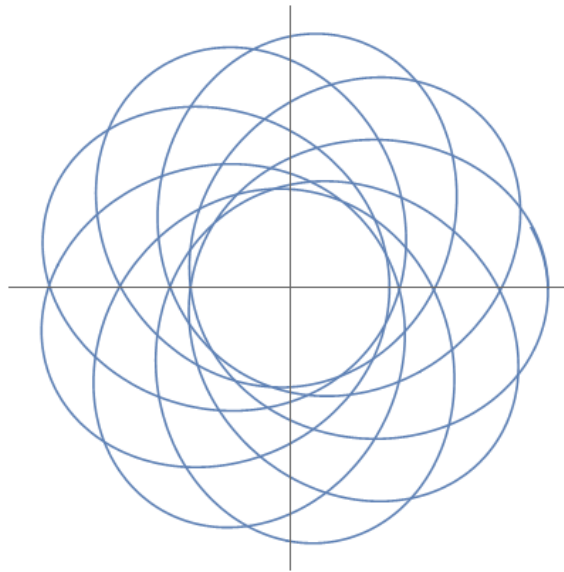
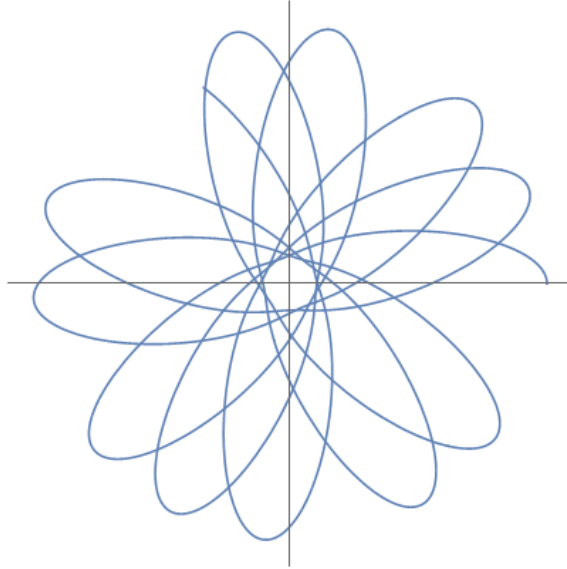


Figura 3.1: Ejemplo de órbita elíptica

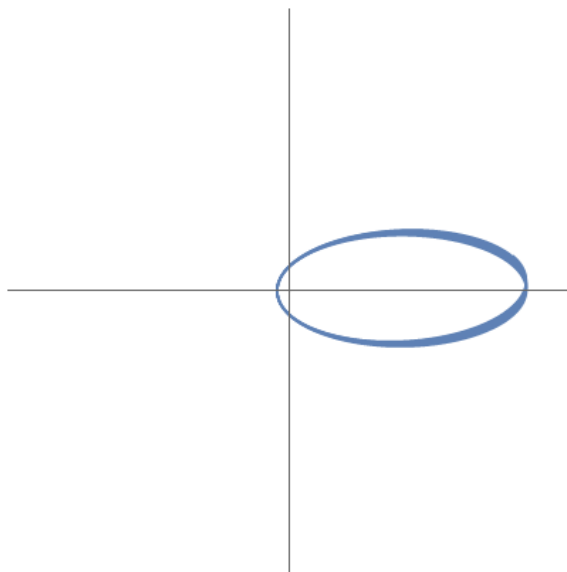
Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Q	$5 \times 10^{26} [C]$
J	$10^{19} [m^2/s]$
Δt	$4 \times 10^7 [s]$
a	$10^{13} [m]$



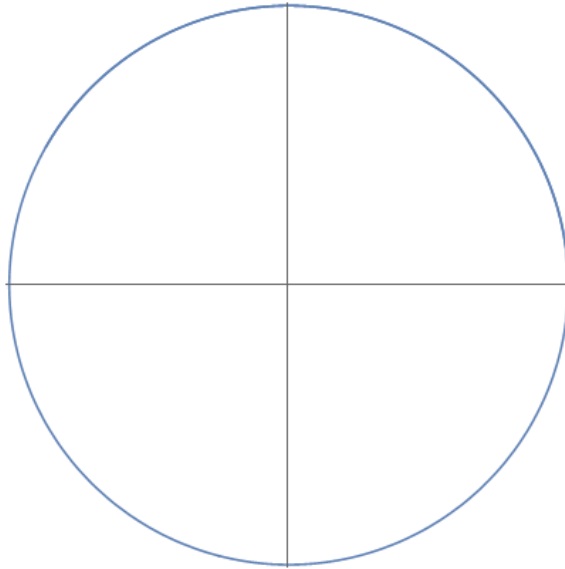
Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Q	$2 \times 10^{26} [C]$
J	$5 \times 10^{20} [m^2/s]$
Δt	$4 \times 10^{10} [s]$
a	$10^{15} [m]$



Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Q	$7 \times 10^{26} [C]$
J	$2 \times 10^{20} [m^2/s]$
Δt	$4 \times 10^{10} [s]$
a	$10^{15} [m]$



Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Q	$7.385 \times 10^{26} [C]$
J	$10^{20} [m^2/s]$
Δt	$10^9 [s]$
a	$1.65 \times 10^{14} [m]$



Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Q	$7.385 \times 10^{26} [C]$
J	$4.5 \times 10^{20} [m^2/s]$
Δt	$2.48 \times 10^9 [s]$
a	$3.55 \times 10^{14} [m]$

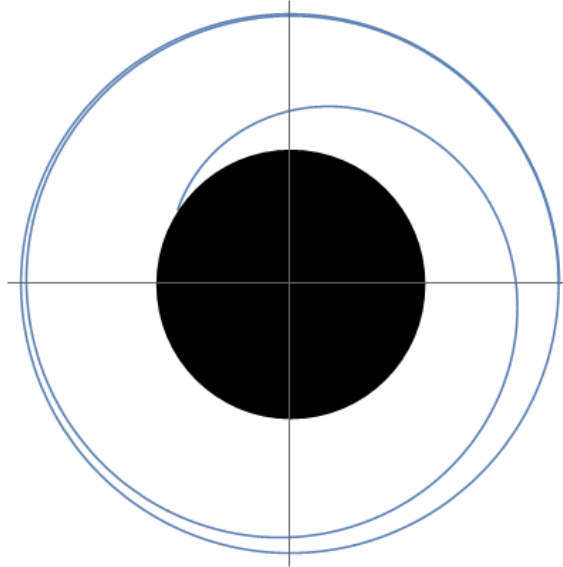


Figura 3.2: Ejemplo de una partícula cayendo al agujero negro

Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Q	$7.385 \times 10^{26} [C]$
J	$3.7 \times 10^{20} [m^2/s]$
Δt	6 [s]
a	$1.27 \times 10^{10} [m]$

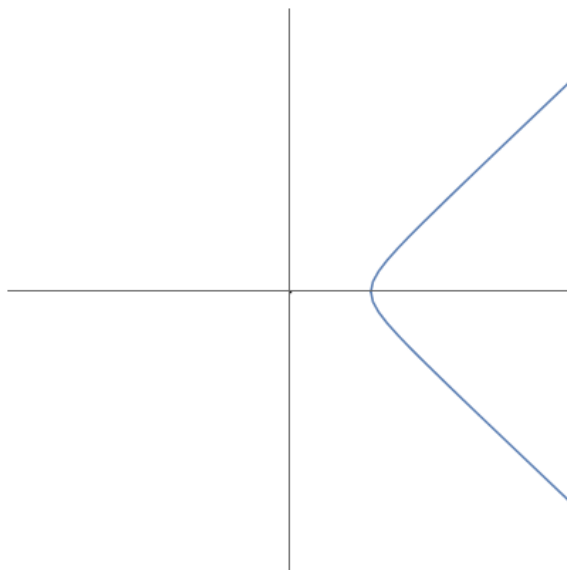


Figura 3.3: Ejemplo de trayectoria hiperbólica

Parámetro	Valor
M	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Q	$10^{27} [C]$
J	$4 \times 10^{19} [m^2/s]$
Δt	$10^{15} [s]$
a	$10^{12} [m]$

CONCLUSIONES

En el capítulo 2 se deducen las ecuaciones del movimiento de un cuerpo masivo alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. Se obtienen 3 ecuaciones diferenciales, las cuales se resuelven numéricamente con Wolfram Mathematica utilizando el programa en el anexo A; este programa permite manipular todas las variables (masa, momento angular, tiempo y distancia inicial entre el cuerpo en movimiento y el cuerpo que genera el campo gravitacional. En la sección de ejemplos se aprecian varias simulaciones, la primera es una demostración del comportamiento del sistema binario de agujeros negros OJ287, en la figura 2.1 se observa que el agujero negro con menor masa orbita creando un avance de perihelio importante, el valor medido es de 39° en cada órbita [6]. En el resto de ejemplos se pueden ver diferentes tipos de trayectorias (en las cuales se utilizó la masa del agujero negro de Sagitario A*), variando los parámetros se logra obtener órbitas tanto abiertas como cerradas, con distintas características, como el período y el avance de perihelio. También, en la figura 2.6 se observa el caso en el cual el cuerpo en movimiento no tiene suficiente energía para orbitar el agujero negro, por lo tanto cae hacia él trazando una trayectoria en forma de espiral. Por otro lado, en el capítulo 3 se encuentran las ecuaciones diferenciales para el movimiento de un cuerpo masivo alrededor de un agujero negro cargado de Reissner-Nordström. El procedimiento para obtener dichas ecuaciones es el mismo que en el caso de Schwarzschild, adicionalmente se dedujo una expresión para el momento angular

por unidad de masa, esto se realizó considerando órbitas elípticas en la ecuación de la métrica. Nuevamente, las ecuaciones se insertan en el programa para ser resueltas numéricamente y para simular las órbitas según los parámetros que se den. Es importante mencionar que hasta la fecha no se ha observado un agujero negro de Reissner-Nordström, por lo tanto todos los parámetros se insertaron de forma heurística, y siguiendo las condiciones explicadas en la introducción del capítulo 3. Es decir, se requiere que $\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 > \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0c^4}$ se cumpla para que el agujero negro sea estable, de otra manera, no existiría un horizonte de eventos y las partículas que se acercan al agujero negro con cierta energía experimentan una fuerza repulsiva como se muestra en la figura 3.3. En este caso $\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 < \frac{Q^2G}{4\pi\epsilon_0c^4}$, sin embargo los términos de la desigualdad no difieren por más que un factor de 1.35. También, se observa un comportamiento similar al caso de Schwarzschild, donde se describen órbitas cerradas circulares y elípticas, algunas parecidas al ejemplo del sistema OJ287. Cabe mencionar que las simulaciones que se realizaron para esta métrica se hicieron utilizando la masa del agujero negro de Sagitario A*, por lo tanto tenemos que imaginarnos dicho ejemplo con una carga eléctrica neta. Finalmente, en este trabajo se manipularon las ecuaciones de la métrica y geodésicas para obtener un grupo de ecuaciones que al ser resueltas describen todo tipo de trayectoria alrededor de un cuerpo que genera un campo gravitacional. Estas soluciones nos ayudan a entender la física detrás de las ecuaciones de la Teoría General de la Relatividad, dando una ilustración simple de comprender antes de compenetrarse con las matemáticas que describen a las ecuaciones de campo de Einstein y las geodésicas.

REFERENCIAS

- [1] A. Einstein and Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Vlg. der Königlichen Akademie der Wissenschaften, 1915.
- [2] H.C. Ohanian. *Gravitation and Spacetime*. Norton, 1976.
- [3] Carlos Marín. *La Expansión del Universo, una Introducción a Cosmología, Relatividad General y Física de Partículas*. USFQ, 2º edition, 2011.
- [4] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, and D.I. Kaiser. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [5] I.R. Kenyon. *General Relativity*. Oxford science publications. Oxford University Press, 1990.
- [6] Carlos Marín and Jorge Poveda. Perihelion precession in binary systems: higher order corrections. *Astrophysics and Space Science*, 363(12):245, 2018.
- [7] G. Hooft. *Introduction to General Relativity*. Rinton Press, 2001.

Anexos

Anexo A

Código en Wolfram Language para la simulación de las órbitas

1.1 Para la métrica de Schwarzschild

Para este caso, el programa contiene por default los datos del sistema binario OJ287 (tabla 2.1), sin embargo, se pueden cambiar estos parámetros a gusto del usuario. Se sugiere que se explore el programa utilizando $c = G = 1$, y variando el resto de parámetros.

```
Manipulate[  
(*  
G = 1;  
M = 1;  
c = 1;  
*)
```

$$G = 6.674 * 10^{-11};$$

$$c = 299792458;$$

(*OJ287*)

$$e = 0.7;$$

$$a = 1.72 * 10^{15};$$

$$G = 6.674 * 10^{-11};$$

$$c = 299792458;$$

$$M = 1.83 * 10^{10} * 1.988435 * 10^{30};$$

$$rs = \frac{2GM}{c^2};$$

$$L = \sqrt{\frac{GM(1-e^2)a}{1 - \frac{rs}{2a} \frac{3+e^2}{1-e^2}}};$$

(*OJ287*)

$$r0 = a;$$

$$(*M = M_{BH} * m_p; *)$$

$$(*L = L_{BH} * j_p; *)$$

(*Mercurio

$$r0 = 5.7909 * 10^{10};$$

$$(*M = 3.30104 * 10^{23}; *)$$

$$L = 8.956 \times 10^{38};$$

$$M = 1.988435 * 10^{30};$$

*)

anOrbitSolution =

Quiet@NDSolve[

{

$$r''[\tau] == -\frac{GM}{r[\tau]^2} + \frac{L^2}{r[\tau]^3} - \frac{3GML^2}{r[\tau]^4 c^2}, r[0] == r0, r'[0] == 0,$$

$$\phi'[\tau] == \frac{L}{r[\tau]^2}, \phi[0] == 0,$$

$$t'[\tau] == \sqrt{\frac{r[\tau]c^2}{r[\tau]c^2 - 2GM} + \frac{r'[\tau]^2 r[\tau]^2 c^2}{(r[\tau]c^2 - 2GM)^2} + \frac{r[\tau]^3 \phi'[\tau]^2}{r[\tau]c^2 - 2GM}}, t[0] == 0$$

}, {r, ϕ , t}, { τ , 0, pT}}];

domain = (r/.anOrbitSolution[[1, 1]])[Domain];

{begin, end} = domain[[1]];

angleList = ϕ [end]/.anOrbitSolution;

timeDilation = (t[end]/.anOrbitSolution)[[1]]/end;

anOrbitPlot =

ParametricPlot[

Evaluate[

$r[\tau]\{\text{Cos}[\phi[\tau]], \text{Sin}[\phi[\tau]]\}$

/.anOrbitSolution],

{ τ , begin, end},

(*PlotPoints \rightarrow 1000, *)

AspectRatio \rightarrow 1,

```

AxesOrigin → {0, 0},
PlotRange → scale];

sRadius =
Graphics[Disk[{0, 0}, rs]];

Show[
{
anOrbitPlot,
sRadius
}, Ticks → None, ImageSize → {400, 400}],
(* {{L, 4, angular momentum}, 1, 1060, ImageSize → Tiny}, *)
(* {{r0, 31.6, initial radius}, 2.5, 2 * 1.72 * 1015, ImageSize → Tiny}, *)
{{pT, 1, proper time}, 1, 1010, ImageSize → Tiny},
{{scale, 1.8a, zoom}, 5, 2.2 * a, ImageSize → Tiny},
(* {{symmetricOrbit, 0, symmetric orbit}, {0, 1}, ControlType → Checkbox}, *)
SynchronousUpdating → False, ControlPlacement → Left, TrackedSymbols → Manipulate]

```

1.2 Para la métrica de Reissner-Nordström

Inicialmente se considera $c = G = 1$ en el programa, se sugiere que el usuario explore diferentes ejemplos de esta manera antes de utilizar las constantes con su valor físico.

```
Manipulate[
```

$$G = 1;$$

$$(*M = 1; *)$$

$$c = 1;$$

$$(*Q = 1; *)$$

$$k = 1;$$

(*

$$G = 6.674 * 10^{-11};$$

$$c = 299792458;$$

*)

anOrbitSolution =

Quiet@NDSolve[

{

$$r''[\tau] == -\frac{GM}{r[\tau]^2} + \frac{L^2}{r[\tau]^3} - \frac{3GML^2}{r[\tau]^4 c^2} + \frac{kQ^2 G}{r[\tau]^3 c^2} + \frac{2kQ^2 GL^2}{r[\tau]^5 c^4}, r[0] == \mathbf{r0}, r'[0] == 0,$$

$$\phi'[\tau] == \frac{L}{r[\tau]^2}, \phi[0] == 0,$$

$$t'[\tau] == \sqrt{\left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{r[\tau]c^2} + \frac{kQ^2 G}{r[\tau]^2 c^4}} + \frac{r'[\tau]^2}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r[\tau]c^2} + \frac{kQ^2 G}{r[\tau]^2 c^4}\right)^2} + \frac{r[\tau]^2 \phi'[\tau]^2}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r[\tau]c^2} + \frac{kQ^2 G}{r[\tau]^2 c^4}\right)} \right)}, t[0] == 0$$

}, {r, ϕ , t}, { τ , 0, pT}];

domain = (r/.anOrbitSolution[[1, 1]])[Domain];

{begin, end} = domain[[1]];

```
angleList =  $\phi$ [end]/.anOrbitSolution;
```

```
timeDilation = (t[end]/.anOrbitSolution)[[1]]/end;
```

```
anOrbitPlot =
```

```
ParametricPlot[
```

```
Evaluate[
```

```
 $r[\tau]\{\text{Cos}[\phi[\tau]], \text{Sin}[\phi[\tau]]\}$ 
```

```
/.anOrbitSolution],
```

```
{ $\tau$ , begin, end},
```

```
(*PlotPoints  $\rightarrow$  1000, *)
```

```
AspectRatio  $\rightarrow$  1,
```

```
AxesOrigin  $\rightarrow$  {0, 0},
```

```
PlotRange  $\rightarrow$  scale];
```

```
sRadius =
```

```
Graphics[Disk[{0, 0}, 1]];]
```

```
Show[
```

```
{
```

```
anOrbitPlot,
```

```
sRadius
```



```
}, Ticks → None, ImageSize → {400, 400}],  
{{M, 1, mass}, 1, 50, ImageSize → Tiny},  
{{Q, 1, charge}, 1, 50, ImageSize → Tiny},  
{{L, 4, angular momentum}, 1, 100, ImageSize → Tiny},  
{{r0, 31.6, initial radius}, 2, 200, ImageSize → Tiny},  
{{pT, 1, proper time}, 1, 100000, ImageSize → Tiny},  
{{scale, 10, zoom}, 5, 500, ImageSize → Tiny},  
SynchronousUpdating → False, ControlPlacement → Left, TrackedSymbols → Manipulate]
```